

# 5. Físico – Matemáticas y Ciencias de la Tierra



## EL EFECTO DE LAS CONSTANTES DE VELOCIDAD EN UN SISTEMA SIMPLE DE DOS COMPARTIMIENTOS

Marleni Reyes Monreal<sup>1</sup>, Jessica Quintero Pérez<sup>2</sup>, María Eugenia Pérez Bonilla<sup>3</sup> y Arturo Reyes Lazalde<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Escuela de Artes Plásticas y Dirección General de Innovación Educativa, BUAP. <sup>2</sup>Universidad de Alcalá, España. <sup>3</sup>Escuela de Biología, BUAP

### RESUMEN

Desde el nivel celular hasta los organismos multicelulares se presenta la compartimentalización espacial. Característica importante que consiste en la presencia de espacios separados por membranas; por ejemplo: el núcleo celular del citoplasma; el líquido extracelular del intracelular; las vías respiratorias de los alveolos, la sangre de los eritrocitos, las aurículas de los ventrículos, etc. En el contexto fisiológico y fisiopatológico, comprender los mecanismos del flujo entre compartimientos resulta muy importante. Considerando el flujo como el paso de líquidos, moléculas o energía entre diferentes compartimientos. Existen varios modelos matemáticos especializados para cada caso. Sin embargo, también existen mecanismos que pueden ser modelados matemáticamente por compartimientos. En la técnica de modelado por compartimientos, las diferencias de concentraciones entre ellos y las velocidades de flujo son fundamentales. En este trabajo se presenta el diseño y desarrollar de un software educativo interactivo que permite a los alumnos explorar el efecto de los valores de las constantes de velocidad en un sistema de dos compartimientos. El simulador se programó en el lenguaje Visual Basic®, versión 5.0, para ambiente Windows®, desde XP a Windows 8. La solución del sistema de ecuaciones se resuelve por medio de métodos numéricos. El programa es ejecutable e interactivo, se accede directamente, sin depender de ningún otro programa. El software es una herramienta de apoyo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del tema.

### 1. INTRODUCCIÓN

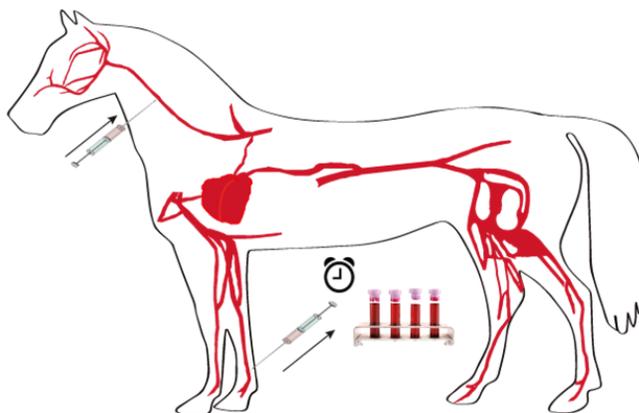
Los fármacos conocidos como antibióticos o antimicrobianos son uno de los medicamentos más prescritos en la práctica médica y veterinaria moderna. La contribución de estos medicamentos a la terapéutica anti-infecciosa continúa siendo de vital importancia. Utilizados correctamente, permiten prevenir y curar la mayoría de las infecciones bacterianas susceptibles, con un impacto sanitario, social y económico significativo; pero el uso empírico e inadecuado de los antimicrobianos puede conducir a la inefectividad, complicaciones clínicas e incremento de la morbimortalidad ocasionada por la propagación o resistencia de los microorganismos, entre otras.

La elección del antibiótico y su dosificación debe ser valorada individualmente; ya que depende fundamentalmente de las condiciones del paciente, características del microorganismo y propiedades del antibiótico. Aunque el estudio del efecto de las dosis e intervalo sobre la actividad bactericida ha sido investigada desde de los años cuarenta, la búsqueda de las estrategias de optimización en la antibioticoterapia sigue siendo un reto de actualidad. Una de las herramientas que pueden ayudar a la selección del régimen terapéutico es la aplicación de los conceptos farmacocinéticos y farmacodinámicos de los antibióticos [1]. En este trabajo se presenta el diseño y desarrollo de un simulador de la farmacocinética básica de la ampicilina en equinos, basado en un

modelo clásico bicompartamental (dos compartimientos), que reproduce la curva de absorción y distribución del fármaco [2].

#### Obtención de curvas experimentales de absorción y distribución de ampicilina en equino

Para obtener las curvas experimentales de absorción y distribución de ampicilina en equino, se requiere la realización de múltiples experimentos. En este caso, el simulador se basó en los datos experimentales reportados por Zurich y cols. [3]. Los parámetros farmacocinéticos son derivados de las curvas experimentales de concentraciones sanguíneas de ampicilina, posteriores a la administración intravenosa de una dosis única de 20 mgs/kg a caballos mestizos, clínicamente sanos, con promedios de edad de 8.3 años, de peso de 350 kgrs, mantenidos en condiciones similares de alimentación, mantenimiento y sin antecedentes de medicación previa con antibióticos. El monitoreo experimental fue de ocho horas consecutivas a la aplicación, la ampicilina se suministró por vía endovenosa en la vena yugular y se realizaron extracciones de 8 ml de sangre de una vena periférica, a once tiempos diferentes: 0, 5, 10, 15, 20, 30, 45, 60, 120, 240 y 480 minutos [3]. En la figura 1, se observa un esquema del modelo biológico experimental.



*Fig. 1. Modelo biológico para la obtención de curvas experimentales de absorción y distribución de la ampicilina en equino. Se esquematiza el modelo experimental utilizado por Zurich et al. [3].*

#### Modelo farmacocinético farmacológico

En la práctica resulta difícil medir la concentración de los fármacos en su lugar de acción y puesto que el curso temporal de las concentraciones tisulares depende de las concentraciones plasmáticas, suele utilizarse el curso temporal de las concentraciones plasmáticas para predecir los efectos. Gráficamente es posible establecer una relación entre el curso temporal de las concentraciones plasmáticas y el de los efectos mediante cinco parámetros básicos:

Concentración mínima eficaz (CME), aquella por encima de la cual suele observarse el efecto terapéutico.

Concentración mínima tóxica (CMT), aquella por encima de la cual suelen observarse efectos tóxicos. El cociente entre la CMT y la CME definen el índice terapéutico del fármaco: cuanto mayor sea este índice, más fácil será conseguir efectos terapéuticos sin producir efectos tóxicos.

Período de latencia (PL), tiempo que transcurre desde la administración hasta el comienzo del efecto farmacológico, es decir, hasta que la concentración plasmática alcanza la CME.

Intensidad del efecto (IE), guarda relación con la concentración máxima que se alcance, pero la concentración en los tejidos puede variar en función de la unión a las proteínas del plasma, flujo sanguíneo regional o la afinidad del fármaco por un determinado tejido. Además, hay fármacos cuya respuesta es de tipo «todo o nada» y otros en los que, al haberse alcanzado el efecto máximo, el aumento de las concentraciones plasmáticas no aumenta la intensidad del efecto sino su duración. Si la concentración plasmática supera la CMT, se producirán efectos tóxicos cuya intensidad también dependerá de la concentración máxima alcanzada.

Duración de la acción, también llamado tiempo eficaz (TE), es el tiempo transcurrido entre el momento en que se alcanza la CME y el momento en que desciende por debajo de ésta. Hay fármacos, como los que se acumulan en los tejidos y aquellos que tienen acción diferida o irreversible, en los que el efecto se prolongará más allá de sus niveles plasmáticos [4].

## 2. MATERIAL Y MÉTODO

Se realizó el algoritmo general para el funcionamiento del programa, se estableció el número de pantallas de presentación, de interfaz, los menús y los submenús de cada una. Inicialmente se incluyeron los textos, imágenes, rótulos, botones fijos y de interactividad con el usuario. El programa se realizó con el lenguaje Visual Basic®, versión 5.0 para ambiente Windows®, desde XP a Windows 8, con una resolución de pantalla de 1,366 x 768 píxeles, en idioma español. Se introdujeron las ecuaciones clásicas de modelo matemático y se utilizaron los valores de los parámetros reportados por Zurich y cols. [3]. Cada ecuación representa lo que sucede en cada compartimento, donde se observa la disminución y aumento de la concentración con respecto al tiempo.

### Modelo matemático bicompartamental

La cuantificación de los procesos dinámicos que rigen la cinética de un medicamento y su respuesta terapéutica representan un gran adelanto con respecto al empirismo previamente utilizado [5]. Mediante la aplicación y resolución de los modelos matemáticos es posible entender, definir, calcular y determinar el mecanismo farmacocinético básico general; así como la determinación particular de los parámetros y la comparación entre diferentes individuos, fármacos, vías de administración, etc., herramientas de gran utilidad para la investigación farmacológica experimental y clínica.

Para la simulación de las curvas de absorción y distribución de la ampicilina en equinos, se utilizó el modelo matemático clásico [2]. Las variaciones de la concentración de ampicilina sanguínea en función del tiempo se explican por la siguiente ecuación general:

$$C = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$$

Donde:

C: Concentración plasmática de ampicilina que varía en función del tiempo.

t: tiempo

e: base de logaritmo natural

$\alpha$ : constante de distribución

$\beta$ : constante de eliminación

A: concentración a tiempo 0 de la fase de distribución

B: concentración a tiempo 0 de la fase de eliminación

Para la cinética de distribución y eliminación de ampicilina a dosis de 20 mg/kg se remplazan los términos de la ecuación:

$$C = 151.25 \times e^{-0.1283 t} + 25.577 \times e^{-0.0135 t}$$

La representación matemática de los procesos farmacocinéticos se efectúa a través de ecuaciones poliexponenciales. El modelo matemático está integrado por dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dVt}{dt} = 0.0532Vc - 0.0308Vt$$
$$\frac{dVc}{dt} = -0.0468Vc + 0.0227Vt - 0.553Vc$$

### 3. RESULTADOS

Se desarrolló la primera versión de un programa interactivo para la simulación de las curvas de absorción y distribución, posteriores a la administración de una dosis única de ampicilina (20 mg/kg) en equino. El simulador se ejecuta directamente desde Windows. Al ingresar, se visualiza la pantalla de presentación del programa (figura 2A), posteriormente al iniciar se muestra la interfaz del menú principal que consta de dos módulos: uno informativo con cuatro subtemas y el otro incluye la simulación (figura 2B).

A

B

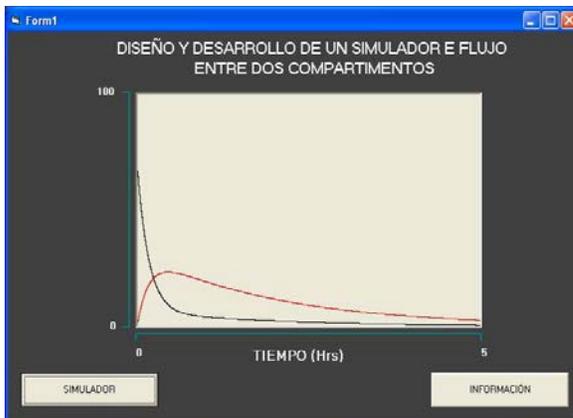


Fig. 2. Pantalla de presentación del programa e interfaz del menú principal. A: pantalla de presentación del programa. B: interfaz del menú principal, consta de cuatro módulos. El programa no tiene un orden predeterminado, el usuario puede elegir a libre conveniencia la interfaz ingresar.

## Módulo de información

Al acceder a cualquiera de los cuatro botones del menú de información, se despliegan pantallas que muestran imágenes de los modelos correspondientes, con la descripción y datos respectivos. En la figura 3 se muestran dos ejemplos de las pantallas de información.

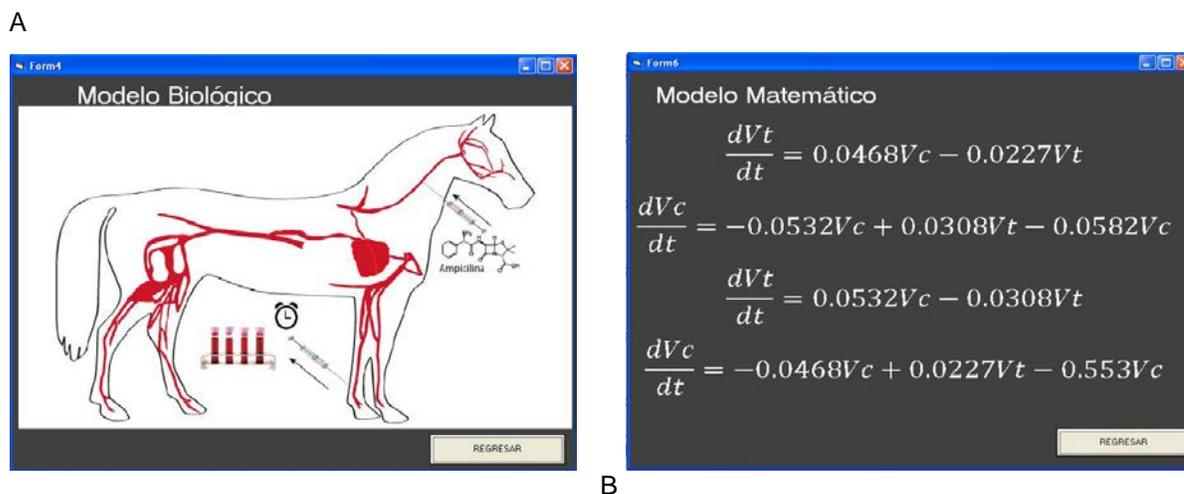


Fig. 3. Ejemplos de las interfases del menú del módulo informativo del programa. A: esquema del modelo biológico. B: En el modelo matemático se incluyen las ecuaciones correspondientes para dos dosificaciones diferentes de ampicilina (10 y 20 mg/kg).

## Simulación de las curvas de absorción y distribución de ampicilina en equino

Al ingresar al simulador se visualiza una interfaz que muestra del lado derecho cinco casillas, donde el usuario puede ingresar los valores que elegidos dentro del rango indicado:

Vc: Volumen de distribución del compartimiento central (50 – 150 ml/kg).

Vt: Volumen de distribución del compartimiento periférico (0 – 5 min<sup>-1</sup>).

K12: Constante de transferencia del compartimiento central hacia periférico (0.01 – 0.08 min<sup>-1</sup>).

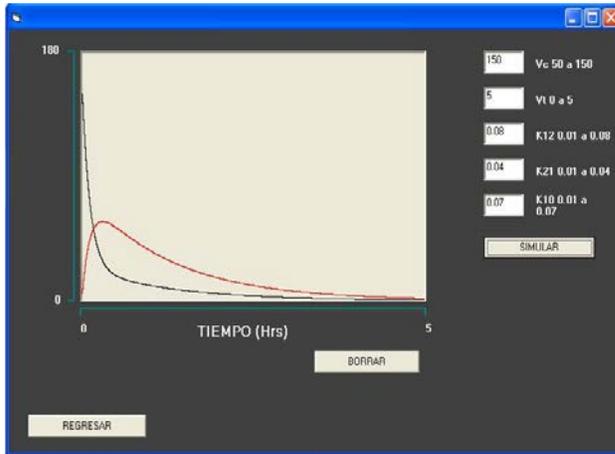
K21: Constante de transferencia del compartimiento periférico hacia central (0.01 – 0.04 V min<sup>-1</sup>).

K10: Constante de eliminación desde el compartimiento central (0.01 – 0.07 min<sup>-1</sup>).

Para orientación del usuario, en cada casilla se muestra el rango de variación permitido para cada variable. De manera que se puede realizar un número ilimitado de ensayos que le permitirán visualizar el efecto que tiene cada variable sobre las curvas.

En el recuadro izquierdo se mostrará la gráfica, delimitada a un lapso de tiempo de 5 horas posteriores a la aplicación del fármaco y un margen de concentración de ampicilina de 0 – 180 µg/ml. El botón simular corre las ecuaciones matemáticas y muestra la gráfica de la absorción y distribución del fármaco con respecto al tiempo. En la figura 5A, se muestra el ejemplo de una simulación. Al presionar el botón <BORRAR> se limpia el recuadro del graficado, para realizar la siguiente simulación. Con el botón <REGRESAR> el usuario regresa al menú principal.

A



B

Form7

Modelo Experimental

AMPCILINA 10mg/kg				AMPCILINA 20mg/kg				AMPCILINA 30mg/kg					
TIEMPO (hrs)	CONCENTRACION (µg/ml)	TIEMPO (hrs)	CONCENTRACION (µg/ml)	TIEMPO (hrs)	CONCENTRACION (µg/ml)	TIEMPO (hrs)	CONCENTRACION (µg/ml)	TIEMPO (hrs)	CONCENTRACION (µg/ml)	TIEMPO (hrs)	CONCENTRACION (µg/ml)	TIEMPO (hrs)	CONCENTRACION (µg/ml)
5	11.72,182	21.1	5	11.182,25	28.43								
10	11.51,207	12.4	10	11.824	16.61								
15	11.35,841	9.9	15	11.4831	12.18								
20	11.26,40	5.07	20	11.3553	6.32								
30	11.14,580	4.08	30	11.2327	5.45								
45	11.8052	3.25	45	11.1824	5.56								
60	11.5,379	1.60	60	11.9,51	2.67								
120	11.1,57	0.08	120	11.4,02	3.06								
240	11.0,522	0.46	240	11.1,52	2.76								
480	11.0,051	0.12	480	11.0,23	0.39								

PARAMETRO	N°	X	S	N°	X	S	UNIDADES
β	12	0,0187	0,0047	6	0,0185	0,0050	Min <sup>-1</sup>
B	12	11,343	3,995	6	25,527	17,911	µg/ml
α	12	0,1488	0,0750	6	0,1283	0,026	Min <sup>-1</sup>
A	12	82,484	96,990	6	151,25	54,681	µg/ml
Vc	12	0,072	0,038	6	0,132	0,052	l/kg
K <sub>12</sub>	12	0,0468	0,0353	6	0,0542	0,0358	Min <sup>-1</sup>
K <sub>21</sub>	12	0,0553	0,0439	6	0,0582	0,0398	Min <sup>-1</sup>
K <sub>10</sub>	12	0,0227	0,0103	6	0,0304	0,0149	Min <sup>-1</sup>
V <sub>1</sub>	12	0,144	0,044	6	0,186	0,063	l/kg
V <sub>2</sub>	12	0,394	0,109	6	0,588	0,246	l/kg
V <sub>3</sub>	12	2030,1	380,5	6	3234,7	1388,8	µg x ml <sup>-1</sup> l
V <sub>4</sub>	12	0,191	0,076	6	0,333	0,086	l/kg
V <sub>5</sub>	12	1,380	1,331	6	1,470	1,007	l/kg
CL	12	0,00007	0,00002	6	0,00001	0,00003	ml/min
T <sub>1/2α</sub>	12	6,54	3,73	6	6,89	3,71	Min
T <sub>1/2β</sub>	12	57,37	21,07	6	58,48	20,25	min

β y α = Fase de eliminación y de Distribución; B y A = concentraciones extrapoladas, tiempo 0; Vc = Volumen distribución central; V<sub>1</sub> = Volumen de distribución tejidos; V<sub>2</sub> = Volumen del área; V<sub>3</sub> = Volumen extrapolado; V<sub>4</sub> = Volumen de redistribución ("Primary Star"); V<sub>5</sub> = Volumen de eliminación; K<sub>12</sub> y K<sub>21</sub> = constantes de transferencia intercompartimentos; ABC = Área bajo la curva; CL = Depuración de la sustancia en el organismo; T<sub>1/2α</sub> = Vida media de distribución; T<sub>1/2β</sub> = Vida media de eliminación.

Fig. 4. Ejemplo de la simulación de las curvas de absorción y distribución de ampicilina en equino. A: La imagen muestra una prueba de simulación, donde se observan los datos ingresados y las gráficas de absorción (en negro) y de distribución (en rojo). Las curvas muestran las variaciones de concentración de ampicilina en función del tiempo en ambos compartimientos. B: En el programa también se incluyen tablas donde se desglosan los resultados experimentales obtenidos por Zurich y cols. [3].

#### 4. CONCLUSIONES

Se elaboró la primera versión de un programa computacional, interactivo para simular las curvas de absorción y distribución de ampicilina en equinos, basado en un modelo biofísico bicompartamental, abierto y en serie.

El usuario tiene la posibilidad de cambiar, de manera individual o conjunta, los valores de cinco de los parámetros específicos independientes: El volumen de distribución del compartimiento central, volumen de distribución del compartimiento periférico, la constante de transferencia del compartimiento central hacia periférico, la constante de transferencia del compartimiento periférico hacia central y la constante de eliminación desde el compartimiento central; y observar el impacto de los cambios en las concentraciones del fármaco en función del tiempo.

La información farmacocinética proporciona las bases racionales para diseñar regímenes de dosificación, ajuste de dosis e interacciones farmacológicas entre sustancias.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. R. Carrillo-Esper, M. Zavaleta-Bustos, H. Álvarez-Alcántara, D. M. Carrillo-Córdova, C. A. Carrillo-Córdova, "La importancia de los parámetros farmacocinéticos y farmacodinámicos en la prescripción de antibióticos", Rev Fac Med UNAM., vol. 56, 3, 2013, pp. 5-11.

2. W. Simon, "The two-compartment series dilution. En: Mathematical techniques for biology and medicine", Dover Publications, Inc. USA., 1986. ISBN: 0-486-65247-5.
3. Z. Zurich, M. Calderon, H. Yaikin, "Estudio cinético de ampicilina en equinos", Avances en ciencias veterinarias, vol. 1, 1, 1986, pp. 8-16.
4. J. A. Armijo, "Absorción, distribución y eliminación de los fármacos", En Farmacología Humana. 6ª edición. Ed. Flores J. Editorial Masson. España, 2013, pp. 47-72.
5. J. A. Palma-Aguirre, "La importancia clínica de la farmacocinética", Gaceta Médica de México, vol. 127, 4, 1991, pp. 341-348.
6. D. R. Brocks, "uSIMPk: an excel for windows-based simulation program for instruction of basic pharmacokinetics principles to pharmacy students", Comput Methods Programs Biomed., vol. 120, 2015, 154-163.

# INTRODUCCION A LOS PROCESOS DE DECISION DE MARKOV BAJO EL CRITERIO DE ENTROPÍA RELATIVA

Gladys D. Salgado Suárez<sup>1</sup>, Hugo A. Cruz Suárez<sup>1</sup>, José D. Zacarías Flores<sup>1</sup> y Fernando Velasco Luna<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

## RESUMEN:

El estudio de Procesos de Decisión de Markov ha sido rico por la variedad de sus aplicaciones, una de ellas es el área de finanzas donde el problema central es determinar una estrategia de inversión que optimice el valor del portafolio y por lo tanto incorpore ventajas competitivas, sin embargo, desde el punto de vista de la teoría de la información, es notable la falta de información, por tal motivo, para abordar este tipo de problemas, es necesario introducir un criterio que mida el costo esperado de la información al ejecutar alguna política determinada, de esta manera, el interés se enfoca en la búsqueda de políticas óptimas en el sentido que permitan alcanzar el máximo valor, dada una restricción sobre el control de la información, en este trabajo se plantea el problema de control bajo el criterio de entropía relativa para espacios Borel, como respuesta a éste problema, iniciando con esto la investigación en la búsqueda de la solución.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un **Problema de Decisión de Markov** (PDM) modela un sistema observado en el tiempo por un controlador o agente decisor que influencia en la evolución del sistema. El controlador decide qué acción (control) tomar dependiendo del estado con el objetivo de que el sistema se desempeñe eficazmente con respecto a ciertos criterios de optimalidad determinados (función objetivo). La acción genera un costo (o recompensa) que debe pagarse y repercute en el nuevo estado del sistema con una distribución de probabilidad. Para cada estado del sistema debe especificarse una regla de decisión que indique qué acción tomar, para ello se establece una política o estrategia. La mejor política será la que optimice el criterio de optimalidad lo que da origen al Problema de Control Óptimo (Hernández-Lerma and Lesserre, 1996; Puterman, 1994).

Por otro lado, la teoría de la información que nació del estudio de la comunicación eléctrica y la forma de procesamiento y transmisión de la información, proporciona una medida universal (el bit) de la cantidad de información en términos de elección o inseguridad. El objetivo principal de la teoría de la información es la transmisión óptima de mensajes en base a la cantidad de información para aumentar la velocidad, de esta manera la teoría de la información tuvo que dar respuesta a dos preguntas fundamentales: ¿Cuál es la compresión máxima de los datos?, es decir, ¿Cuál es el mínimo de información que se necesita para transmitir un mensaje sin pérdida de datos?, cuya respuesta es la **entropía**, y la segunda pregunta es ¿cuál es la velocidad de transmisión máxima de la comunicación?, que tiene como respuesta la **capacidad del canal**. Para ello se busca un sistema de codificación que utilice la menor información necesaria de tal manera que al transmitirla no se pierdan partes del mensaje (Cover and Joy, 2012).

Los conceptos fundamentales definidos en la teoría de la información -entropía, la entropía relativa y mutua información - se definen como los funcionales de las distribuciones de probabilidad. A su vez, caracterizan el comportamiento de secuencias largas de variables aleatorias y nos permiten

estimar las probabilidades de eventos raros (Gran teoría de la desviación) y encontrar el mejor exponente de error en las pruebas de hipótesis. El proceso se dice que es de Markov cuando las variables aleatorias forman un proceso estocástico en el que cada variable aleatoria depende sólo de la que le precede y es condicionalmente independiente de todas las otras variables aleatorias precedentes. Se muestra, igual que en el caso independiente e idénticamente distribuido, que la entropía crece (asintóticamente) linealmente con el tamaño de la muestra a una velocidad  $H(X)$ , que llamaremos la tasa de entropía del proceso. La velocidad  $H(X)$  se interpreta como la mejor compresión de los datos (Cover and Joy, 2012).

## 2. ANTECEDENTES

El trabajo se centra en PDMs. Desde sus inicios el estudio de problemas relacionados con PDMs ha sido rico por la variedad en sus aplicaciones. Las primeras investigaciones se centraron en las ecuaciones y métodos de optimalidad para su solución, uno de estos métodos es la llamada programación dinámica. Históricamente se han abordado problemas con una sola función objetivo, que el principio de programación dinámica puede resolver, sin embargo, problemas donde se pretende optimizar una función objetivo con restricciones sobre otros criterios, no se puede resolver directamente por programación dinámica (Feinberg and Shwarz, 2002). Actualmente la tendencia en los estudios se enfoca en el avance de la teoría para varios criterios, un ejemplo de su importancia se encuentra en la teoría de la información. Trabajos recientes muestran una relación directa entre la información y el control mediante la combinación de una medida de la información y la medida de la recompensa dentro de la formulación de los PDMs, y generan un nuevo criterio de optimización que tome en cuenta ambos aspectos (Tishby and Polani, 2010; Rubin, Shamir and Tishby, 2012).

## 3. JUSTIFICACION

El objetivo de este trabajo es introducir el problema de Control Optimo bajo el criterio de entropía relativa, como parte inicial de la búsqueda de su solución. Como se menciona en la sección de antecedentes, existen trabajos en esta línea, no obstante, la mayoría de ellos son desarrollados bajo el supuesto de que el espacio de estados es finito. Por tal motivo una de las metas a alcanzar en trabajos futuros es presentar una versión de PDMs en teoría de la información para el caso de espacios de Borel. Los resultados obtenidos en esta línea podrán ser aplicados al área de finanzas, donde el problema central es determinar una estrategia de inversión que optimice el valor de un portafolio. Estos modelos económicos incorporan ventajas para los vendedores y los compradores en diversos mercados, aunque, desde el punto de vista de la teoría de la información, es notable la falta de información. Por tal motivo consideramos de interés el desarrollo de la teoría expuesta, ya que permitirá dar respuesta a este tipo de criterios.

## 4. DESARROLLO

Un Modelo de Control de Markov (MCM), consiste de la quintupla:

$$(X, A, \{A(x) | x \in X\}, Q, R)$$

Donde  $X$  y  $A$  son un espacios de Borel no vacíos, llamados espacio de estados y espacio de acciones o controles respectivamente.  $\{A(x) | x \in X\}$  es una familia de subconjuntos medibles, no vacíos  $A(x)$  de  $A$ , donde  $A(x)$  denota el conjunto de controles admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado  $x \in X$ .  $Q$  es la ley de transición, es decir, indica la probabilidad de pasar a

cierto estado dependiendo del estado actual y la acción que se tome y  $R$  es la función de recompensa de un paso.

Un MCM se considera estacionario si el proceso de transición y la función de recompensa no dependen del tiempo sino sólo del estado y de la acción que se tome.

Cuando se trabaja en MCMs a tiempo discreto y estacionarios, la interpretación del modelo es la siguiente: en cada tiempo  $t \in \mathbb{N}$  se observa el estado del sistema  $x_t = x \in X$ , se aplica una acción  $a_t = a \in A(x)$ , y como resultado ocurren dos cosas:

Se recibe una recompensa  $R(x, a)$ ;

El sistema se traslada a un nuevo estado  $x_{t+1}$ , mediante la distribución de probabilidad  $Q(\cdot | x, a)$  sobre  $X$ .

Una vez hecha esta transición a un nuevo estado, se elige una nueva acción y la dinámica anteriormente descrita se repite.

Se define a  $\mathbb{K}$  como el conjunto de estados y acciones admisibles  $K = \{(x, a) | x \in X, a \in A(x)\}$ .

Para cada  $t \in \mathbb{N}$  se define  $\mathbb{H}_t$  el espacio de historias admisibles al tiempo  $t$  como  $\mathbb{H}_0 := X$  y  $\mathbb{H}_t := X \times \mathbb{H}_{t-1}$  para  $t \geq 1$ , esto es, todas las posibles historias que se pueden observar hasta el tiempo  $t$ . Un elemento genérico de  $\mathbb{H}_t$  llamado  $t$ -historia es denotado por  $h_t = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t)$ , donde  $(x_i, a_i) \in \mathbb{K}$  para  $x_i \in X$  y  $a_i \in A(x_i)$ .

De esta manera, una estrategia  $\pi = \{\pi_t, t = 0, 1, \dots\}$  es una sucesión de kérneos estocásticos definidos sobre  $A$  dada la historia del proceso  $\mathbb{H}_t$  y satisfacen que  $\pi_t(A(x_t) | h_t) = 1$  para toda  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

Las estrategias se dicen ser:

**Markoviana Aleatorizada.** Si existe una sucesión  $\{\varphi_t\}$  de kérneos estocásticos con  $\varphi_t \in \Phi$  (definidas sobre  $A$  dado  $X$ ), tales que  $\pi_t(\cdot | h_t) = \varphi_t(\cdot | x_t)$ , para toda  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

**Markoviana Aleatorizada Estacionaria.** Si existe  $\varphi \in \Phi$  kérnel estocástico, tal que:  $\pi_t(\cdot | h_t) = \varphi(\cdot | x_t)$ , para toda  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

**Determinista.** Si existe una sucesión  $\{g_t\}$  de funciones medibles  $g_t: \mathbb{H}_t \rightarrow A$ , tales que para cada  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$  se tiene que  $g_t(h_t) \in A(x_t)$  y  $\pi_t(\cdot | h_t)$  está concentrada en  $g_t(h_t)$

**Determinista Markoviana.** Si existe una sucesión  $\{f_t\}$  de funciones medibles  $f_t: X \rightarrow A$ , tales que  $f_t(x_t) \in A(x_t)$  para cada  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

**Determinista Markoviana Estacionaria.** Si existe una función medible  $f: X \rightarrow A$ , tal que  $f(x_t) \in A(x_t)$  y  $\pi_t(\cdot | h_t)$  está concentrada en  $f(x_t)$  para cada  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

### Criterio de rendimiento

Un PDM estará dotado de una función real, llamada **función objetivo** o criterio de rendimiento, que medirá en algún sentido la calidad de cada política, a través de la sucesión de recompensa que recibe.

Consideremos un modelo de control de Markov fijo y un conjunto de políticas  $\pi$ . Se define para cada  $x \in X$  y  $\pi \in \Pi$ :

$$v(\pi, x) := \lim_{N \rightarrow \infty} E_x^\pi \left[ \sum_{t=0}^{N-1} R(x_t, a_t) \right] \quad (2)$$

La expresión  $v(\pi, x)$  es conocida como la **Recompensa Total Esperada**. Al entero positivo  $N$  en la sumatoria se le conoce como horizonte del problema, el cual representa el número de etapas en las cuales el sistema está operando y puede ser finito o infinito. Cuando el horizonte es finito, (1) se convierte en:

$$v(\pi, x) := \lim_{N \rightarrow \infty} E_x^\pi \left[ \sum_{t=0}^{N-1} R(x_t, a_t) + R_N(x_t) \right] \quad (3)$$

Donde  $R_N$  es una función real definida sobre  $X$  llamada la función de recompensa terminal.

En el contexto de la teoría de la información están inmersos dos sujetos, el controlador y el actuador. El controlador es quien controla y envía el mensaje y el actuador es quien recibe el mensaje y lleva a cabo la acción. Si ahora se consideran escenarios donde el controlador y el actuador están separados por algún canal de comunicación, enviar información a través del canal no es gratis y una política óptima debe tomar en cuenta estos costos de comunicación.

Aquí entra la teoría de la información para cuantificar mediante (4) el costo (información) esperado al ejecutar la política  $\pi$  en el estado  $x \in X$ , considerando a la política estacionaria  $\varphi(\cdot, x)$ .

$$\Delta I(x) = \sum_a \varphi(a, x) \log \frac{\varphi(a, x)}{\rho(a, x)} \quad (4)$$

$\Delta I = 0$  en el estado terminal.

Esta medida es llamada entropía relativa al estado  $x$  entre la política del controlador  $\varphi(a, x)$  y alguna política predeterminada  $\rho(a, x)$ , ésta última representa una política ingenua utilizada por el actuador en ausencia de información del controlador. Sin pérdida de generalidad consideramos a  $\rho(a, x)$  distribuido de manera uniforme sobre las acciones disponibles en el estado  $x$ . Esta medida,  $\Delta I(s)$ , corresponde al número mínimo de bits requeridos para describir el resultado de la variable aleatoria  $a \sim \varphi(\cdot, x)$ , también corresponde a la capacidad mínima de un canal de comunicación (entre el controlador y el actuador) capaz de transmitir este control sin un error. Por lo tanto, sirve aquí como una medida de control del costo.

En analogía con la función valor  $v(\pi, x)$  se define la información de control total involucrada en la ejecución de la política  $\pi$  iniciando en  $x_0$  como:

$$I_\pi(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} E_x^\pi [\Delta I(x_t)] \quad (5)$$

$I_\pi = 0$  en el estado terminal.

Se buscan ahora políticas óptimas en el sentido que permitan alcanzar el máximo valor, dado una restricción sobre el control de la información. De esta manera, estas nuevas políticas óptimas reflejan un equilibrio entre la maximización de recompensas esperadas (valor)  $v(\pi, x_0)$  y la minimización del costo involucrado en el control de la información  $I_\pi(x_0)$ . Para ello definimos la función de **energía libre**  $\mathcal{F}_\pi(x_0, \beta)$  como:

$$\mathcal{F}_\pi(x_0, \beta) = I_\pi(x_0) - \beta v(\pi, x_0) \quad (6)$$

$\mathcal{F}_\pi = 0$  en el estado terminal. El parámetro  $\beta > 0$  controla el equilibrio entre la información y el valor.

En el caso de la función valor, el problema de control óptimo consiste en determinar una política  $\pi^* \in \Pi$ , tal que  $v(\pi^*, x) = \sup_{\pi \in \Pi} v(\pi, x)$ ,  $x \in X$ . A  $\pi^*$  se le llama política óptima y la función  $V$  definida por  $V(x) = v(\pi^*, x)$ ,  $x \in X$ , será llamada la función de valores óptimos o **función valor**.

### Portafolios de inversión

Los resultados obtenidos en esta línea podrán ser aplicados al área de finanzas, donde el problema central es determinar una estrategia de inversión que optimice el valor de un portafolio. Estos modelos económicos incorporan ventajas para los vendedores y los compradores en diversos mercados, aunque, desde el punto de vista de la teoría de la información, es notable la falta de información, como por ejemplo: Calidad del producto, falta de información de los acreedores ante el riesgo, etc. (Rodríguez, 2001). Por tal motivo consideramos de interés el desarrollo de la teoría expuesta, ya que permitirá dar respuesta a este tipo de criterios.

Un **mercado de valores** es representado como un vector de stocks  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ ,  $X_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Donde  $m$  es el número de stocks y  $X_i$  (*Precios relativos*) es la relación entre el precio al final del día con el precio al comienzo del día.

Un **portafolio**  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ,  $b_i \geq 0$ ,  $\sum b_i = 1$  es una asignación de la riqueza a través del vector  $X$ .

Si se utiliza un portafolio  $b$  y el vector de stocks  $X$ , la riqueza relativa (relación de la riqueza en el extremo del día a la riqueza al comienzo del día) es:

$$S = b^t X = \sum_{i=1}^m b_i X_i \quad (7)$$

La riqueza después de  $n$  días para un inversionista que usa el portafolio  $b$  es:

$$S_n = \prod_{i=1}^n b^t X_i \quad (8)$$

El criterio de rendimiento

$$v(b, X) = E(\log b^t X) \quad (9)$$

Se denomina **tasa de crecimiento esperado**.

$v^* = \max v(b, X)$  será **la tasa de crecimiento máximo** y  $b^*$  será el portafolio que logre la tasa de crecimiento máximo.

Contamos con el siguiente resultado:

### **Teorema**

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. de acuerdo a  $F(x)$ . Sea  $S_n^* = \prod_{i=1}^n b^{*T} X_i$  la riqueza después de  $n$  periodos utilizando el portafolio de inversión  $b$ . Entonces

$$\frac{1}{n} \log S_n^* \rightarrow v^* \text{ con probabilidad 1}$$

De esta manera el objetivo es: Maximizar la riqueza total esperada  $v(a, x)$  y así podemos encontrar  $S_n^*$  a través de  $v^*$

## **5. CONCLUSIONES**

Con lo anterior establecemos las metas que deben lograrse para lograr el objetivo general de resolver el problema de control óptimo para su aplicación en finanzas, estas son:

*Proponer condiciones en las componentes del modelo de control.* Es importante señalar que la metodología a usar es programación dinámica, sin embargo, debido a la complejidad del criterio de rendimiento expuesto será necesario complementar la metodología usando técnicas de optimización convexa y multiplicadores de Lagrange, las cuales pueden ser englobadas en el Principio del Máximo de Pontryagin (Arkin and Evstigneev, 1987 y 1976; Arutyunov, 1999; Fan and Wang, 1974; Fleming and Rishel, 1975).

*Validar la ecuación de programación dinámica bajo el criterio de entropía relativa.* También es de destacar que se buscará aplicar la teoría desarrollada a otros criterios de rendimiento, donde la componente principal sea la función de entropía, como son criterios con horizonte aleatorio o bien, usando criterios sensibles al riesgo (Cruz and Ilhuicatzí 2012; Cruz, Ilhuicatzí and Montes-de-Oca, 2014; Ilhuicatzí and Cruz 2013).

*Llevar los resultados obtenidos al contexto de matemáticas financieras.* Resolver el problema de optimización de un portafolio de inversión, esto es, se propondrán estrategias de inversión que maximicen los criterios descontados de inversión y al mismo tiempo que maximicen la función de entropía.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Arkin V. I. and Krechetov L. M. A Stochastic maximum principle in control problems with discrete time. Lectures Notes in Mathematics (In Proceedings of the third Japan-USSR Symposium on Probability Theory), no. 550, pp. 692-712, Springer Verlag, 1976.
2. Arkin V. I. and Evstigneev I. V. Stochastic Models of Control and Economic Dynamics Academic Press Inc., ISBN 9780120620807, 1987.
3. Arutyunov A. V. Pontryagins maximum principle in optimal control theory Journal of Mathematical Sciences, vol. 94, no. 3, pp. 1311-1364, 1999.

4. Cover, T. M., and Joy A. T. "Elements of information theory". John Wiley and Sons, 2012.
5. Hernandez-Lerma, O, and Lasserre, J. B. "Discrete-time Markov control processes: basic optimality criteria". Vol. 30. Springer Science and Business Media, 1996.
6. Cruz, H. A. and Ilhuicatzí, R. Optimal Replacement in a System of n-Machines with Random
7. Horizon Proyecciones Journal of Mathematics, Vol. 31, No. 1, pp. 219-232, 2012.
8. Cruz, H.A., Ilhuicatzí, R. and Montes-de-Oca, R. Markov Decision Processes on Borel Spaces with Total Cost and Random Horizon Journal of Optimization Theory and Applications, Springer-Berlin, Vol. 162, No. 1, pp. 329-346, 2014.
9. Fan L.T. and Wang C.S. The Discrete Maximum Principle, New York: Wiley, 1974.
10. Feinberg, E. A. and Shwartz, A., eds. Handbook of Markov decision processes: methods and applications. Vol. 40. Springer Science and Business Media, 2002.
11. Fleming W. H. and Rishel R. W. Deterministic and Stochastic Optimal Control Springer Verlag, 1975.
12. Ilhuicatzí, R. and Cruz, H. A. Rolling horizon procedures for the solution of an optimal replacement problem of n-machines with random horizon Investigación Operacional, Vol. 34, No. 2, 2013.
13. Puterman, M. L. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming, Wiley, New York, 1994.
14. Rodríguez, M. T. Premio Nobel de Economía 2001: El libre mercado no funciona. Revista Momento Económico 118, 2001.
15. Rubin, J., Shamir, O. and Tishby, N. "Trading value and information in MDPs. Decision Making with Imperfect Decision Makers". Springer Berlin Heidelberg, 2012. 57-74.
16. Tishby, N., and Polani, D. "Information theory of decisions and actions". Perception-reason-action cycle: Models, algorithms and systems. Springer, 2010.

# DINÁMICA DE LA SINCRONIZACIÓN DE TRES CIRCUITOS CAÓTICOS CUASI-IDÉNTICOS

Gabriel Arroyo Correa<sup>1</sup>, Karla Ivonne Serrano Arévalo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH.

## RESUMEN:

En este trabajo se estudia numéricamente la sincronización entre tres circuitos de Chua no idénticos. Dos de los circuitos son tomados como el circuito de Chua estándar (que denotamos por C1), en donde la función de respuesta del resistor no lineal es una función continua por tramos. El tercer circuito, que llamamos no estándar (que denotamos por C2), consiste de un circuito de Chua con una función de respuesta circular. La topología analizada es con el circuito no estándar en medio de los dos circuitos estándares (C1-C2-C1) formando una cadena lineal abierta. Se analizan los esquemas de sincronización unidireccional y bidireccional. Los resultados obtenidos muestran que la conexión unidireccional favorece una sincronización en el doble atractor a medida que el factor de acoplamiento aumenta, en tanto que la conexión bidireccional no la permite. Adicionalmente, hemos verificado que una conexión híbrida, esto es, teniendo una conexión bidireccional y unidireccional simultánea, puede favorecer una sincronización en el doble atractor ó en un solo atractor, dependiendo de la forma en que se haga la conexión. Se agradece el apoyo a través del programa CIC-UMSNH 2016.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades de los sistemas dinámicos es de particular importancia por sus aplicaciones en diversas áreas del conocimiento básico y tecnológico. En particular, en el caso de circuitos eléctricos caóticos por su importancia en la transmisión de información, en donde el circuito de Chua aparece como sistema relevante (Rangel Recio, 2012). Dentro del estudio del caos con circuitos de Chua, hemos estudiado el problema de sincronización entre dos circuitos caóticos de Chua no idénticos (Mejía Almonte y Arroyo Correa, 2014). En este trabajo se estudia numéricamente la sincronización de tres circuitos de Chua cuasi-idénticos. Los circuitos base que se usan se muestran en la Fig. 1. En los mismos recuadrados de la figura se escriben las ecuaciones de cada circuito, así como los valores numéricos de los parámetros que se utilizan para las simulaciones numéricas. Los colores de los círculos sirven para identificar el tipo de circuito. También se incluyen los estados caóticos propios de cada circuito.

## 2. TEORÍA

El sistema propuesto en este trabajo consiste de dos circuitos de Chua estándar en los extremos y de un circuito central no estándar, como se muestra simbólicamente en la Fig. 2. Los círculos coloreados corresponden al tipo de circuito particular, según se muestra en la Fig. 1, y las flechas indican los posibles acoplamientos que se pueden tener en el sistema: bidireccional (dos flechas de un círculo a otro) o unidireccional (una sola flecha de un círculo a otro). El sistema analizado en este trabajo está descrito por las Ecs. (1). Este sistema de ecuaciones diferenciales se resolvió usando el paquete libre DynPac escrito en Mathematica (Clark, 2015). Los parámetros para las simulaciones numéricas así como las funciones de respuesta de los circuitos base son los

indicados en la Fig. 1. Se supone que inicialmente los circuitos están en sus estados caóticos particulares (véase la Fig. 1).



Figura 1. Los circuitos base usados para formar el sistema propuesto en este trabajo.

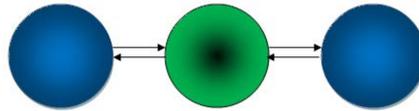


Figura 2. Representación simbólica del sistema propuesto en este trabajo. Los círculos coloreados corresponden a los circuitos mostrados en la Fig. 1.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha_1(y_1 - f(x_1)) + Kx_{12}(x_2 - x_1) \\
 \dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1 + Ky_{12}(y_2 - y_1) \\
 \dot{z}_1 &= -\beta y_1 \\
 \dot{x}_2 &= \alpha_2(y_2 - cg(x_2)) + Kx_{21}(x_1 - x_2) + Kx_{23}(x_3 - x_2) \\
 \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2 + Ky_{21}(y_1 - y_2) + Ky_{23}(y_3 - y_2) \\
 \dot{z}_2 &= -\beta y_2 \\
 \dot{x}_3 &= \alpha_1(y_3 - f(x_3)) + Kx_{32}(x_2 - x_3) \\
 \dot{y}_3 &= x_3 - y_3 + z_3 + Ky_{32}(y_2 - y_3) \\
 \dot{z}_3 &= -\beta y_3
 \end{aligned} \tag{1}$$

En las Ecs. (1), los acoplamiento bidireccional o unidireccional en el canal X-X están definido como sigue. En el acoplamiento bidireccional se entiende  $Kx_{12}=Kx_{21}=Kx_{23}=Kx_{32}=Kx$  y todos los demás  $K$ 's nulos. En el acoplamiento unidireccional  $Kx_{12}=Kx_{23}=Kx$  (y todos los demás  $K$ 's nulos) ó  $Kx_{21}=Kx_{32}=Kx$  (y todos los demás  $K$ 's nulos). El factor de acoplamiento común  $Kx$  se varió en un rango de 0 a 90. En forma similar se definen los acoplamiento para el canal Y-Y.

Shannon en su trabajo clásico acerca de la teoría de la comunicación (Shannon, 1948), estableció resultados generales tanto para la información transmitida en sistemas discretos como continuos. En este esquema planteado por Shannon resulta interesante rescatar el concepto de entropía asociada con una señal. La idea básica de este concepto se puede describir en los siguientes términos. Supóngase que se tiene un conjunto de puntos definidos en un plano. Se define una malla (cuadrícula) la cual se divide en  $N$  celdas rectangulares idénticas. El número de puntos contenidos en una celda dividido entre el número total de puntos del mapa da la probabilidad de ocupación  $p_i$  de la  $i$ -ésima celda. La entropía de Shannon  $E_s$  se define como:

$$E_s = - \sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i), \quad (2)$$

En donde  $\ln$  denota el logaritmo natural.

### 3. RESULTADOS

En la Fig. 3 se muestra los resultados de la sincronización del sistema (1) en la configuración bidireccional cuando los circuitos se conectan a través de los canales X-X. Los gráficos del renglón (a) corresponden a la señal de sincronización en el plano  $X_1$ - $X_3$  para valores diferentes del factor de acoplamiento.  $X_1$  es la señal en el canal X del circuito de la izquierda y  $X_3$  es la señal en el canal X del circuito de la derecha. Los gráficos del renglón (b) y (c) corresponden a las señales en los planos  $X_1$ - $Y_1$  (del circuito izquierdo) y  $X_2$ - $Y_2$  (del circuito central) para valores diferentes del factor de acoplamiento. Los gráficos de la columna izquierda en los renglones (a), (b) y (c) corresponden al estado de no sincronización entre los circuitos (factores de acoplamiento nulos), en tanto que las otras dos columnas corresponden a valores crecientes del factor de acoplamiento. Es evidente de esta figura como el sistema se desestabiliza sincrónicamente (véanse los gráficos de la tercera columna). En la Fig. 4 se presentan las simulaciones numéricas para el caso de la configuración unidireccional. En este caso se puede notar cómo dependiendo de la forma en que se conecten los circuitos, la sincronización puede inducirse hacia el doble atractor caótico del circuito estándar de Chua (véanse los gráficos de la tercera columna en la secuencia de la izquierda) ó hacia el atractor simple del circuito no estándar de Chua (véanse los gráficos de la tercera columna en la secuencia de la derecha).

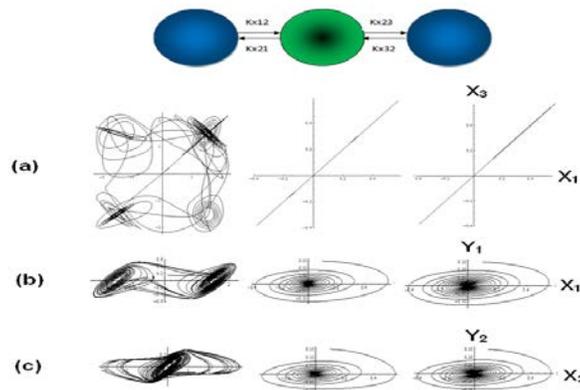


Figura 3. Dinámica del sistema (1) en el caso de conexión bidireccional en los canales X-X. Nótese que aunque los circuitos están sincronizados las órbitas colapsan a un ciclo límite.

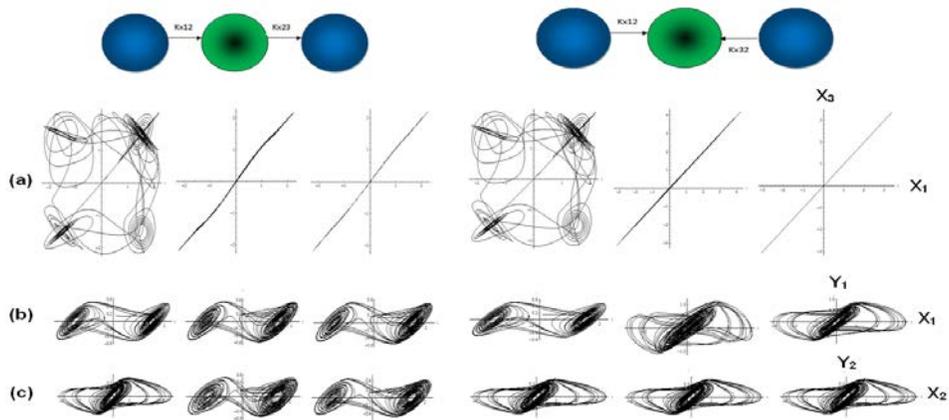


Figura 4. Dinámica del sistema (1) en el caso de conexión unidireccional en los canales X-X. Nótese que dependiendo de la conexión, el sistema se sincroniza al estado caótico del doble atractor ó del atractor del circuito no estándar.

En el caso de la conexión a través de los canales Y-Y de los circuitos, los resultados para la configuración bidireccional y unidireccional se presentan en las Figs. 5 y 6, respectivamente. De la Fig. 5 se puede notar que la conexión bidireccional favorece una sincronización completa estable del sistema, a diferencia del caso en que la conexión es a través de los canales X-X de los circuitos (compárense las Figs. 5 y 3). También en los casos de conexión unidireccional, se puede observar de la Fig. 6 que se logra una sincronización parcial hacia uno u otro de los atractores caóticos, similar a lo que sucede en el caso en que la conexión es a través de los canales X-X de los circuitos (compárense las Figs. 6 y 4).

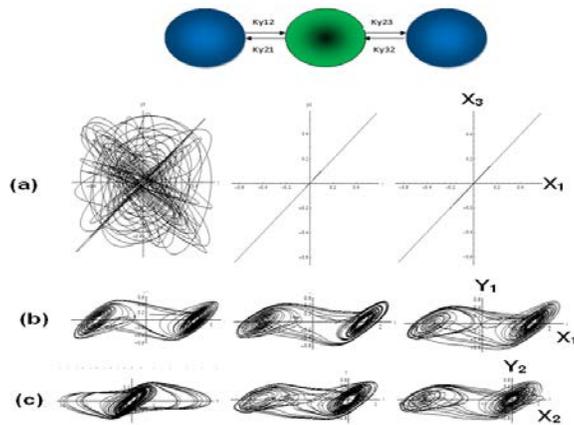


Figura 5. Dinámica del sistema (1) en el caso de conexión bidireccional en los canales Y-Y. Nótese que los circuitos están sincronizados en el doble atractor del circuito estándar de Chua.

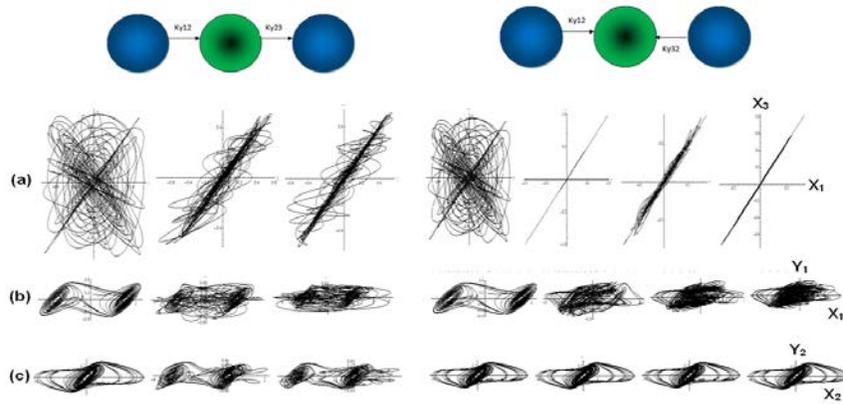


Figura 6. Dinámica del sistema (1) en el caso de conexión unidireccional en los canales Y-Y. Nótese que dependiendo de la conexión, el sistema se sincroniza al estado caótico del doble atractor ó del atractor del circuito no estándar, aunque la sincronización no es completa.

Adicionalmente, hemos verificado que una conexión híbrida, esto es, teniendo una conexión bidireccional y unidireccional simultánea, puede favorecer una sincronización en el doble atractor ó en un solo atractor, dependiendo de la forma en que se haga la conexión. Los gráficos son muy similares a los mostrados en las figuras anteriores. El análisis de la entropía de Shannon del sistema en el plano de sincronización  $X_1$ - $X_3$  también permite inferir las características de la estabilidad de la sincronización. En la Fig. 7 se muestra la evolución de la entropía de Shannon, dada por la Ec. (2), para el caso en que la conexión sea a través de los canales X-X. El trazo BIDI corresponde a la configuración bidireccional cuya evolución dinámica se muestra en la Fig. 3. Los trazos UNI-A y UNI-B corresponden a las configuraciones unidireccionales mostradas en la Fig. 4. UNI-A corresponde al caso de conexión mostrado en la secuencia izquierda de gráficos de la Fig. 4, y UNI-B corresponde al caso de conexión mostrado en la secuencia derecha de gráficos de la Fig. 4. Como puede observarse de la Fig. 7, la conexión bidireccional rápidamente lleva a un colapso hacia un ciclo límite del sistema, en tanto que la conexión unidireccional, dependiendo cómo se haga, favorece una sincronización completa hacia el doble atractor del circuito de Chua estándar ó hacia el atractor del circuito de Chua no estándar.

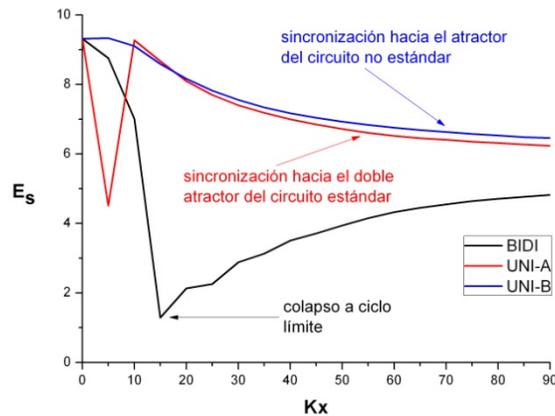


Figura 7. Entropía de Shannon del sistema (1) como función del parámetro de acoplamiento, correspondientes a los casos mostrados en las Figs. 3 (bidireccional) y 4 (unidireccional).

#### **4. CONCLUSIONES**

Se logró caracterizar la sincronización del sistema formado por tres circuitos de Chua, en donde los dos circuitos extremos son idénticos al circuito de Chua original y el central es un circuito de Chua no estándar, en diferentes configuraciones de acoplamiento, tanto en conexión unidireccional como bidireccional. Se identificaron las configuraciones óptimas de sincronización, las cuales pueden ser de utilidad en problemas de encriptación de información. El análisis de la entropía de Shannon del sistema permitió identificar también estas características. Los resultados de este trabajo pueden ser de utilidad para el diseño de esquemas de encriptación de información.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

1. I. Rangel Recio, "Caos y desorden en el circuito de Chua", Tesis de licenciatura, UMSNH, 2012.
2. J. Mejía Almonte, G. Arroyo Correa, "Sincronización de dos circuitos caóticos cuasi-idénticos", LVII Congreso Nacional de Física, Mazatlán, Sinaloa, 2014, trabajo 3MG06.
3. A. Clark, "DynPac: A dynamical systems package for Mathematica 7", <http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html> (consultado en agosto de 2015).
4. C.E. Shannon, "A mathematical theory of communication", The Bell System Technical Journal, Vol. 27, 1948, pp. 379-423, 623-656.

## MÁQUINA ROTACIONAL DE MOVIMIENTO PERPETUO.

G. Del Valle D.<sup>1</sup>, G. Hernández M.<sup>1</sup>, R. Espíndola H.<sup>1</sup>, D. A. Chávez<sup>1</sup>, B. Hernández L.<sup>1</sup>, G. C. Moran<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco.

### RESUMEN

En este trabajo desarrollamos un prototipo de Máquina Rotacional de Movimiento Perpetuo, el cual sirve para explicar e introducir los principios básicos de la dinámica rotacional tales como Torcas, Momento de Inercia, Momento Angular en una aplicación inmediata a la ingeniería. Asimismo explicamos la física inherente y la razón del porque es posible la construcción de tal tipo de máquina, explicando dentro de las distintas formulaciones de la Mecánica Clásica las ecuaciones de movimiento y obteniendo resultados numéricos de estas, para explicar su existencia, y estabilidad. Asimismo hacemos una revisión de los conceptos dentro de la física, que prohíben la construcción de las máquinas de movimiento perpetuo como una flagrante violación al segundo principio de la Termodinámica Clásica.

### 1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la termodinámica y principalmente con la segunda ley de la termodinámica se catalogan dos clases de movimientos perpetuos:

**Móvil perpetuo de primera especie (mmp-1)**, toda máquina que funciona perpetuamente y produce trabajo, sin ninguna entrada externa de energía, y sujeta a ninguna pérdida, pasando el tiempo la máquina seguirá funcionando sin detenerse.

**Móvil perpetuo de segunda especie (mmp-2)**, toda máquina que funciona periódicamente, la cual transforma el total de la energía, en otro tipo (mecánica, eléctrica, etc.), sin pérdida alguna en el proceso

La principal restricción indicada por la termodinámica es la violación de la segunda ley, o el principio máximo de entropía. Como muy bien apunta V. M Brodianski, en la enseñanza elemental se habla del principio de la conservación de la energía, pero no del principio máximo de entropía, tal vez es por ello que durante distintas épocas, ha sido una búsqueda constante y recurrente por los hombres, lograr construir una mmp-1 o mmp-2, utilizando distintos medios, mecánicos, magnéticos, e hidráulicos. Algunos personajes prominentes de ciencia han contribuido activamente en la búsqueda de esta clase de máquina, entre los que podemos resaltar a *Heron, Pedro de Mericour, Leonardo da Vinci, Bernoulli, Maxwell, Feynman*, entre otros muchos.

En este trabajo queremos estudiar un movimiento rotacional que se presenta en la internet, como un movimiento perpetuo de primera especie, en primer lugar buscamos trabajar en la implementación de la maquina rotacional y en segundo lugar, ofrecer una explicación de las variables y propiedades físicas que se ven involucradas en el movimiento de dicha máquina,

finalmente realizar un análisis experimental del movimiento que nos permita entender cómo es que se viola el principio termodinámico que establece la no existencia de tales máquinas.



Figura 1. Esquema que representa el sistema de máquina de movimiento perpetuo de primera especie.

El modelo seleccionado para trabajar y analizar se presenta de manera esquemática en la Figura 1, la idea de este mecanismo es que los pesos de los elementos de rodadura en los compartimentos entre la canica y la rueda de confort para sí mismos que el momento se encuentre desbalanceado en el centro que las canicas del lado descendente excede el momento de aquellas en el lado ascendente. Con esta idea en mente obtenemos entonces por medio de la mecánica clásica a la Newton, el valor de las torcas.

## 2. TEORÍA

Ecuación de movimiento

Recordamos que la torca es el análogo de la fuerza para el caso rotacional, y en los primeros cursos universitarios de dinámica rotacional comprendemos que para que un sistema pueda rotar alrededor de un eje, es necesario que exista una torca, que por definición es:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton para el caso rotacional se sabe que:  $\sum \tau = I\alpha$ , y como  $\alpha$

Se puede ver como la segunda derivada del ángulo podemos establecer que:

$$-r(t)mg N \sin \beta(\theta) = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

Lo cual nos lleva a la ecuación de movimiento de la siguiente manera:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{Nmg}{I} r(t) \sin(\beta(\theta)) = 0 \quad (3)$$

Ecuación de movimiento que proponemos estudiar de manera experimental, numérica, donde  $N$  es el número de esferas que contiene el arreglo,  $m$  la masa de cada esfera, masas que requerimos sean iguales,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $I$  es el momento de inercia,  $\beta(t)$ , es el ángulo que forman el vector radio con respecto al vector peso de la esfera,  $r(t)$ , es la distancia que hay del centro del disco al centro de cada esfera en cada compartimiento.

Para resolver la ecuación es necesario entender al menos tres cosas, ¿Cómo podemos representar el radio como una función del tiempo? y ¿Cuál es el momento de inercia del sistema? Y como representamos el ángulo  $\alpha$ , también en función del tiempo, pues el sistema consta además de un conjunto de esferas que se desplazan dentro de cada compartimiento.

Momento de inercia

Calculamos el momento de inercia de la rueda de la siguiente manera:

Para la base:

$$I_B = \frac{1}{2} M_B R_e^2 \quad (4)$$

donde,  $M_B$  es la masa de la base, y  $R$  es el radio del disco, para el caso de los compartimientos sabemos que una varilla si rota alrededor de su centro de masa, su momento de inercia está dado por  $I=ML^2$ , entonces cada varilla tiene un momento de inercia dado por:

$$I_b = N M_b \left( \frac{1}{12} L^2 + d^2 \right) \quad (5)$$

donde se utiliza el teorema de los ejes paralelos y  $N$  corresponde al número de compartimientos que tiene la rueda (número de esferas que se colocaran). Quedando por obtener el momento de inercia del arillo de la rueda, que se encuentra dado por:

$$\begin{aligned} I_{ci} &= M_{ci} R_i^2 \\ I_{ce} &= M_{ce} R_e^2 \end{aligned} \quad (6)$$

que al sumar los tres momentos de inercia tendremos el momento total de la estructura:

$$I = \left( M_{ce} + \frac{1}{2} M_B \right) R_e^2 + M_{ci} R_i^2 + N M_b \left( \frac{1}{12} L^2 + d^2 \right) \quad (7)$$

Ángulos y radios

Obtener el comportamiento del radio como función del tiempo es una tarea complicada, para explicarlo nos apoyaremos de la figura 2. Aunque primeramente explicaremos la naturaleza del ángulo  $\alpha$  en la ecuación (3).

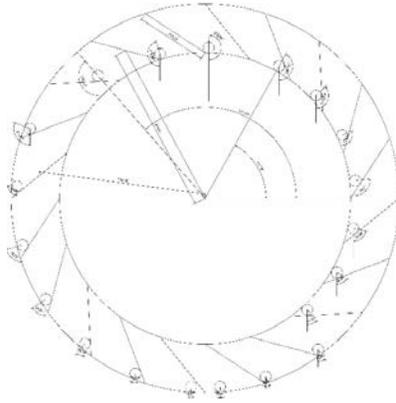


Figura 2. Esquema representativo del sistema, objeto de estudio.

Como se puede observar en la figura 2, la rueda se puede dividir en tres partes: una a partir del eje de horizontal derecho, hasta el eje vertical, la segunda desde el eje vertical superior hasta el eje vertical inferior y la tercera desde el eje vertical inferior hasta el eje horizontal derecho. En esta primera región todas las esferas se encuentran en el diámetro interno, por lo que su radio será constante y el ángulo del vector peso con respecto al vector radio será:

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\pi + \theta(t) \text{ y } r = R_i \quad \text{para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

En la segunda región, con excepción de las tres primeras esferas que se encuentran en la parte superior de la rueda, se encuentran sobre el perímetro exterior con lo que el radio prácticamente es constante para todas ellas. El ángulo entre el vector del peso y el vector radio, está dado por:

$$\beta(t) = \frac{3}{2}\pi - \theta(t) \text{ con } r(t) \text{ para } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4} \text{ y } r = R_e \quad \text{para } \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (9)$$

Mientras que para la tercera región: los radios van cambiando también para las tres primeras esferas que se encuentran en la parte baja, y el ángulo se obtiene como:

$$\beta(t) = \theta(t) - \frac{3}{2}\pi \text{ con } r(t) \text{ para } \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{4} \quad r = R_i \text{ para } \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \quad (10)$$

Como podemos observar entonces tenemos un cambio continuo en los radios aproximadamente desde los ángulos  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$  donde pasa del radio interno al radio externo y aproximadamente  $\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{4}$  cuando pasa del radio externo al radio interno. A fin de poder desarrollar una simulación de la ecuación de movimiento, en su forma más simple proponemos una relación para la función radial  $r(t)$  en forma lineal de la forma:

$$r(t) = \begin{cases} R_i & \text{Si } 0 < t < \frac{1}{4}nT \\ R_i + L \left( t - \frac{1}{4}nT \right) & \text{Si } \frac{1}{4}nT < t < \frac{R_e - R_i}{L} + \frac{nT}{4} \\ R_e & \text{Si } \frac{R_e - R_i}{L} + \frac{nT}{4} < t < \frac{3}{4}nT \\ R_e - L \left( t - \frac{3}{4}nT \right) & \text{Si } \frac{3}{4}nT < t < \frac{R_e - R_i}{L} + \frac{3nT}{4} \\ R_i & \text{Si } \frac{R_e - R_i}{L} + \frac{3nT}{4} < t < nT \end{cases} \quad (11)$$

Donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  la figura 3 ilustra un ejemplo donde se aprecia que el sistema pasa del radio interior de 0.15 m al radio exterior de 0.25 m

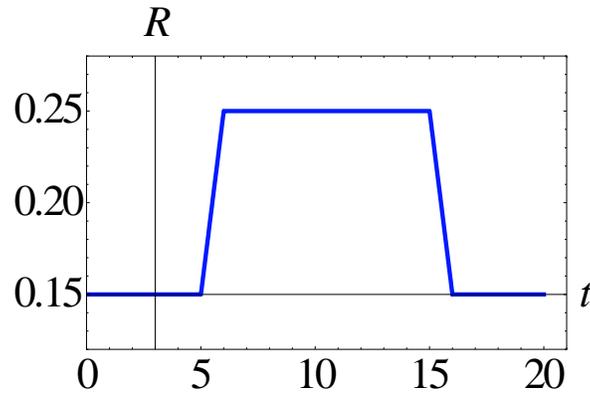


Figura 3. Función radial  $r(t)$ , que muestra el cambio del radio interno al externo y viceversa.

#### SOLUCIÓN NUMÉRICA

Resolvemos la ecuación de manera numérica, para ello es necesario separar la ecuación (3) en dos ecuaciones diferenciales de primer orden, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{\theta} \\ f_2 &= -\frac{N mg}{I} r(t) \sin \beta(t) \end{aligned} \quad (11)$$

El método numérico Runge-Kutta, es utilizado para la resolución del conjunto de ecuaciones (11), debemos contar con valores iniciales. Se calculan para este caso los valores de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  en el tiempo, el cual se va corriendo en pasos de  $t = t + \delta h$ ,

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \\ \dot{\theta}_{i+1} &= \dot{\theta}_i + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \end{aligned} \quad (12)$$

Con las funciones siguientes que nos permiten calcular el promedio de las pendientes dado por (12) y obtener de esta manera el siguiente valor de la variable

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \delta h f_1(t, \theta_i, \dot{\theta}) \\
k_{21} &= \delta h f_2\left(t + \frac{\delta h}{2}, \theta_i, \dot{\theta} + \frac{k_{12}}{2}\right) \\
k_{22} &= \delta h f_1\left(t + \frac{\delta h}{2}, \theta_i, \dot{\theta} + \frac{k_{12}}{2}\right) \\
k_{31} &= \delta h f_1\left(t + \frac{\delta h}{2}, \theta_i, \dot{\theta} + \frac{k_{22}}{2}\right) \\
k_{41} &= \delta h f_2\left(t + \frac{\delta h}{2}, \theta_i, \dot{\theta} + \frac{k_{22}}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{13}$$

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

Para elaborar nuestra máquina de movimiento perpetuo, se consideró el siguiente material:

#### MATERIALES

- Pliego de papel ilustración.
- Pliego de papel batería.
- Sensor de Movimientos Rotacionales - Línea PasPort Pasco - PS-2120<sup>a</sup> con un ajustador.
- Cinta para pegar.
- Dos postes de acero inoxidable de 45 cm x 1/2 pulgada Pasco - ME-8736.
- Dos bases de fundición grande p/alajar 2 columnas de 1/2 o 3/8 pulgadas Pasco - ME-8735.
- Nivel Bellota Torp Magn A-9 Alum.
- Lápiz, tijeras, navajas, compás, transportador y regla.
- Pegamentos de contacto.
- 21 Canicas de 16 mm de diámetro.

#### PROCEDIMIENTO

Se dibujó en el papel ilustración la base de un diámetro de 560 mm, ya teniendo el dibujo se procedió a la elaboración de las aspas. Estas se realizaron de 3 mm x 10 mm y se pegaron debidamente en la base con el pegamento de contacto. Asimismo se realizó el contorno interno el cual consta de un diámetro de 420 mm y un perímetro de 1319.46 mm, así como el externo con un diámetro 560 mm y un perímetro de 1759.29 mm. Se colocaron pedazos de cinta para pegar en las esquinas para evitar que las canicas se atoraran en las uniones del papel.

Primero jugamos con canicas de diversos tamaños y diversos pesos, pero al encontrarse desbalanceado el sistema y al echar a girar la máquina, no se logró que girase por mucho tiempo, de hecho, el movimiento se amortigua rápidamente.

Posteriormente colocamos en los compartimientos canicas que tienen un peso aproximadamente igual, su diferencia en masa  $\Delta m = \pm 0.05$  g. Pero primero probamos con otro ejercicio, colocamos todas las canicas excepto una de ella, y se le imprimió una torca,

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

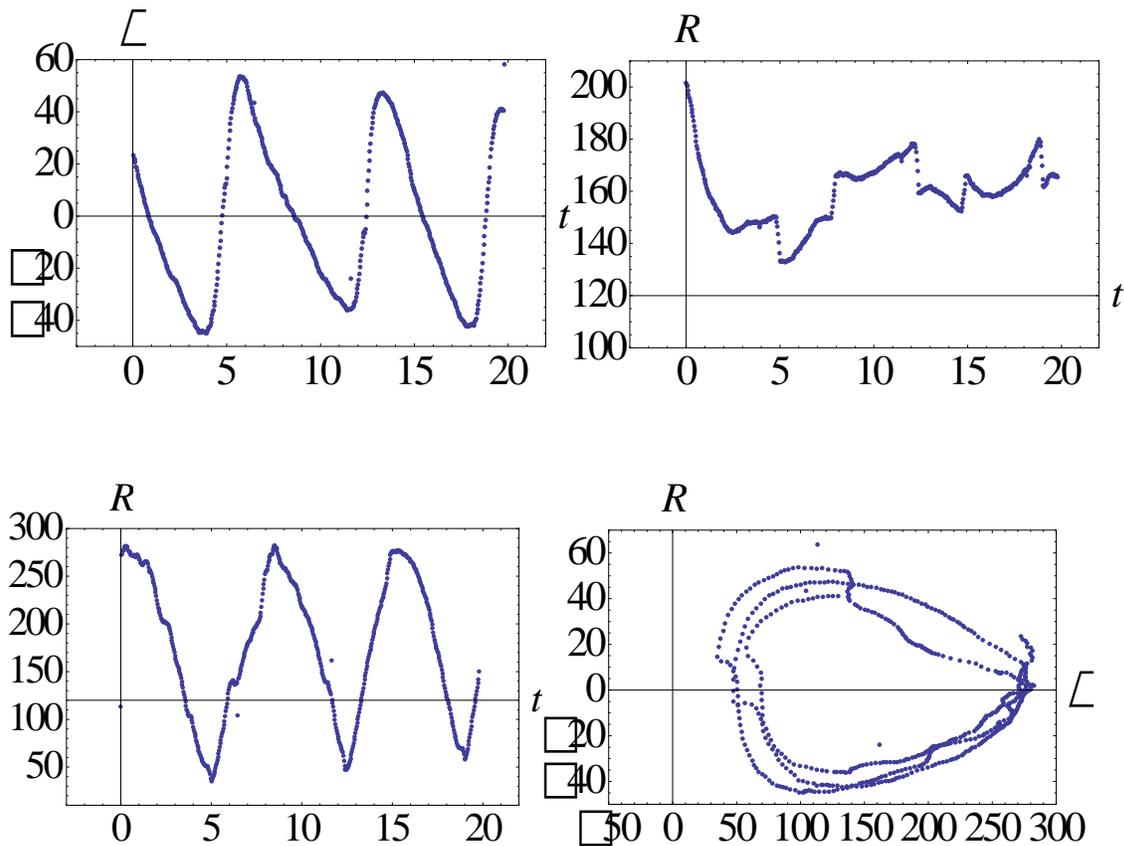


Figura 4. Resultados obtenidos por análisis del prototipo experimental, se observa el comportamiento del ángulo como un diente de sierra, el comportamiento del radio muestra en principio mucho ruido o error, sin embargo nos indica que nuestra propuesta lineal podría ser muy buena aproximación, el comportamiento del radio con el ángulo muestra que no debe ser un círculo perfecto y muestra como la distancia tiene ángulos para los que se reduce y otros para los que se amplía

#### 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan tanto resultados experimentales como teóricos, relacionados con el sistema de una maquina rotacional de movimiento perpetuo. Se realizó un análisis de la física alrededor del sistema, se ha explicado la teoría y se han presentado resultados experimentales de su análisis.

Se ha mostrado que esta clase de sistemas son en ricos en los conceptos físicos desde su concepción como maquina perpetua, que involucra el conocimiento principios fundamentales tales como la segunda ley de la termodinámica.

Queda aún pendiente concluir la parte de simulación que a pesar de que está presentada en la teoría existen algunos detalles técnicos que tendremos que mejorar para su realización.

## BIBLIOGRAFÍA

1. V. M. Brodianski. (1860). Movil perpetuo antes y ahora. Moscu: Mir.
2. VProject1. (2011). Perpetual Machine. 26 de abril 2016, de Visual Education Project Sitio web: <https://youtu.be/287qd4ul7-E>.
3. Sears, Zemansky, Young, Freedman, Física Universitaria Vol. I, 12a Ed Pearson, 2009,
4. Tipler, Mosca, Física 1. Para la Ciencia y la Tecnología vol. I
5. C.Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mecánica, Berkeley Physics Course Volumen 1*, Segunda edición, ED Reverté.

# ESTUDIO SOBRE EL NIVEL APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE BACHILLER SEGÚN LA TEORÍA DE JOHN BIGGS UTILIZANDO UN PROBLEMA DE FÍSICA

Claudia Flores<sup>1</sup>, Olga Leticia Fuchs Gómez<sup>1</sup>, Gregorio Rogelio Cruz Reyes<sup>1</sup>, Ma Guadalupe Raggi Cárdenas<sup>1</sup>, Eugenia Érica Vera Cervantes<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP · <sup>2</sup>Facultad de Ciencias de la Computación

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo es identificar el grado de aprendizaje del estudiante por medio del análisis del nivel de entendimiento en la taxonomía SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*) desarrollada por John Biggs. Para ello se utiliza un experimento muy conocido que consiste en un huevo cocido y pelado que entra en una botella debido a la diferencia de presiones. Está presente en libros de texto, libros de divulgación científica, páginas web, entre otros. Demostraciones de este tipo, ayudan al estudiante a comprender conceptos como la presión atmosférica, sin embargo, se pueden encontrar obstáculos que impiden el aprendizaje. La hipótesis de la que se parte es que si el alumno no es capaz de describir el fenómeno; destacando los elementos más importantes, y aún de mayor peso, si el alumno no logra explicar correctamente dicho fenómeno de acuerdo al conocimiento científico, se encuentra que el estudiante tiene dificultades para la comprensión y aprendizaje de este fenómeno y que la mayor parte de los estudiantes se identifican en las etapas "preestructural y uniestructural según dicha teoría

## 1. INTRODUCCIÓN

En 1976 Los Investigadores suizos Ference Marton y Roger Saljö demostraron que los estudiantes no aprenden lo que los profesores creen que deberían aprender, sino que estos aprendizajes dependen de lo que ellos perciben se les demanda como tareas por realizar. Los estudiantes que utilizan una aproximación "superficial" consideran solo deben responder a preguntas específicas en cada tema por lo que solo comprenden pequeños "pedazos" de éstos, mientras los estudiantes que utilizan una aproximación "profunda" desean entender, y para ello se enfocan en los temas y en las ideas importantes. Los buenos profesores según J. Biggs se fijan en las tareas que el estudiante realiza para aprender y en base a éstas alinea los objetivos de enseñanza con el desempeño de estas tareas para asegurar el aprendizaje. En este trabajo se utiliza un experimento relacionado con la presión en la que se le pide al estudiante realice ciertas tareas mostrando sus ideas en cada paso de las mismas y observándose como va cambiando su entendimiento para ubicar que tipo de aproximación al aprendizaje utiliza.

## 2. TEORÍA

Debido a que la enseñanza tiene como objetivo la comprensión y desarrollo de los estudiantes para la obtención de resultados de aprendizaje de calidad, actualmente se operacionalizan y describen los tipos de procesos y de resultados de aprendizaje que se espera de los estudiantes, como forma de hacer explícito lo que el profesor quiere que los estudiantes lleven a cabo para alcanzar el cambio conceptual. Biggs y Collins presentan en 1982 la taxonomía SOLO, una propuesta para evaluar los diferentes niveles de complejidad estructural en los resultados de aprendizaje alcanzados. La operacionalización de esta taxonomía es un acrónimo para Structured

of the Observed Learning Outcomes, es presentada como una herramienta sencilla y útil para clasificar y evaluar el resultado de una tarea de aprendizaje, o dicho de otra forma, para evaluar la calidad de lo que aprende un estudiante al realizar actividades que requieren el desempeño de elementos de competencias académico-transversales o habilidades de alto nivel intelectual en función de su organización estructural. SOLO está basada en la constatación de que en el llamado proceso de progresión de la incompetencia a la competencia escolar, el aprendizaje se modifica en dos aspectos principales. Por un lado, los alumnos estructuran los componentes de la tarea en niveles de complejidad creciente (incremento cuantitativo), que se refiere al incremento en la cantidad de detalles en las respuestas del estudiante, y por otro lado, el aprendiz va relacionándose más cómodamente con los aspectos más abstractos de las tareas (incremento cualitativo), es decir, un cambio cualitativo a la forma en que esos detalles se van integrando en un modelo estructural. Las etapas cuantitativas del aprendizaje ocurren en un primer momento, y después los alumnos cambian cualitativamente su aprendizaje. De esta forma, SOLO aporta un modo sistemático, y el proceso pasa de un conocimiento pobre a un conocimiento sólido de la realidad, en el cual, cada uno de los niveles describe un desempeño particular en un determinado momento. El camino hacia la comprensión al aprender está íntimamente relacionado con los niveles de complejidad estructural que evalúa la taxonomía SOLO. Dichos niveles quedan definidos de manera sintetizada en la ilustración que sigue

A grandes rasgos, el nivel 1 indica que el estudiante no ha emprendido la tarea correctamente y que no ha comprendido su significado. El nivel 2 revela que algún aspecto de la tarea ha sido escogido y utilizado, por tanto estamos ante una comprensión como enumeración. En el nivel 3, algunos aspectos de la tarea son comprendidos pero tratados de forma separada. En el nivel 4, los componentes son integrados en un conjunto coherente, de forma que cada uno de ellos contribuye al significado completo, y el estudiante es capaz de apreciar relaciones. El nivel 5 mostraría que el estudiante ha comprendido, que es capaz de generalizar lo aprendido a un nuevo tópico o área, pero además, muestra que el estudiante es capaz de utilizar la metacognición y reflexionar sobre sí mismo.

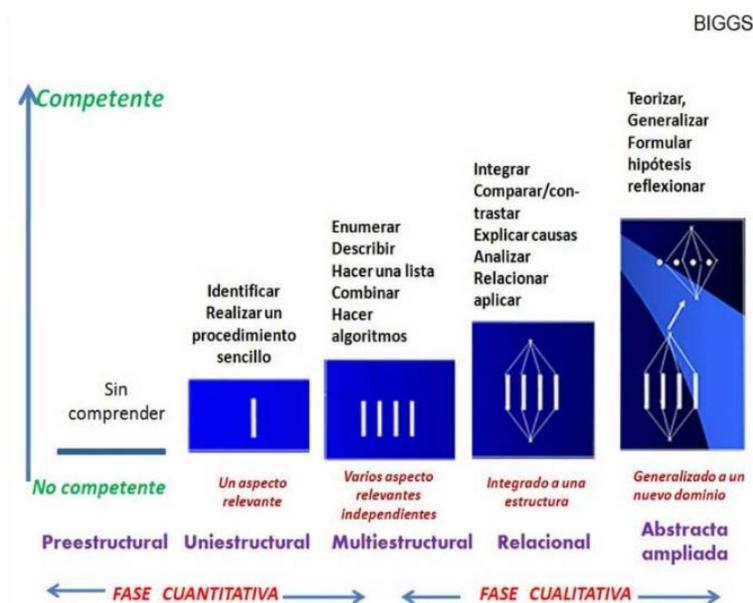


Figura 1

Puede notarse que la principal línea divisoria se encuentra entre los niveles 3 y 4; ya para el cuarto y quinto nivel, las respuestas envuelven evidencias de comprensión, en el sentido de integrar y estructurar las partes del material a aprender. Las categorías oscilan entre simples respuestas no estructuradas que usan información irrelevante hasta abstracciones de alto nivel que usan la información disponible para formar hipótesis basadas en los principios generales. La taxonomía SOLO, al situar las respuestas de los estudiantes en categorías predeterminadas y jerarquizadas de acuerdo con la calidad de sus respuestas, ofrece un modo sistemático de describir como un aprendiz crece en complejidad cuando realiza tareas académicas. Como síntesis y aplicabilidad a la situación de enseñanza y aprendizaje, la taxonomía SOLO puede ser usada para definir y diseñar el currículum. De acuerdo al primer paso en el alineamiento constructivo de la enseñanza propuesto por Biggs, es preciso definir los resultados pretendidos; tales objetivos han de ser definidos no sólo en términos de contenidos sino también en términos de nivel de comprensión aplicados a ese contenido. Por otro lado, siendo conscientes de la importancia, relación y repercusión de la evaluación sobre la forma de aprender de los estudiantes y sobre los resultados alcanzados, la taxonomía SOLO puede ser usada para evaluar los resultados del aprendizaje y saber a qué nivel individual están operando los estudiantes. En este sentido, la evaluación ha de estar dirigida a aportar información sobre cuánto y con qué calidad han aprendido los estudiantes según lo previsto. Hemos de ser conscientes que el hecho de no incluir cambios en la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes no es posible el diseño de una nueva formación, en la que el estudiante comprenda significados, siendo capaz de manipular adecuadamente y transferir a otros contextos.

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

El estudio se realizó bajo el paradigma cuantitativo en la modalidad de investigación de campo. El diseño de la investigación consistió en aplicar una encuesta sobre descripciones y explicaciones relacionadas con un fenómeno físico y el concepto de presión. El instrumento con el que se trabaja es la encuesta, con el apoyo de un video proyectado en el salón de clase sobre un fenómeno físico. Se eligió éste método ya que representa bajos niveles de estrés en los alumnos a la hora de expresar libremente sus ideas que es lo que se pretende, además de que éste método nos permite ahorrar tiempo para la obtención de ideas de los alumnos.

La encuesta fue elaborada de tal manera que el alumno se enfoque en 2 sencillas cuestiones: descripción y explicación del fenómeno observado. Dicha encuesta permite al alumno expresar libremente sus ideas acerca del fenómeno físico observado, con la finalidad de expresar de alguna manera sus ideas previas para el concepto de presión atmosférica. La encuesta se divide en dos partes: Encuesta-Parte 1 (Figura No. 2) y Encuesta-Parte 2\_(Figura No. 3), impresas por separado.

*"LAS DESCRIPCIONES Y EXPLICACIONES QUE DAN LOS ALUMNOS AL VER VIDEOS YOUTUBE SOBRE FENÓMENOS FÍSICOS"*

**Encuesta-Parte 1**

NOMBRE DEL ALUMNO.....GRADO Y GRUPO.....EDAD.....

\*Observa con atención el siguiente video y responde\*



1. **Describe** lo que observaste:

.....

.....

.....

2. **Explica ¿por qué crees** que el huevo pudo meterse en la botella?:

.....

.....

.....

Figura 2

Encuesta-Parte 2

NOMBRE DEL ALUMNO.....GRADO Y GRUPO.....EDAD.....

¿SABES? Hay quien piensa que el huevo pudo entrar en la botella por la **PRESIÓN** que hay **dentro** y **fuera** de la botella.

1.-Si el experimento tiene que ver con **DIFERENCIA DE PRESIONES** (la de adentro y la de afuera), ¿cómo explicarías lo que pasó?

.....

.....

.....

.....



2.-De las respuestas que diste al fenómeno, ¿cuál te pareció más acertada?

Mi respuesta en la **Encuesta-Parte 1**       La respuesta que tiene que ver con las presiones en la **Encuesta-Parte 2**

*Por tu apoyo, ¡muchas gracias!!*

*Figura 3*

En la primera parte de la encuesta, Encuesta-Parte 1 se pide al alumno describir y explicar con sus propias palabras el fenómeno observado. Esto con el fin de localizar las posibles ideas previas ante el aprendizaje del concepto de presión atmosférica.

En la segunda parte de la encuesta, Encuesta-Parte 2 se da al alumno una sugerencia para la explicación del fenómeno, es decir, se menciona que hay quien piensa que la explicación al fenómeno observado está relacionada con la presión que se encuentra dentro y fuera de la botella. Esto con la finalidad de que el alumno considere la posibilidad de que la respuesta al fenómeno observado sea una diferencia de presiones.

Después de esta sugerencia, se pide nuevamente una explicación al fenómeno pero ahora en términos de las presiones de dentro y fuera de la botella.

Sin embargo, y para no imponer ideas, se pide al alumno, elegir entre sus 2 respuestas al fenómeno, la respuesta que le parezca más acertada. Es decir, que el alumno puede elegir la mejor explicación al fenómeno entre 1- su explicación primera y original, o 2- elegir la explicación que elaboró en términos de presiones. Esto con el fin de guiar al alumno hacia la explicación correcta del fenómeno observado, pero con la posibilidad de que la elijan como mejor respuesta o no. Como material de apoyo para este estudio y con la finalidad de que los alumnos a encuestar tengan una idea clara de lo que ocurre con el fenómeno en cuestión, se utiliza un video que muestra el experimento llamado “huevo que entra en la botella”.

Dicho video se obtuvo del sitio web Youtube bajo el título: “How to put an egg into a bottle.mp4”, como video representativo del experimento popularmente llamado “huevo que entra en la botella” utilizado para la demostración del concepto de presión atmosférica.

La elección del video antes mencionado se basa en que dicho video cuenta con características que permiten al alumno reflexionar acerca de lo que sucede en el experimento, ya que únicamente proporciona la información que el alumno “necesita saber” como son: materiales a utilizar, procedimiento y desarrollo del experimento. Pero no proporciona la explicación a lo observado, ni siquiera una pista de la respuesta correcta, lo que no condiciona su libre punto de vista, además de que su duración es relativamente corta (0:57 minutos), de tal manera que es probable que no aburra a los alumnos y pongan total atención al video completo.

#### Características del video

Enlace en la red: [https://www.youtube.com/watch?v=r\\_JnUBk1JPQ..](https://www.youtube.com/watch?v=r_JnUBk1JPQ..) Características extras: el video es presentado con música de fondo, la cámara sólo muestra las manos del presentador, la

expresión en el video es de tipo oral (en idioma inglés) y escrita (letreros sólo para identificar los materiales), los materiales que utilizan para el experimento son 1 botella de vidrio, 1 huevo cocido y 4 cerillos.



En el video se puede observar que el presentador muestra los materiales necesarios para el experimento, y seguido de esto, muestra cómo al poner un huevo cocido sobre la boca de la botella éste no puede introducirse, pero al encender un par de cerillos, dejarlos caer dentro de la botella, e inmediatamente poner el huevo en la boca de la botella, el huevo se va deformando y cae al fondo de la misma.

Dichas encuestas se aplicaron a estudiantes pertenecientes a 2 bachilleratos de la región noroeste del estado de Puebla, y repartidos en 4 grupos de estudiantes. Ambas instituciones del municipio de San Pedro Cholula, Puebla.

Recibimos 99 resultados, sin embargo, no todos los estudiantes responden a las dos partes que conforman la encuesta, correspondiente al 10.10%; es decir, 10 estudiantes que sólo respondieron la primera parte. La muestra con la que se trabaja consta de un total de 89 alumnos que cursan bachillerato.

Para la aplicación de la encuesta se trabajó de la siguiente manera:

1. Se elabora una encuesta con 2 preguntas sencillas para obtener las ideas previas del concepto de presión a través de las descripciones y explicaciones acerca del video "huevo que entra en la botella" en el cual se demuestra el concepto de presión.
2. Una vez elaborado el formato de encuesta, se pide autorización a los directores de dos bachilleratos para la aplicación de la encuesta a distintos grupos.
3. Los directores de cada bachillerato asignan los grupos a encuestar, de acuerdo a los grupos que se encuentren libres de clase en ese momento.
4. La aplicación de la encuesta se realiza a cada grupo por separado.
5. Se pide al grupo guardar silencio y prestar total atención al video que se proyecta a continuación, ya que posteriormente deberán responder algunas sencillas preguntas respecto a lo que observaron.

6. A continuación e inmediatamente el aplicador entrega el formato impreso de la encuesta Encuesta-Parte 1 a todos los integrantes del grupo.

7. Adicionalmente, y para los alumnos que no pusieron atención al video, éste se proyecta una o dos veces vez más, si así se requiere.

8. El aplicador espera sin presión de tiempo a que todos los alumnos entreguen sus respuestas.

9. Una vez que todos los alumnos entregan su hoja de respuestas, se procede a mencionar que hay quien piensa que la explicación al fenómeno observado tiene que ver con las presiones que hay dentro y fuera de la botella.

10. A continuación se pide una nueva explicación al fenómeno, pero ahora en términos de la presión de dentro y fuera de la botella.

11. Y se entrega a cada alumno la segunda parte de la encuesta (Encuesta-Parte 2) para escribir sus explicaciones.

12. Para terminar el trabajo con el grupo, el aplicador espera a que todos los alumnos entreguen sus hojas. Se realiza el mismo procedimiento para cada grupo.

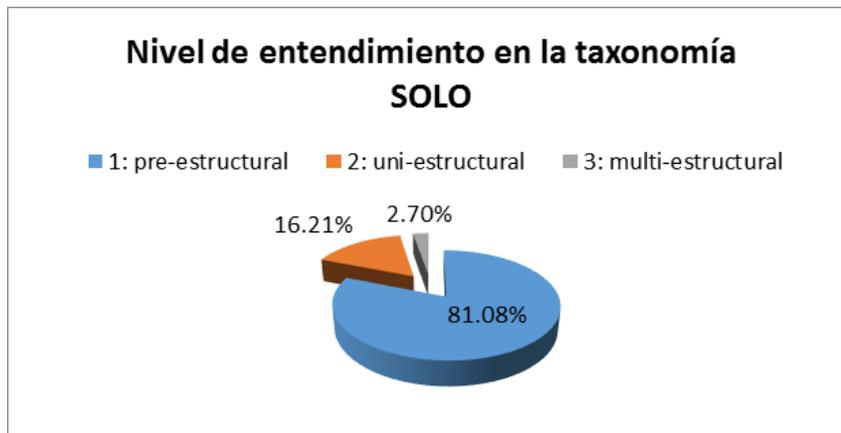
A continuación se categoriza el desempeño de habilidades de alto nivel intelectual de los estudiantes, atendiendo a la clasificación propuesta por la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982), como una herramienta sencilla y útil para evaluar la calidad de lo que aprende un estudiante, en este caso, estudiantes de bachillerato en torno al concepto de presión atmosférica.

Como resultado del conflicto cognitivo en el que se encuentra el estudiante ante la sugerencia de explicar en términos de la presión dentro y fuera de la botella, pueden identificarse diferencias entre la explicación No. 1 (explicación inicial) y la explicación No. 2 (explicación inducida). Algunas de estas diferencias y otros aspectos que se revisan a continuación nos ayudan en la tarea de ubicar a cada uno de los estudiantes en alguno de los 5 niveles de entendimiento de la taxonomía SOLO. Debido a que hay respuestas (ya sea para la indicación 1 o 2) que no clasifican como explicaciones del experimento; para este apartado, en que se comparan las explicaciones No. 1 y No. 2 se trabaja sólo con 74 explicaciones.

#### 4. RESULTADOS

Finalmente se ubica a cada estudiante en el nivel de entendimiento que corresponde y se elabora una tabla (Tabla No. 32) con la clasificación de acuerdo a los niveles de entendimiento presentes en la muestra.

Nivel de entendimiento en la taxonomía SOLO	No. De estudiantes	Porcentaje
1: pre-estructural	60	81.08%
2: uni-estructural	12	16.21%
3: multi-estructural	2	2.70%
Total	74	100%

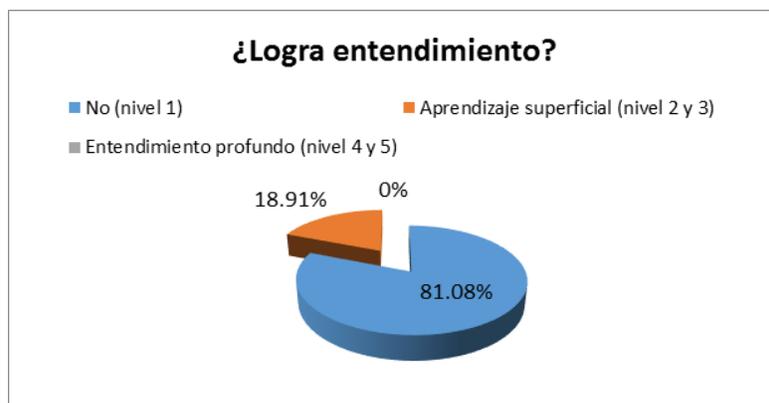


*El 81.08% se ubica en el nivel 1, el 16.21% en el nivel 2 y el 2.70% en el nivel 3.*

#### ¿LOGRA ENTENDIMIENTO?

Los niveles 4 y 5 son el ideal para alcanzar el entendimiento profundo, sin embargo, no es sencillo lograr dicho nivel. A continuación la clasificación se realiza de acuerdo a aquellos que logran: aprendizaje superficial, entendimiento profundo y no logra entendimiento (Tabla No. 33).

¿Logra entendimiento?	No. De estudiantes	Porcentaje
No (nivel 1)	60	81.08%
Aprendizaje superficial (nivel 2 y 3)	14	18.91%
Entendimiento profundo (nivel 4 y 5)	0	0.00%
Total	74	100%



*El 81.08% no logra entendimiento, el 18.91% sólo alcanza aprendizaje superficial y el 0.00% alcanza el entendimiento profundo.*

## 5. CONCLUSIONES

Los resultados más representativos que se obtienen de este estudio son los siguientes. En cuanto al género, se encuentra que 48 estudiantes corresponden al género femenino y 41 al género masculino de entre 15 y 18 años de edad, que corresponde al 53.93% y 46.06% respectivamente. La muestra con que se trabajó en este estudio se considera representativa de la población, ya que las diferencias entre los porcentajes reales de hombres y mujeres; con los obtenidos de la muestra son casi nulos, el porcentaje de mujeres supera al de los hombres sólo en un 7.87%.

Del análisis de descripciones, se trabajó con 75 respuestas, ya que sólo el 84.26% proporciona una respuesta que puede ser considerada como descripción del video. En términos de la etapa a partir de la cual el estudiante comienza su descripción, la mayoría (53.33%) describe a partir de la Etapa 3: La entrada del huevo. Como parte de la descripción del experimento; a pesar de que la mayoría menciona todos los materiales necesarios, el 40.00% no menciona todos, estos coinciden en omitir uno de los materiales, los cerillos.

El 4.00% incluye en su descripción datos que se cree se deben a la poca atención prestada al video y a la total influencia de la imagen en el formato de encuesta, ya que el estudiante expresa suposiciones del tipo: “un encendedor lo pusieron en la boca de la botella”, “calientan la orilla de la botella”, “calientan la superficie de la botella”. En otras suposiciones, acerca de los materiales, el 74.66% no hace este tipo de suposiciones, pero de los que sí lo hacen, la mayoría (63.15%) supone acerca de la botella ya sea que es de vidrio o plástico.

El desarrollo del experimento es la parte central de la descripción, pero desafortunadamente el 50.66% no menciona esta parte. De los estudiantes que expresan el desarrollo del experimento de manera incompleta, el 60.00% coincide en no mencionar el encendido de los cerillos o la entrada de los cerillos encendidos. Otra parte importante de la descripción es la mención de la finalidad del experimento, y a pesar de que el 96.00% sí la menciona, algunos estudiantes no lo hacen. En términos más generales para el análisis de descripciones, el 19.10% proporciona una descripción completa, el 65.16% descripción incompleta, y el restante 15.73% no proporciona una respuesta que pueda ser considerada como descripción del experimento. Del análisis en para la Explicación No. 1, la mayoría de las respuestas (89.88%) sí pueden considerarse como explicaciones del fenómeno, por lo que en este análisis se trabajó con 80 respuestas. El 80.00% explica el fenómeno a partir de la Etapa 3 del video: La entrada de los cerillos. El 31.25% supone para los materiales, de los cuales, el 64.00% supone acerca del huevo. La mayoría relativa de los estudiantes que suponen acerca de las características físicas de los materiales (78.75%) no considera importante dichas suposiciones para explicar el fenómeno. Pero de los que sí lo consideran importante, el 64.70% suponen que el huevo debe ser hervido. El término presión es mencionado solamente por el 8.75%, y lo expresan como: “la presión del huevo”, “la presión del humo”, “la presión que crea al terminarse el oxígeno”, “la presión que tenía al contener un poco de fuego”, “la presión del gas” y “la presión del fuego”. Al representar las ideas previas en términos de causa(s) y efecto(s), se encontró que la mayoría (78.75%) explica con un factor en la causa, sin embargo el 21.25% explica con dos factores en la causa. De los que explican con un factor en la causa, el 30.15% trabaja con el factor calor como la causa del fenómeno, le sigue a esta el factor humo con un 17.46%; las características físicas y la pérdida de oxígeno coinciden en 9.52%. De los que explican con dos factores en la causa, con mayor frecuencia se encuentra el factor características físicas (32.35%), en segundo lugar el factor calor (20.58%) y en tercer lugar el factor tipo de fuerza (11.76%).

En cuanto al número de factores en el efecto, el 92.50% explica con un factor en el efecto y el 7.50% con dos factores. De los que explican con un factor en el efecto, algunos factores coinciden en 20.27%: resbala fácilmente, acción de un tipo de fuerza, deformación del huevo y simple entrada del huevo. Les sigue en porcentaje el factor deformación de la botella con 12.16%. De los que explican con dos factores en el efecto, coinciden en 25.00% los factores: se debilita el huevo o la botella y deformación o “ablandamiento” del huevo. Con 16.66% el factor tipo de fuerza sobre el

huevo, y el resto coinciden en 8.33%: resbala fácilmente, se crea una presión, se genera vapor y humedad, se reduce el oxígeno.

Del análisis en la Explicación No. 2. El 92.13% de las respuestas se consideran como explicaciones del fenómeno, por lo que para el análisis se trabajó con 82 estudiantes. La mayoría (80.48%) no atiende a la sugerencia de explicar en términos de la presión dentro y fuera de la botella. El 53.65% no expresa su opinión acerca de una presión mayor. Pero de los que sí deciden, el 86.84% considera que la presión mayor se encuentra dentro de la botella.

Del análisis para el nivel de entendimiento. La mayoría (51.35%) cambia sólo un poco su explicación inicial, el 47.29% la cambia completamente y el 1.35% no la modifica. El 45.94% adapta la nueva idea a su concepción inicial, el 33.78% adopta la nueva idea, el 9.45% sólo logra responder en términos de ambas presiones pero no explica la causa, y el resto varía entre: sólo cambia un poco su idea inicial, no hay cambios y da otra explicación.

Sólo el 33.78% identifica la presión dentro de la botella, de los cuales, poco menos de la mitad (48.00%) la justifica "correctamente". Para la presión fuera de la botella, sólo el 14.86% la identifica, pero de los cuales, poco menos de la mitad (45.45%) la justifica "correctamente".

El 13.51% confunde el término presión con el término fuerza. Finalmente en cuanto al nivel de entendimiento en la taxonomía SOLO: la mayoría (81.08%) de los estudiantes se ubica en el nivel 1, el 16.21% en el nivel 2 y el 2.70% en el nivel 3. Lo que significa que sólo el 18.91% alcanza aprendizaje superficial, ningún estudiante el entendimiento profundo y la mayoría de la muestra (81.08%) no logra entendimiento.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Arons, A. (1981). Thinking, Reasoning and Understanding in Introductory Physics Courses. *Physics Teacher*, Vol. 19(3), pp. 166-172.

Biggs, J. B. (2005). *Calidad del aprendizaje universitario*. Narcea.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). Evaluating the Quality of Learning: The SOLO taxonomy. Nueva York: Academic Press.

Biggs, J.B. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior, en Rowe, H. (ed.) Intelligence: Reconceptualization and Measurement. LEA, Australian Council for Educational Research, pp. 57-76.

Campbell, K.J., Watson, J.M. y Collis, K.F. (1992). Volume Measurement and Intellectual Development, en *Journal of Structural Learning*, 11(3), pp. 279-298.

Driver, R. (1986). Psicología cognoscitiva y esquemas conceptuales de los alumnos. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 4(1), pp. 3-15.

Driver, R. (1988). Un enfoque constructivista para el desarrollo del currículo en ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 6(2), pp. 109-120.

# FRECUENCIAS PLASMÓNICAS EN UN CRISTAL FOTÓNICO INMERSO EN UNA GUÍA DE ONDAS

H. Alva Medrano<sup>1</sup>, A. Mendoza Suárez<sup>1</sup>, H. Pérez Aguilar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" de la UMSNH, Morelia, Mich.

## RESUMEN

La generación de polaritones de plasmones de superficie en guías de onda es importante por sus múltiples aplicaciones. Particularmente a la frecuencia del plasmón la onda electromagnética puede propagarse con más facilidad por el sistema, por lo que este tema es especialmente importante en telecomunicaciones. Se consideran sistemas formados por guías de ondas, que tienen incluidos cristales fotónicos y con inclusiones recubiertas por metamateriales. Encontramos ciertas frecuencias a las cuales se generan polaritones de plasmones de superficie en el interior de la guía de ondas. Los recubrimientos de metamaterial permiten el fenómeno sin necesidad de tener superficies rugosas, como es lo típico en el tema.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los plasmones superficiales han logrado atraer gran interés científico en todo el mundo. Rufus Ritichie descubrió estas ondas, o "Plasmones Superficiales" (PS), en los años cincuenta del pasado siglo [1].

Muchas de las propiedades fundamentales del estado sólido pueden ser descritas mediante una analogía de un sólo electrón moviéndose en un arreglo periódico de átomos a los cuales se les asocia una carga positiva; o en otras palabras utilizando el concepto de Plasma. Llamado en algunas ocasiones como "el cuarto estado de la materia" además de los ya conocidos: sólido, líquido y gaseoso. El plasma se puede considerar como un estado de la materia en el que se permite el movimiento colectivo de una cantidad suficiente de cargas eléctricas, iones o electrones.

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica se define como plasmón al cuanto de energía asociado con ondas propagándose en la materia a través del movimiento colectivo de un gran número de electrones. El nombre plasmón refleja el concepto de un metal como un plasma de alta densidad con un enorme número de electrones móviles. Si un campo eléctrico actúa sobre una partícula u otra muestra delimitada, el campo polariza la muestra con una densidad de carga eléctrica. Las cargas inducidas en la superficie actúan sobre una y otra eléctricamente de una manera colectiva para regresar al equilibrio. Si el campo aplicado es suspendido, un regreso muy rápido hacia el equilibrio neutral le da a las cargas más energía cinética, la cual les produce un punto de equilibrio sobre saturado. El proceso es reversible y entonces oscilaciones colectivas de carga superficial son establecidas. A dichas oscilaciones colectivas se les denomina Plasmones Superficiales.

Los metales, además de reflejar la luz, tienen una propiedad óptica menos conocida: bajo ciertas condiciones la luz puede viajar sobre las superficies metálicas sin alejarse de ellas. Ésta es una

propiedad muy peculiar, ya que en condiciones normales la luz viaja por las tres dimensiones del espacio y no se le confina con facilidad.

Los electrones al moverse por un medio disipan energía en forma de calor, por lo tanto a los PS se les había tenido siempre como un sumidero de energía y, por consiguiente, como un inconveniente para la utilización de metales en dispositivos ópticos que envíen información en forma de energía de un lugar a otro. En efecto, tras haber recorrido un PS sólo una décima de milímetro, más de la mitad de la intensidad de luz que lleva se ha disipado ya en forma de calor. Por tanto los PS pueden no ser muy adecuados si pretendemos valernos de ellos para transportar energía a distancias mayores que las décimas de milímetro. Sin embargo, en ciertas aplicaciones ese margen ya no es tan pequeño.

Gracias a la tecnología actual, la continua miniaturización de los componentes electrónicos ha creado la necesidad de transportar información a escalas de unas pocas micras. Al mismo tiempo, la técnica que ha dado lugar a esa miniaturización nos permite crear estructuras en las superficies metálicas en escalas micrométricas o nanométricas con una precisión y control antes inaccesibles. Así se abre la posibilidad de controlar a voluntad las propiedades de los plasmones superficiales para poder extraer la energía que llevan, probablemente en forma de luz o de señal eléctrica, y de este modo poder transportarla a voluntad de un lugar a otro.

Por otro lado, es posible que en poco tiempo se alcance el límite viable de fabricación de los componentes electrónicos basados en la tecnología del estado sólido. Este límite se refiere tanto en la densidad como en la rapidez de los componentes, por esto es de suma importancia desarrollar tecnología y por lo tanto materiales capaces de superar estas limitaciones.

El desarrollo de la microelectrónica se remonta a casi medio siglo [2]. En este sentido, los cristales fotónicos han atraído gran interés científico debido a sus aplicaciones prácticas que van desde recubrimientos de lentes y espejos con baja y alta reflexión hasta pinturas que cambian de color.

Un cristal fotónico es un material estructurado de forma que su función dieléctrica varíe periódicamente en el espacio, algunos ejemplos son mostrados en la figura 1.

Aunque existen manifestaciones naturales de estos materiales, como ciertas estructuras microscópicas que dan lugar a coloraciones en las alas de algunas mariposas como la mostrada en la figura 2, se trata de materiales relativamente novedosos propuestos para producir localización de la luz.

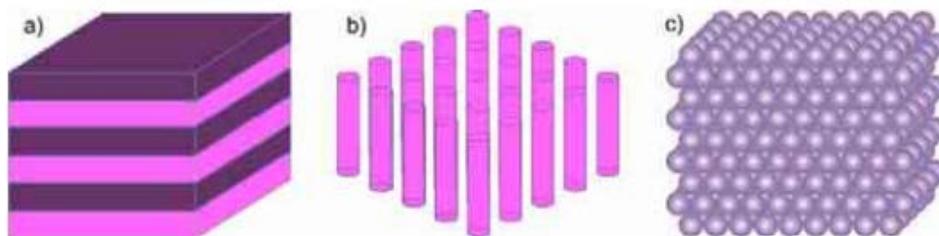


Figura 1. Ejemplos de cristales fotónicos en (a) 1 dimensión, (b) 2 dimensiones, (c) 3 dimensiones. Tomada de [http://luxrerum.icmm.csic.es/pdfs/Theses/these\\_Palacios\\_Lidon.pdf](http://luxrerum.icmm.csic.es/pdfs/Theses/these_Palacios_Lidon.pdf)



Figura 2. Las alas de la mariposa *Morpho menelaus* deben su color azul a una microestructura análoga a cristales fotónicos dispuestos en una estructura en 3D. Fotografía: Gregory Phillips. Tomada de <http://sedin-notas.blogspot.mx/2010/06/el-brillo-de-las-alas-de-las-mariposas.html>

Dentro de los cristales fotónicos encontramos los llamados materiales zurdos (LHM) o metamateriales [3]. Su nombre lo deben al hecho de que los vectores de luz  $E$ ,  $H$  y  $k$  forman una triada que cumple la regla de la mano izquierda para una onda que se propaga a través de estos materiales.

Los LHM son arreglos periódicos de estructuras cuyo tamaño de la celda unitaria es mucho menos que la longitud de onda con la que se trabaja [4]. Los primeros experimentos con LHM fueron realizados en el rango de microondas en el espectro electromagnético; sin embargo ya se ha logrado realizar investigaciones en el espectro del visible e infrarrojo [5-6].

Los materiales LHM tienen un índice de refracción negativo dentro de un rango del espectro electromagnético, lo cual origina que los fenómenos ópticos conocidos presenten variaciones que pueden ser utilizadas para el desarrollo de nuevas tecnologías. Por esta razón se ha comenzado a estudiar una gran variedad de sistemas ópticos que contienen materiales LHM. Entre estos estudios están, por ejemplo, la investigación sobre propiedades de esparcimiento en sistemas cilíndricos largos hechos a partir de medios con materiales LHM [7-8].

## 2. TEORÍA

Comenzamos el análisis de este trabajo con un sistema formado por una guía de onda con paredes sinusoidales que tiene una capa de metamaterial como el mostrado en la figura 3. Sin embargo, para llegar a dicho análisis primero se trabaja con un sistema más simple, en este caso con un sistema sin capas, como el mostrado en la figura 4, la cual forma parte de un trabajo de investigación realizado por el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo [9].

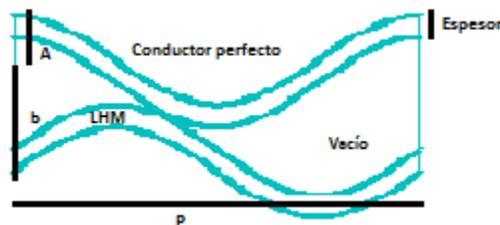


Figura 3: Celda unitaria formada con dos placas onduladas de conductor perfecto acompañadas de otra capa delgada de LHM.

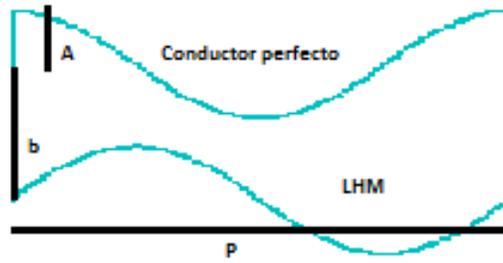


Figura 4: Celda unitaria formada por dos placas onduladas de conductor perfecto y LHM en el interior.

El método numérico empleado es el método integral, el cual se basa en resolver la ecuación de Helmholtz.

Si asumimos una dependencia temporal sinusoidal  $e^{-i\omega t}$  para los campos electromagnéticos entonces la ecuación de onda puede ser transformada en la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k_j^2)\psi_j(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

Donde  $\psi_j(\mathbf{r})$  puede representar el campo eléctrico  $E_z$  o el campo magnético  $B_z$  para la polarización TE o TM, respectivamente.  $\mathbf{r}$  es el vector de posición y el subíndice  $j$  hace referencia al  $j$ -ésimo medio en el sistema analizado.

La magnitud del vector de onda viene dado por:

$$k_j = n_j(\omega) * \frac{\omega}{c}, \quad (2)$$

Donde  $n_j$  es el índice de refracción en el  $j$ -ésimo medio. Este índice está determinado por la permeabilidad magnética  $\mu_j$  y la permitividad eléctrica  $\epsilon_j$ , las cuales cumplen que:

$$n_j(\omega) = \pm \sqrt{\mu_j(\omega)\epsilon_j(\omega)}. \quad (3)$$

Cuando se considere un medio LHM, el índice tendrá signo negativo, mientras que será positivo cuando el medio sea vacío o un material dieléctrico.

Para encontrar la relación de dispersión  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  y determinar la estructura de bandas partimos de la segunda identidad de Green en dos dimensiones, ya que, en este caso el sistema presenta

homogeneidad en una dirección. En la relación de dispersión,  $\mathbf{k}$  es el vector de Bloch. Sin pérdida de generalidad, sea  $z$  la dirección de homogeneidad, por lo tanto

$$\frac{1}{4\pi} \oint_C \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \psi(\mathbf{r}') \right] ds = \theta(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (4)$$

Donde  $C$  denota el contorno de una celda unitaria,  $\theta(\mathbf{r}) = 1$  si  $r$  está dentro de la zona donde se resuelve la ecuación de Helmholtz y cero en otro caso y  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es una función de Green. Para este sistema:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j * |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (5)$$

$H_0^{(1)}(z)$  es la función de Hankel de primer tipo o bien, de primera clase y orden cero.

Para resolver el sistema dividimos una celda unitaria en segmentos  $\Gamma_i$ , en este caso cuatro y por último se realiza un muestreo  $X_n = X(S_n)$ ,  $Y_n = Y(S_n)$  a lo largo de cada curva.

Si comenzamos analizando el sistema de la figura 2, entonces se llega al siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\sum_{j=1}^{nx} L_{ij(1,1)} \Phi_{j(1,1)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(1,1)} \Psi_{j(1,1)} + \sum_{j=1}^{nx} L_{ij(1,2)} \Phi_{j(1,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(1,2)} \Psi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{ny} L_{ij(1,3)} \Phi_{j(1,3)} - \sum_{j=1}^{ny} N_{ij(1,3)} \Psi_{j(1,3)} + \sum_{j=1}^{ny} L_{ij(1,4)} \Phi_{j(1,4)} - \sum_{j=1}^{ny} N_{ij(1,4)} \Psi_{j(1,4)} = 0. \quad (6)$$

$\psi_j$  y  $\Phi_j$  denotan numéricamente la magnitud del campo y su derivada normal, respectivamente.  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $n$  es el número de puntos en la superficie. En este caso denotamos como  $nx$  al número de puntos en cada uno de los perfiles ondulados y  $ny$  al número de puntos en cada uno de los perfiles verticales, por lo que  $n = 2 * nx + 2 * ny$ .

El primer subíndice escrito entre paréntesis denota la región analizada y el segundo hace referencia al perfil, en este caso sólo se tiene una región pero cuatro perfiles: el superior, el inferior, el de la derecha y por último el de la izquierda.

Las entradas de la matriz están dadas por [10]

$$L_{ij(n,m)} = \frac{i\Delta s}{4} H_0^1(k_n d_{ij}) * (1 - \delta_{ij}) + \frac{i\Delta s}{4} H_0^1\left(k_n \frac{\Delta s}{2 * e}\right) * (\delta_{ij}), \quad (7)$$

$$N_{ij(n,m)} = \frac{i\Delta s}{4} k_n H_1^1(k_n d_{ij}) * \frac{D_{ij}}{d_{ij}} * (1 - \delta_{ij}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4} D_j\right) * (\delta_{ij}), \quad (8)$$

Donde

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}, \quad (9)$$

$$D_{ij} = -Y'_j(X_i - X_j)^2 + X'_j(Y_i - Y_j)^2, \quad (10)$$

$$D'_j = X'_j Y''_j - X''_j Y'_j. \quad (11)$$

$H_1^{-1}(\zeta)$  es la función de Hankel de primera clase y orden uno,  $\Delta s$  denota la longitud de arco entre dos puntos consecutivos de la discretización,  $X'_j = X'(S)|_{s=S_n}$ ,  $Y'_j = Y'(S)|_{s=S_n}$ ,  $X''_j = X''(S)|_{s=S_n}$  y  $Y''_j = Y''(S)|_{s=S_n}$ .

De momento se tienen  $n = 2 * nx + 2 * ny$  ecuaciones y  $4 * nx + 4 * ny$  incógnitas, sin embargo en nuestro sistema consideraremos que las paredes de la guía son de conductor perfecto, de este modo se tiene que:

Para polarización TE

$$\psi_{j(1,1)} = \psi_{j(1,2)} = 0 \quad (12)$$

y para polarización TM

$$\Phi_{j(1,1)} = \Phi_{j(1,2)} = 0, \quad (13)$$

Con las cuales reducimos el sistema a  $2 * nx + 4 * ny$  incógnitas.

Debido a la periodicidad del sistema es posible utilizar el teorema de Bloch para relacionar las fuentes de lado izquierdo con las fuentes del lado derecho, de donde se obtiene:

$$\psi_{j(1,4)} = e(-i * \mathbf{k} * P) \psi_{j(1,3)}, \quad (14)$$

$$\Phi_{j(1,4)} = -e(-i * \mathbf{k} * P) \Phi_{j(1,3)}, \quad (15)$$

Donde  $\mathbf{k}$  es el vector de Bloch. De este modo tenemos  $2 * nx + 2 * ny$  incógnitas y  $2 * nx + 2 * ny$  ecuaciones. Finalmente para polarización TE y TM, respectivamente obtenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{nx} L_{ij(1,1)} \Phi_{j(1,1)} + \sum_{j=1}^{nx} L_{ij(1,2)} \Phi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{ny} (L_{ij(1,3)} - e(-i * \mathbf{k} * P) * L_{ij(1,4)}) \Phi_{j(1,3)} - \sum_{j=1}^{ny} (N_{ij(1,3)} + e(-i * \mathbf{k} * P) * N_{ij(1,4)}) \psi_{j(1,3)} = 0, \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{nx} -N_{ij(1,1)} \psi_{j(1,1)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(1,2)} \psi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{ny} (L_{ij(1,3)} - e(-i * \mathbf{k} * P) * L_{ij(1,4)}) \Phi_{j(1,3)} - \sum_{j=1}^{ny} (N_{ij(1,3)} + e(-i * \mathbf{k} * P) * N_{ij(1,4)}) \psi_{j(1,3)} = 0. \quad (17)$$

En cualquiera de los casos mostrados el sistema puede ser expresado de la siguiente forma:

$$M(\omega, \mathbf{k}) F(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (18)$$

Donde  $M$  depende tanto de la frecuencia  $\omega$  como del vector de bloch  $\mathbf{k}$  y  $F$  representa las fuentes.

Una solución no trivial del sistema puede ser obtenida cuando el determinante del sistema es cero. Para determinar las frecuencias que generan soluciones no triviales definimos la función

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \ln (|\det (M)|). \quad (19)$$

Numéricamente esta función arroja la relación de dispersión numérica buscada  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  con la cual podemos generar la estructura de bandas.

El análisis cuando se tiene una celda unitaria como en la figura 1 es análogo, la diferencia radica en que en esta configuración se tienen tres regiones y no una como en el caso antes tratado. Sin embargo, el hecho de que el campo deba cumplir condiciones de frontera permite reducir el sistema y tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

A partir de las condiciones de frontera se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\psi_{j(1,2)} = \psi_{j(2,1)}, \quad \Phi_{j(2,1)} = \frac{-1}{f_{12}} \Phi_{j(1,2)}, \quad (20)$$

$$\psi_{j(3,1)} = \psi_{j(2,2)}, \quad \Phi_{j(3,1)} = \frac{-1}{f_{23}} \Phi_{j(2,2)}, \quad (21)$$

Siendo para polarización TE:  
(22)

$$f_{lm} = \frac{\mu_l}{\mu_m}$$

Y Para polarización TM:

$$f_{lm} = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_m}, \quad (23)$$

Donde  $\varepsilon_m$  y  $\mu_m$  son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del medio  $m$  – ésimo.

Consideremos a la capa superior como la región uno, la capa de en medio como la región dos y por último la capa de abajo como la región tres. Si consideramos también que en la discretización para la celda con capas se tienen  $nx$  puntos en cada perfil ondulado de la celda unitaria, además de  $ny1$ ,  $ny2$  y  $ny3$  puntos en cada uno de los perfiles verticales para las regiones uno, dos y tres respectivamente, entonces obtendremos los siguientes sistemas a resolver:

Para polarización TE:

Para la región uno,

$$\sum_{j=1}^{nx} L_{ij(1,1)} \Phi_{j(1,1)} + \sum_{j=1}^{nx} L_{ij(1,2)} \Phi_{j(1,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(1,2)} \psi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{ny1} (L_{ij(1,3)} - e(-i * k * P) * L_{ij(1,4)}) \Phi_{j(1,3)} - \sum_{j=1}^{ny1} (N_{ij(1,3)} + e(-i * k * P) * N_{ij(1,4)}) \psi_{j(1,3)} = 0, \quad (24)$$

Para la región dos,

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{nx} \frac{L_{ij(2,1)}}{f_{12}} \Phi_{j(1,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(2,1)} \Psi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{nx} L_{ij(2,2)} \Phi_{j(2,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(2,2)} \Psi_{j(2,2)} + \sum_{j=1}^{ny2} \left( L_{ij(2,3)} - \right. \\
& \left. e(-i * k * P) * L_{ij(2,4)} \right) \Phi_{j(2,3)} - \sum_{j=1}^{ny2} \left( N_{ij(2,3)} + e(-i * k * P) * N_{ij(2,4)} \right) \Psi_{j(2,3)} = 0,
\end{aligned}
\tag{25}$$

Para la región tres,

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{nx} \frac{L_{ij(3,1)}}{f_{23}} \Phi_{j(2,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(3,1)} \Psi_{j(2,2)} + \sum_{j=1}^{nx} L_{ij(3,2)} \Phi_{j(3,2)} + \sum_{j=1}^{ny2} \left( L_{ij(3,3)} - e(-i * k * P) * \right. \\
& \left. L_{ij(3,4)} \right) \Phi_{j(3,3)} - \sum_{j=1}^{ny2} \left( N_{ij(3,3)} + e(-i * k * P) * N_{ij(3,4)} \right) \Psi_{j(3,3)} = 0.
\end{aligned}
\tag{26}$$

Para polarización TM:

Para la región uno,

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{nx} N_{ij(1,1)} \Psi_{j(1,1)} + \sum_{j=1}^{nx} L_{ij(1,2)} \Phi_{j(1,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(1,2)} \Psi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{ny1} \left( L_{ij(1,3)} - e(-i * k * P) * \right. \\
& \left. L_{ij(1,4)} \right) \Phi_{j(1,3)} - \sum_{j=1}^{ny1} \left( N_{ij(1,3)} + e(-i * k * P) * N_{ij(1,4)} \right) \Psi_{j(1,3)} = 0,
\end{aligned}
\tag{27}$$

Para la región dos,

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{nx} \frac{L_{ij(2,1)}}{f_{12}} \Phi_{j(1,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(2,1)} \Psi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{nx} L_{ij(2,2)} \Phi_{j(2,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(2,2)} \Psi_{j(2,2)} + \sum_{j=1}^{ny2} \left( L_{ij(2,3)} - \right. \\
& \left. e(-i * k * P) * L_{ij(2,4)} \right) \Phi_{j(2,3)} - \sum_{j=1}^{ny2} \left( N_{ij(2,3)} + e(-i * k * P) * N_{ij(2,4)} \right) \Psi_{j(2,3)} = 0,
\end{aligned}
\tag{28}$$

Para la región tres,

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{nx} \frac{L_{ij(3,1)}}{f_{23}} \Phi_{j(2,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(3,1)} \Psi_{j(2,2)} - \sum_{j=1}^{nx} N_{ij(3,2)} \Psi_{j(3,2)} + \sum_{j=1}^{ny2} \left( L_{ij(3,3)} - e(-i * k * P) * \right. \\
& \left. L_{ij(3,4)} \right) \Phi_{j(3,3)} - \sum_{j=1}^{ny2} \left( N_{ij(3,3)} + e(-i * k * P) * N_{ij(3,4)} \right) \Psi_{j(3,3)} = 0.
\end{aligned}
\tag{29}$$

Notemos que en este caso tenemos  $6 * nx + 2 * (ny1 + ny2 + ny3)$  fuentes, mientras que en el programa sin capas solo hay  $2 * nx + 2 * ny$  fuentes.

El siguiente sistema a analizar se muestra en la figura 5.

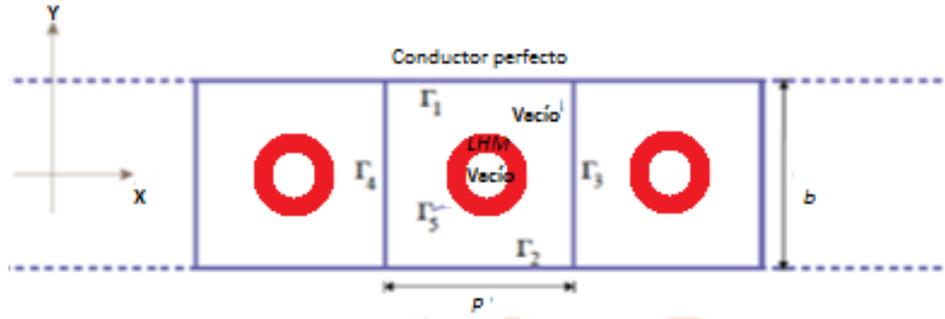


Figura 5: Guía de onda de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto cubierto por una capa de metamaterial.

Con un razonamiento análogo y considerando que se tienen dos regiones de interés en cada celda unitaria, obtenemos de igual forma un sistema de ecuaciones algebraico y homogéneo. De este modo para polarización SE TE tiene que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_x} L_{ij(1,1)} \Phi_{j(1,1)} + \sum_{j=1}^{n_x} L_{ij(1,2)} \Phi_{j(1,2)} + \sum_{j=1}^{n_y} \left( L_{ij(1,3)} - e(-i * k * P) * L_{ij(1,4)} \right) \Phi_{j(1,3)} - \\ & \sum_{j=1}^{n_y} \left( N_{ij(1,3)} + e(-i * k * P) * N_{ij(1,4)} \right) \Psi_{j(1,3)} + \sum_{j=1}^{n_i} L_{ij(1,5)} \Psi_{j(1,5)} - \sum_{j=1}^{n_i} N_{ij(1,5)} \Psi_{j(1,5)} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$- \sum_{j=1}^{n_i} \frac{L_{ij(2,1)}}{f_{12}} \Phi_{j(1,5)} - \sum_{j=1}^{n_i} N_{ij(2,1)} \Psi_{j(1,5)} + \sum_{j=1}^{n_{ii}} L_{ij(2,2)} \Phi_{j(2,2)} = 0 \quad (31)$$

Resolviendo para las soluciones no triviales del sistema obtenemos la estructura de bandas, con ello podemos calcular el campo para frecuencias que se transmiten en el sistema en busca de plasmones superficiales.

### 3. RESULTADOS

A continuación presentamos los cálculos obtenido para ambos sistemas.

El metamaterial utilizado en el análisis tiene las siguientes propiedades ópticas [3]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (32)$$

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{0.56 * \omega^2}{\omega^2 - \omega_o^2}, \quad (33)$$

Con frecuencia del plasmón  $\omega_p = \frac{10}{2\pi}$  y frecuencia de resonancia  $\omega_o = \frac{4}{2\pi}$ , que son parámetros donde el material tiene índice de refracción negativo para el rango de frecuencias normalizadas analizada.

Para el sistema con paredes sinusoidales se consideran el caso en que la parte entre la capas también contiene metamaterial; es decir, el caso en que el interior de la guía está completamente llena de metamaterial. Con esta consideración podemos comparar con los resultados de la literatura para la estructura de bandas. En la figura 6 se muestran las estructuras de bandas obtenidas con nuestro método para los programas con y sin capas, así como la obtenida con anterioridad por el grupo de investigación antes mencionado. Para ello se considera:  $b=1.5$ ,  $A=0.4*b$ , un desfase entre perfiles de  $\frac{\pi}{2}$  y un espesor de las capas de  $0.2*b$ , el cálculo se realizó para polarización TM.

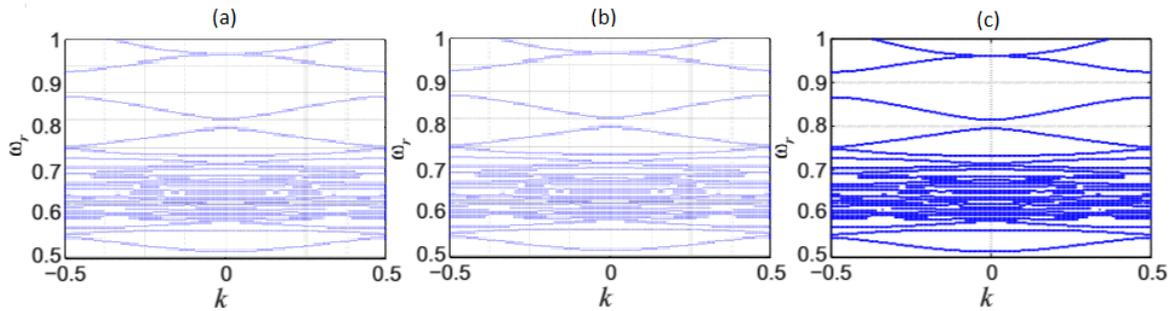


Figura 6: (a) Estructura de bandas obtenida a partir del programa implementado sin capas. (b) Estructura calculada a través del programa que contiene capas. (c) Estructura de bandas obtenida por el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Tomada de [9].

Las estructuras calculadas a partir de los programas implementados están de acuerdo con la obtenida por el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

En la figura 7(a) se muestra el campo obtenido con anterioridad por el grupo de investigación antes citado, en este caso todo el interior de la guía tiene metamaterial. En la figura 7(b) se muestra el campo obtenido con el programa de capas, aquí el sistema solo tiene capas de metamaterial. Los cálculos se obtienen para  $k = 0$  y para la frecuencia reducida  $\omega_r = 0.6306$ , la cual se calcula como  $\omega_r = \frac{P}{2\pi} * \frac{\omega}{c}$ , para este cálculo se utilizaron los mismos parámetros que en la figura 6.

Para el sistema con inclusión circular se procede de forma similar, es decir, primero se considera toda la inclusión llena de metamaterial, con lo cual es posible reproducir el campo obtenido por el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo [11]. El campo se muestra en la figura 8(a), mientras que en la figura 8(b) se muestra el campo obtenido con los mismos parámetros pero considerando sólo una capa de metamaterial, que en este caso es de la mitad del radio de la inclusión. Los parámetros utilizados son:  $b = 4 * \pi$ ,  $P = 2 * \pi$ ,  $r = 0.1 * b$  y el grosor de la capa es igual a  $0.5 * r$ .

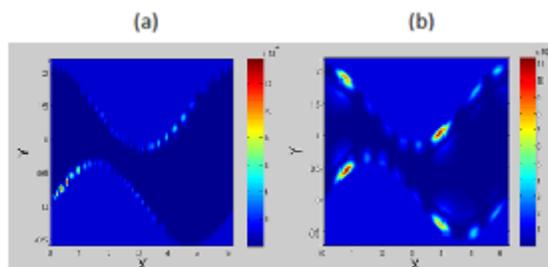


Figura 7:(a) Campo obtenido por el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. (b) Campo obtenido con el sistema de capas de metamaterial. Los cálculos se realizan para  $\mathbf{k} = 0$  y  $\omega_r = 0.6306$ .

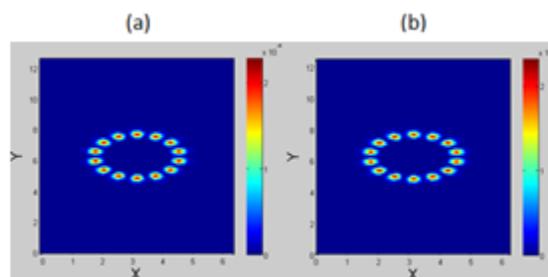


Figura 8: Se muestra los campos obtenidos para  $\mathbf{k} = 0$  y  $\omega_r = 0.7487$ , (a) campo obtenido con inclusión de metamaterial, (b) campo obtenido con el sistema de capas de metamaterial en la inclusión.

#### 4. CONCLUSIONES

Con los resultados obtenidos podemos concluir que los sistemas analizados preservan la presencia de plasmones superficiales de sistemas donde la cantidad de metamaterial presente es mayor. Esto nos ayuda a deducir que este tipo de fenómenos obedece más a la geometría de los sistemas y no tanto a la cantidad de metamaterial utilizado.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. R. H. Ritchie, "Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films". Physical Review (1957) **106** (5): 874–881.
2. T. Ibiza, "Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica". Universidad Politécnica de Valencia, Trabajo de Grado (2013): (1)-(68)
3. Y. A. Vlasov, M. O'Boyle, H. F. Hamann and S. J. McNab, "Active control of slow light on a chip with photonic crystal waveguides," Nature 438, 65-6
4. V.A. Podolsky, Opt. Express 11 (2003) 735

5. C. García-Meca, R. Ortuño, R. Salvador, A. Martínez, and J. Martí, *Opt. Express* 15 (2007) 9320.
6. V.M. Shalaev et al., *Opt. Lett.* 30 (2005) 3356.
7. R. Ruppin, *J. Phys.: Condens. Matter* 16 (2004) 5991.
8. V. Kuzmiak and A.A. Maradudin, *Phys. Rev. B* 66 (2002) 045116.
9. A. Mendoza-Suárez, H. Pérez-Aguilar, “Optical response of a photonic crystal waveguide that includes a dispersive left-handed material”, *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications* 14 (2015) 93–100
10. A. Mendoza-Suárez, H. Pérez-Aguilar, E. S. Tututi, I. F. Herrera-González, “Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces”, *Proc. Electromagn. Res. B* 48 (2013) 329-346
11. H. Pérez-Aguilar, A. Mendoza-Suárez. “numerical study on a photonic crystal waveguide that include a dispersive material ”. (2015) *Mexican Optics and Photonic Meeting* 9-11.

# INESTABILIDAD DE OSCILACIONES NO LINEALES EN UNA CUERDA ELÁSTICA TENSADA BAJO LA ACCIÓN DE CALENTAMIENTO ARMÓNICO Y UNA FUERZA EXTERNA DISTRIBUIDA

L.J. López-Reyes<sup>1</sup>, E.V. Kurmyshev<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad de Guadalajara / Centro Universitario de los Lagos / Departamento de Ciencias Exactas y Tecnología; Enrique Díaz De León 1144, CP 47460, Lagos de Moreno, Jalisco; México.

## RESUMEN

Las vibraciones de una cuerda delgada tensada, que conduce la corriente eléctrica alterna en un campo magnético no uniforme se describen por ecuaciones acopladas no lineales. En el marco de un modelo simplificado se estudian oscilaciones de la cuerda bajo el efecto combinado de la no linealidad geométrica y el calentamiento armónico por el efecto de Joule, actuando éstos de manera opuesta uno contra el otro. El modelo, que incluye el calentamiento de Joule solamente, muestra un crecimiento ilimitado en la amplitud de las oscilaciones cerca de la frecuencia resonante, ya que dicho modelo se reduce a la ecuación de Mathieu. Al incluir al modelo la no linealidad geométrica encontramos que la aproximación de modo único resulta en la ecuación de Mathieu-Duffing no homogénea con la no linealidad cúbica y ésta muestra doble resonancia con la amplitud de las oscilaciones acotada. Encontramos que en estado estacionario del modo fundamental la frecuencia de respuesta del oscilador, tanto lineal como no lineal, bajo la acción de una fuerza externa armónica es igual a la de la fuerza. En ausencia de la fuerza externa, el oscilador lineal de Mathieu responde a la frecuencia propia del oscilador al variar la frecuencia de modulación en cercanía de resonancia, mientras que el oscilador de Mathieu-Duffing homogéneo muestra intervalos de frecuencias de respuesta diferentes.

## 1. INTRODUCCIÓN

En experimentos con oscilaciones de una cuerda tensada es usada frecuentemente la interacción de un campo magnético con la corriente eléctrica en la cuerda como una fuerza impulsora para excitar oscilaciones [1, 2]. En [3] se muestra que las oscilaciones de una cuerda, conductora de corriente eléctrica en un campo magnético, se describen por un modelo no lineal, aun cuando la amplitud de las oscilaciones de la cuerda sea pequeña. La cuerda conductora de corriente eléctrica, muestra no linealidades de dos tipos, geométrica e impropia. La no linealidad geométrica, observada en cualquier cuerda, se debe a la variación de la tensión causada por el estiramiento durante el movimiento transversal de la cuerda y que ha sido estudiada ampliamente [3-11]. La no linealidad impropia es una característica específica del sistema debido a la interacción entre la corriente eléctrica y el campo magnético. Bajo ciertas condiciones, las no linealidades de ambos tipos causan el acoplamiento entre los modos transversales. Además, cuando las oscilaciones en la cuerda son excitadas por la interacción de la corriente eléctrica alterna y el campo magnético, se presenta una variación periódica del calentamiento de Joule en la cuerda lo que resulta en una resonancia paramétrica. Con el fin de profundizar en dichos efectos sobre las oscilaciones, en este trabajo estudiamos la influencia combinada del calentamiento armónico y la no linealidad geométrica, omitiendo mientras tanto la no linealidad impropia tipo gradiente causada por la interacción de la corriente eléctrica y el campo magnético externo no uniforme [3].

Una cuerda física es una varilla delgada que se puede considerar como un sistema  $(1+\varepsilon)$ -Dim, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La magnitud de  $\varepsilon$  está determinada por el grosor y las propiedades materiales de la cuerda dando origen a diferentes supuestos en la derivación de las ecuaciones de movimiento que resulta en el acoplamiento no lineal de modos transversal-transversal, transversal-longitudinal y transversal-torsional y en efectos de rigidez. Diferentes enfoques se han utilizado con el fin de tener en cuenta el efecto de las no linealidades, el amortiguamiento viscoso y la oscilación forzada, los cuales juegan un rol importante en muchos sistemas físicos; esos planteamientos difieren entre sí en la manera y la etapa cuando se realizan ciertas suposiciones y aproximaciones

para derivar las ecuaciones gobernantes. Para ver los modelos que resultan de los distintos enfoques, hacemos referencia a los trabajos [1, 4, 8-12]. Muy pocos de estos modelos tienen soluciones exactas; la mayoría utiliza el método de perturbaciones y asumen aproximación de modos espaciales o temporales. Ecuaciones no lineales que describen las ondas sobre una varilla delgada han sido proporcionadas por Watzky [12], quien consideró no solamente el acoplamiento de modos transversal-transversal y transversal-longitudinal, sino también el acoplamiento de modos debido a la torsión y los efectos de rigidez. Este planteamiento es convincente debido a su exhaustividad. Sin embargo, el conjunto completo de ecuaciones es demasiado complejo para nuestras necesidades, y en este trabajo se utiliza una versión reducida de la ecuación de onda transversal plano polarizada. La dinámica de la cuerda oscilando bajo el calentamiento armónico es estudiada numéricamente.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

Consideramos una cuerda perfectamente flexible, linealmente elástica y estirada en equilibrio a una longitud  $L_0$  a lo largo del eje  $z$ ;  $x$  y  $y$  son las coordenadas de movimiento transversal de la cuerda. En la derivación de la ecuación de onda de la cuerda, partimos de las ecuaciones 5.8, 5.9 y 5.10 de [1]. Los modos transversales resultan desacoplados de los longitudinales bajo la condición,  $C_l \gg C_t$ , que es válida para cuerdas metálicas bajo tensión moderada [12, 13]. Aquí  $C_l$  y  $C_t$  son las velocidades de onda longitudinal y transversal. Despreciando un momento infinitesimal de inercia de la sección transversal de la cuerda, se puede desacoplar el movimiento transversal del torsional. En experimentos con oscilaciones de la cuerda se debe tener un cuidado especial para desacoplar los modos transversales mediante una forma particular de montar la cuerda, y en el modelo matemático se puede hacerlo suponiendo condiciones iniciales cero para uno de los modos y la componente de fuerza cero en esta dirección. Finalmente, se obtiene la ecuación no lineal de onda transversal plano polarizada en una cuerda delgada estirada hasta la longitud de equilibrio  $L_0$ ,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} - C_t^2 x'' - C_l^2 x'' \frac{1}{2L_0} \int_0^{L_0} (x')^2 dz = \tilde{f}(z) \cos(\Omega t) \quad (1)$$

Donde  $(x)$  es el desplazamiento transversal del segmento de cuerda en el punto  $z$ , en el instante  $t$ ;  $\Omega$  es la frecuencia angular de la fuerza externa  $\tilde{f}(z)\cos(\Omega t)$  la cual actúa en la dirección  $x$  del plano  $xz$ . Puntos y apóstrofes establecen las derivadas temporal y espacial  $z$  respectivamente;  $\beta$  es el coeficiente de amortiguamiento. Las velocidades de onda transversal y longitudinal están definidas como sigue,

$$C_t^2 = F/\rho \quad \text{y} \quad C_l^2 = \lambda/\rho \quad (2)$$

La velocidad de onda transversal  $C_t$  depende de la tensión  $F$  en la cuerda, mientras que la velocidad de onda longitudinal depende del módulo de elasticidad lineal  $\lambda=YS$ . Aquí  $\rho$  es la masa por unidad de longitud de la cuerda en su estado de equilibrio,  $Y$  es el módulo de Young de la cuerda y  $S$  su área de sección transversal. La interacción de la corriente eléctrica armónica en la cuerda con un campo magnético externo conduce a una fuerza externa espacialmente distribuida a lo largo de

la cuerda y armónica en el tiempo,  $f(z)\cos(\Omega t)$  [3]. El término de la integral en la ecuación (1) representa la no linealidad geométrica que proviene del cambio en la tensión de la cuerda debido a la variación en su longitud cuando ésta oscila.

La interacción de un campo magnético externo con una corriente eléctrica alterna en una cuerda causa oscilaciones de la cuerda. Una cuerda con los extremos fijos varía su tensión debido al estiramiento, producto de la variación en la amplitud del movimiento transversal. Esta variación de tensión resulta en la no linealidad geométrica de oscilaciones. Por otra parte, el calentamiento Joule por la corriente eléctrica causa la dilatación de la cuerda, y en consecuencia la disminución alternante de la tensión. Para incluir los dos efectos opuestos en el modelo se procede de la siguiente manera. En un campo magnético constante la fuerza impulsora de oscilaciones está gobernada por la corriente,  $i(t)=I_0\cos(\Omega t)$  que causa el calentamiento Joule,  $Q=I^2R$ . La solución explícita del problema de distribución de temperatura sobre la cuerda oscilante es complicada porque implica conductividad térmica, convección y radiación. Se asume que la variación de temperatura en la cuerda puede expresarse como

$$\Delta T(t)=\Delta T_0+\delta\cos 2(\Omega t-\varphi)=\Delta T_0+(\delta/2)[1+\cos(2\Omega t-2\varphi)] \quad (3)$$

Donde  $\Delta T_0$  es la parte estacionaria del aumento de temperatura en la cuerda con respecto a la del ambiente,  $\delta$  es la amplitud de variación de temperatura en la cuerda y  $\varphi$  es el desfase entre las variaciones de temperatura en la cuerda y la corriente eléctrica;  $\Delta T_0$ ,  $\delta$  y  $\varphi$  son los parámetros del modelo. Ya que  $\Delta T_0$  y  $\delta$  dependen de  $I_0$ ,  $R$ ,  $\Omega$  y la temperatura del ambiente, son considerados como dependientes unos de otros; se asume que  $\delta=0.1\Delta T_0$ .

Para la mayoría de los sólidos, la expansión térmica es proporcional al cambio en la temperatura, y por lo tanto la elongación térmica de la cuerda está dada por

$$LT=Lr(1+\alpha\Delta T) \quad (4)$$

Donde  $Lr$  es la longitud de la cuerda sin tensión a la temperatura ambiente y  $\alpha$  es el coeficiente de expansión lineal;  $\Delta T$  es la variación de temperatura con respecto a la del ambiente. Ecuación (4) es válida siempre que el coeficiente de expansión lineal  $\alpha$  no cambie mucho con el cambio de temperatura,  $\Delta T$ . En las mismas condiciones el módulo de Young puede considerarse constante. Así que, a temperatura  $T=T_0+\Delta T$  el módulo de elasticidad lineal se convierte en

$$\lambda T=YST=YS(1+\alpha\Delta T)^2\cong\lambda(1+2\alpha\Delta T) \quad (5)$$

Donde  $T_0$  es la temperatura ambiente y  $(\alpha\Delta T)^2\sim 10^{-6}$  es insignificante para la cuerda de cobre con  $\alpha=17\cdot 10^{-6}$   $1/^\circ\text{C}$ . De la ley de Hooke y ec. (5) se obtiene el cambio de la tensión de la cuerda causado por la variación de temperatura  $\Delta T$ ,

$$F_T=\lambda_T\epsilon_T=\frac{\lambda_T(L_0-L_T)}{L_T}=\lambda(1+2\alpha\Delta T)\frac{L_0-L_r(1+\alpha\Delta T)}{L_r(1+\alpha\Delta T)}\cong F_0-\lambda\alpha\Delta T \quad (6)$$

Donde  $F_0=S_0Y\epsilon_0=\lambda_0\epsilon_0$  y las siguientes evaluaciones fueron tomadas en cuenta:  $L_0/L_T\approx 1$ ,  $F_0/\lambda=3.8\cdot 10^{-4}$  y  $\alpha\Delta T\sim 10^{-3}$ . Sustituyendo la ecuación (3) en ecuación (6), se obtiene la variación de tensión en la cuerda debido a la variación de temperatura:

$$F_T=F_0-\lambda\alpha\delta\cos^2(\Omega t-\varphi) \quad (7)$$

Donde  $F_{st}=F_0-\lambda\alpha\Delta T_0$  es la tensión en estado estacionario reducida con respecto a la tensión de equilibrio en la cuerda  $F_0$ , y  $\Delta F=\lambda\alpha\delta$  es la amplitud de variación temporal en la tensión. La ecuación (7) muestra una disminución de tensión con el calentamiento de la cuerda.

La tensión en la cuerda está determinada por su longitud instantánea. En la ecuación (1) la tensión instantánea está compuesta de dos partes,

$$\mathfrak{T} = F + \frac{\lambda}{2L_0} \int_0^{L_0} (x')^2 dz \quad (8)$$

El término integral determina la variación no lineal de la tensión cuando la cuerda oscila, y  $F$  es una tensión en estado estacionario que puede ser afectada a través de diferentes mecanismos. En el caso del calentamiento Joule, la variación paramétrica lineal de la tensión  $FT$  está dada por la ecuación (7). La propagación de onda longitudinal es el mecanismo que establece la tensión en estado estacionario, ésta última determina la velocidad de onda transversal instantánea en una cuerda. Para un cable delgado de cobre con diámetro  $d=0.18 \cdot 10^{-3}$  m y densidad de masa lineal  $\rho=2 \cdot 10^{-4}$  kg/m, con la tensión de equilibrio,  $F \approx 1$  N, la velocidad de onda longitudinal es mucho mayor que la transversal ya que  $C_t=70.7$  m/seg y  $C_l=3,566$  m/seg. Esto significa que en el estudio de ondas transversales la distribución uniforme de la tensión sobre un cable delgado puede considerarse como una buena aproximación cada instante.

En el cálculo de los valores instantáneos de las velocidades de onda en la ecuación (1) hay que tomar en cuenta tanto el estiramiento como el calentamiento de la cuerda oscilante. El calentamiento armónico cambia la tensión de la cuerda y, en consecuencia, velocidades de onda transversal y longitudinal quedan de la manera siguiente,

$$(C_t^2)_T = F_T/\rho = [F_{st} - \lambda\alpha\delta \cos^2(\Omega t - \varphi)]/\rho ; \quad (C_l^2)_T = \lambda_T/\rho = \lambda[1 + 2\alpha\Delta T(t)]/\rho \cong \lambda/\rho \quad (9)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de masa lineal de la cuerda en equilibrio. Sustituyendo las velocidades de onda en la ecuación (1), se obtiene la ecuación integro-diferencial no lineal para el movimiento transversal ( $t$ .) de una cuerda delgada en el plano  $xz$ :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} - \left\{ \check{C}_t^2 - \frac{\lambda\alpha\delta}{\rho} \cos^2(\Omega t - \varphi) + C_l^2 \frac{1}{2L_0} \int_0^{L_0} (x')^2 dz \right\} x'' = \tilde{f}(z) \cos(\Omega t) \quad (10)$$

$$\check{C}_t^2 = (F_0 - \lambda\alpha\Delta T_0)/\rho = C_t^2 - \lambda\alpha\Delta T_0/\rho ; \quad C_l^2 = F_0/\rho \quad (11)$$

De la ecuación (10) se observa que, bajo las aproximaciones aceptadas, la variación de temperatura en la cuerda elástica (cable delgado) se manifiesta linealmente a través de la variación de la velocidad de onda transversal; mientras que el estiramiento de la cuerda durante su oscilación se expresa no linealmente a través del término integral. Esto último es la no linealidad geométrica en las oscilaciones de la cuerda. La física de la ecuación (10) incluye la interacción de dos efectos opuestos, dilatación y no linealidad geométrica. Con el fin de comprender mejor la contribución de los dos efectos, se estudia primero la influencia del calentamiento, y después se agrega la no linealidad geométrica.

### 3. EFECTO DEL CALENTAMIENTO SOBRE LA OSCILACION DE LA CUERDA

Con el fin de comprender mejor el papel del calentamiento en la dinámica del oscilador, se desprecia la no linealidad geométrica en la ecuación (10) y se obtiene la siguiente ecuación lineal de movimiento de la cuerda bajo calentamiento armónico sincronizado con la fuerza impulsora:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} - \left[ \tilde{c}_t^2 - \frac{\lambda\alpha\delta}{\rho} \cos^2(\Omega t - \varphi) \right] x'' = \tilde{f}(z) \cos(\Omega t) \quad (12)$$

En una cuerda con extremos fijos, la separación de variables conduce la ecuación de onda no homogénea (12) a la ecuación de oscilaciones en el  $n$ -ésimo modo normal:

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + 2\beta \frac{dT_n}{dt} + \left[ \tilde{c}_t^2 - \frac{\lambda\alpha\delta}{\rho} \cdot \frac{1 + \cos(2\Omega t - 2\varphi)}{2} \right] k_n^2 T_n = f_n \cos(\Omega t) \quad (13)$$

donde la parte espacial de la fuerza impulsora,  $\tilde{f}(z) = \sum f_{nn} X_n(z)$  se representa en serie de modos normales,  $X_n(z) = \sin(knz)$ ,  $kn = n\pi/L$  y  $n = 1, 2, \dots$ . La ecuación (13) es oscilador forzado con el cuadrado de la frecuencia  $\omega_n^2$  modulada paraméricamente mediante el término armónico  $\Delta\omega_n^2$  al doble de la frecuencia de la fuerza impulsora:

$$\omega_n^2 = \left[ \tilde{c}_t^2 - \frac{\lambda\alpha\delta}{2\rho} \right] k_n^2 = \left[ c_t^2 - \frac{2.1\lambda\alpha\Delta T_0}{2\rho} \right] k_n^2 ; \quad \Delta\omega_n^2 = \frac{\lambda\alpha\delta}{\rho} \cdot \frac{\cos(2\Omega t - 2\varphi)}{2} k_n^2 \quad (14)$$

El amortiguamiento del oscilador (13) está regulado por el coeficiente  $\beta$ . Así que, es de esperar ver la interacción de la resonancia causada por la fuerza impulsora y la resonancia paramétrica en cercanía de la frecuencia de resonancia,

$$\Omega_{r,n} = \sqrt{\omega_n^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\left( c_t^2 - \frac{2.1\lambda\alpha\Delta T_0}{2\rho} \right) k_n^2 - 2\beta^2} \quad (15)$$

El oscilador (13) es multi-paramétrico, por lo tanto se decidió explorarlo numéricamente a diferentes valores de parámetros. La Figura 1 muestra, como un ejemplo, tres gráficas típicas de soluciones numéricas para el modo fundamental  $n=1$  del cable delgado de cobre en diferentes frecuencias de la fuerza impulsora cerca de la frecuencia de resonancia,  $\Omega_{r,1} = 30.67$  Hz. Aquí se usa el coeficiente de amortiguamiento  $\beta = 0.1$ , tensión de equilibrio  $F_0 = 0.98$  N y un pequeño desfase  $\varphi = \pi/48$  rad. La gráfica (1a) muestra un típico decaimiento exponencial de la amplitud en un oscilador lineal amortiguado, así como pequeñas pulsaciones antes de que las oscilaciones lleguen al estado estacionario. La gráfica (1b), además del decaimiento exponencial de la amplitud, muestra pulsaciones significativas antes de que las oscilaciones lleguen al estado estacionario con la amplitud crecida en comparación con las de la gráfica (1a). Se podría esperar que el aumento de la amplitud en estado estacionario se explique por la resonancia en un oscilador lineal forzado. Esto es cierto en parte, pero la resonancia paramétrica desempeña el papel dominante en esas frecuencias.

A partir de la gráfica (1c) se observa que las oscilaciones de la cuerda se vuelven no acotadas en una pequeña vecindad de la frecuencia de resonancia desde 30.5 hasta 30.8 Hz. En esta situación, el amortiguamiento por sí solo no es suficiente para acotar el crecimiento ilimitado de la amplitud de las oscilaciones transversales de la cuerda en contraste con las de un oscilador armónico simple forzado en el que cualquier amortiguamiento finalmente limitará la amplitud de las oscilaciones. Nótese que la ecuación homogénea también muestra soluciones con crecimiento ilimitado de amplitud en frecuencias  $\Omega$  en la misma vecindad de la frecuencia de resonancia; las pulsaciones se observan también en intervalos estrechos de frecuencias cerca de los límites de la inestabilidad abajo y arriba de la frecuencia de resonancia, que corresponde a la dinámica de la ecuación de Mathieu [14, 15].

Esto indica que el origen de la inestabilidad es la resonancia paramétrica causada por la modulación armónica en la tensión de la cuerda a las frecuencias cercanas a  $2\Omega_{r,1}$ , y no a la

propia fuerza armónica externa. Además, en el caso de la ecuación homogénea, se encontró que la frecuencia de respuesta 30.67 Hz de la oscilación de la cuerda en el modo fundamental es independiente de la frecuencia  $\Omega$  en el intervalo de 30 hasta 34.5 Hz; teniendo en cuenta que 30.67 Hz es la frecuencia natural del oscilador lineal. Sin embargo, la frecuencia de respuesta de la cuerda oscilante forzada en el modo fundamental bajo la acción de la fuerza externa  $f_1 \cos(\Omega t)$  es igual a la frecuencia de la fuerza  $\Omega$  en el intervalo desde 30 hasta 34.5 Hz, en contraste con la de la ecuación homogénea. Un comportamiento similar en la dinámica de la cuerda se observa para los modos más altos a la frecuencia de la fuerza impulsora cerca de la frecuencia de resonancia de cada modo, y a diferentes temperaturas  $\Delta T_0$ .

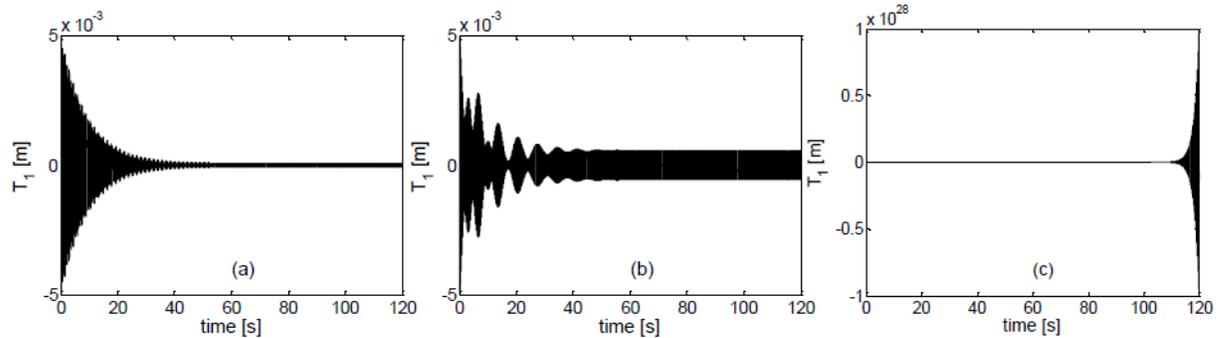


Figura 1. Solución numérica de ecuación (13) para el modo  $T_1$  en  $\Delta T_0 = 5^\circ\text{C}$ ,  $\delta = 0.5^\circ\text{C}$  y  $f_1 = 0.1$ : (a)  $\Omega = 30$  Hz, (b)  $\Omega = 30.5$  Hz y (c)  $\Omega = \Omega_r = 30.67$  Hz. La amplitud y velocidad iniciales son  $A_0 = 0.005$  m y  $V_0 = 0$ .

#### 4. NO LINEALIDAD GEOMETRICA Y CALENTAMIENTO ARMONICO DE LA CUERDA

El calentamiento armónico de la cuerda conductora de corriente ocurre al doble de la frecuencia de la fuerza impulsora y resulta en una disminución periódica de tensión en la cuerda; esto último provoca el crecimiento ilimitado en la amplitud de oscilaciones de la cuerda cuando la frecuencia de la fuerza impulsora está en una pequeña vecindad de la frecuencia de resonancia. El aumento de tensión en la cuerda debido a la variación de longitud cuando oscila afecta a la cuerda de manera opuesta a la del calentamiento. Por lo tanto, se espera que la no linealidad geométrica evite que las soluciones sean no acotadas en la resonancia paramétrica causada por el calentamiento armónico. La aproximación de modo único se utiliza aquí para observar eso.

Buscando la solución de la ecuación (10) en forma de series y suponiendo que el  $n$ -ésimo modo normal es dominante, se obtiene la ecuación de movimiento en la aproximación de modo único:

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + 2\beta \frac{dT_n}{dt} + \omega_n^2 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda \alpha \delta}{2\rho} / \left( \check{C}_t^2 - \frac{\lambda \alpha \delta}{2\rho} \right) \right) \cos(2\Omega t - 2\varphi) \right] T_n + \frac{C_t^2}{4} k_n^4 T_n^3 = f_n \cos(\Omega t) \quad (16)$$

Donde: 
$$\omega_n^2 = \left( \check{C}_t^2 - \frac{\lambda \alpha \delta}{2\rho} \right) k_n^2.$$

La ecuación (16) difiere de la lineal (13) en la no linealidad cúbica,  $\frac{C_t^2}{4} k_n^4 T_n^3$ . Para ver la

influencia de esta no linealidad, se resuelve numéricamente la ecuación (16) para  $n = 1$  con los mismos valores de parámetros que para la ecuación (13), variando la frecuencia de la fuerza impulsora en un intervalo alrededor de la frecuencia de resonancia  $\Omega_{r,1} = 30.67$  Hz.

La Figura 2 muestra gráficas representativas de oscilaciones del cable delgado de cobre en diferentes frecuencias de la fuerza impulsora. Se observa que la no linealidad cúbica evita las oscilaciones resonantes con un crecimiento ilimitado producido en la resonancia paramétrica por el calentamiento armónico de la cuerda. En la Figura 3 que muestra la amplitud de oscilaciones en estado estacionario contra la frecuencia de la fuerza impulsora, se observa un máximo local en la frecuencia de resonancia del oscilador lineal amortiguado  $\Omega = \Omega_{r,1} = 30.67$  Hz. Además, el aumento de la frecuencia de la fuerza impulsora hasta 33.9 Hz causa un crecimiento suave en la amplitud de oscilaciones de estado estacionario que termina en el decaimiento abrupto en el intervalo entre 33.907 y 33.908 Hz (se observó un efecto similar en [1]). En cuanto a la frecuencia de respuesta del oscilador forzado, ecuación (16), se encontró que en el modo fundamental la cuerda oscila a la frecuencia de la fuerza impulsora  $\Omega$  en el intervalo desde 30 hasta 34.5 Hz.

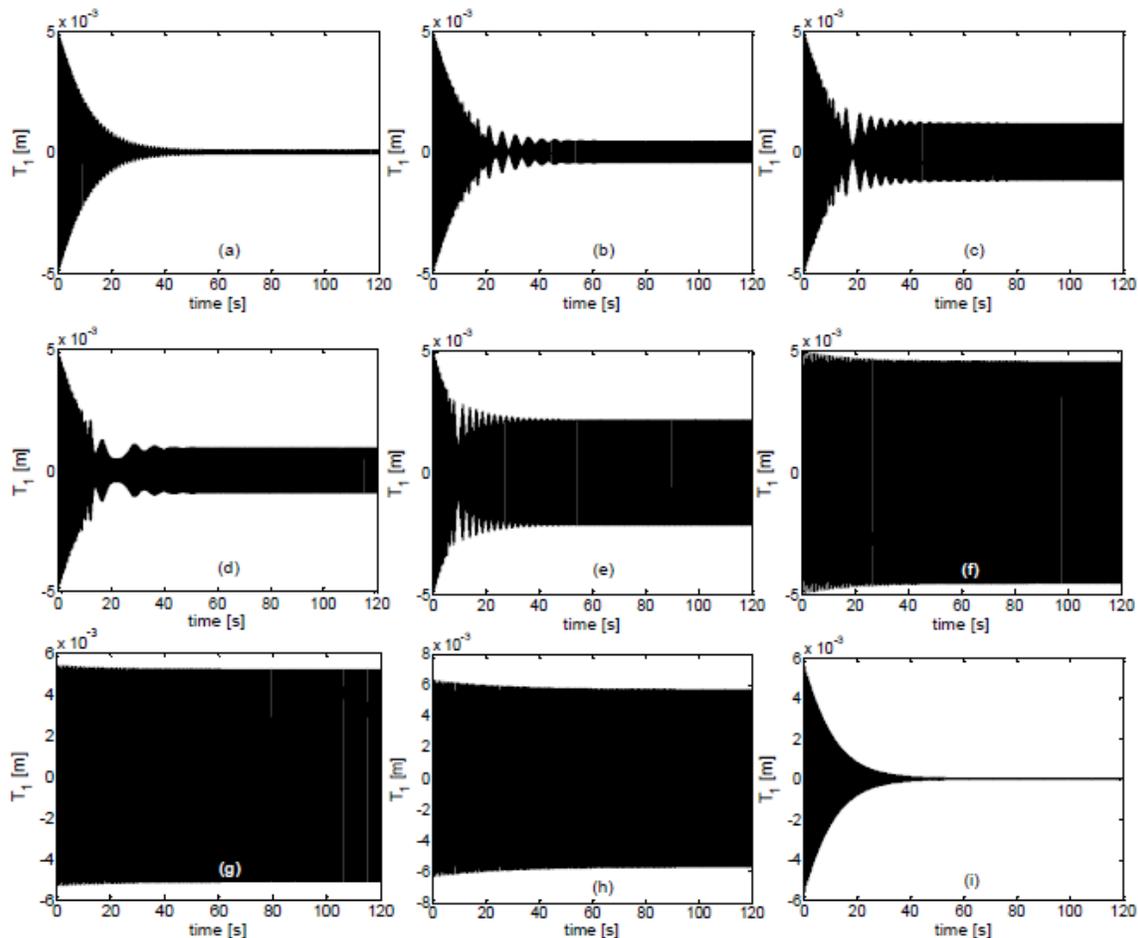


Figura 2. Solución numérica de la ecuación (16) para el modo fundamental  $T_1$  con  $\Delta T_0 = 5^\circ\text{C}$ ,  $\delta = 0.5^\circ\text{C}$ , y  $f_1 = 0.1$ : (a)  $\Omega = 30$  Hz, (b)  $\Omega = 30.5$  Hz, (c)  $\Omega = \Omega_r = 30.67$  Hz, (d)  $\Omega = 30.7$  Hz y (e)  $\Omega = 31$  Hz, (f)  $\Omega = 32.5$  Hz, (g)  $\Omega = 33$  Hz, (h)  $\Omega = 33.5$  Hz y (i)  $\Omega = 34$  Hz. La amplitud y velocidad iniciales son  $A_0 = 0.005$  m y  $V_0 = 0$ .

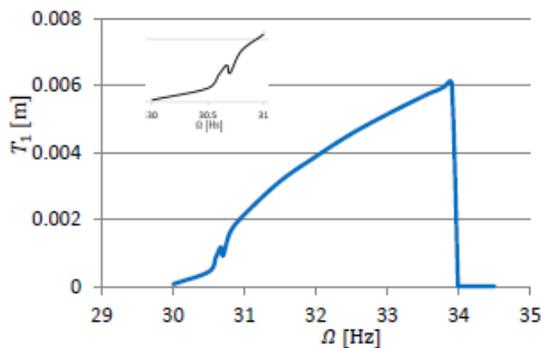


Figura 3. Curva de respuesta a la frecuencia de la fuerza, ecuación (16); amplitud de oscilaciones en estado estacionario.

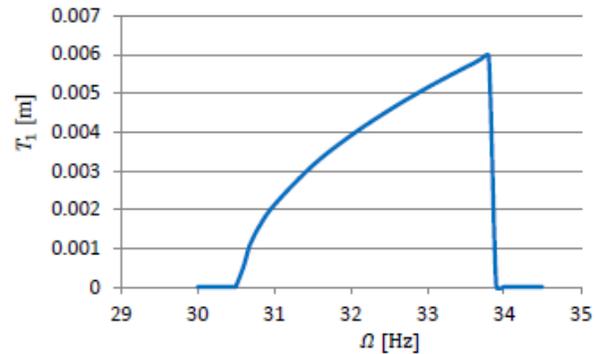


Figura 4. Curva de respuesta a la frecuencia de modulación para la ecuación homogénea adjunta a ecuación (16); amplitud de oscilaciones en estado estacionario.

Cuando se desactiva el campo magnético externo, la fuerza de Lorentz desaparece y solamente la corriente eléctrica alterna causará la excitación paramétrica de la cuerda por medio de su calentamiento; esta situación se describe por la parte homogénea de la ecuación (16). Las gráficas de Figuras 3 y 4 son idénticas, salvo que desaparece el pico de resonancia en la frecuencia natural del oscilador lineal  $\Omega = \Omega_{r,1} = 30.67$  Hz para la ecuación homogénea. Para la ecuación homogénea se encontró que cuando la frecuencia de modulación toma valores  $\Omega = 30, 30.5, 30.6, 30.7, 30.8$  Hz la frecuencia de respuesta es igual a la frecuencia natural del oscilador, 30.67 Hz; sin embargo, la frecuencia de respuesta es igual a la frecuencia de modulación para valores  $\Omega = 31, 31.5, 32, 32.5, 33, 33.5, 33.9$  Hz, y finalmente la frecuencia de respuesta vuelve a ser igual a 30.67 Hz para  $\Omega = 34, 34.5$  Hz. Los intervalos indicados se correlacionan claramente con la posición de las resonancias lineal y paramétrica de oscilador forzado en la Figura 3. Se observa que el efecto de la excitación paramétrica del oscilador difiere de la influencia de la fuerza externa.

También se encontró que las curvas de frecuencia de respuesta en estado estacionario presentadas en las Figuras 3 y 4 son independientes de las condiciones iniciales; que se verificó con 20 diferentes condiciones iniciales tomadas aleatoriamente para cada punto de la gráfica.

## 5. CONCLUSIONES

Un nuevo modelo no lineal de las oscilaciones forzadas de una cuerda bajo calentamiento armónico ha sido propuesto, resultando en una ecuación integro-diferencial no lineal. La no linealidad geométrica y la excitación paramétrica por el calentamiento de Joule que producen efectos opuestos sobre la tensión de la cuerda oscilante son incluidas en el modelo.

La ecuación lineal obtenida como resultado de despreciar la no linealidad geométrica se estudió numéricamente. Se encontró que el calentamiento armónico de Joule de la cuerda resulta en la inestabilidad paramétrica de las soluciones de resonancia creciendo sin límite en una pequeña vecindad de la frecuencia de resonancia, tanto en el caso de la ecuación homogénea (efecto de la excitación paramétrica pura del oscilador) y la ecuación no homogénea (efecto de la excitación paramétrica y fuerza externa). El amortiguamiento de la cuerda no evita soluciones de resonancia con crecimiento ilimitado. La inestabilidad observada en las soluciones numéricas del modelo lineal, ecuación (13), es de tipo Mathieu. El intervalo de frecuencias de resonancia, cerca de  $\Omega \approx \Omega_r$ , donde las soluciones son inestables, se amplía con el aumento de la temperatura  $\Delta T_0$ . En el caso de la ecuación lineal homogénea adjunta a la ecuación (13), la frecuencia de respuesta 30.67 Hz es igual a la frecuencia natural del oscilador lineal para el modo fundamental y es independiente de la

frecuencia de modulación  $\Omega$  en el intervalo desde 30 hasta 34.5 Hz. Sin embargo, la frecuencia de respuesta de oscilador (13) en el modo fundamental es igual a la frecuencia  $\Omega$  de la fuerza externa  $f_1 \cos(\Omega t)$  en el intervalo 30 hasta 34.5 Hz.

La no linealidad geométrica (término cúbico en la aproximación de modo único, ecuación (16)) evita las soluciones de resonancia con crecimiento ilimitado. La física del efecto es que el crecimiento de amplitud en la oscilación de la cuerda incrementa la tensión en la cuerda; esto último suprime el crecimiento ilimitado de amplitud. La misma conclusión sobre el efecto de la no linealidad cúbica se hizo en [16, 17]. Dos resonancias en oscilaciones de estado estacionario se observaron en el caso de la ecuación no homogénea no lineal (16): la primera es una resonancia lineal clásica cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia de resonancia del oscilador lineal, Figura (2c); después de la primera resonancia, la amplitud de las oscilaciones de estado estacionario crece gradualmente, cuando ambas frecuencias de la fuerza externa y de modulación aumentan, y a continuación cae bruscamente (inestabilidad de salto) a una amplitud muy pequeña, Figura 3. En cuanto a la frecuencia de respuesta de oscilador forzado ecuación (16) en el modo fundamental, se encontró que la cuerda oscila a la frecuencia de la fuerza impulsora  $\Omega$  en el intervalo de 30 a 34.5 Hz. Sin embargo, la cuerda excitada paraméricamente (ecuación homogénea adjunta a la ecuación (16)) tiene la peculiaridad en la frecuencia de respuesta en estado estacionario, la cual es igual a la mitad de la modulación para  $31 \leq \Omega \leq 33.9$  Hz, mientras que se hace igual a la frecuencia natural del oscilador a 30.67 fuera de este intervalo. Los intervalos indicados coinciden con la posición de las resonancias del oscilador forzado, Figura 3. En estado estacionario las curvas de respuesta a la frecuencia de la fuerza son independientes de las condiciones iniciales para valores de parámetros utilizados en este estudio.

## REFERENCIAS

1. E.W. Lee, "Non-linear forced vibration of a stretched string", Brit. J. Appl. Phys., Vol. 8, 10, 1957, pp. 411-413.
2. T.C. Moltano, N.B. Tufillaro, "An experimental investigation into the dynamics of a string", Am. J. Phys., Vol. 72, 9, 2004, pp. 1157-1169.
3. E.V. Kourmychev, *Aspectos físicos y matemáticos del movimiento ondulatorio* (U. de Sonora, Hermosillo, 1997).
4. G.F. Carrier, "On the nonlinear vibration problem of the elastic string", Quart. Appl. Math., Vol. 3, 1945, pp. 157-165.
5. G.F. Carrier, "A note on the vibrating string", Quart. Appl. Math., Vol. 7, 1949, pp. 97-101.
6. D.W. Oplinger, "Frequency response of a nonlinear stretched string", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 32, 12, 1960, pp. 1529-1538.
7. R. Narasimha, "Nonlinear vibration of an elastic string", J. Sound Vib., Vol. 8, 1, 1968, pp. 134-146.
8. H.L. Armstrong, "Forced vibration of string", Am. J. Phys., Vol. 50, 11, 1982, pp. 1028-1031.
9. J.A. Elliot, "Nonlinear resonance in vibrating string", Am. J. Phys., Vol. 50, 12, 1982, pp. 1148-1150.
10. N.B. Tufillaro, "Nonlinear and chaotic string vibrations", Am. J. Phys., Vol. 57, 5, 1989, pp. 408-414.
11. L.Q. Chen, H. Ding, "Two nonlinear models of a transversely vibrating string", Arch. Appl. Mech., Vol. 78, 5, 2008, pp. 321-328.
12. A. Watzky, "Non-linear three-dimensional large-amplitude damped free vibration of a stiff elastic stretched string", J. Sound Vib., Vol. 153, 1, 1992, pp. 125-142.
13. E.V. Kurmyshev, "Transverse and longitudinal mode coupling in a free vibrating soft string", Phys. Lett. A, Vol. 310, 2-3, 2003, pp. 148-160.

14. D.W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equations* (Oxford, New York, 2007).
15. L. Ruby, "Applications of the Mathieu equation", *Am. J. Phys.*, Vol. 64, 1, 1996, pp. 39-44.
16. D.R. Rowland, "Parametric resonance and nonlinear string vibrations", *Am. J. Phys.*, Vol. 72, 6, 2004, pp. 758-766.
17. H. Kidachi, H. Onogi, "Note on the stability of the nonlinear Mathieu equation", *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 98, 4, 1997, pp. 755-773.

# ACOPLAMIENTOS DE LOS BOSONES DE HIGGS NEUTROS ESCALARES Y PSEUDOESCALARES A CHARGINOS EN EL NMSSM

María del Rocío Aparicio Méndez<sup>1</sup>, José Enrique Barradas Guevara<sup>2</sup>, Olga Guadalupe Félix Beltrán<sup>1</sup>, Luz Adriana Cordero Cid<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP, Av. San Claudio y Río Verde, Edif. FCE1, C.U., CP 72570, Puebla, Pue., México. <sup>2</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Av. San Claudio y Río Verde, Edif. FM1, C.U., CP 72570, Puebla, Pue., México.

## RESUMEN

En este trabajo se expone el cálculo del "ancho parcial de decaimiento"<sup>1</sup> para los acoplamientos de bosones de Higgs neutros a charginos" en el marco de referencia en reposo dentro de un modelo supersimétrico básico: el "Modelo Siguiendo al Mínimo Supersimétrico" (NMSSM<sup>2</sup> por sus siglas en inglés). Cuando los bosones de Higgs neutros decaen a charginos, los procesos que se presentan son:  $h_a \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-$  para los bosones de Higgs neutros escalares<sup>3</sup> y  $h_a \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-$  para los bosones de Higgs neutros pseudoescalares. Después de llevar a cabo dichos procesos, se obtiene de manera explícita la fórmula para determinar el ancho parcial de decaimiento, siendo esta la aportación del presente trabajo.

## 1. INTRODUCCIÓN

El Modelo Siguiendo al Mínimo Supersimétrico (NMSSM por sus siglas en inglés) es la extensión más simple del Modelo Mínimo Supersimétrico (MSSM por sus siglas en inglés) y esto se debe a la adición de un campo escalar singlete de Higgs<sup>4</sup>. Este modelo<sup>5</sup> es motivado por varios resultados como la solución al llamado "problema del parámetro  $\mu$ ", la posibilidad de que exista el rompimiento espontáneo de la simetría CP entre otros. Además de contener el NMSSM los anteriores resultados, este modelo cuenta con nuevos parámetros<sup>6</sup>:

- 1) En el sector neutralino se tiene el valor de expectación del vacío  $x$  del campo singlete,  $\tan \beta$  y los acoplamientos  $\lambda$  y  $\kappa$  donde el producto  $\lambda x = \mu_{eff}$ . A este sector hay que agregarle un neutralino, por lo que contendrá cinco neutralinos, uno más que el MSSM. La adición de este neutralino puede cambiar de forma significativa la fenomenología de este sector.
- 2) El sector de Higgs cuenta con los parámetros  $A_\lambda$ , y  $A_\kappa$  y cinco bosones de Higgs neutros físicos, tres escalares  $S_a$  ( $a=1,2,3$ ) dos pseudoescalares  $P_\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ) y dos bosones cargados  $H^\pm$ . Los modelos supersimétricos no mínimos como el NMSSM, cobran cada día una mayor importancia porque pueden eludir algunas de las restricciones que se presentan en el MSSM, y que a su vez pueden llevar a nuevos fenómenos con señales experimentales interesantes.

## 2. GENERALIDADES

El uso del término *mínimo* en la literatura tiene dos elecciones básicas. La primera es el Modelo Mínimo Supersimétrico y la segunda es, agregar un campo escalar complejo el cual es un singlete a los dos dobletes del MSSM, dando como resultado un "Modelo Siguiendo al Mínimo Supersimétrico" (abreviado NMSSM del inglés Next-To-Minimal Supersymmetric Standard Model). Por lo tanto, se puede ahora escribir una versión supersimétrica de este modelo, donde la simetría de norma  $SU(2) \times SU(1)$  es rota espontáneamente<sup>7</sup>.

En este nuevo modelo (NMSSM), el hecho de agregar un singlete extra al superpotencial trae como consecuencia que, tanto el sector de Higgs como el sector neutralino queden desacoplados, esto genera lo siguiente: El sector de Higgs ahora contendrá cinco bosones de Higgs neutros físicos, de los cuales tres son escalares  $S_a = h_a$  ( $a=1,2,3$ ) y dos pseudoescalares  $P_\alpha = h_\alpha$  (con  $\alpha=1,2$ ), y dos partículas de Higgs físicas cargadas  $H^\pm$  degeneradas; mientras que el sector neutralino es incrementado al contener cinco neutralinos, esto cambia significativamente la fenomenología que se tenía respecto de este sector en el MSSM. El resto del espectro de partículas en el NMSSM es el mismo que se había considerado en el MSSM<sup>8</sup>.

### SECTOR DE HIGGS

El sector de Higgs en el NMSSM consiste de los dobletes de Higgs y un singlete de Higgs extra. Al campo singlete extra, le es permitido que se acople solamente a los dobletes de Higgs del modelo, siendo más específicos únicamente los campos singlete son los que se acoplan a los dobletes higgsino. En consecuencia, los acoplamientos del singlete  $S$  a bosones de norma y fermiones serán manifestados solamente a través de las mezclas con los campos dobletes de Higgs. Después de que los campos de Higgs toman los valores de expectación del vacío y girando los modos Goldstone, queda un par de bosones de Higgs cargados, tres campos escalares reales y dos campos pseudoescalares<sup>9</sup>. Por tanto, el sector de Higgs en el NMSSM contiene cinco bosones de Higgs neutros físicos, tres de ellos son escalares  $h_a = S_a$  ( $a=1,2,3$ ) y dos pseudoescalares  $h_\alpha = P_\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ) más dos bosones de Higgs cargados  $H^\pm = C^\pm$ .

### SECTOR CHARGINO

De la mezcla de higgsinos cargados ( $\tilde{H}_1^+$  y  $\tilde{H}_2^-$ ) y de winos cargados ( $\tilde{W}^+$  y  $\tilde{W}^-$ ) se forman dos eigenestados de masa con carga  $\pm 1$  llamados *charginos*, los cuales son fermiones de Dirac de cuatro componentes<sup>10</sup>. Su notación es  $\tilde{\chi}_i^\pm$  con  $i=1,2$  y son determinados por la diagonalización de la correspondiente matriz de masa. Por convención son denotados en orden ascendente de acuerdo a sus masas, es decir  $m_{\tilde{\chi}_1^\pm} < m_{\tilde{\chi}_2^\pm}$ .

Lo que ahora corresponde es el analizar el espectro de masas para los charginos<sup>11</sup>. Tomando como base

$$\psi^\pm = \left( \tilde{W}^\pm, \tilde{H}_1^\pm, \tilde{W}^\mp, \tilde{H}_2^\mp \right)$$

los términos de masa para los charginos en el lagrangiano son

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}(\psi^\pm)^T M_{\tilde{\chi}_i^\pm} \psi^\pm + h.c.$$

Donde  $M_{\tilde{\chi}_i^\pm}$  es una matriz de 2x2 y  $X$  es la correspondiente matriz de masa de los charginos, estas matrices se encuentran expresadas por

$$M_{\tilde{\chi}_i^\pm} = \begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X^T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} \operatorname{sen} \beta m_W \\ \sqrt{2} \cos \beta m_W & \mu \end{pmatrix}$$

La matriz de masa de los charginos depende de los parámetros  $M_2$ ,  $\mu$  y  $\tan \beta$ ; donde  $M_2$  es el término de masa gaugino del rompimiento suave asociado con  $SU(2)$  mientras  $\mu$  es el llamado parámetro de masa higgsino,  $\tan \beta$  es la razón de los valores de expectación de los dos campos de Higgs y  $m_W^2 = (g^2/2)(v_1^2 + v_2^2)$ .

La matriz  $X$  puede ser diagonalizada por dos matrices unitarias  $U$  y  $V$  de 2 x 2 de la forma<sup>12</sup>

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tal que

$$U^* X V^{-1} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_1^\pm} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_2^\pm} \end{pmatrix} = M_D$$

donde  $M_D$  es la matriz diagonal de masa de los charginos. Las matrices  $U$  y  $V$  pueden elegirse de manera que los elementos de la diagonal de la matriz  $M_D$  sean reales y positivos. Los eigenestados de masa de cuatro componentes que son los charginos, se encuentran definidos en términos de los campos de dos componentes como

$$\tilde{\chi}_1^+ = \begin{pmatrix} \chi_1^+ \\ \bar{\chi}_1^- \end{pmatrix} \quad \tilde{\chi}_2^+ = \begin{pmatrix} \chi_2^+ \\ \bar{\chi}_2^- \end{pmatrix}$$

Los eigenestados de masa se encuentran relacionados con los eigenestados de norma a través de las matrices  $U$  y  $V$  de acuerdo con

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1^- \\ \tilde{\chi}_2^- \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \tilde{W}^- \\ \tilde{H}_2^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1^+ \\ \tilde{\chi}_2^+ \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ \tilde{H}_1^+ \end{pmatrix}$$

Generando los eigenestados de masa<sup>13</sup>  $\tilde{\chi}_i^\pm$ .

En el límite de la ecuación

$$m_Z \ll |\mu \pm M_1| \quad \text{y} \quad m_Z \ll |\mu \pm M_2|$$

y tomando  $M_2$  y  $\mu$  reales, se encuentra que los eigenestados de masa para los charginos consisten de un casi wino  $\tilde{\chi}_1^\pm$  y de un casi Higgsino  $\tilde{\chi}_2^\pm$  cuyas expresiones son

$$m_{\tilde{\chi}_1^\pm} = M_2 - \frac{m_W^2(M_2 + \mu \operatorname{sen} 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \dots$$

$$m_{\tilde{\chi}_2^\pm} = |\mu| + \frac{m_W^2(|\mu| + \epsilon M_2 \operatorname{sen} 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \dots$$

Aquí se está suponiendo que  $M_2 < |\mu|$  y que  $\epsilon$  es el signo de  $\mu$ <sup>11</sup>.

### PROCESOS DENTRO DEL NMSSM

En el "Modelo Siguiendo al Mínimo Supersimétrico"(NMSSM), se llevará a cabo el cálculo del ancho parcial de decaimiento para los acoplamientos de bosones de Higgs neutros a charginos. Para el caso en que los bosones de Higgs neutros decaen en charginos, los procesos que se exponen son:  $h_a \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-$  para los bosones de Higgs neutros escalares y  $h_a \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-$  para los bosones de Higgs neutros pseudoescalares.

Proceso  $h_a \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-$

El proceso que ahora nos ocupa corresponde al acoplamiento de los bosones de Higgs neutros escalares a charginos, el diagrama de Feynman de este proceso se ilustra en la figura 1, en tanto la expresión para la amplitud es

$$\mathcal{M} = -ig \left[ \frac{Q_{aij}^* \bar{u} P_L v}{g} + \frac{Q_{aij} \bar{u} P_R v}{g} \right] \quad (1)$$

y el adjunto hermitiano de  $M$

$$\mathcal{M}^\dagger = ig \left[ \frac{Q_{aji} \bar{v} P_R u}{g} + \frac{Q_{aji}^* \bar{v} P_L u}{g} \right] \quad (2)$$

Tomando las ecuaciones (1) y (2) la expresión para la amplitud cuadrada

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = g^2 \left\{ \left[ M_{h_a}^2 - m_{\tilde{\chi}_i^+}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^-}^2 \right] \left[ \frac{1}{g^2} (Q_{aij}^* Q_{aji} + Q_{aij} Q_{aji}^*) \right] \right. \\ \left. - \left[ 2m_{\tilde{\chi}_i^+} m_{\tilde{\chi}_j^-} \right] \left[ \frac{1}{g^2} (Q_{aij}^* Q_{aji}^* + Q_{aij} Q_{aji}) \right] \right\} \quad (3)$$

donde los acoplamientos  $Q_{aij}$  están dados por

$$Q_{aij} = \frac{g}{\sqrt{2}}(U_{a1}^S U_{i2} V_{j1} + U_{a2}^S U_{i1} V_{j2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(U_{a3}^S U_{i2} V_{j2}) \quad (4)$$

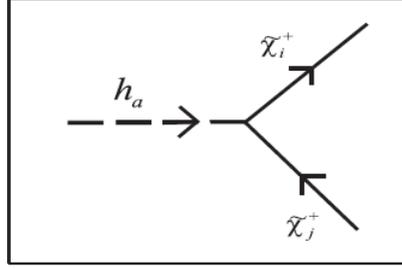


Figura 1: Diagrama de Feynman para los acoplamientos de bosones de Higgs escalares neutros

$$h_a \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^- \quad (a = 1, 2, 3) \text{ en charginos.}$$

En este momento se está en condiciones de determinar la expresión del ancho parcial de decaimiento, recurriendo a la ecuación

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi(1 + \delta(i, j))} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{|\vec{p}_1|}{M_{H^0}^2} \quad (5)$$

y llevando a cabo las operaciones necesarias se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{8\pi(1 + \delta(i, j))} \left[ \frac{[(M_{h_a}^2 - (m_{\tilde{\chi}_i^+} + m_{\tilde{\chi}_j^-})^2)(M_{h_a}^2 - (m_{\tilde{\chi}_i^+} - m_{\tilde{\chi}_j^-})^2)]^{\frac{1}{2}}}{(2M_{h_a})(M_{h_a}^2)} \right] \\ & \times \left( g^2 \left\{ [M_{h_a}^2 - m_{\tilde{\chi}_i^+}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^-}^2] \left[ \frac{1}{g^2} (Q_{aij}^* Q_{aji} + Q_{aij} Q_{aji}^*) \right] - [2m_{\tilde{\chi}_i^+} m_{\tilde{\chi}_j^-}] \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[ \frac{1}{g^2} (Q_{aij}^* Q_{aji}^* + Q_{aij} Q_{aji}) \right] \right\} \right) \quad (\text{A.} \quad (6) \end{aligned}$$

Realizando las debidas operaciones se logra simplificar la ecuación (6), de manera que se tiene una ecuación final para el ancho parcial de decaimiento

$$\begin{aligned}
\Gamma(h_a \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-) &= \frac{g^2 \lambda_{\frac{1}{2}}}{16\pi M_{h_a}^3 (1 + \delta(i, j))} \left[ \left( \frac{1}{g^2} \left[ (Q_{aij})^2 + (Q_{aji})^2 \right] \right) \right. \\
&\times \left( M_{h_a}^2 - m_{\tilde{\chi}_i^+}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^-}^2 \right) - \left[ 4m_{\tilde{\chi}_i^+} m_{\tilde{\chi}_j^-} \right] \\
&\times \left. \left[ \frac{1}{g^2} (Q_{aij})(Q_{aji}) \right] \right]
\end{aligned} \tag{7}$$

PROCESO  $h_\alpha \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-$

El proceso que se expone, es el decaimiento de bosones de Higgs pseudoescalares neutros decayendo en charginos, dicho proceso se muestra en la figura 2. Para llevar a cabo el cálculo del ancho parcial de decaimiento, es indispensable contar con la ecuación de la amplitud

$$\mathcal{M} = g \left[ \frac{R_{\alpha ij}^* \bar{u} P_L v}{g} - \frac{R_{\alpha ij} \bar{u} P_R v}{g} \right] \tag{8}$$

y el adjunto hermitiano de  $M$

$$\mathcal{M}^\dagger = g \left[ \frac{R_{\alpha ji} \bar{v} P_R u}{g} - \frac{R_{\alpha ji}^* \bar{v} P_L u}{g} \right] \tag{9}$$

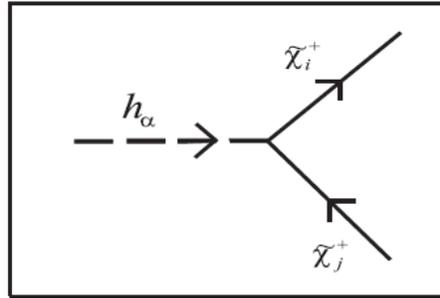


Figura 2: Diagrama de Feynman para los acoplamiento de bosones de Higgs pseudoescalares neutros  $h_\alpha \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-$  ( $\alpha = 1, 2$ ) en charginos.

La expresión para la amplitud cuadrada se muestra en (10)

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = g^2 \left\{ \left[ M_{h_\alpha}^2 - m_{\tilde{\chi}_i^+}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^-}^2 \right] \left[ \frac{1}{g^2} \left( R_{\alpha ij}^* R_{\alpha ji} + R_{\alpha ij} R_{\alpha ji}^* \right) \right] \right. \\ \left. + \left[ 2m_{\tilde{\chi}_i^+} m_{\tilde{\chi}_j^-} \right] \left[ \frac{1}{g^2} \left( R_{\alpha ij}^* R_{\alpha ji}^* + R_{\alpha ij} R_{\alpha ji} \right) \right] \right\} \quad (10)$$

Donde los acoplamientos  $R_{\alpha ij}$  están dados por

$$R_{\alpha ij} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (U_{\alpha 1}^P U_{i2} V_{j1} + U_{\alpha 2}^P U_{i1} V_{j2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (U_{\alpha 3}^P U_{i2} V_{j2}) \quad (11)$$

La ecuación (5) es la fórmula para el ancho parcial de decaimiento, por tanto sustituyendo las ecuaciones pertinentes resulta

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi(1 + \delta(i, j))} \left[ \frac{[(M_{h_\alpha}^2 - (m_{\tilde{\chi}_i^+} + m_{\tilde{\chi}_j^-})^2)(M_{h_\alpha}^2 - (m_{\tilde{\chi}_i^+} - m_{\tilde{\chi}_j^-})^2)]^{\frac{1}{2}}}{(2M_{h_\alpha})(M_{h_\alpha}^2)} \right] \\ \times \left( g^2 \left\{ \left[ M_{h_\alpha}^2 - m_{\tilde{\chi}_i^+}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^-}^2 \right] \left[ \frac{1}{g^2} \left( R_{\alpha ij}^* R_{\alpha ji} + R_{\alpha ij} R_{\alpha ji}^* \right) \right] + \left[ 2m_{\tilde{\chi}_i^+} m_{\tilde{\chi}_j^-} \right] \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \frac{1}{g^2} \left( R_{\alpha ij}^* R_{\alpha ji}^* + R_{\alpha ij} R_{\alpha ji} \right) \right] \right\} \right) \quad (A. \quad (12)$$

Para reducir términos, se efectúan las debidas operaciones con los elementos de matriz, obteniéndose (13) que es la ecuación para el ancho parcial de decaimiento.

$$\Gamma(h_\alpha \rightarrow \tilde{\chi}_i^+ \tilde{\chi}_j^-) = \frac{g^2 \lambda^{\frac{1}{2}}}{16\pi M_{h_\alpha}^3 (1 + \delta(i, j))} \left[ \left( \frac{1}{g^2} \left[ (R_{\alpha ij})^2 + (R_{\alpha ji})^2 \right] \right) \right. \\ \times \left( M_{h_\alpha}^2 - m_{\tilde{\chi}_i^+}^2 - m_{\tilde{\chi}_j^-}^2 \right) + \left[ 4m_{\tilde{\chi}_i^+} m_{\tilde{\chi}_j^-} \right] \\ \left. \times \left[ \frac{1}{g^2} \left( R_{\alpha ij} \right) \left( R_{\alpha ji} \right) \right] \right] \quad (13)$$

### 3. CONCLUSIONES

En el marco del modelo supersimétrico básico NMSSM se llevó a cabo el cálculo del ancho parcial de decaimiento para los acoplamientos de los bosones de Higgs neutros en carginos, recuperando las ecuaciones de los anchos parciales de decaimiento que se encuentran en la literatura para esta clase de procesos. Una aportación de este trabajo, es el haber obtenido un resultado que muestra la fórmula explícita que determina el ancho parcial de decaimiento para los bosones de Higgs neutros en carginos en el NMSSM.

## BIBLIOGRAFÍA

1. David Griffiths, Introduction to elementary particles, Wiley, New York, 1987.  
J. F. Gunion and H. E. Haber, Nucl. Phys. B 272 (1986).  
F. Franke and H. Fraas, hep-ph/9511275v1.
2. G. Moortgat-Pick, hep-ph/0801.2414v1.
3. U. Ellwanger, M. Rausch de Traubenberg and C. A. Savoy, hep-ph/9611251v1.
4. G. Moortgat-Pick, S. Hesselbach, F. Franke, H. Fraas, hep-ph/0502036v2.
5. J. F. Gunion and H. E. Haber, Nucl. Phys. B 272 (1986).
6. F. Franke and H. Fraas, hep-ph/9512366v1.
7. Kingman Cheung and Tie-Jiun Hou, hep-ph/0809.1122v2.
8. J. F. Gunion and H. E. Haber, Nucl. Phys. B 272 (1986).
9. S. P. Martin, hep-ph/9709356v5.
10. J. F. Gunion and H. E. Haber, Nucl. Phys. B 272 (1986).
11. A. Freitas, A. von Manteuffel and P. M. Zerwas, hep-ph/0310182v2.

# VALORACIÓN DEL PROCESO DE INTERPOLACIÓN EN VALORES DE INCERTIDUMBRE Y DE ERROR DE MEDICIÓN CON APROXIMACIONES POLINOMIALES Y EXPONENCIALES.

Gabino Estevez Delgado<sup>1</sup>, Joaquin Estevez Delgado<sup>2</sup>, Itzia Alejandra Bonilla Paz<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Químico Farmacobiología. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. <sup>3</sup>PIMCB. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

## RESUMEN

El uso cotidiano de las interpolaciones en ocasiones deja de lado los aspectos de los errores de medición, en el proceso de interpolación se consideran desviaciones entre la curva ideal con respecto a la curva en la que esperamos un error despreciable, mientras que los errores generados consideran aspectos que no necesariamente responden a una linealidad, como lo puede ser la interpolación de mínimos cuadrados o el método de Newton Lagrange. Una peculiaridad de los errores es que la generación de ellos está ligada a consideraciones de crecimiento geométrico. La descripción de la generación de ellos no se pueden considerar como sumas aritméticas, sino que el proceso es geométrico, como se destaca en la ley de propagación de errores. En este trabajo describimos mediante un ejemplo de valores de materiales de referencia óptica en el espectro UV-vis que la interpolación de valores de medición correspondientes a una aproximación polinomial con respecto a una aproximación exponencial no son válidos en todo el espacio, lo cual justifica los límites lineales de trabajo y las exigencias para la realización de interpolaciones y la exclusión legal de las extrapolaciones, como es limitado en algunas normas, incluyendo la Ley Federal de Metrología. Concluimos que este análisis podría aportar consideraciones a tener cuando no contamos con límites de trabajo o ámbitos lineales, particularmente utilizados en normas ISO que requieren métodos de validación de parámetros lineales.

## 1. INTRODUCCIÓN

En ocasiones necesitamos conocer si una determinada variable se puede poner en función de otra que interviene en el fenómeno o experimento que deseamos construir, por lo menos construir una función que aproxime el mayor número de eventos, de tal forma que se han construido metodologías que permiten generar funciones que aproximan a dicha realidad, comúnmente llamadas técnicas de interpolación lineal.

Las técnicas de interpolación lineal son ampliamente difundidas cuando existen correlaciones entre las variables, generalmente ligado al coeficiente de interpolación obtenido con los datos obtenidos de manera experimental. La robustez de la muestra a considerar ofrece la posibilidad de un análisis dentro de las técnicas de normalidad, es decir, para el caso que la muestra sea representativa el coeficiente a utilizar es el coeficiente de correlación de Pearson ( $r$ ), en tanto que cuando la representatividad de los datos no es buena el coeficiente a calcular para la correlación es el coeficiente de correlación de Spearman ( $\rho$ ). Una peculiaridad de estos coeficientes, tanto para el caso paramétrico como no paramétrico, es el hecho que entre más cercano a uno, en valor absoluto, es mejor la aproximación a la función propuesta. El grado de exigencia está estrechamente ligado a la significancia asintótica dada para el análisis.

La aplicación más importante al encontrar una función por medio de una regresión es el hecho que deseamos encontrar valores que desconocemos dentro del alcance de los valores que nos ha permitido encontrar la función, proceso que comúnmente se conoce como método de interpolación. La necesidad de poder encontrar valores de una variable en la que no hemos realizado mediciones lleva a este tipo de estudios, principalmente impulsado por la falta de generación de condiciones de repetibilidad del proceso, además de los aspectos económicos. Desde luego, aun cuando el método nos permite realizar inferencias sobre información que no medimos, es natural considerar que debemos de tener cuidado con los extremos pues no sabemos si estos últimos presentan un caída abrupta en sus valores, tal es el caso de los materiales de referencia en óptica conocidos como materiales de corte o los que en ocasiones en el campo de la electrónica se presenta para limitar el paso de corriente que rebasa la tolerancia permitida, entre otros.

Debido a los avances científicos y tecnológicos, los criterios de una buena aproximación basada en los coeficientes de correlación cercanos a uno, se han visto cada vez más limitados [1, 2]. Sin embargo, se ha demostrado que no siempre una buena correlación lineal es un parámetro aceptable para determinar que estamos realizando la mejor selección. Se ha encontrado, que en la determinación de parámetros ópticos una buena opción es considerar además los errores de medición como parámetros de comparación [3].

Aun cuando en otras ocasiones se requiere correlacionar una variable con varias a la vez [4], en este trabajo solo nos limitaremos a la aproximación considerando una sola variable con otra, es decir, excluirémos de este trabajo el caso de la regresión múltiple.

Un caso interesante que presentaremos es el análisis sobre un conjunto de valores de materiales de referencia óptico neutros, que al ser abordados mediante un método de linealidad la predicción para la linealidad es grande, mas sin embargo, el comportamiento de los errores de medición puede conllevar problemas en su uso. Realizaremos un análisis de las consideraciones de otra posible aproximación a fin de evitar problemas de aproximación de toda la curva y la consideración de todos los valores.

## 2. DESARROLLO

Antes de abordar el tema de la curva de regresión y la interpolación de valores, iniciaremos haciendo algunas consideraciones alrededor de los aspectos las características de los materiales de referencia. El punto de partida es el hecho que todo material de referencia certificado es soportado por un documento llamado certificado de calibración o informe de caracterización, según la denominación que se le ha dado en los distintos momentos en los últimos 10 años. La peculiaridad de estos documentos presentan para valores determinados datos para el error de medición y uno para la Incertidumbre, ambas características representativas de la variabilidad de las mediciones [5]. De fondo, las consideraciones expuestas dejan ver que los materiales y las mediciones amparan características de la información de una distribución normal de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (1)$$

Con  $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$  la variable tipificada, con  $(\mu, \sigma)$  media y desviación estándar poblacionales respectivamente.

Para el proceso de la obtención de la incertidumbre de las mediciones se considera la ley de propagación de errores, en la cual cada variabilidad  $u(x_i)$  obedece a una distribución de tipo normal. La incertidumbre previa, llamada combinada, considera la suma geométrica de cada una de las variaciones y es presentada como:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u(x_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)} \quad (2)$$

Como se expusó en un trabajo previo [3], las consideraciones a tomar para las interpolaciones no solo deben considerar aspectos exclusivamente estadísticos, para la obtención de los coeficientes de correlación sino que además deberán de exhibir aspectos de consideraciones de modelos físicos o biológicos sobre la materia o principio de medición. Tomemos un material de absorbancia óptica neutra a 90% de transmitancia, con valores caracterizados en el Centro Nacional de Metrología con valores como los que se muestran a continuación:

Longitud de onda	MR 16-90		Longitud de onda	MR 16-90
225	90.805		546.1	93.139
250	91.468		550	93.138
280	91.957		590	93.187
340	92.527		620	93.223
360	92.614		630	93.244
400	92.775		635	93.244
405	92.812		650	93.247
440	92.924		690	93.304
450	92.945		700	93.302
465	92.987		750	93.339
490	93.037			

Tabla 1. Material certificado de densidad óptica neutra en transmitancia.

Realizando su gráfica de interpolación tendríamos:

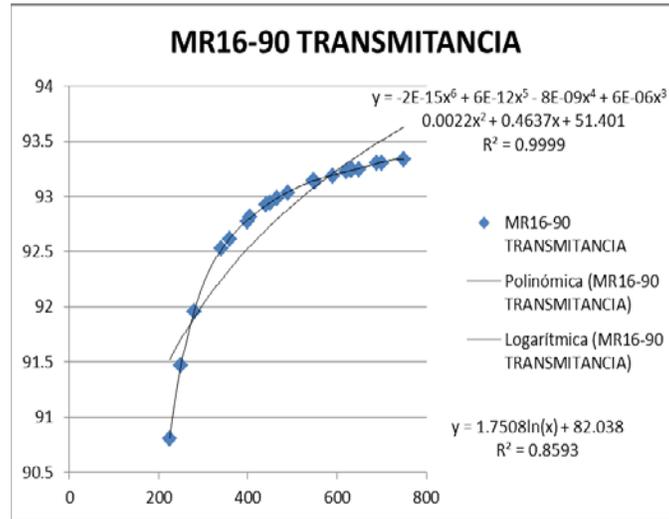


Gráfico 1. Aproximaciones polinomiales y logarítmicas a partir de la Tabla 1.

Del análisis realizado, vemos que la mejor aproximación es la polinomial. Sin embargo, en el mismo trabajo se planteaba la necesidad de poder realizar interpolaciones alrededor de 230 nm, generándose un análisis considerando no solo los datos de incertidumbre reportada en el certificado. Al sustituir vemos que los errores de la aproximación polinomial crecen de manera considerable con respecto a los errores cometidos con respecto la aproximación logarítmica, como se puede apreciar en la siguiente tabla.

Longitud de onda	MR 16-90	POLINOMIAL	LOGARITMICA	ERROR POR APROXIMACIÓN POLINOMIAL	ERROR POR APROXIMACION LOGARITMICA
225	90.805	95.400	91.521	4.595	0.716
250	91.468	97.697	91.705	6.229	0.237
251	91.957	100.659	91.903	8.702	0.054
252	92.527	107.828	92.243	15.301	0.284
253	92.614	110.706	92.343	18.092	0.271

Tabla 2. Con datos obtenidos mediante la interpolación dada, así mismo con los errores de aproximación para cada caso.

Luego entonces, las consideraciones de los modelos, en este caso la Ley de Lambert Beer, deberan de ponderarse por encima de las aproximaciones dejando de lado la consideración del coeficiente de correlación. Obteniendo el gráfico de interpolación:

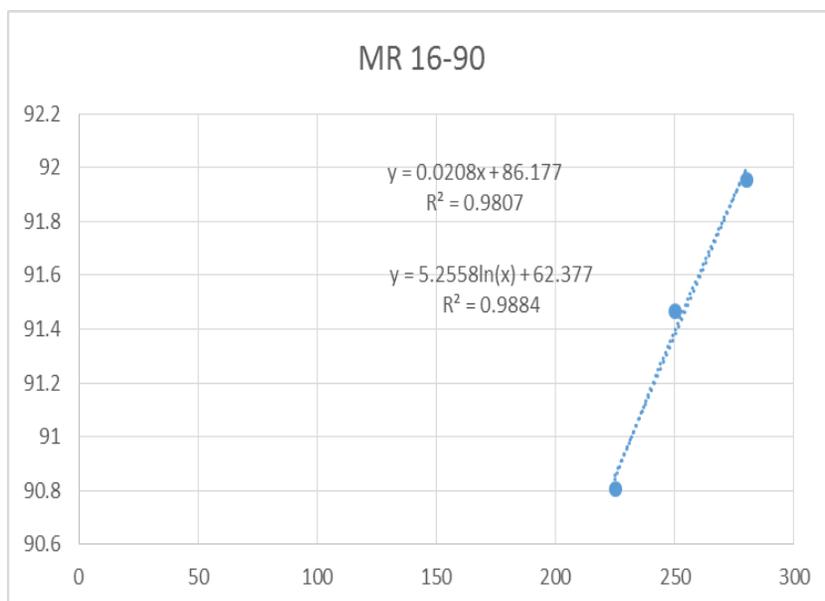


Gráfico 2. Aproximaciones polinomiales y logarítmicas a partir de las tres primeras longitudes de onda de la Tabla 1.

Considerando las ecuaciones interpolantes, calculamos la aproximación, tendríamos:

Longitud de onda	de MR 16-90	Aproximación lineal	Aproximación logarítmica	Error de aproximación lineal	Error de aproximación logarítmica
225	90.805	90.857	90.84294049	0.05	0.04
250	91.468	91.377	91.39669429	0.09	0.07
280	91.957	92.001	91.9923272	0.04	0.04

Tabla3. Aproximaciones lineal y logarítmica para las longitudes 225 nm, 250 nm y 280 nm, con los errores de las aproximaciones.

Si bien es cierto que los valores son mas grandes con la aproximación lineal, estos no son tan grandes. Considerando una prueba t para medias iguales el t experimental es de 0.7615 con respecto al valor crítico de 2.7765 y  $p=0.05$ , vemos que no existen diferencias significativas entre ambas aproximaciones.

### 3. CONCLUSIONES

Debido a la importancia que presentan las aproximaciones lineales o polinomiales, particularmente en las consideraciones metrológicas como es el ámbito lineal de trabajo, ámbito de trabajo, sensibilidad y la especificidad se hace necesario considerar algunos aspectos como un intervalo pequeño en la curva de regresión en lugar de la aproximación con totalidad de los datos. Es importante subrayar que sigue siendo preponderante la consideración del modelo físico, químico o biológico considerado en la obtención de la incertidumbre a fin de no generar criterios solo sobre las regresiones y coeficientes de correlación, pero la aproximación puede ser útil si solo se consideran pocos valores. Aun cuando no podemos generalizar, en nuestro caso vimos oportuno realizar un análisis de medias mediante la prueba t-student, misma que nos permitió validar que ambas aproximaciones son estadísticamente significativas.

### BIBLIOGRAFÍA

1. Pfaffl MW (2001). A new mathematical model for relative quantification in real-time RT-PCT. *Nucleic Acids Res* 29(9)
2. Lawrence I-Kuei, L (1989). A concordance correlation coefficient to evaluate reproducibility. *Biometrics*, 255-268
3. Estevez G, Estevez J, Bonilla I. A, Chávez A.C., (2012) EXPLORANDO EL LADO OSCURO EN LAS TÉCNICAS DE INTERPOLACIÓN. XIII Evento Internacional MATECOMPU'2012", "La enseñanza de la matemática, la estadística y la computación", III Congreso Internacional "ALAMMI'2012".
4. Numpachoen K, Atsawarungrangkit A. (2012). Generating correlation matrices based on the boundaries of their coefficients. *PLoS One*. 7(11)
5. Centro Nacional de Metrología (CENAM); Guía para la estimación de la Incertidumbre < [http://www.cenam.mx/publicaciones/gratuitas/descarga/default.aspx?arch=/GUIA\\_P\\_ESTIMAR\\_INCERTIDUMBRE\\_Med%202004\\_09\\_27.pdf](http://www.cenam.mx/publicaciones/gratuitas/descarga/default.aspx?arch=/GUIA_P_ESTIMAR_INCERTIDUMBRE_Med%202004_09_27.pdf) >, [Fecha de consulta: 1 de enero de 2012]

## ELEMENTOS DE CORRELACION ENTRE EL ERROR NORMALIZADO Y LA INCERTIDUMBRE EN MATERIALES DE REFERENCIA CERTIFICADOS

Gabino Estévez Delgado<sup>1</sup>, Joaquín Estévez Delgado<sup>2</sup>, Arturo Chávez Esquivel<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

<sup>1,3</sup>Facultad de Químico Farmacobiología. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

### RESUMEN

La estructura metrológica en México cada vez es más robusta debido a las exigencias de la globalización que presiona a las empresas en la certificación y acreditación, lo cual se puede apreciar en el número creciente de laboratorios o empresas acreditadas. Un aspecto importante de la trazabilidad metrológica de las mediciones, lo representa la calibración de equipos y caracterización de materiales a través de los laboratorios primarios o secundarios, lo que representa costos para las empresas y los laboratorios que optan por una certificación o acreditación, pero que son necesarios para garantizar la competencia técnica. Sin embargo, en ocasiones las calibraciones contratadas son dadas por periodos de tiempo que generalmente se realizan sin un análisis del cálculo de la deriva y que son motivados por las exigencias subjetivas de los evaluadores técnicos. En el presente trabajo, realizamos un análisis alternativo al cálculo de la deriva mediante el análisis de las verificaciones que los laboratorios realizan cuando los materiales o equipos son reintegrados al trabajo cotidiano, que de manera planificada se pueden atender mediante la prueba del error normalizado y los datos del informe o certificado de calibración, lo que podría generar alguna posible tendencia alternativa al mencionado cálculo de la deriva o complemento del mismo. Concluimos que esta correlación entre el error normalizado y la modificación de la incertidumbre es bien sustentada como método alternativo para el cálculo de la deriva siempre y cuando no existan extrapolaciones en los valores de referencia.

### 1. INTRODUCCIÓN

La estructura metrológica en nuestro país demanda una serie de requisitos que son acotados o expandidos por las demandas de servicios y regulaciones, no solo nacionales sino inclusive internacionales [1, 2]. Es de esta forma poco a poco una gran cantidad de empresas ha tenido que adecuar su producción o servicios debiendo acoplarse una estructura de la calidad fuertemente impulsada por la estructura metrológica en el país. La mancuerna metrológica dada entre el Centro Nacional de Metrología y la Entidad Mexicana de Acreditación A.C [3], han impulsado un engranaje en el desarrollo de la calidad. A su vez la participación del centro metrológico de nuestro país y los centros nacionales de otros países han propiciado que podamos tener comparaciones no solo al interior del país, sino además ello ha abierto la posibilidad de poder vender productos y servicios con trazabilidad en todo el sentido estricto. El mercado de venta exclusiva de productos ha permeado a distintos sectores, en el que las exigencia es no solo tener implantado un sistema de gestión de calidad sino que además este opere y los resultados puedan compararse no solo al interior del país sino que además se busca que tengan el reconocimiento mutuo de las profesiones y de los servicios [4].

Dentro de la política implantada en materia de metrología y normas regulatorias, se hace necesario además, como parte del sistema de calidad, someter a la industria o laboratorio a procesos de

comparación tanto internos como externos. Para ello, muchos de los sistemas contemplan dar seguimiento al control de la calidad a través de mecanismos de control mediante herramientas estadísticas [5, 6, 7].

Un proceso ampliamente difundido sobre los requerimientos de la calidad en una empresa o laboratorio es la comparación que podemos realizar al interior del laboratorio o fuera del mismo, comúnmente llamadas comparaciones interlaboratorios o intralaboratorio. Como parte de las actividades en este tipo de eventos, se presenta la necesidad de dar un seguimiento estadístico de los resultados reportados por los participantes en este tipo de ensayos. Alrededor del análisis estadístico realizado es común efectuar una prueba del error normalizado acompañado de por lo menos otra prueba más que generalmente analiza la dispersión. La pretensión de este tipo de análisis es buscar garantizar la homocedasticidad de las mediciones realizadas e inclusive la isotropía de las mediciones bajo condiciones controladas de laboratorio.

Por otro lado, como parte de las actividades alternativas a los procesos llevados por los laboratorios o industrias, se realizan calibraciones o caracterizaciones, sin embargo en ocasiones este proceso no resulta rentable. En algunas ocasiones, cuando se tiene una cantidad de mediciones confiables de los certificados o informes se puede generar el cálculo de la deriva, mediante la determinación de esta y los límites de la tolerancia podemos considerar los periodos de calibración. Una vez que se determina el intervalo de mediciones en certificados de calibración se procede a calcular la deriva de acuerdo a los datos en el que la deriva se calcula como [8]:

$$Deriva = \frac{Dif\ máx}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

Donde el segundo informe de calibración es dado al tiempo  $t_2$  con respecto al primer certificado al tiempo  $t_1$ , en tanto que la diferencia máxima considerada en la fórmula para el cálculo de la deriva es la diferencia máxima entre la suma del error más incertidumbre en cada punto.

De tal manera el periodo de calibración es menor que el cociente entre la tolerancia y la deriva, es decir:

$$Periodo\ de\ calibración \leq Tolerancia / Deriva \quad (2)$$

A continuación se realiza un análisis desarrollado para la prueba del error normalizado, como una alternativa a la determinación del cálculo de la deriva.

## 2. DESARROLLO

El uso de error normalizado involucra el hecho que tengamos que considerar un valor de referencia certificado, trazable al Sistema Internacional de Unidades [9], es decir, valores tanto para la incertidumbre como para los errores de medición. Para este tipo de análisis se requiere que se considere que los participantes en un aprueba de error normalizado mantengan esas condiciones de trazabilidad. Otro aspecto no menos relevante es el hecho que consideraremos que las mediciones de los laboratorios que intervienen no estén relacionados, es decir sus mediciones no estén correlacionas entre sí. En el sentido estricto, un laboratorio que ha heredado la trazabilidad de un laboratorio que interviene en la prueba no podría generar un resultado confiable. La

interrogante que nos hacemos cuando esta prueba de normalidad se realiza con valores de un mismo material en distintos tiempos, es sí; ¿Es válido el uso de esta prueba?, en efecto es válido, ya que los valores de repetibilidad lo que genera el promedio de las mediciones que intervienen en las mediciones lo que le da sentido a la formulación. Recordemos que una prueba de normalidad demanda precisamente el valor promedio y la desviación como parámetros característicos de las distribuciones normales. En este sentido, debemos de considerar que es necesario generar condiciones de repetibilidad para verificar las condiciones de periodicidad de los materiales, para poder enviarlos a un servicio de calibración o caracterización, según sea el caso. Veamos ahora la ecuación de normalidad usado:

$$\varepsilon = \frac{X_{LAB} - X_{PRUEBA}}{\sqrt{S_{LAB}^2 + S_{PRUEBA}^2}} \quad (3)$$

Donde los subíndices LAB y PRUEBA, se refiere a los sistemas de laboratorio y prueba. En el denominador aparece la diferencia de los promedios de los valores de laboratorio y prueba, elemento a comparar, en tanto que la expresión en el denominador representa la variabilidad de producto de la aplicación del parámetro geométrico de las variaciones. Se considera que si el valor del error es menor que 1 la muestra es aceptable, en tanto que un valor entre 1 y 2 es un valor dudoso y más grande de 2 el valor es inaceptable.

Consideraremos las mediciones de un conjunto de valores medidos para un material certificado al 1% de transmitancia, tanto para la incertidumbre expandida como para el error en dos años diferentes:

$\lambda$ (nm)	U (2012)	Error (2012)	U (2013)	Error (2013)
750	3.376	0.014	3.379	0.017
700	2.483	0.014	2.488	0.018
650	1.208	0.008	1.21	0.009
635	1.11	0.008	1.12	0.008
590	0.856	0.008	0.846	0.008
546	0.945	0.008	0.942	0.007
465	1.035	0.008	1.025	0.009
440	0.763	0.008	0.763	0.008

Tabla 1. Resultados reportados en un certificado para el material del 1% de transmitancia en el 2012 y 2013.

Una vez calculada la deriva y la tolerancia, encontramos que el periodo de calibración sería a lo mas de 3 años. Sin embargo, es de suponer que el uso de los materiales demandaran un periodo diferente. Por lo que hagamos el análisis con tres de las verificaciones del primer año.

$\lambda$ (nm)	U (2012)	VERIFICACIÓN 1	VERIFICACIÓN 2	VERIFICACIÓN 3
750	3.376	3.92	3.392	3.389
700	2.483	2.494	2.493	2.493
650	1.208	1.216	1.217	1.217
635	1.11	1.121	1.12	1.12
590	0.856	0.867	0.868	0.867
546	0.945	0.943	0.945	0.945
465	1.035	1.035	1.033	1.033
440	0.763	0.764	0.763	0.764

Tabla 2. La segunda columna presenta la incertidumbre del certificado, en tanto que los otros valores de las columnas a la derecha con valores de verificación.

Calculando los valores de verificación para el error normalizado, ecuación (3), tenemos:

$\lambda$ (nm)	Error normalizado con dos verificaciones	Error normalizado con tres verificaciones
750	0.9	0.81
700	0.76	0.72
650	0.54	0.39
635	0.33	0.2
590	0.41	0.24
546	0.12	0.1
465	0.63	0.7
440	0.85	0.86

Tabla 3. Determinación de verificaciones mediante el error normalizado de acuerdo a los valores de la tabla 2.

Aun cuando los parametros satisfacen la prueba del error normalizado vemos que debido a los cambios para las longitudes de 750 nm y 700 nm estos se alejan aproximandose a los términos dudosos.

### 3. CONCLUSIONES

Aun cuando el cálculo de la deriva resulta una herramienta útil, vemos que sin embargo es prudente realizar las verificaciones intermedias en los materiales a fin de no conferir los periodos de calibración a la ecuación (2). Sin duda alguna el ahorro con periodos más largos de calibración puede ser grande, pero como se ve de los resultados de la tabla 3. Por lo que concluimos que el cálculo de los periodos de calibración realizados mediante el cálculo de la deriva como las verificaciones intermedias utilizadas mediante el error normalizado puede conducir a resultados que complementan mejores resultados en sentido de la calidad generada a partir de materiales de referencia certificados.

### BIBLIOGRAFÍA

1. Entidad Mexicana de Acreditacion. Entidad Mexicana de Acreditacion. [En línea] [Citado el: 23 de mayo de 2016] [http://200.57.73.228:75/Directorio\\_CL/Principal.aspx](http://200.57.73.228:75/Directorio_CL/Principal.aspx).
2. Organizacion de las Naciones Unidas para el Desarrollo Industrial. (2010). *Organismos Nacionales de Normalizacion en Paises de Desarrollo*. Ginebra, Suiza. ISBN 978-92-67-30477-9.
3. Centro Nacional de Metrología. [En línea] [Citado el: 23 de mayo de 2016] [http://www.cenam.mx/inf\\_metrologia/](http://www.cenam.mx/inf_metrologia/)
4. QC Laboratory. Gestion de sistemas de calidad en el laboratorio de analisis clinicos. [En línea] 5 de Abril de 2009. [Citado el: 23 de mayo de 2016] [http://deidaniagomez.blogspot.mx/2009\\_04\\_01\\_archive.html](http://deidaniagomez.blogspot.mx/2009_04_01_archive.html)
5. Van Wieringen K, Cribbie RA, (2014) Evaluating clinical significance: incorporating robust statistics with normative comparison tests. *Br J Math Stat Psychol*. 67(2):213-30.
6. Zhang L, Yang H, Cho I, (2009) Test homogeneity of risk difference across subgroups in clinical trials. *J Biopharm Stat*. 19(1):67-76.
7. [De Castro M, Galea M, Bolfarine H, Hypothesis testing in an errors-in-variables model with heteroscedastic measurement errors. *Stat Med*. 2008 Nov 10;27(25):5217-34.
8. [8] Benjamín Soriano, Víctor Aranda y Noel Gutiérrez. 2004. Determinación de intervalos de calibración. Simposio de metrología 2004. [En línea] [www.cenam.mx/simposio2004/memorias/TA-011.pdf](http://www.cenam.mx/simposio2004/memorias/TA-011.pdf).
9. requisitos generales para la competencia de los laboratorios de ensayo y calibración, (2015) NMX-EC-17025-IMNC-2006, C.-I.I. 17025:2005.

# CLASIFICACIÓN DE EVENTOS PRODUCIDOS POR RAYOS GAMMAS DE ALTA ENERGÍA EN OBSERVATORIOS ASTRONÓMICOS MEDIANTE MÁQUINAS DE SOPORTE VECTORIAL.

Edgar Chávez González<sup>1</sup>, Jennifer López Chacón<sup>2</sup>, Rogelio Cuevas Torres<sup>2</sup>, Umberto Cotti Gollini<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigación Científica y Educativa Superior de Ensenada. <sup>2</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. <sup>3</sup>Instituto de Física y Matemáticas UMSNH-

## RESUMEN

En años recientes se han aplicado métodos de aprendizaje automático para lograr la separación entre las señales y el ruido de fondo en los detectores de partículas elementales. En los análisis de datos de los detectores del Large Hadron Collider (LHC,) por ejemplo, se han utilizado redes neuronales, arboles de decisión y aprendizaje profundo para separar la señal de la partícula objeto de la investigación del ruido de fondo provocado por las demás partículas que se generan en el proceso.

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los pasos necesarios para realizar los análisis de datos de un experimento es la selección de los eventos de interés y la clasificación en distintas categoría de los datos recolectados. En el presente trabajo nos referimos a los eventos que se pretenden clasificar como eventos de tipo "señal" o eventos de tipo "ruido" (background) y por tanto el análisis que se realiza son de clasificación binaria, el cual es uno de los casos más comunes en física de altas energías o en física de astropartículas.

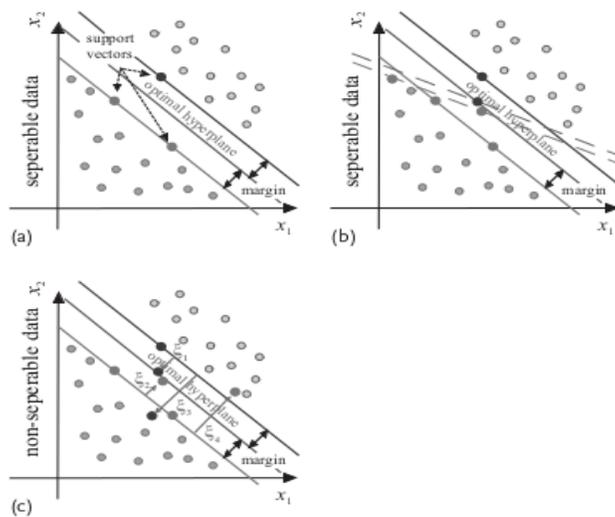
La selección de eventos se ha realizado clásicamente por el método de cortes, esto es la aplicación secuencial de requerimientos sobre las observables individuales de cada evento. Recientemente se han desarrollado métodos que consideran simultáneamente todas las observables en un espacio multidimensional en lugar que analizar cada observable individualmente por separado. Estos métodos son los llamados métodos o algoritmos o análisis de clasificación multivariada o multidimensional y son intrínsecamente relacionados con los métodos llamados de "reconocimientos de patrones" o de "minería de datos" y todos ellos en un contexto estadístico general utilizan el espacio de observables mutlidimensional en lugar que cada observable por separado

Los métodos MVA utilizan distribuciones estadísticas de los eventos en el espacio multidimensional de las observables (en el que cada punto representa un evento) para decidir a que categoría pertenece un evento, en nuestro caso si se trata de señal o de ruido. Se ha escrito mucho sobre la comparación de la eficiencia de los distintos métodos estadísticos en para minería de datos, llegando normalmente a la conclusión de que es imposible identificar el método de clasificación más eficiente sin considerar primero los detalles, características, especificación del problema que se quiere analizar. Algunos métodos conocidos son la estadística multidimensional, el discriminante lineal de Fisher, los árboles de decisión, las redes neuronales. El que método utilizado en este trabajo es el métodos de máquinas de soporte vectorial.

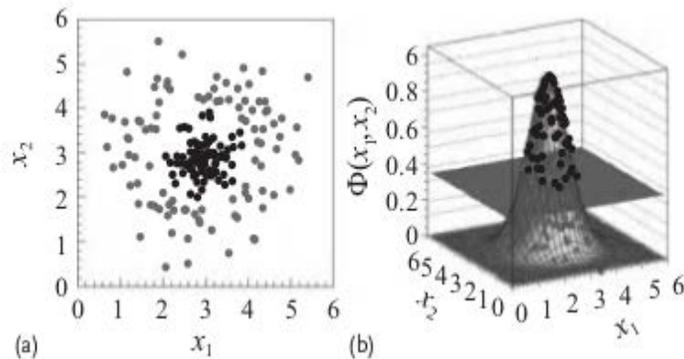
## 2. MÁQUINAS DE SOPORTE VETORIAL

Las máquinas de soporte vectorial (Support Vector Machines, SVM) están compuestas por un conjunto de algoritmos de aprendizaje supervisado.

Estos métodos están enfocados a los problemas de clasificación de eventos y regresión. Una vez asignado un conjunto de eventos de entrenamiento (muestra) podremos etiquetar las clases y entrenar una SVM para construir un modelo que prediga la clase de una nueva muestra. Es decir, una SVM es un modelo que representa a los puntos de muestra en el espacio, separando las clases por un espacio lo más amplio posible.



**Figura 1.** En la siguiente figura se muestran tres ejemplos de separación por medio de un hiperplano. a) Mayor margen y soporte vectorial para un conjunto de datos. b) Conjunto de datos ligeramente diferente con dos eventos adicionales que llevan a un margen diferente indicada por las líneas de trazos. c) Extensión a un caso donde los eventos adicionales hacen que las dos clases no puedan ser completamente separable por un límite línea.



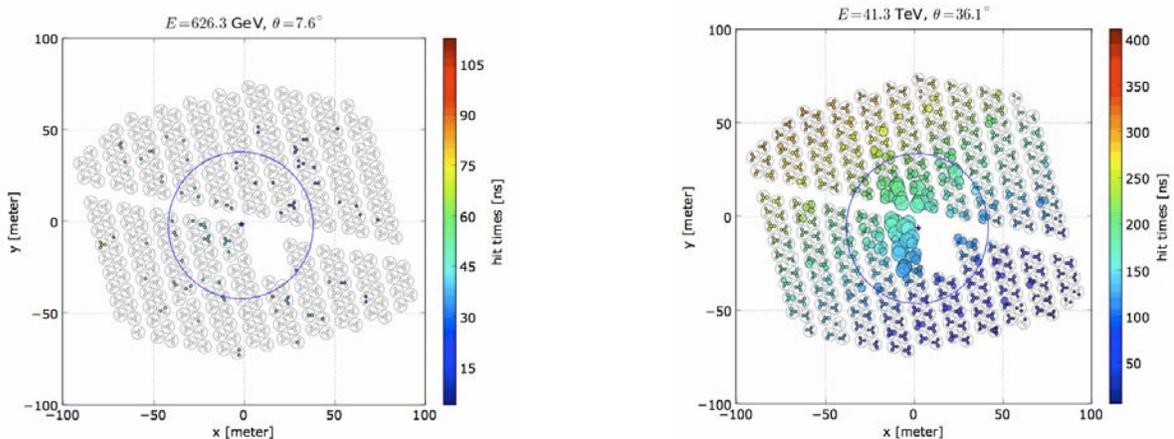
**Figura 2.** a) Ejemplo de un conjunto de datos de dos dimensiones que no es separable por una línea. b) Conjunto de datos después de una transformación en un espacio tridimensional en el que una separación lineal es posible tal como se indica por el plano.

Cuando las nuevas muestras se ponen en correspondencia con dicho modelo, en función de su proximidad pueden ser clasificadas a una u otra clase. Más formalmente, una SVM construye un hiperplano o conjunto de hiperplanos en un espacio de dimensionalidad muy alta (incluso podría ser infinita) que puede ser utilizado en problemas de clasificación o regresión. En el caso particular del problemas de la separación de señales gamma / hadrones podemos apostar (dado que no se conoce a priori cual de los métodos podría ser el más eficiente) a que SVM puede ser un buen método, además que lo que se pretende es utilizar la representación gráfica (ver Figura 3.) de como se ve un evento y eso hace de SVM el candidato casi único a ser utilizado.

Es importante señalar que la eficiencia de SVM para un problema específico depende directamente de la función del kernel que sea utilizada, dicha función que realiza un mapeo de un espacio n-dimensional en el que cada punto representa un evento pero en el que probablemente no es posible encontrar un hiperplano que los separe en 2 categorías, a un espacio n+m dimensional en el que los eventos son separables por un hiperplano; es por esto que se propone un kernel específico para la separación gamma hadrones a través de las imágenes de las señales.

### 3. EL PROBLEMA DE LA SEPARACIÓN GAMMA/HADRONES EN OBSERVATORIOS ASTRONÓMICOS

Los rayos cósmicos son partículas cargadas (normalmente protones, un tipo de hadrón). Los rayos gamma son creados cuando los rayos cósmicos interactúan con el medio que se encuentra cerca de los lugares de aceleración. Siendo eléctricamente neutros, los rayos gamma producidos en tales interacciones no son perturbados por los campos magnéticos que llenan nuestra galaxia y el espacio intergaláctico. Por tanto, se utilizan para realizar astronomía en rayos gamma. En la física o astronomía de rayos gamma, las cascadas atmosféricas producidas por rayos cósmicos son la fuente de una señal de fondo (ruido) que es necesario remover y además debido a que el flujo de rayos cósmicos es aproximadamente 1000 veces mayor que el flujo de rayos gamma, la señal de rayos gamma es ampliamente sobrepasada por la señal de fondo debida a los rayos cósmicos. Todo proceso de separación de señal de fondo de señal de evento se basan en las siguientes características (cualitativas) entre cascadas producidas por gammas y por hadrones. En cascadas de rayos gamma, la mayor parte de la señal en el nivel de la superficie se encuentra localizada cerca del eje de la cascada, o sea a lo largo de la dirección del rayo gamma inicial; mientras que los rayos cósmicos cargados tienden a abrir su chubasco en la atmósfera, provocando señales más desordenadas al nivel de superficie.



**Figura 3.** En la primera gráfica se representa un evento producido por un hadrón y en la segunda se muestra la gráfica producida por un gamma.

#### **4. CONCLUSIONES**

Hemos visto que el problema de la separación de señales gamma / hadrones es estrictamente relacionado con un problema de categorización de imágenes. Se pretende investigar ahora la eficiencia que SVM puede tener tanto como un selector de imágenes como de datos. Aún no es posible saber cual es el camino más eficiente para realizar un entrenamiento óptimo utilizando SVM para seleccionar señales (gamma vs. hadrones) a través de los datos "numéricos" o bien las imágenes elaboradas a base de los datos numéricos producidos; actualmente es el objetivo en el que se sigue trabajando.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

1. Behnke O. - Kröninger K. - Schott G. - Schörner-Sadenius T. (2013)- Data Analysis in High Energy Physics, A Practical Guide to Statistical Methods
2. <http://umdgrb.umd.edu/hawc/ghsep.php>
3. <http://www.hawc-observatory.org/observatory/ghsep.php>
4. Jamain, A. and Hand, D. (2008) Mining supervised classification performane studies:Ameta analytic investigation. J. Classif., 25 (1), 87

## **ANÁLISIS DE SUPERVIVENCIA Y EL MODELO WEIBULL**

Francisco Solano Tajonar Sanabria, Guadalupe Yoanna Arenas Martínez, Fernando Velasco Luna,  
Hugo Adán Cruz Suárez

Benemerita Universidad Autonoma de Puebla

### **RESUMEN**

El análisis de supervivencia es una línea de investigación de la estadística inferencial que surge de una teoría paralela llamada Teoría de Confiabilidad la cual tiene como propósito el estudio del tiempo de vida o el tiempo de falla de un objeto o un conjunto de objetos sometidos a un cierto tipo de tensión. De esta forma se puede decir que el análisis de supervivencia se encarga de estudiar el tiempo de vida o de falla de una persona o un grupo de personas.

La función de riesgo es un componente importante en el análisis de los eventos-tiempo ya que describe el riesgo inminente de falla en un momento dado.

En el presente trabajo se utiliza el modelo paramétrico Weibull que es el que mejor ajusta los tiempos de vida o de falla. Además, se presentan la función de supervivencia, la función de riesgo y se analiza las diferentes formas que puede tener la función de riesgo.

Finalmente, con una aplicación se hace notar que en efecto el modelo Weibull, es uno de los mejores modelos paramétricos que ajustan datos de tiempos de vida.

### **1. INTRODUCCIÓN**

Generalmente, al término estadística se le relaciona con el cálculo de promedios, porcentajes, etc., y con la presentación de los datos en forma tabular y en forma gráfica. Aunque las técnicas para resumir y presentar los datos son importantes, comprenden solo una parte de la estadística, llamada Estadística Descriptiva; la otra parte es la Inferencia Estadística, la cual se encarga de analizar datos recolectados, y posteriormente inducir algún conocimiento (característica) sobre una población, donde los datos analizados son solo un subconjunto o muestra; esto es, el proceso va de lo particular a lo general.

La estadística es una herramienta ampliamente utilizada en la investigación científica. También se emplea en instituciones gubernamentales y educativas, en los negocios y en la industria. El empleo juicioso de las técnicas estadísticas permite obtener conclusiones útiles a partir de datos numéricos.

En los últimos años el análisis de supervivencia ha desarrollado tópicos importantes en muchas áreas, especialmente en biología, medicina, ingeniería, teoría de confiabilidad, epidemiología, etc., con aplicaciones que van desde estudiar el desarrollo de alguna enfermedad, tiempos de vida en individuos con enfermedades terminales, falla en maquinaria, la durabilidad de electrodomésticos, hasta estudiar la resistencia de materiales al calor, etc., son solo algunas de las aplicaciones en donde el papel del análisis de supervivencia es importante.

Los fenómenos mencionados anteriormente no pueden predecirse o modelarse con algún modelo determinista, para más detalles ver ([5], [6]). Por ejemplo, supóngase que estamos interesados en determinar el tiempo de vida útil de un fusible puesto a funcionar en algún circuito, es claro que, este fallará de forma imprevista, en el sentido de que en un momento está funcionando bien y en el momento siguiente falla. Por el contrario, una barra de acero bajo una carga pesada se irá debilitando gradualmente en el transcurso de un periodo largo de tiempo. Se observa entonces que, la falla dependerá del fenómeno en estudio.

De forma que, según los comentarios anteriores, el uso de un modelo probabilístico parece ser un planteamiento realista para modelar cada uno de los fenómenos anteriores, ([2], [5], [10]).

Se debe señalar que existen varios modelos que se han propuesto para describir datos relacionados con tiempos de vida. Sin embargo, existen situaciones en donde los datos de tiempos de vida, no pueden ser ajustados por los modelos paramétricos clásicos. Entonces el problema básico dentro del análisis de supervivencia es dar y representar las distribuciones de tiempos de vida mediante modelos estadísticos y hacer inferencia sobre los parámetros de estos modelos.

## 2. ¿QUÉ ES EL ANÁLISIS DE SUPERVIVENCIA?

El Análisis de Supervivencia es una línea de la estadística inferencial que estudia y modela tiempos de falla o de vida de un individuo o un grupo de individuos sometido(s) a un tipo de "tensión" que puede ser un tratamiento, cirugía, etc., de esta forma se puede decir que el análisis de supervivencia se encarga de estudiar eventos-tiempo.

En la actualidad el uso de modelos paramétricos para representar fenómenos relacionados con tiempos de vida, tiempos de supervivencia o tiempos de falla, se ha desarrollado ampliamente con aplicaciones que van desde estudiar tiempos de vida en individuos con enfermedades terminales, la comparación de la efectividad de  $k$  tratamientos buscando prolongar el tiempo restante de vida de estos individuos, así como en artículos de uso cotidiano bajo condiciones normales o de vida acelerada, garantía del funcionamiento de electrodomésticos durante  $k$  unidades de tiempo, entrega de suplementos electrónicos confiables, dar confiabilidad o determinarla en el transporte público, describir el tiempo de vida de una amplia clase de productos como función de la temperatura, tales como aislantes eléctricos y dieléctricos, acumuladores, lubricantes y grasas, plásticos y filamentos de lámparas incandescentes, son solo algunos de los casos en donde el papel del Análisis de supervivencia o Teoría de confiabilidad juega un papel importante.

Los modelos que se han propuesto en la literatura para describir datos de tiempos de vida, entre los modelos más usados se encuentran los modelos Exponencial, Gama, Weibull y Lognormal, sin embargo, no todos los conjuntos de datos se ajustan a dichos modelos, por lo que es importante proponer modelos más generales para explicar el comportamiento de este tipo de datos.

Un modelo que han seguido varios autores, para datos de tiempos de vida, es la distribución Gama generalizada, ver ([7], [9], [10]), el cual es un modelo paramétrico general que incluye entre otros modelos a los ya mencionados anteriormente, desafortunadamente dicha distribución tiene limitantes significativas como lo es la estimación de sus parámetros por máxima verosimilitud ([1], [8]).

En el análisis estadístico, muchas veces los datos se refieren a observaciones de tiempos de vida o tiempos de falla, sin embargo, desde el enfoque del análisis de supervivencia, el análisis de estos datos es diferente a la de los datos comunes, ya que dentro de este se deben considerar conceptos como función de supervivencia, función de riesgo y otros conceptos básicos los cuales se mencionan a continuación.

Antes de presentar los conceptos propios del análisis de supervivencia, es bueno considerar que para realizar un buen análisis de tiempos de vida se necesita lo siguiente:

- Tener bien definido nuestro evento de interés.
- Definir de forma apropiada el origen o inicio del estudio, es decir, indicar el comienzo de nuestro análisis.
- Definir la escala de tiempo.

De lo anterior tenemos que el análisis de supervivencia es el conjunto de técnicas que nos permiten analizar, estudiar y modelar la variable (en este caso representa evento-tiempo) de interés. Esta variable, en general depende de otras variables que son explicables y que se denominan covariables del fenómeno, ver ([4]).

Sea  $T$  una variable aleatoria que denota el tiempo hasta que ocurre algún evento específico. Este evento puede ser la muerte, la aparición de un tumor, el desarrollo de alguna enfermedad, la recurrencia de alguna enfermedad, fallo de equipo eléctrico, dejar de fumar, etc.

De forma más específica, en este trabajo,  $T$  será una variable aleatoria continua, no negativa que representará a una población homogénea.

En seguida se presentan tres funciones que caracterizan a  $T$  :

**Función de Supervivencia:** es la probabilidad de que un individuo sobreviva más del tiempo  $t$ .

**Función de Riesgo:** es la probabilidad de que un individuo de  $t$  años experimente el evento en el siguiente instante de tiempo.

**Función de densidad de probabilidad:** es el modelo probabilístico que indica el comportamiento límite de la probabilidad en cada evento  $\{t \leq T < t + \Delta t\}$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Si se conoce alguna de estas funciones, las otras dos pueden ser determinadas a partir de la función conocida. Estas funciones nos permitirán analizar diferentes aspectos de  $T$ , por ejemplo, que forma tiene su distribución de probabilidad, su función de riesgo, etc.

### 3. CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICO DE SUPERVIVENCIA

Iniciamos presentando el concepto de función de supervivencia el cual es fundamental para definir y estudiar fenómenos aleatorios de tipo evento-tiempo, [6].

**Definición 3.1.** La función de supervivencia de la variable aleatoria (v.a)  $T$  es la probabilidad de que un individuo viva al menos hasta tiempo  $t$ , esta función se denota por  $S(t)$  y está dada por:

$$S(T) = P(T \geq t) . \quad (1)$$

En el caso de falla en artículos a  $S(t)$  se le llama función de confiabilidad.

**Teorema 3.1.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua, con densidad  $f(t)$ , entonces

$$f(t) = -\frac{dS(t)}{dt} \quad (2)$$

**Demostración:** Como  $T$  es una variable aleatoria continua, se tiene que:  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $F(t-) = F(t)$ , de donde,

$$S(t) = 1 - F(t) \Rightarrow S'(t) = -F'(t).$$

Entonces

$$f(t) = -\frac{dS(t)}{dt},$$

Que es lo que se afirmo en (2). ■

También, dado que,

$$\int_t^{t+\Delta t} f(u)du \approx f(t)\Delta t,$$

Entonces,  $f(t)\Delta t$  puede entenderse como la probabilidad aproximada de que el evento ocurra en el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$ .

Otra función fundamental en el análisis de supervivencia es la función de riesgo. Esta función también es conocida como tasa de mortalidad en demografía, la función de intensidad en procesos estocásticos, [2].

**Definición 3.2.** La función de riesgo se define como sigue

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}. \quad (3)$$

**Observación 3.1:**  $P[t \leq T < t + \Delta t | T \geq t]$  es la probabilidad de que un individuo de  $t$  años experimente el evento en las próximas  $\Delta t$  unidades de tiempo.

Entonces la función de riesgo es la razón o tasa de falla instantánea de un individuo al tiempo  $t$ , dado que el individuo ha sobrevivido hasta el momento  $t$ . Esto es,  $h(t)\Delta t$  es aproximadamente igual a la probabilidad de que un individuo experimente el evento en el intervalo  $[t, t + \Delta t]$  dado que ha sobrevivido hasta el tiempo  $t$ .

**Corolario 3.1.**

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}. \quad (4)$$

Notese que:

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right).$$

La función de riesgo es particularmente útil para determinar apropiadamente la distribución de falla. Utilizando información cuantitativa acerca del mecanismo de fracaso, para describir la forma en la cual la probabilidad de experimentar el evento cambia con el tiempo. Esta tiene varias formas generales para porcentajes de riesgo distintos. La única condición para la función de riesgo es la no negatividad, es decir,  $h(t) \geq 0$ .

**Teorema 3.2.** Sea  $T$  el tiempo para que ocurra una falla,  $T$  es una variable aleatoria continua con densidad  $f$  y f.d.a.  $F$  con  $F(0) = 0$ , entonces  $f$  puede expresarse en términos de la función de riesgo de la siguiente manera:

$$f(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(r) dr\right). \quad (6)$$

El resultado anterior nos dice que la función de riesgo proporciona mayor información acerca del mecanismo subyacente de falla que la función de supervivencia. Por esta razón, consideramos a la función de riesgo como el elemento dominante para el análisis de datos de supervivencia.

#### 4. MODELOS PARÁMETRICOS

##### MODELO EXPONENCIAL

La distribución exponencial desempeña un papel muy importante en la descripción de fenómenos, especialmente en el análisis de supervivencia. Inicialmente se uso en trabajos referentes al análisis de confiabilidad (componentes electrónicas) y con algunas limitaciones se extendió a estudios médicos, ([1], [2]).

Esta distribución tiene un solo parámetro ajustable (la media). Sin embargo, los métodos sobre los que se basa esta distribución son muy sensibles e incluso limitados.

**Definición 3.** Se dice que una variable aleatoria continua  $T$ , la cual toma valores positivos, tiene una distribución exponencial con parámetro  $\alpha$  si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (7)$$

Lo anterior se denota por  $T \sim \text{Exp}(\alpha)$ .

En la literatura existente, algunas veces a la f.d.p de  $T$  , también la definen como

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se escoge en este estudio la parametrización dada por (7) debido a que, en este caso  $E(T) = \alpha$  , ver [8].

#### PROPIEDADES

- Función de Distribución Acumulativa

La f.d.a. de la variable exponencial está dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)}. \quad (8)$$

- Función de Supervivencia

$$S(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)}. \quad (9)$$

- Función de Riesgo

A continuación, veremos que esta distribución tiene la propiedad de tener tasa de riesgo

$$h(t) = \frac{1}{\alpha}. \quad (10)$$

El hecho de que el riesgo sea constante, nos indica que después de usar un artículo, la probabilidad de que falle, es la misma que cuando era nuevo, en otras palabras, el objeto no envejece. El siguiente resultado nos ayudará a comprender mejor esta situación.

**TEOREMA 4.1:** Si  $T$  es el tiempo transcurrido para que ocurra una falla y  $T$  es una variable aleatoria no negativa, entonces  $T$  tiene una distribución exponencial, si y sólo si, tiene una tasa de riesgo constante.

#### MODELO WEIBULL

Este modelo, es muy usado en el análisis de supervivencia, sobre todo en material eléctrico, aplicaciones industriales y en biomedicina, ([4], [5]). Su función de riesgo no es constante.

**Definición 4.** Una variable aleatoria  $T$  tiene una distribución Weibull, si existen parámetros  $\lambda > 0$  y  $\beta > 0$  , tales que la variable  $Z = \left(\frac{T}{\lambda}\right)^\beta$  tiene una distribución exponencial con media 1.

La función de densidad de  $T$  esta dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\beta-1} \left(\exp\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right)^{\beta}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (11)$$

## PROPIEDADES

- Función de Distribución Acumulativa

La f.d.a. de la variable Weibull está dada por:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\beta}\right). \quad (12)$$

- Función de Supervivencia

$$S(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\beta}\right). \quad (13)$$

- Función de Riesgo

$$h(t) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\beta-1}. \quad (14)$$

## 5. APLICACIÓN

Un modelo que ha sido sugerido por varios autores, entre ellos Berry (1975), Dyer (1975), Meier (1980) y Wilks (1990), como un modelo para datos de tiempos de vida es la distribución Weibull, el cual es un modelo paramétrico que fue introducido en 1939 por el físico Sueco Waloddi Weibull.

La distribución Weibull es quizás el modelo de tiempos de vida más usado en aplicaciones industriales, en biología y medicina. Lee y Thompson (1974) argumentaron que en la clase de distribuciones de riesgo proporcional, la distribución Weibull parece ser el modelo más apropiado en la descripción de tiempos de vida.

Lee y O'Neil, (1971) y Doll (1971), afirman que este modelo ajusta muy bien a datos que involucran tiempos de aparición de tumores en humanos y animales.

Porque la distribución Weibull

Presenta un punto de partida para la estimación de sus parámetros, empleando la función de supervivencia. Abarca diferentes tipos de riesgo, para diferentes valores del parámetro  $\beta$ ,

Si  $\beta > 1$ , el riesgo es creciente.

Si  $\beta < 1$ , el riesgo es decreciente.

Si  $\beta = 1$ , el riesgo es constante, (es decir, la distribución exponencial es un caso particular de la distribución Weibull).

Para diferentes valores de  $\beta$  la distribución Weibull ajusta un gran número de fenómenos de tiempo de vida,

-Para aplicaciones médicas se emplea  $0.5 < \beta < 3.5$ .

-En teoría de confiabilidad es adecuado que  $\beta < 5$ .

El siguiente conjunto de datos, representan el resultado obtenido en un estudio realizado con el fin establecer la supervivencia de los pacientes que se encuentran enfermos con Mieloma múltiple\*. Los datos fueron obtenidos de las notas de Fiabilidad y Análisis de Supervivencia, publicadas por Jesús Abaurrea y Ana Carmen Cebrian, del departamento de métodos estadísticos de la universidad de Zaragoza.

El experimento consiste en determinar la supervivencia de los pacientes enfermos con mieloma múltiple, dándoles seguimiento desde que se les diagnostica la enfermedad hasta su muerte.

1.25, 1.25, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 11, 11, 11, 11, 11, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26, 32, 35, 37, 41, 41, 51, 52, 54, 58, 66, 67, 88, 89, 92.

El método empleado es empírico y dio buenos resultados para el análisis de este conjunto de datos.

Usando la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria de tipo Weibull dada en (11).

Este método consiste en determinar valores iniciales para los parámetros  $\beta$  y  $\lambda$ , los cuales denotaremos por  $\beta_0$  y  $\lambda_0$  respectivamente, para posteriormente, usarlos como valores iniciales en la solución de las ecuaciones de verosimilitud.

1. Los parámetros  $\beta$  y  $\lambda$  de la función de supervivencia para la densidad Weibull,

$$S(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta\right).$$

Se pueden estimar, usando regresión lineal simple.

Primero, haciendo una transformación logarítmica doble, que nos transforma a  $S(t)$  en una función lineal

$$\ln\left\{\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right\} = \beta \ln t - \beta \ln \lambda.$$

2. Los  $n$  registros de tiempos de falla se ordenan de menor a mayor y se les asigna un número de orden,  $i$ , de 1 a  $n$ .

3. Se calcula para cada falla la posición  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de la siguiente forma

$$F_i = \frac{(i - 0.5)}{n}.$$

4. Se construye la gráfica de la ecuación anterior, con abscisas

$x_i = \ln t_i, \quad i = 1, \dots, n;$  y ordenadas

$$y_i = \ln \left\{ \ln \left( \frac{1}{1 - F_i} \right) \right\},$$

Con esto, la ecuación se transforma en una recta de la forma  $y_i = mx_i + b$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

5. Se hace la regresión lineal de los puntos  $P_i(x_i, y_i)$ .

Entonces, se obtiene una recta de la forma  $y = mx + b$ , cuya pendiente  $m$  es  $\beta$  y la ordenada al origen  $b$  es  $-\beta \ln \lambda$ .

Realizando cálculos numéricos, se tiene que  $\beta_0 = 1.08$  y  $\lambda_0 = 24.53$ .

6. Ahora, utilizamos los valores obtenidos para llevar a cabo la estimación por máxima verosimilitud.

Usando que, el logaritmo de verosimilitud para la distribución Weibull, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior, utilizamos el método de Newton - Rapson programado en Mathematica, considerando a  $\beta_0$  y  $\lambda_0$ , como valores iniciales, con lo cual se obtiene:

$$\beta = 1.008,$$

$$\lambda = 24.06.$$

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se verifica que, el modelo Weibull es una distribución que se ajusta a una amplia clase de datos que están relacionados con el análisis de supervivencia.

El análisis de los pacientes con mieloma múltiple, es modelado de manera adecuada por la distribución Weibull, considerando datos sin censura.

El modelo Gama Generalizado, aunque ciertamente es una familia de distribuciones más amplia. Sin embargo, una limitante significativa se presenta en la estimación de sus parámetros.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Robert, V. Hogg; Allen, T Craig (1995), Introduction to Mathematical Statistics Fifth Edition. Prentice Hall.
2. Alexander, M. Mood; Franklin, A. Graybill; Duane, C. Boes.(1974).Introduction to the Theory of Statistics. Third Edition. McGraw-Hill, Inc.
3. Paun Garthwahwaite; Ian Jollie; Byron d Jones; (2002) Statical Inference Second Edition. Oxford Science Publications.

4. Vijay, K. Rohatgi; A.K. MD. Ehsanes Sale; (2001). An Introduction to probability and statistics. Second Edition. Wiley Interscience.
5. George, G Roussas (1973) A first Course in Mathematical Statistics. Addison- Wesley Publishing Company.
6. Lawless J. F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. Second Edition Wiley Series.
7. Cox D. R. and Oakes, D. (1984), Analysis of Survival Data, Chapman and Hall.
8. Kalbfleisch J.D. and Prentice R.L. (1980) The Statistical Analysis of Failure Time Data, New York John Wiley.
9. Klein P. John and Moeschberger L. Melvin, Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data, New York: Springer-Verlag.
10. Harter, H. L. (1967) Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Four Parameter Generalized Gamma Population for Complete and Censored Samples. Technometrics, 9, 159-165.
11. Harter, H. Leon and Moore, Albert H. (1965) Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of Gamma and Weibull Population for Complete and Censored Samples. Technometrics, 7, 639-643.
12. Stancy, E. W. (1962). A Generalization of the Gamma Distribution. Ann. Math. Stat. 33:1187-1192.
13. Stancy, E.W. and G.A. Mihram (1965). Parameter Estimation for a Generalized Gama Distribution. Technometrics. 7:349-358.
14. Parr, V.H. and J.T. Webster. (1965). A method for Discriminating Between Failure Density Functions Used in Reability Predictions. Technometrics. 7:1-10
15. Bernardo, C. Salinas; Pascual, L. Saorín; José, M.M. Ros; Antonio, J.P. Ruis; Salvador, S.P. Guillén. (2003). El libro de Latex. Prentice Hall.

## LÍNEAS DE ESPERA M/M/1 CON RECESOS

Camilo Garay Carlos<sup>1</sup>, Cruz Suárez Hugo A.<sup>1</sup>, Tajonar Sanabria Francisco S.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

### RESUMEN:

El trabajo está relacionado con un sistema de colas  $M/M/1$  con receso permitidos en el servidor, estos recesos serán llamados periodos, en el sistema el servidor es apagado tan pronto la cola se vacía. Las duraciones de dichos periodos se suponen forman una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente. Al final de cada periodo, el servidor puede o bien ser activado si la cola no está vacía o tomar nuevamente otro receso. En dicho sistema se incurren dos costos: un costo por almacenamiento y un costo fijo cada vez que el servidor se vuelve a activar. Para dicho sistema se mostrará que existe una política que minimiza el criterio de costo total -descontado, mediante la técnica de Programación Dinámica. Los resultados obtenidos serán ilustrados en un ejemplo numérico.

### 1. INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo está relacionado con la teoría de colas y la teoría de los procesos de decisión semi-Markovianos (PDSM), que son una clase importante de los procesos de decisión en tiempo continuo. Un proceso de decisión es una sucesión de controles realizadas en un tiempo determinado siguiendo una estrategia y pagando un costo por cada decisión elegida. Una política es una regla mediante la cual se elige una acción en cada punto de observación del proceso. Para evaluar la eficiencia de cada política se cuenta con un *criterio de rendimiento*, este trabajo usará como índice de funcionamiento el *costo total  $\alpha$ -descontado*.

El problema de control óptimo consiste en encontrar una política que optimice el criterio de rendimiento y ésta es llamada política óptima y, al criterio de rendimiento evaluado en tal política, función de valor óptimo. Una manera de resolver un PDSM está basado en el principio de Bellman conocido como Programación Dinámica (ver [2]), dicho principio permite resolver problemas en los que es necesario tomar decisiones en etapas sucesivas. Las decisiones elegidas en una etapa condicionan la evolución futura del sistema, afectando a las situaciones en las que el sistema se encontrará en el futuro, y a las decisiones que se plantearán en el futuro. En el presente trabajo, el principio de Programación Dinámica proporciona una técnica para determinar de manera eficiente las estrategias que optimizan un problema.

Los modelos de decisión semi-Markovianos han sido estudiados y aplicados, especialmente en líneas de espera con control. Un sistema de líneas de espera se presenta con frecuencia cuando se solicita un servicio por parte de una serie de clientes y tanto el servicio como los clientes son de tipo probabilístico. Los modelos de líneas de espera son muy útiles para determinar cómo operar un sistema de colas de la manera más eficaz y nos permiten encontrar un balance adecuado entre el costo de servicio y el tiempo de espera.

## 2. TEORÍA

Un modelo de decisión semi-Markoviano (MDSM) consiste de las siguientes componentes;

$$(\mathbf{S}, \mathbf{A}, \{A(s) : s \in \mathbf{S}\}, Q, H, D, d)$$

- $\mathbf{S}$  es un espacio de Borel llamado espacio de estados.
- $\mathbf{A}$  es un espacio de Borel llamado espacio de controles o acciones.
- Para cada  $s \in \mathbf{S}$ ,  $A(s) \subset \mathbf{A}$  es un conjunto medible y no vacío, cuyos elementos representan las acciones admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado  $s$ .
- La ley de transición  $Q(\cdot | s)$  es un kernel estocástico sobre  $\mathbf{S}$  dado  $\mathbf{K}$ .
- $H(\cdot | s, a)$  es la función de distribución del tiempo de permanencia sobre  $\mathbf{K}$ , para cada. Donde  $\mathbf{K} := \{(s, a) : s \in \mathbf{S}, a \in A(s)\}$  es el conjunto de pares estado acción admisible.
- $D$  y  $d$  son funciones de costo de  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{K}$ , las cuales son medibles sobre  $\mathbf{K}$ .

Un MDSM representa un sistema dinámico que evoluciona de la siguiente manera. En el tiempo de la  $n$ -ésima época de decisión,  $t_n$ , el sistema se encuentra en el estado  $s_n = s$  y el controlador elige una acción  $a_n = a \in A(s)$ , generándose con ello lo siguiente:

- Se incurre un costo inmediato  $D(s, a)$ .
- El sistema permanece en dicho estado  $s_n = s$  durante un tiempo aleatorio no-negativo  $\delta_{n+1}$  con distribución  $H(\cdot | s, a)$ .
- En el tiempo  $t_{n+1} := t_n + \delta_{n+1}$  ( $n \geq 0, t_0 := 0$ ), el sistema transita a un nuevo estado  $s_{n+1} = s'$  de acuerdo a la distribución  $Q(\cdot | s, a)$ .
- Se produce un costo debido al tiempo de permanencia en el estado  $s$ , cuya razón de costo es  $d(s, a)$ .
- Finalmente, una vez en el estado  $s'$  el proceso se repite.

Definimos el espacio de historias admisibles hasta la  $n$ -ésima época de decisión mediante  $\mathbf{H}_0 := \mathbf{S}$  y  $\mathbf{H}_n := (\mathbf{K} \times \mathbf{K}_+)^n \times \mathbf{S}$  para  $n \geq 1$ . Llamamos  $n$ -historia a  $h_n \in \mathbf{H}_n$ , que es un vector de la forma  $h_n := (s_0, a_0, \delta_1, s_1, a_1, \delta_2, \dots, s_{n-1}, a_{n-1}, \delta_n, s_n)$ , donde  $(s_k, a_k, \delta_{k+1}) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}_+$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  y  $s_n \in \mathbf{S}$ .

**Definición 1.** Una política de control admisible o simplemente una política es una sucesión  $\pi := \{\pi_n\}$ , donde cada  $\pi_n$  es un kernel estocástico sobre  $\mathbf{A}$  dado  $\mathbf{H}_n$ , tales que satisfacen la restricción  $\pi_n(A(s) | h_n) = 1$  para todo  $h_n \in \mathbf{H}_n$  y  $n \geq 1$ . Una política se dice *estacionaria* si

$\pi_n(\cdot | h_n)$  está concentrada en  $f(s_n)$  para cada  $h_n \in H_n, n \geq 0$ , donde  $f$  es una función medible de  $S$  a  $A$ . Denotamos por  $\Pi$  al conjunto de todas las políticas.

Problema de Decisión con Costo Descontado. Cada MDSM está dotado de una función real, llamada función objetivo o criterio de rendimiento, cuyo fin es medir el comportamiento de los costos por etapa en función de la política elegida, para ello se usará como índice de funcionamiento el costo total  $\alpha$ -descontado.

**Definición 2.** Consideremos un MDSM fijo y un conjunto de políticas  $\Pi$ , el costo total esperado  $\alpha$ -descontado, para cada  $s \in S$ ,  $\pi \in \Pi$  y  $\alpha > 0$ , se define como

$$\begin{aligned} V_\alpha^\pi(s) &:= E^\pi \left[ \sum_{n \geq 0} e^{-\alpha t_n} c(s_n, a_n) \mid s_0 = s \right] \\ &= E_s^\pi \left[ \sum_{n \geq 0} e^{-\alpha t_n} c(s_n, a_n) \right], \end{aligned}$$

Donde  $c(\cdot, \cdot)$  es una función de costo.

**Definición 3.** Una política  $\pi^* \in \Pi$  es óptima si  $V_\alpha^{\pi^*}(s) := \inf_{\pi \in \Pi} V_\alpha^\pi(s)$ ,  $\forall s \in S$ . Se define para cada  $s \in S$ ,  $V_\alpha^*(s) := \inf_{\pi \in \Pi} V_\alpha^\pi(s)$ , donde  $V_\alpha^*(s)$  se llama función de valores óptimos o valor óptimo.

Dado el MDSM, el problema de control óptimo (PCO) consiste en encontrar una política óptima, esto es, minimizar la función  $\pi \rightarrow V_\alpha^\pi(s)$  sobre  $\Pi$ , para todo  $s \in S$ .

### Condiciones Sobre el Modelo de Decisión.

Supongamos que  $S$  y  $A$  son subconjuntos numerables de  $\Omega$ . Para resolver el PCO, se requiere que el modelo de decisión satisfaga un conjunto de condiciones que se dan a continuación.

**Condiciones de continuidad y compacidad.** Sean  $s, s' \in S$

- $A(s)$  es un conjunto compacto, para cada  $s \in S$ ,
- Las funciones de costo,  $D(s, a)$  y  $d(s, a)$  son reales medibles y continuas en  $a \in A(s)$  para cada  $s \in S$ ,
- La ley de transición  $Q(\cdot | s, a)$  es fuertemente continua en  $a \in A(s)$ , es decir, para cada función medible y acotada  $v$  sobre  $S$ , se tiene que,  $v'(s, a) := \int_S v(s') Q(ds' | s, a)$ , es una función continua y acotada en  $K$ ,
- La función  $H(t | s, a)$  es continua en  $a \in A(s)$  para cada  $s \in S$  y  $t \in \Omega$ .

Las condiciones de crecimiento nos permiten analizar el PCO con costos no acotados. Sea  $w: \mathbf{S} \rightarrow [1, \infty)$  una función medible. Se denota por  $\mathbf{B}_w(\mathbf{S})$  el espacio lineal normado el cual consiste de todas las funciones medibles  $u: \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que satisfacen la condición,

$$\|u\|_w := \sup_{s \in \mathbf{S}} \frac{|u(s)|}{w(s)} < \infty.$$

**Condiciones de crecimiento.**

- Existe una función medible  $w: \mathbf{S} \rightarrow [1, \infty)$ , así como constantes  $c_1, c_2 > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  y  $b > 0$  tales que

$$\sup_{a \in \mathbf{A}(s)} |D(s, a)| \leq c_1 w(s), \quad \sup_{a \in \mathbf{A}(s)} |d(s, a)| \leq c_2 w(s),$$

$$\int_{\mathbf{S}} w(s') Q(ds' | s, a) \leq \varepsilon w(s) + b, \quad s \in \mathbf{S}, a \in \mathbf{A}(s).$$

- La función  $a \rightarrow \int_{\mathbf{S}} w(s') Q(ds' | s, a)$ , es continua en  $\mathbf{A}(s)$ , para cada  $s \in \mathbf{S}$ .

La siguiente condición garantiza que los PDSM son regulares, esto es, que experimentan un número finito de transiciones en intervalos de tiempo acotados.

**Condición de regularidad.**

Existen reales  $\varepsilon > 0$  y  $\theta > 0$  tales que

$$H(\theta | s, a) \leq 1 - \varepsilon, \text{ para todo } (s, a) \in \mathbf{K}.$$

**Notación 1.** Para cada  $(s, a) \in \mathbf{K}$  definimos

$$\Delta_\alpha(s, a) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} H(dt | s, a) \tag{1}$$

El siguiente resultado muestra una forma alternativa de expresar el costo total esperado  $\alpha$ -descontado (para una demostración, ver [3]).

**Proposición 1.** Para todo  $s \in \mathbf{S}$  y  $\pi \in \Pi$  se tiene que

$$V_\alpha^\pi(s) = E_s^\pi \left[ c(s_0, a_0) + \sum_{n=1}^\infty \prod_{j=0}^{n-1} \Delta_\alpha(s_j, a_j) c(s_n, a_n) \right].$$

Para  $s \in \mathbf{S}$ ,  $\pi \in \Pi$  y  $n \geq 1$ , denotemos por  $V_n^\pi(s)$  el costo esperado  $\alpha$ -descontado hasta la  $n$ -ésima transición, es decir,

$$V_n^\pi(s) = E_s^\pi \left[ \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha k} c(s_k, a_k) \right].$$

Observemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^\pi(s) = V_\alpha^\pi(s)$ .

El costo  $V_n^\pi(s)$  puede ser expresado de la siguiente manera

$$V_1^\pi(s) = E_s^\pi [c(s_0, a_0)]$$

$$V_n^\pi(s) = E_s^\pi \left[ c(s_0, a_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{k-1} \Delta_\alpha(s_j, a_j) c(s_k, a_k) \right], \quad n = 2, 3, \dots,$$

Introduciendo la notación

$$\Lambda_\alpha^0 := 1,$$

$$\Lambda_\alpha^k := \prod_{j=0}^{k-1} \Delta_\alpha(s_j, a_j), \quad k \geq 1,$$

Tenemos

$$V_n^\pi(s) = E_s^\pi \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda_\alpha^k c(s_k, a_k) \right], \quad n \geq 1,$$

y

$$V_\alpha^\pi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^\pi(s) := E_s^\pi \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_\alpha^k c(s_k, a_k) \right]. \quad (2)$$

**Ecuación de Optimalidad.** Diremos que una función medible  $u: \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución de la ecuación de optimalidad (EO) con costo  $\alpha$ -descontado, si satisface que para todo  $s \in \mathbf{S}$

$$u(s) = \min_{a \in A(s)} \left\{ c(s, a) + \Delta_\alpha(s, a) \sum_{s' \in \mathbf{S}} u(s') Q(s' | s, a) \right\}.$$

Denotemos por  $v_n$  la función de valor óptimo hasta la  $n$ -ésima transición. Esto es,

$$v_0(s) := 0,$$

$$v_n(s) := \inf_{\pi \in \Pi} V_n^\pi(s), \quad s \in \mathbf{S}.$$

Del Algoritmo de Programación Dinámica observemos que las funciones  $v_n$  pueden ser obtenidas de forma iterada, esto es, para  $s \in \mathbf{S}$ :

$$v_0(s) = 0,$$

$$v_n(s) = \min_{a \in A(s)} \left\{ c(s, a) + \Delta_\alpha(s, a) \sum_{s' \in \mathbf{S}} v_{n-1}(s') Q(s \square s, a) \right\},$$

Para  $n \geq 1$ . Luego, si  $v_n \rightarrow V_\alpha^*$  se esperaría que  $V_\alpha^*$  satisfaga la EO.

**Observación 1.** Para el siguiente resultado consideremos los costos  $c(s, a) := D(s, a)$  y  $d(s, a) := 0$ .

**TEOREMA 1.** Sea  $s \in \mathbf{S}$ , supongamos que se cumplen las condiciones a), b) y c), entonces

- $\|v_n - V_\alpha^*\|_w \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- $V_\alpha^*$  satisface la EO, es decir,

$$V_\alpha^*(s) = \min_{a \in A(s)} \left\{ c(s, a) + \Delta_\alpha(s, a) \sum_{s' \in \mathbf{S}} V_\alpha^*(s') Q(s \square s, a) \right\}. \quad (3)$$

- Existe  $f^* \in \mathbf{F}$  que minimiza el lado derecho en (3), es decir

$$V_\alpha^*(s) = c(s, f^*) + \Delta_\alpha(s, f^*) \sum_{s' \in \mathbf{S}} V_\alpha^*(s') Q(s \square s, f^*),$$

y la política estacionaria  $\pi = \{f^*, f^*, \dots\}$  es óptima, en donde  $\mathbf{F}$  es el conjunto de todas las políticas estacionarias.

### Optimalidad de una Política en el Sistema $M / M / 1$ con Recesos.

**Descripción del Modelo.** Consideramos un sistema  $M / M / 1$  donde el servidor atiende a los clientes hasta que la cola se vacía, inmediatamente toma un receso de tiempo arbitrario. Al volver de este período, el servidor puede seguir apagado o ser activado, siempre que la cola no esté vacía. Suponemos que los procesos de tiempos entre llegadas, los de servicios y de receso son independientes entre sí. Sean  $1/\lambda$ ,  $1/\mu$  y  $1/\nu$  los tiempos medios de éstos, respectivamente. Suponemos que en dicho sistema se incurre un costo de almacenamiento por unidad de tiempo y por cliente en el sistema  $h > 0$ , y un costo fijo  $\gamma > 0$  cada que el servidor se vuelve a activar. El objetivo es encontrar una política que minimice el costo  $\alpha$ -descuento.

Suponemos que el sistema se observa en cada llegada, en cada finalización de servicio y en cada tiempo de salto de un proceso poisson  $V$ , independiente de los procesos de entrada y de servicio, con parámetro  $\nu$ . El proceso  $V$  desempeñará el papel de un proceso de receso virtual en el

sentido de que, si se produce un salto en  $V$  cada vez que el servidor está en reposo, entonces este salto puede tomarse como el tiempo de finalización del próximo receso. En cada punto de observación que corresponde a un salto en  $V$ , una decisión será elegida ya sea en reanudar o no el servidor.

Se construye un PDSM tal que el estado del proceso en la  $n$ -ésima época de decisión  $t_n$ ,  $n \geq 0$ , sea representado por una tripleta  $(X_n, Y_n, Z_n) \in \mathbb{N} \times \{0,1\}^2$ , donde  $X_n$  es la longitud de la cola al tiempo  $t_n$ ,  $Y_n \in \{0,1\}$  describe la actividad del servidor al tiempo  $t_n$ , ( $Y_n = 1$  si el servidor está activo y  $Y_n = 0$  si está en reposo) y  $Z_n = I_{(t_n \in V)}$ , esto es  $Z_n = 1$  si  $t_n$  es un tiempo de salto del proceso  $V$  y  $Z_n = 0$ , en caso contrario. El MDSM se puede construir con las componentes siguientes; sea  $\mathbf{S} := \mathbb{N} \times \{0,1\}^2$  el espacio de estados, y sea  $A(x, y, z) \subset A = \{0,1\}$  el conjunto de todas las acciones disponibles cuando el sistema se encuentra en el estado  $s \in \mathbf{S}$ . Asumimos que

$$\begin{aligned} A(x, 1, 1) &= \{1\}, \quad x \geq 1; \\ A(x, 1, 0) &= \begin{cases} \{1\}, & x \geq 1; \\ \{0\}, & x = 0; \end{cases} \\ A(x, 0, 1) &= \begin{cases} \{0,1\}, & x \geq 1; \\ \{0\}, & x = 0; \end{cases} \\ A(x, 0, 0) &= \{0\}, \quad x \geq 1, \end{aligned}$$

Donde por convención la acción 1 (respectivamente 0) se toma si la decisión es reanudar el servidor (apagar respectivamente).

Sea  $Q(\square; a)$  la distribución de probabilidad del siguiente estado visitado por el sistema dado que se encuentra en el estado  $s = (x, y, z) \in \mathbf{S}$  y la acción  $a \in A(x, y, z)$  se elige. Las probabilidades de transición están dadas por

$$\begin{aligned} Q(x-1, 1, \square; x, 1, 1; 1) &= \mu / \beta, \quad x \geq 1; \\ Q(x+1, 1, \square; x, 1, 1; 1) &= \lambda / \beta, \quad x \geq 1; \\ Q(x, 1, \square; x, 1, 1; 1) &= \nu / \beta, \quad x \geq 1; \\ Q(x-1, 1, \square; x, 1, 0; 1) &= \mu / \beta, \quad x \geq 1; \\ Q(x+1, 1, \square; x, 1, 0; 1) &= \lambda / \beta, \quad x \geq 1; \\ Q(x, 1, \square; x, 1, 0; 1) &= \nu / \beta, \quad x \geq 1; \end{aligned}$$

$$Q(0,0,\square 0,1,0;0) = \nu / (\lambda + \nu);$$

$$Q(1,0,\square 0,1,0;0) = \lambda / (\lambda + \nu);$$

$$Q(x-1,1,\square x,0,1;1) = \mu / \beta, \quad x \geq 1;$$

$$Q(x+1,1,\square x,0,1;1) = \lambda / \beta, \quad x \geq 1;$$

$$Q(x,1,\square x,0,1;1) = \nu / \beta, \quad x \geq 1;$$

$$Q(x+1,0,\square x,0,1;0) = \lambda / (\lambda + \nu), \quad x \in \square;$$

$$Q(x,0,\square x,0,1;0) = \nu / (\lambda + \nu), \quad x \in \square;$$

$$Q(x+1,0,\square x,0,0;0) = \lambda / (\lambda + \nu), \quad x \geq 1;$$

$$Q(x,0,\square x,0,0;0) = \nu / (\lambda + \nu), \quad x \geq 1,$$

Donde  $\beta := \lambda + \mu + \nu$ .

**Definición 4.** Sean  $s = (x, y, z) \in \mathbf{S}$  y  $a \in \mathbf{A}(x, y, z)$ ,  $h$  y  $\gamma$  conocidos, definamos

$$D(x, y, z; a) := (h / \nu)xz + \gamma(1 - y)z \cdot I_{\{a=1\}}.$$

Denotemos por  $\hat{\beta}$  la tasa de transición para cada estado dado la acción. Entonces

$$\hat{\beta}(s, a) = \begin{cases} \beta, & x \geq 1, y, z \in \{0, 1\}, a = 1; \\ \lambda + \nu, & (x, y, z) \in \mathbf{S}, a = 0; \end{cases}$$

Para  $s = (x, y, z) \in \mathbf{S}$  y  $a \in \mathbf{A}(s)$ , así

$$H(t \square s, a) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t}, & a = 1; \\ (\lambda + \nu) e^{-(\lambda + \nu)t}, & a = 0, \end{cases}$$

Desarrollamos (1), para el caso  $a = 1$

$$\Delta_{\alpha}(s,1) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} H(dt \square s,1) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} (\beta e^{-\beta t}) dt = \beta \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)t} dt = \frac{\beta}{\alpha+\beta},$$

análogamente para el caso  $a = 0$ , así

$$\Delta_{\alpha}(s,a) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha+\beta}, & a=1; \\ \frac{\lambda+\nu}{\alpha+\lambda+\nu}, & a=0. \end{cases}$$

**Observación 2.** Suponemos que  $h/\nu = 1$ .

Sea  $(x, y, z) \in \mathbf{S}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbf{S}$  y  $a \in \mathbf{A}(x, y, z)$ , a partir del Teorema 1 se deducen las siguientes ecuaciones de optimalidad para  $x \geq 1$

$$(\alpha + \beta)V_{\alpha}(x,1,1) = x(\alpha + \beta) + \mu V_{\alpha}(x-1,1,0) + \lambda V_{\alpha}(x+1,1,0) + \nu V_{\alpha}(x,1,1); \quad (4)$$

$$(\alpha + \beta)V_{\alpha}(x,1,0) = \mu V_{\alpha}(x-1,1,0) + \lambda V_{\alpha}(x+1,1,0) + \nu V_{\alpha}(x,1,1); \quad (5)$$

$$(\alpha + \beta + \nu)V_{\alpha}(0,1,0) = \lambda V_{\alpha}(1,0,0) + \nu V_{\alpha}(0,0,1); \quad (6)$$

$$(\alpha + \beta + \nu)V_{\alpha}(0,0,1) = \lambda V_{\alpha}(1,0,0) + \nu V_{\alpha}(0,0,1); \quad (7)$$

$$V_{\alpha}(x,0,1) = \min \left\{ x + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + \nu} V_{\alpha}(x+1,0,0) + \frac{\nu}{\alpha + \lambda + \nu} V_{\alpha}(x,0,1); \right. \\ \left. x + \gamma + \frac{\mu}{\alpha + \beta} V_{\alpha}(x-1,1,0) + \frac{\lambda}{\alpha + \beta} V_{\alpha}(x+1,1,0) + \frac{\nu}{\alpha + \beta} V_{\alpha}(x,1,1) \right\}; \quad (8)$$

$$(\alpha + \lambda + \nu)V_{\alpha}(x,0,0) = \lambda V_{\alpha}(x+1,0,0) + \nu V_{\alpha}(x,0,1). \quad (9)$$

Haciendo operaciones algebraicas se reduce el número de incógnitas involucradas en (4)-(9), teniendo finalmente el conjunto de ecuaciones para  $x \geq 1$

$$V_{\alpha}(0,1,0) = V_{\alpha}(0,0,1) = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} V_{\alpha}(1,0,0), \quad (10)$$

$$V_{\alpha}(x,0,1) = x + \min \{ V_{\alpha}(x,0,0); \gamma + V_{\alpha}(x,1,0) \}, \quad (11)$$

$$V_\alpha(x,1,1) = x + V_\alpha(x,1,0). \quad (12)$$

Introduciendo (10) en (5) obtenemos una ecuación en diferencias que nos lleva al siguiente resultado;

**Lema 1.**

$$V_\alpha(x,1,0) = \left( V_\alpha(1,0,0) \left( \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \right) + v \left( \frac{\mu - \lambda}{\alpha^2} \right) \right) \beta_{\alpha,1}^x + \frac{v}{\alpha} x + v \left( \frac{\lambda - \mu}{\alpha^2} \right), \quad (13)$$

para toda  $x \in \mathbb{N}$  donde  $\beta_{\alpha,1}, 0 < \beta_{\alpha,1} < 1$ , es la raíz más pequeña del polinomio  $\lambda z^2 - (\alpha + \lambda + \mu)z + \mu$ .

En resumen, para todo  $(x, y, z) \in \mathbf{S}$ ,  $V(x, y, z)$  se expresa únicamente de  $V(1,1,0)$ ,  $V(x,0,1)$  y  $V(x,0,0)$  para  $x \geq 1$ , mediante las ecuaciones (10)-(13).

Del Teorema 1 se sigue que la política estacionaria  $\pi^* = (f^*, f^*, \dots)$  es óptima derivado de la regla de decisión,

$$f^*(s) = \begin{cases} 1, & V_\alpha^*(x,1,0), V_\alpha^*(x,1,1), x \geq 1; \\ 0, & e.o.c \end{cases}.$$

### 3. RESULTADOS

Los siguientes datos muestran los resultados de los costos  $V_n(x, y, z)$  en forma de matriz, para valores de  $n = \{5, 10, 15, 16\}$ , donde  $\alpha = 1/2$ ,  $\lambda = 1/5$ ,  $\mu = 1/2$ ,  $v = 1/2$ ,  $\gamma = 2$  y  $m = 10$ , donde la matriz muestra los costos  $V_n(x, y, z)$  de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} V_n(0,0,0) & V_n(0,1,0) & V_n(0,0,1) & V_n(0,1,1) \\ V_n(1,0,0) & V_n(1,1,0) & V_n(1,0,1) & V_n(1,1,1) \\ V_n(2,0,0) & V_n(2,1,0) & V_n(2,0,1) & V_n(2,1,1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_n(m,0,0) & V_n(m,1,0) & V_n(m,0,1) & V_n(m,1,1) \end{pmatrix}$$

$n = 5$				$n = 10$			
1.1056	0.4165	2.1056	1.4165	1.3689	0.4179	2.3689	1.4179
1.9898	1.4003	3.9898	3.4003	2.3611	1.4003	4.3611	3.4003
2.8740	2.4000	5.8740	5.4000	3.3533	2.4000	6.3533	5.4000
3.7582	3.4000	7.7582	7.4000	4.3455	3.4000	8.3455	7.4000
4.6424	4.4000	9.6424	9.4000	5.3377	4.4000	10.3377	9.4000
5.5266	5.4000	11.5266	11.4000	6.3298	5.4000	12.3298	11.4000
6.4108	6.4000	13.4108	13.4000	7.3220	6.4000	14.3220	13.4000
7.2950	7.4000	15.2950	15.4000	8.3141	7.4000	16.3141	15.4000
8.1793	8.4000	17.1793	17.4000	9.3056	8.4000	18.3056	17.4000
9.0635	9.4000	19.0635	19.4000	10.2958	9.4000	20.2958	19.4000

$n = 15$				$n = 16$			
1.3971	0.4180	2.3971	1.4180	1.3982	0.4180	2.3982	1.4180
2.3966	1.4003	4.3966	3.4003	2.3979	1.4002	4.3979	3.4002
3.3961	2.4000	6.3961	5.4000	3.3976	2.4000	6.3976	5.4000
4.3956	3.4000	8.3956	7.4000	4.3973	3.4000	8.3973	7.4000
5.3950	4.4000	10.3950	9.4000	5.3970	4.4000	10.3970	9.4000
6.3945	5.4000	12.3945	11.4000	6.3967	5.4000	12.3967	11.4000
7.3939	6.4000	14.3939	13.4000	7.3964	6.4000	14.3939	13.4000
8.3933	7.4000	16.3933	15.4000	8.3960	7.4000	16.3933	15.4000
9.3926	8.4000	18.3926	17.4000	9.3955	8.4000	18.3926	17.4000
10.3917	9.4000	20.3917	19.4000	10.3950	9.4000	20.3917	19.4000

Tomemos, por ejemplo,  $s_1 = (5,0,0)$ , de los datos en las tablas podemos observar que  $V_5(s_1) = 4.6424$ ,  $V_{10}(s_1) = 5.3377$ ,  $V_{15}(s_1) = 5.3950$  y  $V_{16}(s_1) = 5.3970$ , esto es, que conforme  $n$  aumenta, los costos  $V_n(s)$  van acercándose a  $V(s)$ , para un  $\delta$  suficientemente pequeño podemos garantizar que se cumple (2). Análogamente para los demás costos.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron los conceptos generales de la teoría de los procesos de decisión semi-Markovianos y se estudió un modelo de líneas de espera, más precisamente se consideró un sistema  $M/M/1$  controlada con la característica de periodos de recesos, para el cual se caracteriza una estrategia óptima de operación para el criterio de costo total  $\alpha$ -descontado.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Altman, E. and Nain, P. "Optimality of a Threshold Policy in the M/M/1 Queue with Repeated Vacations", *Math. Meth. Op. Res.* 44: 75-96, (1996).
2. Bellman, R. E. "Dynamic Programming", Dover Publications, (2003).
3. Camilo, C. "Análisis de una línea de espera usando procesos de decisión semi-Markovianos", Tesis Lic., Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2014).

# ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL EFECTO DE PERFORACIONES CIRCULARES EN UNA PLACA CUADRADA DE CARTÓN MEDIANTE LA TÉCNICA DE CHLADNI

Gabriel Arroyo Correa<sup>1</sup>, Manuel Vega Guzmán<sup>1</sup>, José Vega Cabrera<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH.

## RESUMEN:

En un trabajo previo (Arroyo Correa et. al, 2015), se mostró que con la combinación del análisis de Fourier y de la observación directa del patrón de Chladni es posible cuantificar el efecto de cortes rectos sobre una placa cuadrada de cartón. En este trabajo complementamos este estudio al analizar experimentalmente el efecto de perforaciones circulares en una placa cuadrada de cartón mediante la técnica de Chladni. Se usó un vibrador de bocina sobre la cual se fijó la placa por su centro. Un generador de funciones se conectó al vibrador para variar la frecuencia. Un sensor de sonido colocado arriba de la placa registró la señal de vibración, la cual se procesó mediante un dispositivo de adquisición de datos y, mediante un software apropiado, se desplegó en pantalla en tiempo real el espectro de Fourier. Se analizaron los patrones en un rango de frecuencias hasta 1.4 kHz. Los resultados experimentales muestran que mediante la combinación del análisis de Fourier y de la observación directa del patrón de Chladni es posible cuantificar el efecto de las perforaciones circulares en cuanto a su tamaño y posición relativa con respecto al centro de la placa de cartón. Se agradece el apoyo a través del programa CIC-UMSNH 2016.

## 1. INTRODUCCIÓN

La técnica de Chladni es un procedimiento simple y visualmente atractivo para observar los patrones de vibración de placas. fue inventada por Ernst Chladni (Stockmann, 2007). Originalmente el método consistía en hacer vibrar una placa sujeta a una base por medio de un arco de violín. En la actualidad, la placa a analizar se monta sobre un vibrador y se esparce material granular ligero sobre su superficie. Cuando el vibrador se pone a oscilar a una frecuencia específica, el material granular empezará a agregarse sobre las líneas nodales del patrón vibratorio correspondiente a una de las frecuencias de resonancia de la placa. En principio, es posible obtener información de las propiedades mecánicas de la placa a partir de sus patrones de Chladni. A pesar de que el cartón es un material difícil de trabajar en los estudios de vibración, en un trabajo reciente (Arroyo Correa et al., 2015) demostramos que es posible estudiar el efecto de un solo corte sobre placas de cartón. En este trabajo se extiende este estudio para analizar el efecto de perforaciones circulares sobre placas cuadradas de cartón.

## 2. PARTE EXPERIMENTAL

El arreglo experimental es similar al indicado en la ref. 1. En el presente trabajo se cortaron cinco placas de cartón del mismo material, de dimensiones 23 cm X 23 cm. Una placa se tomó como referencia (PR, masa de 27.6 g). En las otra placas, que se designan como C1, C2, C3 y C4, se hicieron cortes circulares centrados a cuatro distintas distancias del centro de la placa y a lo largo de la diagonal que va del centro a una esquina de la placa: a 3 cm, 6 cm, 9 cm y 12 cm, respectivamente. En la placa C1 se hicieron, secuencialmente, cuatro perforaciones circulares de 0.6 cm, 1.4 cm, 2 cm y 2.6 cm de radio (todas centradas a 3 cm del centro y a lo largo de la

diagonal). En la placa C2 se hicieron las mismas perforaciones circulares, pero ahora todas centradas a 6 cm del centro y a lo largo de la diagonal. De manera similar, en las placas C3 y C4 se hicieron las perforaciones circulares, pero a 9 cm y 12 cm del centro, respectivamente. Para mayor claridad, en la Fig. 1 se muestra la fotografía de la placa C1, con la última perforación circular de 2.6 cm de radio y a una distancia de 3 cm del centro.

Primeramente se obtuvieron los patrones de Chladni con la placa de referencia PR, espolvoreando sal sobre la placa y variando la frecuencia hasta obtener patrones definidos. Para identificar el modo de resonancia de la placa, se observó simultáneamente el patrón de Chladni y su espectro de Fourier. Se tomó una fotografía del patrón y se registró su espectro de Fourier. Posteriormente se obtuvieron, secuencialmente, los patrones de Chladni y los espectros de Fourier de las diferentes placas consideradas. El análisis se hizo en el rango de frecuencia de 100 a 1500 Hz. Excepto la PC, la instrumentación utilizada fue de la marca PASCO. La placa tiene una cuadrícula para la medición cuantitativa de las líneas nodales de los diferentes patrones.

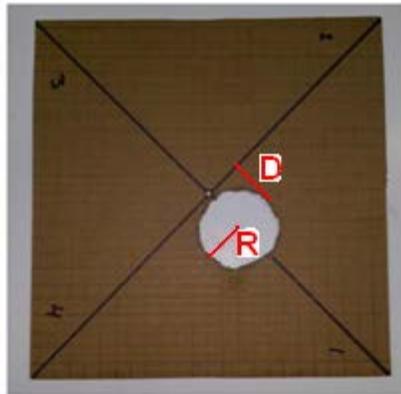


Figura 1. Placa C1 con el último corte radial ( $R=2.6$  cm) y a una distancia  $D$  del centro ( $D=3$  cm).

### 3. RESULTADOS

En la Fig. 2 se muestra las fotografías de los patrones de Chladni de la placa de referencia PR. Los patrones mostrados corresponden a los tres rangos de frecuencias consideradas: bajas (de 100 a 300 Hz), medias (de 350 a 500 Hz) y altas (de 1000 a 1500 Hz). Las Figs. 3 y 4 muestran los patrones de Chladni para las perforaciones radiales de 0.6 cm y 2.6 cm, respectivamente, para las placas C1, C2, C3 y C4. Los rangos de frecuencias son los mismos. Los nombres que aparecen en la Fig. 2 corresponden a: Baja 1 (alrededor de 147 Hz), Baja 2 (alrededor de 245 Hz), Media 1 (alrededor de 371 Hz), Media 2 (alrededor de 480 Hz), Alta 1 (alrededor de 1000 Hz) y Alta 2 (alrededor de 1300 Hz). Sc se refiere al parámetro que se toma como referencia para las mediciones cuantitativas que se muestran en la Fig.5.

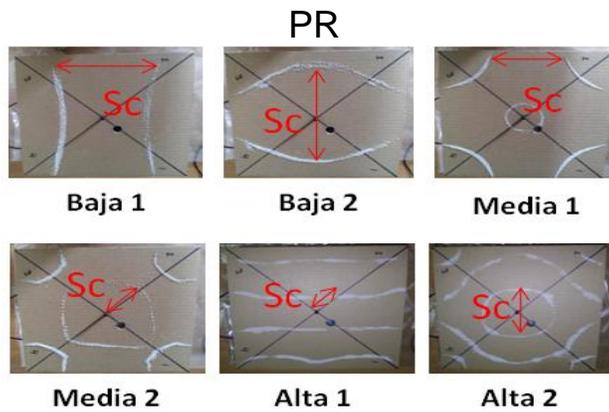


Figura 2. Patrones de Chladni de la placa PR en los rangos de frecuencias consideradas. Los nombres Baja 1, Baja 2, Media 1, Media 2, Alta 1 y Alta 2, se refieren a valores diferentes en los rangos de frecuencia considerados.

**Perforación Radial 0.6 cm**

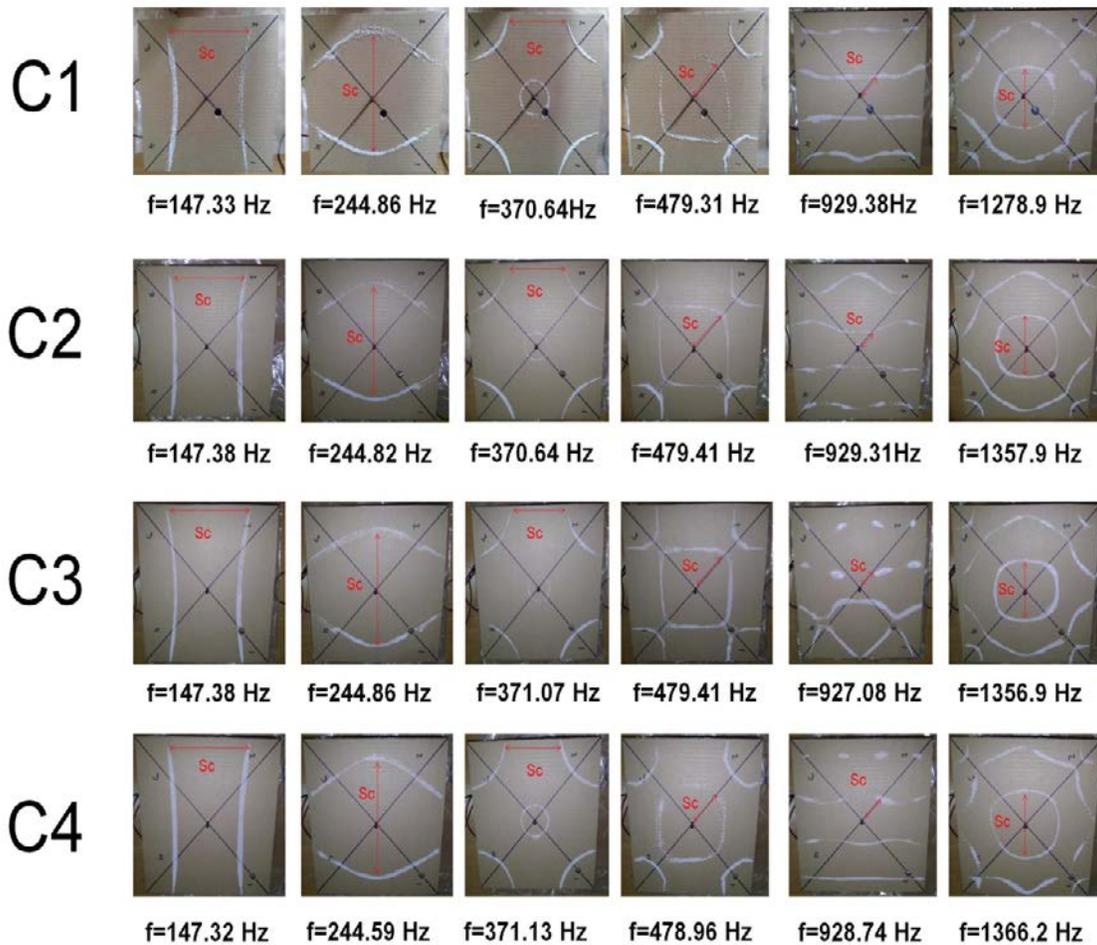


Figura 3. Patrones de Chladni de las placas C1-C4 para la perforación radial de 0.6 cm.

Para frecuencias entre 100 y 300 Hz, se puede notar como el patrón original de líneas nodales (una hipérbola cuasi-simétrica con respecto al punto de sujeción de la placa) experimenta una mayor curvatura en la línea nodal cercana a la ubicación de la perforación radial.

Para frecuencias alrededor de los 350 Hz, el patrón original de líneas nodales formado por dos pares de hipérbolas cuasi-simétricas sufre modificaciones. El efecto de la perforación es romper la simetría ya que la rama de las hipérbolas que está cercana al orificio circular experimenta una distorsión notable. Para frecuencias alrededor de los 475 Hz, La línea nodal central, que es cerrada en la placa de referencia, experimenta una distorsión a medida que aumenta el tamaño de la perforación y su posición con respecto al centro de la placa; de hecho en el caso en que la perforación es mayor, la línea nodal central se fusiona con las líneas nodales de los extremos (véanse los patrones de la cuarta columna en la Fig. 4).

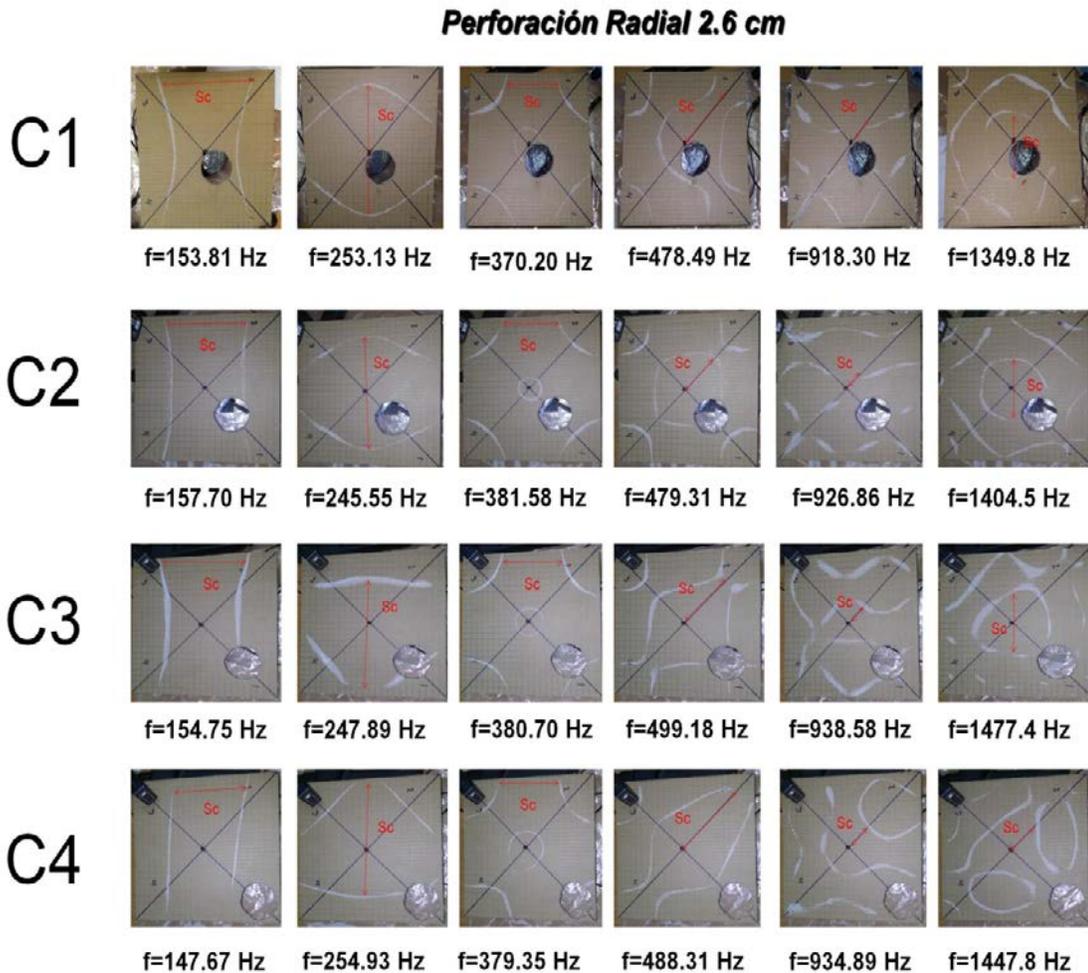


Figura 4. Patrones de Chladni de las placas C1-C4 para la perforación radial de 2.6 cm.

Para frecuencias entre 900 y 1500 Hz, el comportamiento del patrón es más complicado. Alrededor de los 900 Hz y para perforaciones radiales pequeñas las líneas nodales cerca de la región en donde se localiza sufren una ligera distorsión, excepto en casos en donde la perforación coincide con la línea nodal original de la placa de referencia. Sin embargo, para perforaciones radiales

mayores las líneas nodales experimentan una fusión entre ellas cambiando drásticamente la forma del patrón de Chladni. Para frecuencias alrededor de los 1300 Hz, el patrón original de Chladni experimenta un ligero cambio, salvo en los casos en que la perforación coincida con alguna de las líneas nodales del patrón original. Pero cuando el tamaño de la perforación aumenta, el cambio del patrón original es evidente; de hecho cuando la perforación radial está más alejada del centro de la placa, surgen líneas nodales cerradas cerca de la región de la perforación (véase la fotografía en el extremo inferior derecho de la Fig. 4).

En la Fig. 5 se muestra una cuantificación del parámetro  $Sc$  mostrado en las Figs. 3 y 4. De esta figura es posible entender el cambio de este parámetro en función de la frecuencia, tamaño del orificio circular y su posición con respecto al centro de la placa. Para frecuencias bajas y medias no hay problema en considerar este parámetro como un factor para explicar el efecto de la perforación radial sobre el patrón de Chladni original. Sin embargo, para frecuencias altas el problema es más delicado, ya que se necesitarían más parámetros de referencia.

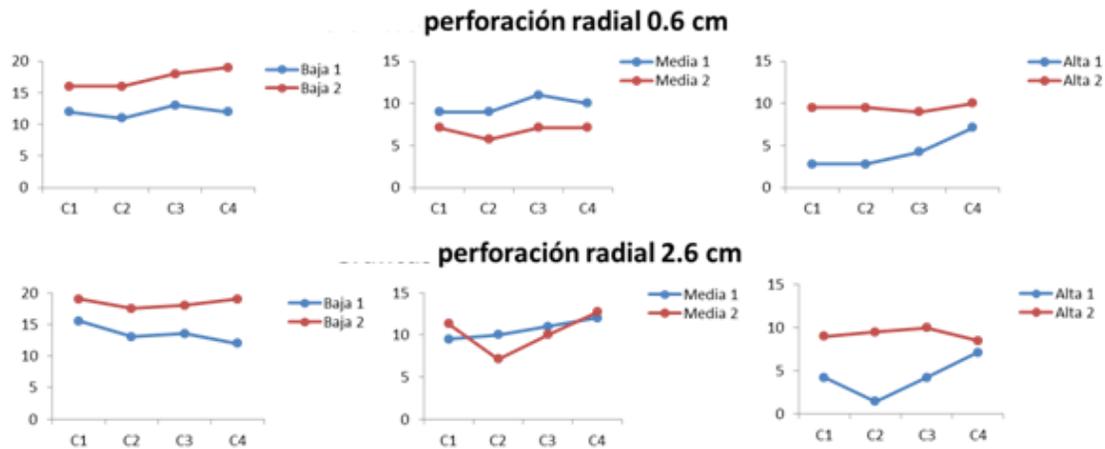


Figura 5. Cuantificación del efecto de las perforaciones radiales en los rangos de frecuencia considerados para los patrones mostrados en las Figs. 3 y 4. La escala vertical está en centímetros y corresponde al parámetro  $Sc$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados experimentales demuestran que el uso de la técnica de Chladni y el análisis del espectro de Fourier permiten cuantificar el efecto de perforaciones circulares sobre la placa cuadrada de cartón, a pesar de ser un material rugoso. La cuantificación del efecto de corte en la placa se pudo hacer mediante un parámetro relacionado con las formas de las líneas nodales, fáciles de identificar para frecuencias entre 150 y 550 Hz. A frecuencias más altas, dada la naturaleza del cartón, la cuantificación es más difícil. Este trabajo puede ser de utilidad en el diseño de cavidades y es una extensión de un trabajo reciente (Arroyo Correa et al., 2015).

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. G. Arroyo Correa, M. Vega Guzmán, J. Vega Cabrera, C. H. Mendoza Pérez. "Estudio experimental de los patrones de vibración de placas con geometría no convencional usando la técnica de Chladni", XII encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, 2015, trabajo S1-FMCT16.
2. H.J. Stockmann, "Chladni meets Napoleon", *Eur. Phys. J. Special Topics*, Vol. 145, 2007, pp. 15-23.

# **SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE INVENTARIOS DINÁMICO BAJO LA PRESENCIA DE INCERTIDUMBRE**

Gladys D. Salgado Suárez<sup>1</sup>, Hugo A. Cruz Suárez<sup>1</sup>, José D. Zacarías Flores<sup>1</sup> y Fernando Velasco Luna<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

## **RESUMEN**

En este trabajo se presenta un modelo de inventarios en tiempo discreto. La variable de interés es el stock del sistema, el cual se encuentra bajo la presencia de incertidumbre. En este trabajo se supone que la incertidumbre es inducida por la demanda de productos en el inventario. Dicho sistema es observado en distintos periodos de tiempo y en función del estado observado (stock), se toma la decisión de solicitar (o producir) artículos para llenar el stock del inventario. Claramente la producción de estos artículos genera un costo, además de un costo adicional por el manejo del stock del inventario. De este modo es necesario determinar una estrategia óptima de operación en el inventario, es decir, determinar cuál es la cantidad óptima de artículos a producir (o comprar) en cada periodo de observación, con la finalidad de minimizar los costos totales de operación en un periodo de planeación fijo. Mediante la teoría de procesos de Markov y el uso de la técnica de programación dinámica se determinará una estrategia óptima de operación. Finalmente, mediante simulación estocástica se ilustrará la efectividad de dicha estrategia en un ejemplo numérico.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Este artículo se relaciona con Procesos de Decisión de Markov (PDMs). Los PDMs modelan un sistema observado en el tiempo por un controlador o agente decisor que influencia en la evolución del sistema. El controlador decide qué acción (control) tomar dependiendo del estado del sistema con el objetivo de que el sistema se desempeñe eficazmente con respecto a ciertos criterios de optimalidad determinados (función objetivo). La acción genera un costo (o recompensa) que debe pagarse y repercute en el nuevo estado del sistema con una distribución de probabilidad. Para cada estado del sistema debe especificarse una regla de decisión que indique que acción tomar, para ello se establece una política o estrategia. La mejor política será la que optimice el criterio de optimalidad lo que da origen al Problema de Control Óptimo. Por esta razón, un sistema de inventarios puede ser estudiado como un PCO en el que el objetivo es determinar cuál es la cantidad óptima de artículos a producir (o comprar) en cada periodo de observación, con la finalidad de minimizar los costos totales de operación en un periodo de planeación fijo. Una técnica para resolver este problema es la llamada Programación Dinámica la cual proporciona una estrategia óptima.

El trabajo se organiza de la siguiente forma: inicialmente se plantea el PCO y la técnica de Programación Dinámica, posteriormente se presenta el modelo de inventarios a tiempo discreto y un ejemplo numérico, en la siguiente sección se simula el sistema y se ilustran los resultados de algunas estrategias, mostrando la efectividad de la obtenida por medio de programación dinámica, finalmente se exponen algunas conclusiones.

## 2. TEORÍA

Un Modelo de Control de Markov (MCM), consiste de la quintupla:

$$(X, A, \{A(x) | x \in X\}, Q, C).$$

Donde  $X$  y  $A$  son un espacios de Borel no vacíos, llamados espacio de estados y espacio de acciones o controles respectivamente.  $\{A(x) | x \in X\}$  es una familia de subconjuntos medibles, no vacíos  $A(x)$  de  $A$ , donde  $A(x)$  denota el conjunto de controles admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado  $x \in X$ .

$Q$  es la ley de transición, es decir, indica la probabilidad de pasar a cierto estado dependiendo del estado actual y la acción que se tome y  $C$  es la función de costo de un paso.

Un MCM se considera estacionario si el proceso de transición y la función de costo no dependen del tiempo sino sólo del estado y de la acción que se tome.

Cuando se trabaja en MCMs a tiempo discreto y estacionarios, la interpretación del modelo es la siguiente: en cada tiempo  $t \in \mathbb{N}$  se observa el estado del sistema  $x_t = x \in X$ , se aplica una acción  $a_t = a \in A(x)$ , y como resultado ocurren dos cosas:

Se paga un costo  $C(x, a)$ ;

El sistema se traslada a un nuevo estado  $x_{t+1}$ , mediante la distribución de probabilidad  $Q(\cdot | x, a)$  sobre  $X$ .

Una vez hecha esta transición a un nuevo estado, se elige una nueva acción y la dinámica anteriormente descrita se repite.

En algunas ocasiones la ley de transición  $Q$  es inducida por una ecuación de diferencias estocásticas dada por:

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t) \tag{1}$$

Para  $t = 0, 1, 2, \dots$   $x_0 = x$  conocido. Donde  $\{\xi_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias (v.a) independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) tomando valores en un espacio  $S$  con distribución común  $\nu$  e independiente del estado  $x_0$  y  $F: \mathbb{K} \times S \rightarrow X$  es una función medible conocida donde  $\mathbb{K}$  es el conjunto de estados y acciones admisibles  $K = \{(x, a) | x \in X, a \in A(x)\}$ .

Para cada  $t \in \mathbb{N}$  se define  $\mathbb{H}_t$  el espacio de historias admisibles al tiempo  $t$  como  $\mathbb{H}_0 := X$  y  $\mathbb{H}_t := X \times \mathbb{H}_{t+1}$  para  $t \geq 1$ , esto es, todas las posibles historias que se pueden observar hasta el tiempo  $t$ . Un elemento genérico de  $\mathbb{H}_t$  llamado  $t$ -historia es denotado por  $h_t = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t)$ , donde  $(x_i, a_i) \in \mathbb{K}$  para  $x_i \in X$  y  $a_i \in A(x_i)$ .

De esta manera, una estrategia  $\pi = \{\pi_t, t = 0, 1, \dots\}$  es una sucesión de kérneos estocásticos definidos sobre  $A$  dada la historia del proceso  $\mathbb{H}_t$  y satisfacen que  $\pi_t(A(x_t) | h_t) = 1$  para toda  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

Las estrategias se dicen ser:

Determinista Markoviana. Si existe una sucesión  $\{f_t\}$  de funciones medibles  $f_t: X \rightarrow A$ , tales que  $f_t(x_t) \in A(x_t)$  para cada  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

Determinista Markoviana Estacionaria. Si existe una función medible  $f: X \rightarrow A$ , tal que  $f(x_t) \in A(x_t)$  y  $\pi_t(\cdot | h_t)$  está concentrada en  $f(x_t)$  para cada  $h_t \in \mathbb{H}_t$  y  $t = 0, 1, 2, \dots$

El siguiente teorema proporciona un algoritmo que bajo ciertas condiciones permite encontrar una política y valor óptimos para un problema de horizonte finito  $N$ . (Hernandez-Lerma and Lasserre ,1996):

Teorema: Sean  $J_0, J_1, \dots, J_N$  funciones sobre  $X$  definidas por:

$$J_N(x) := 0, \quad (2)$$

Y para  $t = N - 1, N - 2, \dots, 0$ ,

$$J_t(x) := \min_{A(x)} \left[ C(x, a) + \int_X J_{t+1}(y) Q(dy | x, a) \right] \quad (3)$$

Suponga que estas funciones son medibles y que, para cada  $t = 0, \dots, N - 1$ , existen selectores  $f_t \in \mathbb{F}$  tales que  $f_t(x) \in A(x)$  alcanzan el mínimo en (10) para todo  $x \in X$ ; que es,  $\forall x \in X$  y  $t = 0, \dots, N - 1$ ,

$$J_t(x) := \min_{A(x)} \left[ C(x, f_t) + \int_X J_{t+1}(y) Q(dy | x, f_t) \right] \quad (4)$$

Entonces la política (determinista Markoviana)  $\pi^* = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$  es la óptima y la función de valor  $J^*$  es igual a  $J_0$ , es decir,

$$J^*(x) = J_0(x) = J(\pi^*, x) \quad \forall x \in X \quad (5)$$

### Sistema de inventarios

Consideremos una empresa que produce cierto producto, el administrador buscar obtener las mayores ganancias decidiendo en cada periodo cuánto producto solicitar para solventar la demanda de los clientes dependiendo del stock actual o producto que hay almacenado (información que se obtiene al realizar el inventario) y considerando lo siguiente:

Solo se pueden producir cantidades enteras.

El almacén tiene una capacidad finita  $M$ .

En caso de solicitar producto, se ordena al inicio del periodo y se entrega inmediatamente.

Las demandas se surten al final de cada periodo.

Si la demanda excede la cantidad de producto existente, se paga una penalización y el cliente surte su demanda faltante en otro lado, es decir, no hay pedidos pendientes.

Se paga un costo de almacenaje por la cantidad de producto existente y un costo de producción.

Cada producto tiene un precio de venta fijo.

Si consideramos un sistema de inventarios de alguna producción en particular podemos representarlo a través de un MCM definiendo a  $x_t$  como la cantidad de productos al principio del periodo o nivel del stock  $t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ). La variable acción  $a_t$  la cantidad pedida (u ordenada) e inmediatamente proporcionada al principio del periodo  $t$ , y la variable de perturbación (o ruido)  $\xi_t$  es la demanda durante ese periodo, supondremos que la sucesión  $\{\xi_t\}$  de variables aleatorias son i.i.d. con  $p_k = P(\xi_t = k), k \in Rang \xi_t$ .

En este caso la dinámica del sistema está dada por la ecuación en diferencias siguiente:

$$x_{t+1} = \max\{x_t + a_t - \xi_t, 0\} = [x_t + a_t - \xi_t]^+, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

La expresión anterior se puede interpretar del siguiente modo: en el periodo  $t + 1$  habrá  $x_t$  productos que eran los que existían hasta el periodo anterior más la cantidad  $a_t$  solicitada menos la demanda que se surte a los clientes, y como no pueden quedar pedidos pendientes, entonces la cantidad de productos no puede ser negativa, así, si no se logra surtir toda la demanda, el nivel del inventario al siguiente periodo será 0.

Si establecemos:

$b$ =el costo de producción por unidad que se solicite

$h$ =el costo de almacenaje por unidad

$p$ =el costo unitario de penalización de la demanda sin entregar

Queremos obtener las mayores ganancias, es decir minimizar el siguiente criterio de rendimiento:

$$J_N(x, \pi) = E_{\pi}^x \left[ \sum_{t=0}^N C(x_t, a_t) \right]. \quad (7)$$

En este caso la función de costo en un paso,  $C(x_t, a_t)$ . es el valor esperado de:

$$C(x_t, a_t, \xi_t) = b a_t + h \max\{0, x_{t+1}\} + p \max\{0, -x_{t+1}\} - V(x_t, \xi_t), \quad (8)$$

Donde el ingreso por las ventas se representa por

$$V(x_t, a_t, \xi_t) = \begin{cases} w \xi_t & \text{si } x_t + a_t \geq \xi_t \\ w(x_t + a_t) & \text{si } x_t + a_t \leq \xi_t \end{cases} \quad (9)$$

Que indica que si la demanda excede el existente, solo se vende la cantidad actual en el almacén.

Así, el MCM será:

El espacio de estados (cantidad de productos al inicio del periodo)  $X = \{0, 1, 2, \dots, M\}$ .

El espacio de acciones (la cantidad de producto que puede ser ordenada)  $A = \{0, 1, 2, \dots, M\}$ .

Las acciones admisibles (la cantidad de producto que puede ordenarse dependiendo del nivel del stock en el periodo actual)  $A(x) = \{0, 1, 2, \dots, M - x\}$ .

La función de costo que indica los costos generados menos la utilidad por las ventas.

$$C(x, a) = ba + L(x + a) - \hat{V}(x, a) \quad (10)$$

Donde

$$L(y) = h E[\max\{0, y - \xi_t\} + p \max\{0, \xi_t - y\}] \quad (11)$$

$$\hat{V}(x, a) = E[V(x, a, \xi_t)] = \sum_{d=x+a}^{rang\xi} w(x+a)p_d + \sum_{d=0}^{x+a-1} wdp_d \quad (12)$$

Las probabilidades de transición  $Q(y|x, a) = P([x + a - \xi]^+ = y)$

Además se tiene un horizonte finito  $N$ , es decir,  $T = \{1, 2, \dots, N\}$ .

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

Obtendremos la estrategia óptima en un ejemplo numérico.

Sean  $N = 3, M = 5, h = 2, b = 5, p = 10, w = 20$ . Esto significa que se observarán hasta 3 periodos, y puede haber un nivel máximo de 5 productos en el almacén, de igual manera se podrán ordenar hasta 5 unidades dependiendo del nivel actual.

La distribución de la demanda está dada en la tabla

$d$	0	1	2	3	4	5
$p_d$	0	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

Tabla 1. Distribución de la demanda

En la tabla 2 se representan los costos generados por la producción y venta de productos, combinando los costos de almacenaje, producción y penalización dependiendo del nivel de inventario actual y los productos pedidos en acciones admisibles.

$a \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	24.0	5.0	-10.8	-23.4	-26.4	-72.8
1	-1.776357e-15	-15.8	-28.4	-31.4	-77.8	
2	-20.8	-33.4	-36.4	-82.8		
3	-38.4	-41.4	-87.8			
4	-46.4	-92.8				
5	-97.8					

Tabla 2. Costos

La matriz de transición  $Q(y|x, a)$  esta dada por:

$y \backslash x+a$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	0.9	0.1	0	0	0	0
3	0.8	0.1	0.1	0	0	0
4	0.5	0.3	0.1	0	0	0
5	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1	0

Tabla 3. Matriz de transición

Aplicando la técnica de programación dinámica tenemos

$$J_3(x) = 0, \quad x = 0,1,2,3,4,5 \quad (13)$$

Para  $t = 2$

$$J_2(x) = \min_{a \in A(x)} \{C(x, a) + \sum_{y \in X} Q(y|x, a)J_3(y)\} = \min_{a \in A(x)} \{C(x, a)\} \quad (14)$$

Y por lo tanto se tiene que

x	a=0	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5	$J_2(x)$	s
0	24.0	5.0	-10.8	-23.4	-26.4	-72.8	-72.8	5
1	-1.776357e-15	-15.8	-28.4	-31.4	-77.8		-77.8	4
2	-20.8	-33.4	-36.4	-82.8			-82.8	3
3	-38.4	-41.4	-87.8				-87.8	2
4	-46.4	-92.8					-92.8	1
5	-97.8						-97.8	0

Tabla 4: Valores de la EPD para  $t=2$

Para  $t=1$

$$J_1(x) = \min_{a \in A(x)} \{C(x, a) + \sum_{y \in X} Q(y|x, a)J_2(y)\} \quad (15)$$

Y se tiene que

x	a=0	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5	$J_1(x)$	s
0	-48.8	-67.8	-84.1	-97.7	-103.2	-153.6	-153.6	5
1	-72.8	-89.1	-102.7	-108.2	-158.6		-158.6	4
2	-94.1	-107.7	-113.2	-163.6			-163.6	3
3	-112.7	-118.2	-168.6				-168.6	2
4	-123.2	-173.6					-173.6	1
5	-178.6						-178.6	0

Tabla 5: Valores de la EPD para  $t=1$

Finalmente para  $t=0$

$$J_0(x) = \min_{a \in A(x)} \{C(x, a) + \sum_{y \in X} Q(y|x, a)J_1(y)\} \quad (16)$$

Y se tiene que

x	a=0	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5	$J_0(x)$	s
0	-129.6	-148.6	-164.9	-178.5	-184.0	-234.4	-234.4	5
1	-153.6	-169.9	-183.5	-189.0	-239.4		-239.4	4
2	-174.9	-188.5	-194.0	-244.4			-244.4	3
3	-193.5	-199.0	-249.4				-249.4	2
4	-204.0	-254.4					-254.4	1
5	-259.4						-259.4	0

Tabla 6: Valores de la EPD para  $t=0$

De esta manera la estrategia óptima es:

$$f_t(x) = 5 - x, \quad t = 0,1,2 \quad (17)$$

Lo anterior nos dice que, produzcamos hasta llegar al nivel máximo de 5.

Si tuviéramos ahora que determinar una estrategia óptima para un periodo mayor, digamos  $N = 25$  y la capacidad del almacén así como la demanda pueda ser de hasta 10 unidades con la distribución siguiente:

$d$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_d$	0	0	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0	0.3	0	0

Tabla 7: Distribución de la demanda

Tendríamos que los valores óptimos son:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$J_0(x)$	- 1667.0	- 1672.0	- 1677.0	- 1682.0	- 1687.0	- 1692.0	- 1697.0	-1702.0	-1707.0	-1710.0	-1713.0
$J_1(x)$	- 1599.7	- 1604.7	- 1609.7	- 1614.7	- 1619.7	- 1624.7	- 1629.7	-1634.7	-1639.7	-1642.7	-1645.7
$J_2(x)$	- 1532.4	- 1537.4	- 1542.4	- 1547.4	- 1552.4	- 1557.4	- 1562.4	-1567.4	-1572.4	-1575.4	-1578.4
$J_3(x)$	- 1465.1	- 1470.1	- 1475.1	- 1480.1	- 1485.1	- 1490.1	- 1495.1	-1500.1	-1505.1	-1508.1	-1511.1
$J_4(x)$	- 1397.8	- 1402.8	- 1407.8	- 1412.8	- 1417.8	- 1422.8	- 1427.8	-1432.8	-1437.8	-1440.8	-1443.8
$J_5(x)$	- 1330.5	- 1335.5	- 1340.5	- 1345.5	- 1350.5	- 1355.5	- 1360.5	-1365.5	-1370.5	-1373.5	-1376.5
$J_6(x)$	- 1263.2	- 1268.2	- 1273.2	- 1278.2	- 1283.2	- 1288.2	- 1293.2	-1298.2	-1303.2	-1306.2	-1309.2
$J_7(x)$	- 1195.9	- 1200.9	- 1205.9	- 1210.9	- 1215.9	- 1220.9	- 1225.9	-1230.9	-1235.9	-1238.9	-1241.9
$J_8(x)$	- 1128.6	- 1133.6	- 1138.6	- 1143.6	- 1148.6	- 1153.6	- 1158.6	-1163.6	-1168.6	-1171.6	-1174.6
$J_9(x)$	- 1061.3	- 1066.3	- 1071.3	- 1076.3	- 1081.3	- 1086.3	- 1091.3	-1096.3	-1101.3	-1104.3	-1107.3
$J_{10}(x)$	- 994.0	- 999.0	- 1004.0	- 1009.0	- 1014.0	- 1019.0	- 1024.0	-1029.0	-1034.0	-1037.0	-1040.0
$J_{11}(x)$	- 926.7	- 931.7	- 936.7	- 941.7	- 946.7	- 951.7	- 956.7	-961.7	-966.7	-969.7	-972.7

$J_{12}(x)$	-	-	-	-874.4	-	-	-889.4	-894.4	-899.4	-902.4	-905.4
	859.4	864.4	869.4		879.4	884.4					
$J_{13}(x)$	-	-	-	-807.1	-	-	-822.1	-827.1	-832.1	-835.1	-838.1
	792.1	797.1	802.1		812.1	817.1					
$J_{14}(x)$	-	-	-	-739.8	-	-	-754.8	-759.8	-764.8	-767.8	-770.8
	724.8	729.8	734.8		744.8	749.8					
$J_{15}(x)$	-	-	-	-672.5	-	-	-687.5	-692.5	-697.5	-700.5	-703.5
	657.5	662.5	667.5		677.5	682.5					
$J_{16}(x)$	-	-	-	-605.2	-	-	-620.2	-625.2	-630.2	-633.2	-636.2
	590.2	595.2	600.2		610.2	615.2					
$J_{17}(x)$	-	-	-	-537.9	-	-	-552.9	-557.9	-562.9	-565.9	-568.9
	522.9	527.9	532.9		542.9	547.9					
$J_{18}(x)$	-	-	-	-470.6	-	-	-485.6	-490.6	-495.6	-498.6	-501.6
	455.6	460.6	465.6		475.6	480.6					
$J_{19}(x)$	-	-	-	-403.3	-	-	-418.3	-423.3	-428.3	-431.3	-434.3
	388.3	393.3	398.3		408.3						
$J_{20}(x)$	-	-	-	-336.0	-	-	-351.0	-356.0	-361.0	-364.0	-367.0
	321.0	326.0	331.0		341.0	-346.0					
$J_{21}(x)$	-	-	-	-	-	-	-283.7	-288.7	-293.7	-296.7	-299.7
	253.7	258.7	263.7	268.7	273.7	278.7					
$J_{22}(x)$	-	-	-	-	-	-	-216.4	-221.4	-226.4	-229.4	-232.4
	186.4	191.4	196.4	201.4	206.4	211.4					
$J_{23}(x)$	-	-	-	-	-	-	-149.1	-154.1	-159.1	-162.1	-165.1
	119.1	124.1	129.1	134.1	139.1	144.1					
$J_{24}(x)$	-51.8	-56.8	-61.8	-66.8	-71.8	-76.8	-81.8	-86.8	-91.8	-89.8	-87.8
$J_{25}(x)$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabla 8: Valores de las EPD

y la estrategia óptima es:

$$f_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 8 \\ 8 - x & \text{si } x < 8 \end{cases} \quad t = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (18)$$

Esto es que, produzcamos hasta llegar al nivel de 8 en el almacén si el stock actual tiene un nivel menor.

Para mostrar la efectividad de esta estrategia realizamos la simulación estocástica de un sistema de inventarios con las características del ejemplo anterior y compararemos los costos de la estrategia encontrada dada como óptima con los de otras estrategias propuestas.

Un ejemplo de estrategia es producir hasta llenar el almacén hasta  $S$  solo si el nivel del stock baja de  $s$  unidades en cada periodo, en caso contrario, no se produce nada, esto se puede representar por:

$$f_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq s \\ S - x & \text{si } x < s \end{cases} \quad t = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (19)$$

De esta manera proponemos las estrategias 1-4 para verificar por medio de simulación que la estrategia 5 que es la que obtuvimos por medio de programación dinámica, es la mejor:

Si  $E[\xi_t] = \mu$ ,  $Var[\xi_t] = \sigma^2$ ,  $Rang\xi_t = \{0, 1, \dots, M\}$ ,  $P_k = P(\xi_t = k)$ ,  $k \in Rang\xi_t$

$$s = \mu, S = \mu + \sigma$$

$$s = \mu, S = M$$

$$s = \arg \min\{P_k\}, \quad S = \arg \max\{P_k\}$$

$$s = \arg \max\{P_k\}, \quad S = \arg \min\{P_k\}$$

$$s = 8, S = 8$$

#### 4. RESULTADOS

Simulamos el sistema de inventario iniciando con un stock de 5 con un tamaño de muestra de 50 con ayuda del programa en el anexo 1 que sigue el algoritmo siguiente:

Inicializamos con  $x_0 = 5$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $w$  como en el ejemplo anterior y fijamos una muestra de tamaño  $n = 50$ .

Elegimos cada estrategia (E) con  $s$  y  $S$  como se propuso anteriormente para cada una de ellas, es decir,

$$s = \mu, S = \mu + \sigma$$

$$s = \mu, S = M$$

$$s = \arg \min\{P_k\}, S = \arg \max\{P_k\}$$

$$s = \arg \max\{P_k\}, S = \arg \min\{P_k\}$$

$$s = 8, S = 8$$

Dependiendo de la estrategia elegida simulamos  $x_t$  para  $t \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$  como sigue:

dado  $x_0$ ,

$$\text{Calculamos } a_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 > s \\ S - x_0 & \text{si } x_0 \leq s \end{cases}$$

Simulamos la demanda  $d_0$  con distribución  $p_d$

Simulamos  $x_t$  para  $t \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$

$$\text{Hacemos } x_{t+1} = \max\{x_t + a_t - d_t, 0\}$$

$$\text{calculamos } a_t = \begin{cases} 0 & \text{si } x_t > s \\ S - x_t & \text{si } x_t \leq s \end{cases}$$

simulamos la demanda  $d_t$  con distribución  $p_d$

Calculamos las ventas

$$V_t = V(x_t, a_t, \xi_t) = \begin{cases} w\xi_t & \text{si } x_t + a_t \geq \xi_t \\ w(x_t + a_t) & \text{si } x_t + a_t \leq \xi_t \end{cases}$$

Calculamos los costos

$$C_t = C(x_t, a_t, \xi_t) = b a_t + h \max\{0, x_{t+1}\} + p \max\{0, -x_{t+1}\} - V_t$$

Calculamos el costo total para la muestra j-èsima:

$$CT_j = \sum_{t=1}^N C_t$$

Como salida mandamos los costos estimados  $\overline{CT}$

Programando y aplicando el algoritmo anterior obtenemos:

Estrategia	s	S	Costo
1	4	9	-1001.56
2	4	10	-1006.04
3	0	8	-98.2
4	8	10	-967.28
5	8	8	-1068.04

*Tabla 9: Costos simulados*

## 5. CONCLUSIONES

Mediante la simulación realizada comprobamos que la estrategia encontrada mediante la técnica de programación dinámica es mejor en comparación con las propuestas por los autores, esto es, genera menores costos.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Hernandez-Lerma, O, and Lasserre, J. B. Discrete-time Markov control processes: basic optimality criteria. Vol. 30. Springer Science and Business Media, 1996.
2. Puterman, M. L. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming, Wiley, New York, 1994.

## RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL SISTEMA 4MAT EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA MATEMÁTICA

Rosa. Reyes Molina<sup>1</sup>, O. L. Fuchs Gómez<sup>1</sup>, , Jose Antonio Juárez<sup>1</sup> , E. Erica Vera Cervantes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUA . <sup>2</sup>Facultad de Ciencias de la Computación

### RESUMEN

Se presenta el desarrollo y la aplicación de una estrategia didáctica orientada a la enseñanza de la física y de las matemáticas para el nivel Medio Superior, sobre la necesidad de plantear al estudiante actividades que los induzcan a pasar por situaciones de formación, tratamiento y conversión, y sobre aquellas que explican problemas asociados con la asimilación correcta de estos objetos matemáticos; logrando el estudiante llegar a la comprensión de las nociones matemáticas y resolución de problemas. Sistema 4MAT de Betrice McCarthy que combina la teoría de estilos de aprendizaje de Kolb y los estudios sobre las formas de percibir y procesar la información en función de la hemisfericidad cerebral del individuo; (McCarthy, 1987); En un ciclo de aprendizaje de 8 bloques establecidos dentro de los 4 estilos de aprendizaje: Aprendizaje Imaginativo, Aprendizaje Analítico, Aprendizaje Sentido Común, Aprendizaje Dinámico. Se analizan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto Se encuentra que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje del concepto, se alcanza una mejor comprensión.

\* Agradecimiento VIEP, PRODEP

### 1. INTRODUCCIÓN

La dificultad que presentan los alumnos para la comprensión de conceptos en el área de ciencias exactas es evidente al observar el bajo índice de aprobación de las disciplinas respectivas en los distintos niveles del sector educativo. Los profesionales encargados de la enseñanza de estas disciplinas difícilmente poseen las habilidades y conocimientos adecuados para ponerlos en práctica en el aula, ya que generalmente estos mismos fueron “instruidos” en la enseñanza conductista o “forma tradicional”.

Existe una gran diversidad de teorías de aprendizaje integradas a la enseñanza en general y en menor medida a la enseñanza de ciencias exactas.

Por otro lado expertos en el área de enseñanza han demostrado que las representaciones mentales y semióticas, semiosis y noesis son de suma importancia para el análisis de las actividades conductivas fundamentales, como los son, la conceptualización, el razonamiento, resolución de problemas [1]. Además existen referencias de la efectividad del sistema 4MAT aplicado a nivel bachiller y nivel superior [2].

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos a partir de la aplicación de las teorías de Raymond Duval en conjunción con el sistema 4MAT en las instalaciones del plantel CeTis132.

La teoría utilizada está basada en la experiencia, del aprendizaje humano y desarrollo personal y también en una visión expandida de la capacidad intelectual humana que involucra probar las ideas en experiencias reales.

Las investigaciones de Kolb son la base teórica para el sistema 4Mat propuesto por McCarthy; dicho modelo proporciona un balance entre la observación reflexiva y la experimentación activa a través de variaciones especificadas en las interacciones maestro/estudiante. Por otra parte McCarthy no clasifica a los aprendices en términos de un solo estilo, sin embargo en este modelo se afirma que el estilo de aprendizaje individual dominante es el de mayor grado que los individuos diferencian y usan en cada uno de los cuatro modos de conocimiento propuestos Kolb. La inclusión de la especificidad cerebral fue otra extensión al modelo de Kolb, en el cual se ha trasladado una variación del hemisferio derecho e izquierdo en cada uno de los 4 estilos de Kolb.

## 2. TEORÍA

El Sistema 4MAT es el resultado de la superposición de las descripciones de estilos de aprendizaje del modelo de Kolb (1984). Este modelo está basado en la suposición de la existencia de factores responsables de la generación de estilos de aprendizaje. De acuerdo con Kolb (1984) los estudiantes aprenden según la manera en que prefieren recibir la información por parte del profesor (preferencias de instrucción): por medio de la experiencia concreta, de la observación reflexiva, de la conceptualización abstracta y de la experimentación activa.

McCarthy (2006), retoma el esquema de Kolb, agregando la información de las investigaciones sobre el cerebro dando como resultado el sistema 4MAT. El sistema 4MAT combina las características de forma que representa una combinación de preferencias. Esta combinación de preferencias resulta en un par de tendencias que describen cuatro cuadrantes. En el sistema 4MAT, cada uno de estos cuadrantes se convierte en un estilo de aprendizaje diferente. Cada cuadrante y su par de descriptores describen un conjunto de tendencias y preferencias que diferentes individuos pueden exhibir en sus intentos por aprender y enseñar. Cada estilo de aprendizaje o cuadrante está definido por la forma en que los estudiantes aprenden.

Para McCarthy (2006) el proceso continuo del sistema 4MAT se mueve desde la reflexión a la acción, la combinación de estas dos posibles elecciones en el individuo forma las diferencias individuales, a las cuales llama, Estilo 1, Estilo 2, Estilo 3 y Estilo 4.

Bernice McCarthy y colaboradores han llevado a cabo una amplia investigación sobre los efectos de la acción del Modelo 4MAT. Su trabajo demuestra claramente que 4MAT, utilizado apropiadamente: (1) valida los estudiantes, (2) aumenta la motivación del alumno, (3) mejora el rendimiento académico y (4) fomenta el desarrollo personal mediante la representación intencionadamente de experiencia y conocimiento en formas variadas.

Las investigaciones acerca de los efectos específicos del Modelo 4MAT indican que el uso apropiado del sistema tiene un impacto positivo en los siguientes aspectos:

- Los niveles de participación de los estudiantes en las tareas de aprendizaje académico
- La actitud y los logros en la ciencia
- Reducción de remediaciones necesarias para el dominio del estudiante
- El autoestima del estudiante y su comportamiento
- La actitud y el rendimiento en las bellas artes
- Adquisición de estrategias y técnicas de estudio

- Rendimiento en la geometría
- El rendimiento en las pruebas estandarizadas
- Retención sobre las medidas de contenido
- Los intereses y las actitudes de las actividades de instrucción en la ciencia
- Actitudes de los maestros hacia la diversidad
- Intencionalidad del profesor y la planificación
- Por parte del profesor, el empleo de diversos conjuntos de aprendizaje
- Transferencia hacia la innovación pedagógica
- Incorporación de la creatividad en la enseñanza
- La educación de adultos y la retención

En este modelo el uso de la tecnología, forma parte de las propuestas hechas por McCarthy, por lo que en el cuadrante tres, Aprendizaje Sentido Común (uno de los 4 estilos de aprendizaje) se menciona que el estudiante tiene que “probar”, hacer las cosas por sí mismo considerando estas afirmaciones y para reforzar el concepto.

En esta investigación se proponen una serie de actividades para cubrir y mejorar los objetivos del Sistema4MAT los cuales son sustentados por, el modelo teórico de Duval (1998); Siendo de interés los procesos de visualización y razonamiento que intervienen en la resolución de problemas de geometría. El conocimiento de dichos procesos y sus relaciones va a servir para diagnosticar al estudiante, esto es, para conocer el mapa cognitivo de los alumnos facilitando el aprendizaje.

La definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento son un avance en esta línea de conocimiento, ya que separa la acción cognitiva (proceso) de las distintas representaciones e imágenes mentales. En particular, se considera que la caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, como puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo. Esto es de gran ayuda e importancia para resolver los problemas geométricos, como consecuencia, la visualización no queda relegada a un simple papel ilustrativo de las afirmaciones geométricas. La visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), a la resolución de problemas e incluso a la demostración. Por ello se ven a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos;

En este trabajo se adopta la orientación de la investigación de Duval (1998), la cual atiende a los procesos que intervienen en el aprendizaje de la geométrica. Las hipótesis de las que partimos, para la enseñanza de la óptica geométrica, son:

La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la construcción.

Las tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente.

Al estudiar los procesos cognitivos involucrados en esta investigación se tiene en cuenta la diferencia entre los conceptos de dibujo y figura, puesto que hay que distinguir el contenido de una representación y lo que representa. En este caso como *figura*, se entiende la imagen mental de un

objeto físico; el *dibujo* como la representación gráfica de una figura en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico

Los procesos de *conversión* no son frecuentemente realizados por los estudiantes y tampoco son una actividad espontánea, requiere ser propiciada por el docente quien de manera intencional debe provocar la realización de estas actividades cognitivas; Por lo cual la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval se ajusta perfectamente a la estructura presentada por el Sistema4MAT

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

En esta investigación se presenta una metodología alternativa para la enseñanza de física, en particular en el área de óptica; de tal forma que se analizan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto (convergencia de rayos)

Un concepto se halla, continuamente en fase de construcción; a tal construcción se puede llamar:

*Conceptualización*. De acuerdo a Vergnaud el hablar de conceptualización es referirnos a una apropiación consciente, por lo que de cualquier manera el apropiarse de un concepto requiere algo más que nombrarlo.

De acuerdo con Duval, "(...) por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra es solo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".

El plan de trabajo consiste en 8 módulos a ser cubiertos en 4 sesiones de 2hrs.

#### 1ª Sesión



Figura 1

La actividad comienza con la pregunta dirigida a los estudiantes: ¿Por qué vemos?, y posteriormente, guiar la discusión acerca de lo que es la luz.

## 2ª Sesión

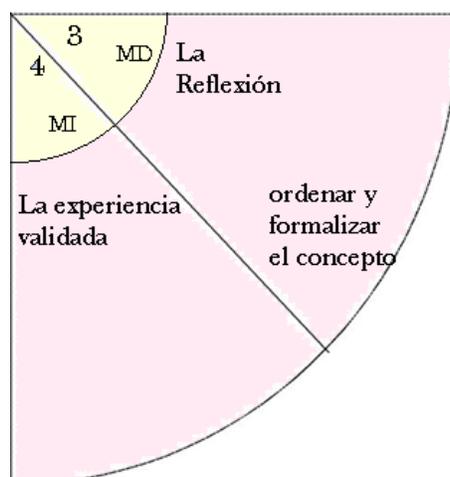


Figura 2

El experimento propuesto consistió en una vela, una lupa, una cinta métrica y una pantalla; en donde se les explicó que la lupa tenía que encontrarse entre la pantalla y la vela, y tomar las respectivas distancias  $s_1$  y  $s_2$ , cada vez que se observara la imagen formada en la pantalla.

Subsecuentemente se les pidió a los estudiantes, Describir el fenómeno físico, respondiendo a la pregunta, ¿Qué observaron?

## 3ª Sesión

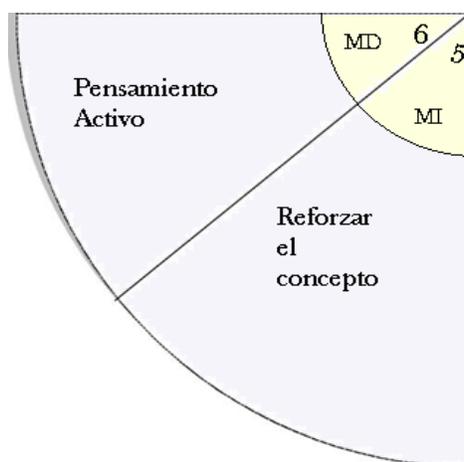


Figura 3

El estudiante visualiza los conceptos y registros obtenidos, argumentando que fue lo que ocurrió.

Por parte del instructor; les explica el modelo matemático establecido que rige al fenómeno observado.

## Última Sesión

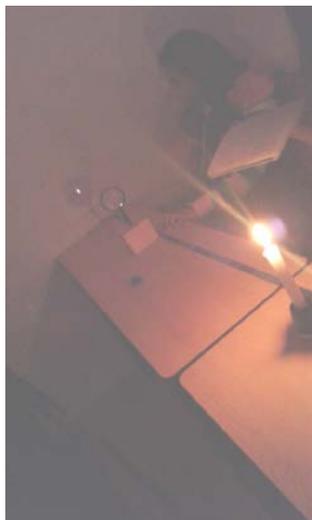


Figura 4

Se realiza la exposición por parte de los estudiantes y finalmente se tiene la evaluación; concluyendo el ciclo.

Para reforzar el concepto, el estudiante realizó un reporte en el cual escribió todo lo observado, datos que describían a la imagen que “crecía o decrecía”, si estaba invertida, y además realizaron un bosquejo (ver anexos).

Se les dio un cuestionario de 5 preguntas y posteriormente en forma grupal se corrigieron algunos conceptos aun erróneos (ver anexos, de las respuestas de los estudiantes). Se les pidió que los datos obtenidos los graficaran, por último se les presentó la ecuación para lentes delgadas.



Este es un ejemplo de las preguntas elaboradas para indagar la comprensión de los estudiantes con algunas respuestas.

1	Cuando atreves de nuestros ojos recibimos información sobre la forma, el color o la posición de los objetos que nos rodean ,por que en la oscuridad no se pueden ver
2	Que el sol es una fuente inagotable y nos brinda su luz calorífica y alumbra
3	Es la acción que ilumina un lugar, es algo de la naturaleza.
4	Cuando te levantas y sales esta la luz del sol.

Estudiantes de Bachiller  
Tabla1

#### 4. RESULTADOS

1) A la pregunta ¿Por qué vemos?, algunos estudiantes respondieron; porque tenemos ojos, algunos otros dijeron, porque hay luz. Para reforzar el concepto, se les propuso la siguiente situación: supongan que están en un cuarto oscuro, ¿Qué ven? Se contaba con un programa acerca de cómo guiar el debate, sin embargo los estudiantes son los que hacen la clase, por lo que el discurso no fue el planeado.

2) La reacción de los estudiantes al experimento fue de interés, ya que se observaron reacciones en su comportamiento ajenas al salón de clases.

4) Los estudiantes construyen su propio conocimiento y son capaces de relacionarlo a su vida cotidiana, este se observa ya que en una pregunta del cuestionario se les pide que dibujen ondas con distinta amplitud y frecuencia, en algunos esquemas se observan que dibujaron una grabadora, el sol.

La evaluación se llevó a cabo mediante una rúbrica.

#### 5. CONCLUSIONES

El profesor debe fungir como mediador entre estudiante y conocimiento; lo cual implica que el primero sea activo y no pasivo.

La secuencia de las actividades nos llevo a que el ciclo propuesto para la enseñanza de la física (óptica) a nivel bachillerato es viable.

Entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje del concepto, se alcanza una mejor comprensión.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. M.H. Ramirez Diaz, Aplicación del sistema 4MAT en la enseñanza de la física a nivel universitario, REVISTA MEXICANA DE FISICA, 56(1) 29-40, JUNIO 2010.
2. M.H. Ramírez Díaz, Eduardo Chávez Lima, Rev. De Estilos de Aprendizaje, No 6, Vol. 6, octubre de 2010.
3. D'Amore B., "Conceptualización, registros de representaciones semioticas y noetica ", revista Científica, Bogotá. 11,150-164. ISSN: 0124-2253.
4. Macias Sanchez,J, "Los registros semioticos en Matematicas como element personalizado en el aprendizaje ", Revista de Investigacion Educativa, 2014.

## **IDEAS PREVIAS EN ATRONOMIA. UNA ESTRATEGIA PARA LLEGAR AL CAMBIO CONCEPTUAL**

Lorena Cruz León<sup>1</sup>, Olga Leticia Fuchs Gómez<sup>1</sup>, Gregorio Rogelio Cruz Reyes<sup>1</sup>, Eugenia Érica Vera Cervantes<sup>2</sup>, Araceli Juárez Ramírez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. <sup>2</sup>Facultad de Ciencias de la Computación

### **RESUMEN**

En este trabajo se presenta el resultado de un trabajo de varios años participando en un proyecto extracurricular que consiste en dar un telescopio a cada escuela del estado. El objetivo es investigar las ideas que niños y jóvenes, interesados en la astronomía, tienen acerca de algunos conceptos como pueden ser las fases de la luna, el día y la noche, lo que es una estrella o una planeta, etc. Para detectar las ideas previas, a los estudiantes se les practicaron encuestas sencillas en las que se pidió que eligieran las respuestas que consideraran correctas. Siguiendo el método de "Peer Instruction" se lleva a los alumnos al cambio conceptual, apoyados en la observación práctica de algunos objetos astronómicos con los telescopios proporcionados por la misma facultad. Algunas ideas previas resultan ser muy ilustrativas y no todos los estudiantes logran el cambio conceptual

\* Agradecimiento: VIEP PRODEP

### **1. INTRODUCCIÓN**

Las ideas previas son consideradas mecanismos de adaptación al medio. Son construcciones que las personas elaboran para dar respuesta a los fenómenos naturales y conceptos científicos, así pueden explicar y predecir. Estas, son construcciones personales y a la vez son universales y se oponen fuertemente al cambio lo cual se ve reflejado cuando el estudiante encuentra información que contradice sus esquemas y dicha información la toma por errónea. Para modificar las ideas previas, se necesitan estrategias de enseñanza que ayuden a la transformación de los esquemas que representan las concepciones científicas. A esta transformación se le conoce como cambio conceptual.

El cambio conceptual solo se puede dar cuando el alumno entra cognitivamente en conflicto con sus ideas previas, y es necesario que la nueva concepción sea clara, amplia y que pueda resolver una diversidad de nuevos problemas, dar nuevas experiencias y que esto le produzca satisfacción. Sin embargo, todo esto no es garantía de que la idea previa anterior, se destruya.

En el caso de la enseñanza y aprendizaje de la Astronomía, como parte del programa de estudios de las asignaturas de física, en los niveles medio básico y medio superior, estas ideas previas están arraigadas en los estudiantes a través de modelos reconstruidos, que "resuelven" conceptualmente el universo de su propia perspectiva. En la mayor parte de los casos, estas ideas carecen de la estructura del pensamiento de los científicos, por lo que resulta importante su modificación a través de actividades muy cercanas al estadio cognitivo prevaleciente de los estudiantes. Al ser consistentes estas estrategias y conjunto de actividades, se puede llegar al

cambio conceptual, como la reestructuración de las ideas previas que se encaminen a las concepciones científicas. (Pozo, 1994)

Durante la investigación, el conocimiento y la comprensión de las ideas previas que los alumnos de secundaria y preparatoria tienen, es fundamental para aplicar métodos y estrategias de enseñanza que les lleven a replantearlas o ayudarlos a reforzar los conocimientos correctos que ya poseen. Los jóvenes crean sus ideas en base a los fenómenos que pueden observar directamente y y en base a ellas se apoyan para resolver problemas de la vida cotidiana. Los jóvenes interesados en astronomía, desarrollan sus ideas para poder explicarse el funcionamiento de los astros y cómo interactúan en un “sistema”.

El objetivo del presente trabajo es encontrar las ideas previas presentes en los estudiantes en Astronomía básica y desarrollar una propuesta para el correspondiente cambio conceptual. Se tomará como base sus canales favoritos de aprendizaje.

## **2. TEORÍA**

Las ideas previas son ideas o construcciones mentales que los alumnos y en general las personas elaboran para responder a su necesidad de interpretar diversos fenómenos naturales antes de recibir enseñanza en la que aprendan o conozcan la explicación científica, ya sea porque dicha interpretación es necesaria para la vida cotidiana, para solucionar un problema práctico o porque es requerida para mostrar cierta capacidad de comprensión. Es decir, la construcción de las ideas previas se relaciona con la interpretación de fenómenos naturales y conceptos científicos, para brindar explicaciones, descripciones y predicciones. Los investigadores coinciden en la existencia de las ideas previas que tienen todos los individuos, pero no hay un acuerdo sobre el origen de las mismas. Entonces surge la pregunta: ¿cómo es que se originan las ideas previas?, a esto, la mayoría de los autores coinciden en considerar a ideas previas como el fruto de las experiencias cotidianas, tanto físicas como sociales. También hay ideas previas que se deben a malas interpretaciones del lenguaje [9], a diversos factores culturales o que son dependientes del contexto, entre otras. Entre las causas de las ideas previas, Pozo (1996) señala las experiencias y observaciones de la vida cotidiana, el profesorado, los libros de texto y otros materiales escolares, la interferencia del lenguaje cotidiano y el científico, los medios de comunicación, y la cultura propia de cada civilización. Por otra parte, Lin et al (2004) afirman que el origen de estas preconcepciones se encuentra en: la enseñanza dentro y fuera de la escuela; las experiencias diarias cotidianas, el medio social y la intuición.

Pueden diferenciarse tres posibles orígenes para las ideas de los alumnos:

a) Origen sensorial: las concepciones espontáneas. Se formarían en el intento de dar significado a las actividades cotidianas y se basarían esencialmente en el uso de reglas de inferencia causal aplicadas a datos recogidos (en el caso del mundo natural) mediante procesos sensoriales y perceptivos.

b) Origen social: las concepciones inducidas. El origen de estas concepciones no estaría tanto dentro del alumno como en su entorno social, de cuyas ideas se impregnaría el alumno. De modo que los alumnos accederían a las aulas con creencias socialmente inducidas sobre numerosos hechos y fenómenos.

c) Origen analógico: las concepciones análogas. Para poder comprender algunas áreas del conocimiento de las cuales los alumnos carecen de ideas específicas ya sean espontáneas o inducidas, se verían obligados a activar, por analogía, una concepción útil para dar significado a ese dominio. Es decir, la comprensión debe basarse en la formación de analogías, ya sea generadas por los propios alumnos o sugeridas a través de la enseñanza.

Aunque las cosas pueden ser bastante más complejas al haber interacción entre factores, es decir, que no necesariamente implica que cada una de las anteriores funcione por separado.

La presencia de estas ideas en las personas, y en específico los alumnos es muy relevante para el proceso de construcción del conocimiento, dado que los estudiantes aprenden sobre la base de lo que ya conocen. En el origen cultural, Pozo et al (1991) afirma que las ideas surgirían como consecuencia del contacto con el entorno cultural y social del alumnado quien accede a las aulas con un importante bagaje fruto de su entorno y el proceso de socialización. Todas estas creencias originan las concepciones sociales, y en la sociedad actual la abundancia de información científica proveniente de los medios de comunicación.

### **3. PARTE EXPERIMENTAL**

Para el desarrollo experimental de esta investigación, los alumnos del nivel medio superior asisten a un curso sobre astronomía que tiene como objetivo el poder proporcionarles un telescopio Newtoniano de 14cm que es hecho por ellos y sus maestros con fines de divulgación científica y un acercamiento a la ciencia mucho más pronto y que es parte de su formación académica.

En este curso, los estudiantes participan activamente en la construcción de su telescopio, que se volverá patrimonio de su escuela, y adicionalmente, se capacitan de forma teórico práctica para la comprensión de los fundamentos físicos de su funcionamiento, así como el uso del instrumento en circunstancias de observación de objetos visibles a simple vista y de objetos de espacio profundo, considerando la comprensión de la dinámica de la bóveda celeste. Es en estas actividades donde se promueve el cambio conceptual.

Para encontrar las ideas previas que los estudiantes tienen sobre conceptos de astronomía, dentro del taller, se plantean preguntas conceptuales a modo de que externen sus opiniones. El alumno elige con respecto a un conjunto de posibles respuestas, de tal manera que posteriormente a su elección, discuten con aquellos compañeros con los que difiera su respuesta. Se espera que la discusión haga tender la opinión de los estudiantes a las respuestas correctas. Con esta dinámica, los estudiantes pueden construir sus ideas a través de la argumentación, utilizando la información que se provee en la plática.

Para alcanzar el objetivo del presente trabajo, consideraremos las siguientes preguntas conceptuales:

Tenemos la idea del movimiento del Sol con respecto a la Tierra. Los jóvenes entienden que la Tierra se mueve tanto alrededor del Sol y en su propio eje, pero lo tienen arraigado como una creencia, ya que en la educación básica, se les informó de este hecho, descontextualizado y planteado como un dogma, que los estudiantes aceptaron casi de manera incondicional. Sin embargo, trasladar el movimiento de rotación a un objeto como el Sol, carece de sentido para ellos.

Las preguntas para la obtención de las ideas previas, y la posterior propuesta de cambio conceptual, son:

1. ¿Qué opinan?

El Sol rota como la tierra alrededor de un eje

Se traslada, como la tierra, alrededor del centro de la galaxia

Se traslada y rota

Ni se traslada ni rota”

Después de conocer su opinión, se procede a intentar destruir el preconceito con la realización de un proyecto observacional sobre las manchas solares, partiendo del planteamiento histórico de los descubrimientos de Galileo sobre el tema.

2. ¿Cómo genera energía una estrella?

Quemando carbón, como en un anafre

Quemando gas, como en una estufa

Transformando elementos pesados en otros más ligeros, desprendiendo energía

Transformando elementos ligeros en otros más pesados, liberando energía.

El cambio conceptual derivado de la pregunta, y de su posterior discusión, es la cuantificación del proceso que genera la energía en una estrella, con respecto a la duración temporal de él, de los elementos involucrados y la comparación cuantitativa de las opciones.

3. ¿Qué le pasaría a una estrella común si cambiara de hidrógeno a helio su combustible nuclear primario?

Aumentaría su tamaño y disminuiría su temperatura

Disminuiría su tamaño y aumentaría su temperatura

Aumentaría su tamaño y aumentaría su temperatura

Disminuiría su tamaño y disminuiría su temperatura

Esta pregunta busca extraer ideas acerca de las implicaciones de la ruptura del equilibrio entre fuerzas que actúan en la estrella.

El cambio conceptual derivado de la pregunta está planteado en la cualificación de los procesos que aportan fuerzas que se contraponen en la estrella, y sus implicaciones en la evolución de la estrella misma.



**Figura 1)** Talleres interactivos de capacitación astronómica.

#### **4. RESULTADOS**

En el caso de las prácticas observacionales, puede reportarse lo siguiente:

El primer problema a afrontar es la ubicación. En estos niveles escolares, los alumnos tienen problemas para ubicarse en la Tierra, y consecuentemente también los tienen para la identificación de puntos en la esfera celeste.

Los puntos cardinales forman parte del sistema de referencia en la Tierra, y es útil para la localización primaria de puntos en la esfera celeste. Para poder ubicarlos, se usa una brújula o se les pide que tomen como punto de referencia la estrella Polar. Esta estrella se encuentra en el norte y está a la latitud del lugar en el que se esté ubicado. La estrella Polar es una referencia importante para la ubicación de puntos y objetos en la esfera celeste.

En el caso de las observaciones propiamente dichas, al hacer comparaciones sobre los planetas y las estrellas, los jóvenes entran en conflicto ya que no saben cómo diferenciarlos a simple vista y mucho menos ubicarlos. Esto cambia a la hora de hacer la observación. Comparando el brillo emitido por una estrella al emitido por un planeta, se concluye que el tipo de “luz” que emite es diferente, una es constante y la otra parece ser que “parpadea” y en el caso de la ubicación, aprenden a seguir los caminos que recorren tanto los planetas como las estrellas.

Al introducir los conceptos de cúmulos y galaxias, los chicos solo entienden el concepto de la galaxia; Por otro lado, cuando hablamos de cúmulos, la mayoría no entiende la palabra como tal, solo pocos logran asociarla con el significado de acumulación. Se entiende que es un conjunto de “algo” en el espacio. Esto es fácilmente aclarado a la hora de la práctica, ya que al observar un cúmulo de estrellas, logran a través de su canal visual de aprendizaje, describir al cúmulo y diferenciarlo de una galaxia.

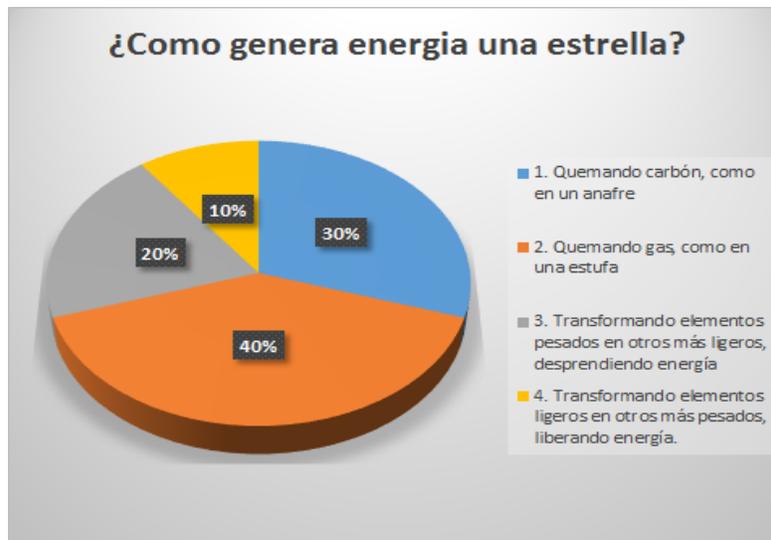
Cada uno de los conceptos abordados durante la investigación, tenía que ser aclarado de manera práctica y visual a la hora de la observación. Esto da como resultado el cambio conceptual gracias a la construcción de los conceptos en el curso.

En la pregunta de opinión sobre el Sol, una mayoría significativa (70%) opina como en los tiempos de Aristóteles: Ni se traslada ni rota. Las otras opciones también son consideradas, incluyendo la respuesta correcta, la c) con un 10% y las otras dos opciones están repartidas igualmente en 10% cada una.



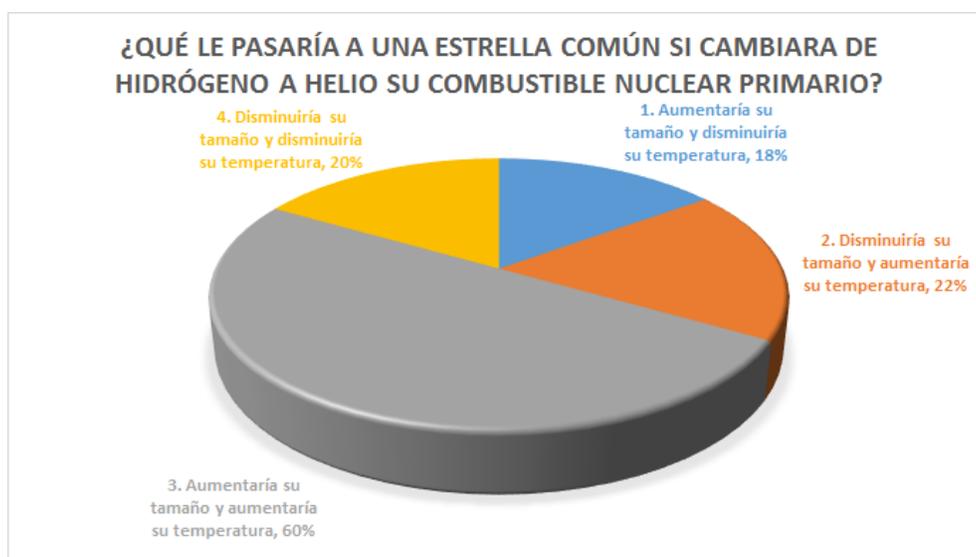
**Grafica 1)** Distribución de las respuestas de los estudiantes, pregunta 1

En la pregunta sobre cómo genera energía una estrella, las respuestas se han distribuido así: a) 30%, b) 40%, c) 20% y d) (respuesta correcta) 10%.



**Gráfico 2)** Distribución de las respuestas de los estudiantes, pregunta 2.

La mayor parte de los estudiantes (60%) contestan sin lógica, la opción c). Las demás respuestas, están prácticamente distribuidas uniformemente en las demás opciones a) 18%, b) 22% y d) 20%.



**Gráfico 3)** Distribución de las respuestas de los estudiantes, pregunta 3.



**FIGURA 2)** *Actividad. Observación astronómica dirigida por los estudiantes.*

## **5. CONCLUSIONES:**

Los estudiantes muestran:

A pesar de la información a la que los estudiantes tienen alcance, el pensamiento aristotélico aún persiste en ellos, y corrobora que las ideas previas se oponen fuertemente al cambio.

Durante la extracción de las ideas previas, éstas varían con las preguntas planteadas, ya que en algunas, un porcentaje mayor de estudiantes llega a tener una respuesta similar. En otras preguntas, las respuestas son más variadas, lo que nos indica una variedad de razonamientos utilizados.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Unammx.(2016). *Unammx*. Retrieved 8 May, 2016, from <http://depa.fquim.unam.mx/sie/Documentos/153-bel.pdf>
2. Pozo, J., Et.al.(1992). Las ideas de los alumnos sobre la ciencia como teorías implícitas. *Infancia y aprendizaje*, 15(57), 3-21
3. Camino, N. (1995). Ideas previas y cambio conceptual en astronomía Un estudio con maestros de primaria sobre el día y la noche las estaciones y las fases de la luna. *Investigación y experiencias Didácticas*, 13, 81-96.

# ANÁLISIS TEMPORAL DE LA COMUNICACIÓN NEURONAL MEDIANTE FUNCIONES EXPONENCIALES

Torres Mena Oscar I.<sup>1</sup>, Zamorano Ulloa Rafael<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F, México.

## RESUMEN

Se obtuvo mediante el método de separación de variables la solución del fenómeno de difusión del glutamato en el espacio sináptico (ES) y se analizó la solución temporal. Se modeló el ES como un cilindro de altura 50 nm y radio  $c$ . La solución fue: radialmente las funciones de Bessel, para el eje  $z$  seno hiperbólico, angularmente una constante por la simetría impuesta y temporalmente una exponencial decreciente. Se dio un análisis cuantitativo a los parámetros de la solución temporal. Se encontró que aun más importante que la concentración inicial, es el tiempo de relajación, que está directa ligado al coeficiente de difusión  $D$ . Al variar  $D$ , el tiempo de relajación para una concentración inicial puede variar ampliamente. El retraso-adelanto del tiempo repercute en la energía requerida por sinapsis, y en la coordinación de las membranas neuronales emisoras-receptoras. Si esta coordinación es ineficiente el glutamato permanecerá demasiado tiempo en el ES, provocando neurotoxicidad e inhibición de la señal, desembocando en enfermedades neuronales-psicológicas.

Una pequeña diferencia en los parámetros de la solución temporal repercuten en grandes diferencias en la concentración por las propiedades de la solución. Este trabajo analiza con enfoque Físico-Matemático las condiciones biológicas y variabilidad temporal en la sinapsis.

## 1. INTRODUCCIÓN

Entre los cánones de las Ciencia, en particular la Física, se encuentra la descripción de un movimiento o posición (comportamiento) y sus cambios con el cambio del valor de sus coordenadas, tanto espaciales como temporales (derivadas). Ejemplo de ello son las leyes y estudios de Newton, Galileo, Kepler, o inclusive Darwin con la Teoría de la Evolución de las Especies. El análisis del cambio temporal es importante en diversos ámbitos, como el tiempo en que un corredor recorre 100 metros, el cambio de iluminación del Sol a lo largo del día, la sincronización de una niña que salta la cuerda, el tiempo que tarda en crecer-decrecer un porcentaje en el banco o en su poder adquisitivo, o el lapso que tarda en crecer un cultivo. Es por ello necesario aportar un modelo que nos permita hacer un análisis temporal de esta comunicación, concretamente de la difusión del neurotransmisor glutamato Glu en una sinapsis típica.

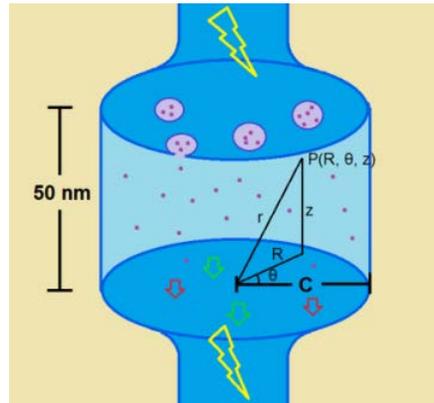
El modelo consistió en aproximar el espacio sináptico como un cilindro de radio  $c$ , altura 50nm y se impuso simetría angular (Fig. 1). Se solucionó por el método de separación de variables MSV (se puede proponer una geometría arbitraria, ya que la solución temporal no depende de la forma del espacio). Gracias a la separabilidad de la ecuación diferencial, se aisló la respuesta temporal, que resulto ser  $T(t) = A * Exp[-\frac{t}{\tau}]$ , para enfocarnos enteramente en ella. Mediante la variación de sus parámetros ( $A$  y  $\tau$ ) se analizaron las distintas funciones exponenciales resultantes (lentas y

rápidas) con la ayuda de gráficas y tablas numéricas y de razones. Se encontró que la variación de la respuesta temporal depende más del argumento de la exponencial  $\tau$  que su coeficiente  $A$ .

## 2. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN QUE RIGE LA COMUNICACIÓN NEURONAL

- Comunicación neuronal.

“La unidad funcional del sistema nervioso es la neurona. Estas se comunican entre ellas a través de uniones llamadas sinapsis. En la mayoría, la señal cruza la hendidura sináptica en forma de una sustancia química, un neurotransmisor, que se une a un receptor específico en membrana de la célula postsináptica” [1]



*Fig. 1. Representación de un espacio sináptico con geometría cilíndrica. Se han representado vesículas sinápticas con morado en la neurona presináptica (superior), con flechas algunos tipos de receptores y los puntos representan moléculas de neurotransmisor.*

El cuerpo de neuronas y sinapsis presentan diversos tipos de plasticidad, que consiste en un cambio de duración variable en la función sináptica (como lo es la reestructura de sinapsis del hipocampo a base de sinapsis glutamatérgicas), para adaptarse a la miríada de estímulos que las excitan o inhiben. Es bien sabido [2] que los distintos modos de plasticidad sináptica son esenciales para moldear tanto la memoria como el aprendizaje de los mamíferos. El proceso de comunicación química entre dos neuronas se presenta a continuación:

La llegada de un potencial de acción en la terminal axónica inicia la fusión de vesículas sinápticas, las cuales son las portadoras del neurotransmisor, con la membrana del axón, liberando su contenido en el espacio sináptico. Estos se difunden a la célula postsináptica, donde se combinan con receptores específicos en la membrana celular. El proceso de que el Glu liberado de la neurona presináptica, se difunda, y llegue a sus receptores sobre la neurona postsináptica, está gobernado por el fenómeno de difusión, cuya ecuación diferencial es:

$$\nabla^2 u = D \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

con  $u$  la concentración para un punto en el espacio y un tiempo dado y  $D$  el coeficiente de difusión. Esta ecuación nos dice la relación que tiene la variación espacial con el cambio de concentración temporal.  $D$  nos dice como se extiende por el espacio la sustancia que se está difundiendo, en

otras palabras, es la traducción de las características físicas al lenguaje matemático. El interés de este trabajo está centrado en el cambio temporal.

- El método de separación de variables.

El Método de Separación de Variables, MSV, es ocupado para resolver ecuaciones diferenciales que dependen de más de una variable. El MSV consiste en proponer la solución general como el producto de funciones “independientes”. Esto permite separar la variable de nuestro interés para realizar un análisis “quirúrgico” sobre la variable en cuestión.

- Solución de la ecuación

Se partió de la ecuación diferencial homogénea de difusión (1). Ya que nuestro modelo tiene geometría cilíndrica, se soluciona (1) en dichas coordenadas. Siguiendo el MSV, (1) es separable al proponer la solución como:

$$u(r, \theta, z, t) = R(r)\theta(\theta)Z(z)T(t) \quad (2)$$

Las soluciones para esta ecuación con esta propuesta y simetría angular impuesta son ([3], [4])

$$R(r) = A * J_0(k_r r) \quad (3a)$$

$$Z(z) = B * \sinh(k_z z) \quad (3b)$$

$$\theta(\theta) = C \quad (3c)$$

$$T(t) = E * \exp[-t/\tau] \quad (3d)$$

Con A, B, C y E constantes y

$$\tau = \frac{D}{k_t^2} \quad (4)$$

A  $\tau$  lo hemos denominado “*tiempo de relajación*”. Los parámetros  $k$ 's están relacionadas de la siguiente manera:

$$k_r = \sqrt{k_z^2 + k_t^2} \quad (5)$$

Los valores de estos parámetros están determinados por las condiciones a la frontera, ya sean analíticas o meramente numéricas-biológicas.

- Estimación de los valores  $k_t$

Para sinapsis rápidas los receptores AMPA son los más difundidos en el cerebro, para este tipo de sinapsis  $\tau \approx 2 \text{ ms}$ , mientras que para sinapsis lentas  $\tau \approx 300 \text{ ms}$ , cuyos receptores son NMDA. En ambos casos se tiene un coeficiente de difusión típico [5].

$$D = 3.585 \pm 1.415 \frac{\text{ms}}{\mu\text{m}^2} \quad (6)$$

Despejando  $k_t$  de (4) se obtiene que

$$k_t^{AMPA} = \frac{1.3386}{\text{mm}} \quad (7a)$$

$$k_t^{NMDA} = \frac{1.3386}{\text{mm}} \quad (7b)$$

### 3. ANÁLISIS DEL TIEMPO EN QUE UNA “SINAPSIS GENÉRICA” ALCANZA LA CONCENTRACIÓN DE LIMPIEZA EN COMPARACIÓN CON UNA “SINAPSIS ESTANDAR”

- Tiempo de relajación

Dentro de las propiedades más importantes de las funciones exponenciales, además de la gran variación que experimenta para un pequeño crecimiento en  $t$ , dependiendo del  $\tau$  en (3d), es que se pueden modelar fenómenos en los que hay un cambio a razón constante por lapso de tiempo.

Supongamos que se tienen un crecimiento o decrecimiento una tasa constante, por ejemplo, un cultivo de bacterias que cada minuto se duplica, o al contrario, se reduce a la mitad (puede ser triplicar, cuadruplicar, etc., así mismo puede ser un tercio, una cuarta parte, etc.). Al factor de crecimiento le llamaremos  $m$ , si para cada lapso se duplica  $m = 2$ ; al lapso le llamaremos  $T$  (por notación de periodo). Entonces

$$m * A * e^{nT/\tau} = A * e^{(n+1)T/\tau} \quad (8)$$

La constante  $A$  es la concentración inicial y el factor  $\tau$  nos da la velocidad de crecimiento-decrecimiento del fenómeno.  $n$  es el número de lapsos  $T$  que han pasado, como podemos ver, la diferencia de tiempo en (8), es de solo un lapso  $T$ . A continuación se muestra el proceso para obtener el parámetro  $\tau$  de acuerdo a  $T$  y  $m$ . Las unidades vienen dadas por  $T$ .

Dividiendo ambos lados de (8) por  $A * e^{nT/\tau}$

$$m = e^{T/\tau} \quad (9a)$$

Aplicando logaritmo

$$\ln[m] = T/\tau. \quad (9b)$$

Por lo tanto

$$\tau = T/\ln [m] \quad (10)$$

Esta última ecuación nos dice cuanto ha de valer el parámetro  $\tau$  de acuerdo a la relación que se quiere que tenga por lapso la cantidad estudiada ( $\tau = \tau(T, m)$ ). Por ejemplo, si se quiere que un cultivo de bacterias se triplique en un minuto, entonces:

$$m = 3 \quad (11a)$$

$$T = 1 \text{ min.} \quad (11b)$$

Por lo tanto

$$\tau = \frac{1 \text{ min}}{\ln[3]} = .91 \text{ min} \quad (11c)$$

Si se quiere que se duplique cada min ( $m=2$  y  $T=1$ min):

$$\tau = 1.44 \text{ min} \quad (11d)$$

Si en cambio fuera un decremento, por ejemplo, a razón  $\frac{1}{2}$  por cada milisegundo;

$$\tau = \frac{1 \text{ msec}}{\ln[1/2]} = -1.44 \text{ msec} \quad (11e)$$

Los últimos dos valores coinciden en número por propiedades de los logaritmos

$$\ln[m] = -\ln\left[\frac{1}{m}\right] \quad (12)$$

Aplicado a nuestro resultado

$$\tau(T, m) = -\tau(T, 1/m) \quad (13)$$

En la gráfica de la Fig. 2 se observa el comportamiento de  $\tau$  como función de la razón  $m$ . Para ejemplificar este análisis, se considerara un litro de bacterias, las cuales se duplican cada minuto, y se quiere obtener una función que modele su comportamiento. Tomando el dato de (11d), y llamando  $M$  a la cantidad de bacterias que hay,

$$M(t) = 1lt * e^{t/1.44min}. \quad (14)$$

Donde  $t$  esta dado en minutos. La gráfica correspondiente se muestra en la Fig. 3.

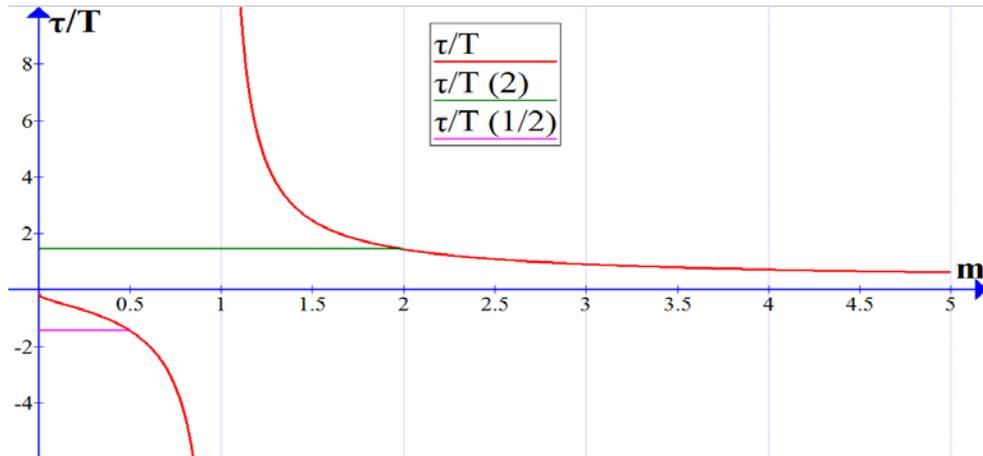


Fig. 2. Gráfica de la relación entre el periodo deseado  $T$  y el tiempo de relajación  $\tau$ , en rosa se muestra el valor para un decremento a razón  $1/2$  y en verde para un incremento a razón 2.

- Aplicación de las propiedades de la función exponencial a sinapsis diversas.

Se consideraron dos sinapsis pertenecientes a una misma región cerebral, la primera es a la que llamaremos *normal*, que suponemos tiene parámetros estándar. Para la segunda sinapsis se considera un tiempo de relajación arbitrario  $\tau$  y una concentración inicial arbitraria  $C$ . Ya que ambas sinapsis se consideraron dentro de una misma región, la “concentración de limpieza”  $C_L$  de neurotransmisor dentro del espacio sináptico es la misma, llamémosla  $C_L$ . La primera sinapsis tarda un tiempo  $t_0$  en alcanzar ese valor mientras que la segunda tarda un tiempo  $t^*$ .

Se realiza el análisis para conocer el tiempo en que una “sinapsis genérica” tarda en alcanzar el valor  $C_L$  para una “sinapsis estándar”. Para este análisis se considera que la concentración solo depende del tiempo, no se pierde generalidad por esto ya que es algo que nos permite el MSV.

$$u_e(t = t_0) = C_0 * \exp\left[-\frac{t_0}{\tau_0}\right] = C_L \quad (15a)$$

$$u_g(t = t^*) = C * \exp\left[-\frac{t^*}{\tau}\right] = C_L \quad (15b)$$

Ya que ambas concentraciones son iguales, entonces:

$$C_0 * \exp\left[-\frac{t_0}{\tau_0}\right] = C * \exp\left[-\frac{t^*}{\tau}\right] \quad (16)$$

Aplicando la relación  $\ln(a*b)=\ln(a)+\ln(b)$  obtenemos:

$$\ln[C_0] - \left(\frac{t_0}{\tau_0}\right) = \ln[C] - \left(\frac{t^*}{\tau}\right) \quad (17a)$$

$$\frac{t^*}{\tau} = \ln[C] - \ln[C_0] + \left(\frac{t_0}{\tau_0}\right) = \ln\left[\frac{C}{C_0}\right] + \left(\frac{t_0}{\tau_0}\right) \quad (17b)$$

$$t^* = \tau \left\{ \ln\left[\frac{C}{C_0}\right] + \left(\frac{t_0}{\tau_0}\right) \right\} \quad (17c)$$

Aplicando logaritmo a la primera ecuación y despejando

$$t_0 = \tau_0 * \ln\left[\frac{C_0}{C_L}\right] \quad (18a)$$

$$\frac{t_0}{\tau_0} = \ln\left[\frac{C_0}{C_L}\right] \quad (18b)$$

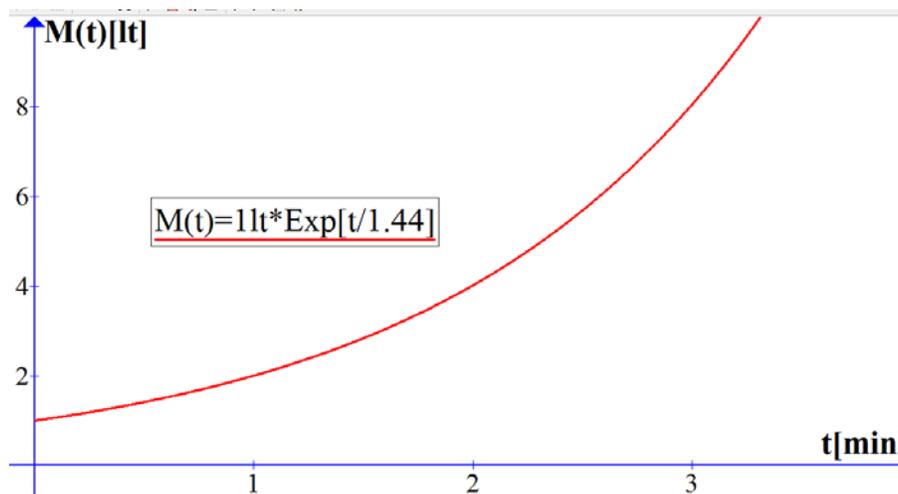


Fig. 3. Gráfica de la ecuación (14). Comportamiento de una población de bacterias que duplica su número cada minuto, la población inicial ocupa un volumen de un 1 lt.

Graficando  $t_0/\tau_0$  como función de la relación  $C_L/C_0$ , se tiene la curva de la Fig. 4. En esta gráfica se ve la relación que existe entre las cantidades  $C/C_0$  y el tiempo en que se tarda en llegar a la concentración de sinapsis limpia como múltiplo del tiempo de relajación. Nótese que, como se espera, si la concentración inicial de neurotransmisor es la misma que el de la sinapsis limpia, se tardará un tiempo nulo en llegar a esa concentración, ya que es la misma. Esto puede estar asociado a una comunicación deficiente por inhibición, o una incorrecta sincronización de los receptores y vesículas liberadas. Nótese también que cuando la concentración de limpieza es muy

pequeña, la razón de tiempos es muy grande. Además, para un valor en el eje horizontal existe más de un par de concentraciones que satisfagan dicho valor.

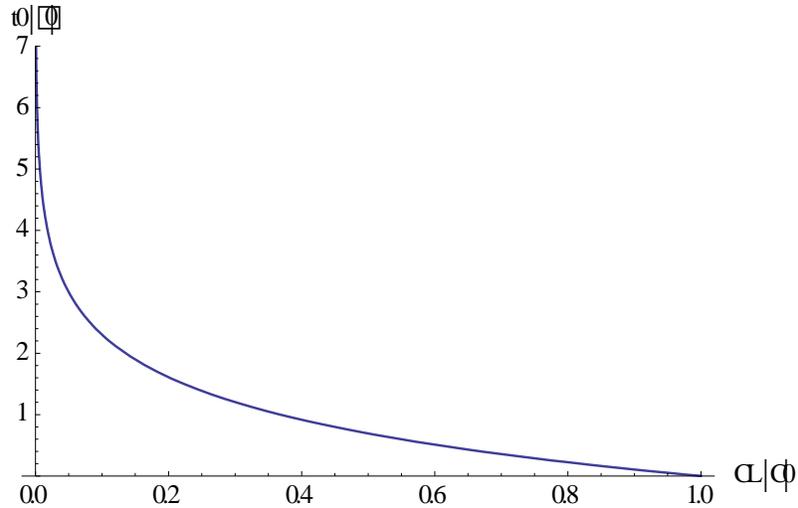


Fig. 4. Gráfica de la función mostrada en (18b). Relación que hay entre la razón  $t_0/\tau_0$  (tiempo en que una sinapsis normal tarda en llegar al valor de limpieza y el tiempo de relajación normal) como función de la razón  $C_L/C_0$  (concentración de limpieza y concentración inicial normal). El valor para las razones temporales solo depende de la relación entre las concentraciones.

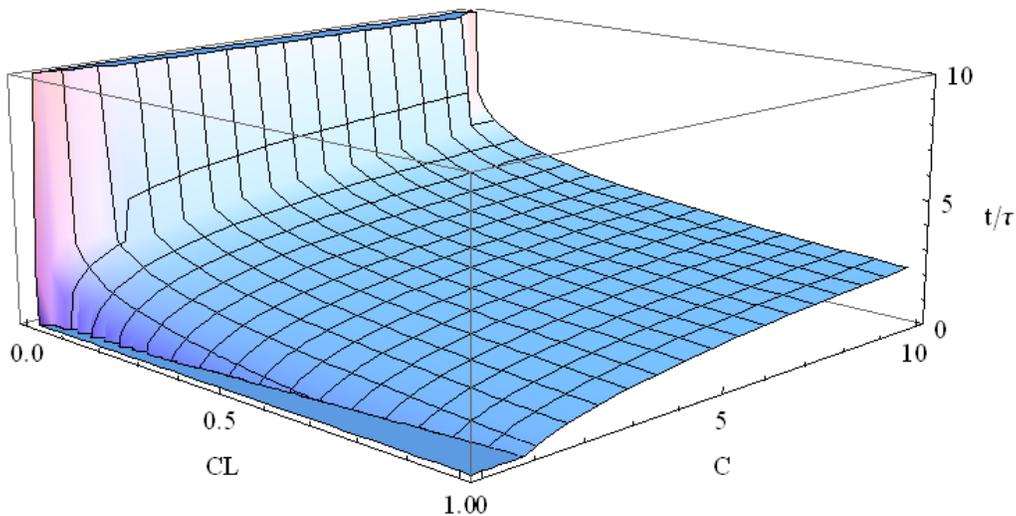
Aplicando logaritmo a la segunda ecuación y despejando t se tiene que

$$t = \tau * \ln \left[ \frac{C}{C_L} \right] \quad (12a)$$

Para un primer análisis de esta ecuación, dividiremos entre  $\tau$  (el cual es un tratamiento similar al de la ecuación anterior)

$$\frac{t}{\tau} = \ln \left[ \frac{C}{C_L} \right] \quad (12b)$$

Ya que tenemos dos parámetros,  $C_L$  y  $C$ , graficaremos en tres dimensiones para poder hacer variar las dos al mismo tiempo, en la Fig. 5 se aprecia dicha gráfica.



*Fig.5. Relación  $t/\tau$  como función de la concentración inicial  $C$  y la concentración de limpieza  $C_L$ . Nótese que, matemáticamente, cuando  $C_L$  es menor que  $C$ , el tiempo es negativo, biológicamente implica un problema en la comunicación, ya que esta no se da. Nótese también que cuando  $C_L$  es muy pequeño, el tiempo en que se alcanza ese valor se hace muy grande.*

En esta gráfica vemos que existen combinaciones de tal manera que dan tiempos negativos (parte plana), los cuales no son físico-biológicamente posibles. Estos valores corresponden cuando el valor de la concentración inicial es menor al de limpieza. Cuando son iguales el tiempo es exactamente cero. También, como ya se mencionó, cuando la concentración de limpieza es muy pequeña, el tiempo que tarda en alcanzar dicho valor es muy grande. Ahora se presenta otra gráfica en la Fig. 6 para mostrar que a pesar de que el aumento de la concentración puede ser considerablemente grande, el tiempo para llegar a la concentración de limpieza no lo es tanto.

En la gráfica de la Fig. 6 vemos que aunque la concentración inicial es muy grande en comparación con la concentración de limpieza, el tiempo en que se tarda de llegar de la primera a la segunda es relativamente pequeño, basta comparar  $C/C_L=30000$  (la concentración inicial  $C$  es 30000 veces más grande que  $C_L$ ), el tiempo que tarda en alcanzar el valor de limpieza es solo 10 veces el tiempo de relajación, y  $10 \ll 30000$ .

En la Fig. 7 nótese como varía fuertemente el tiempo si se cambia el tiempo de relajación (directa y linealmente relacionado con el coeficiente de difusión) en comparación con la variación de la concentración inicial. Existe solo un pequeño intervalo, en el que los parámetros son menores que los estándar en que importa más la concentración inicial que el tiempo de relajación.

Adicionalmente la concentración de neurotransmisor no puede ser mayor en cuanto ordenes, ya que se requeriría demasiada energía para transportar las moléculas de glutamato

#### 4. SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

Conjuntando las soluciones para cada una de las variables se tiene que

$$u(r, \theta, z; t) = F * J_0(k_r r) * \text{senh}(k_z z) * \exp[-t/\tau] \quad (13)$$

La gráfica de la concentración como función del espacio para un  $t$  dado se muestra en la Fig. 8

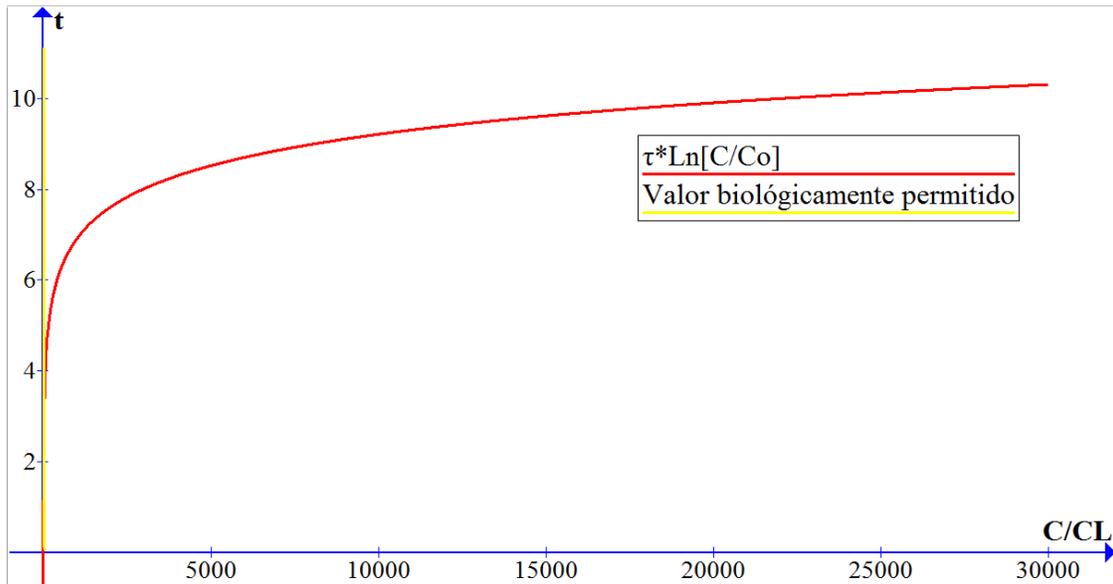


Fig. 6. Gráfica que muestra el tiempo para llegar al valor de limpieza en función de la razón  $C/C_L$ , aunque es estrictamente creciente, después de subir abruptamente la pendiente se vuelve pequeña. Se ha graficado hasta valores grandes aunque no sean biológicamente correctos para hacer notar como  $t$  depende fuertemente de  $\tau$ . La línea amarilla, la cual está muy cercana al eje vertical, corresponde a los valores pequeños, biológicamente admisibles.

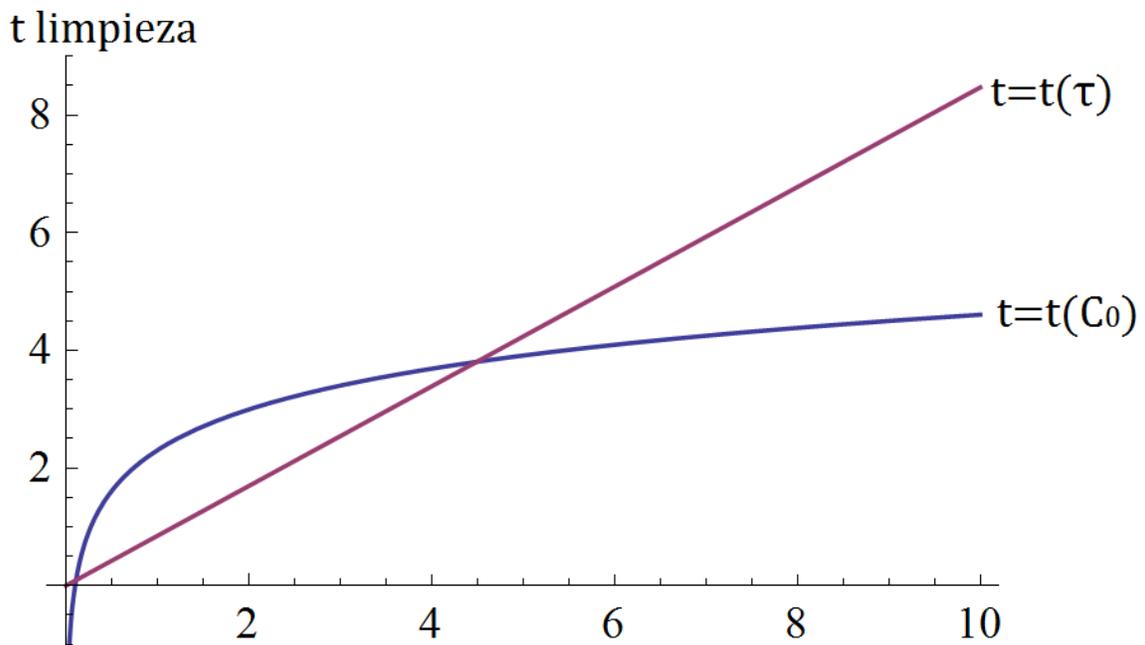


Fig. 7. Tiempo  $t$  en que se tarda en alcanzar el valor de limpieza en función del tiempo de relajación (y por tanto de la constante de difusión  $D$ , curva morada) y como función de la concentración inicial (curva azul), la concentración de limpieza para esta grafica se ha tomado  $C_L = 0.1$ ,

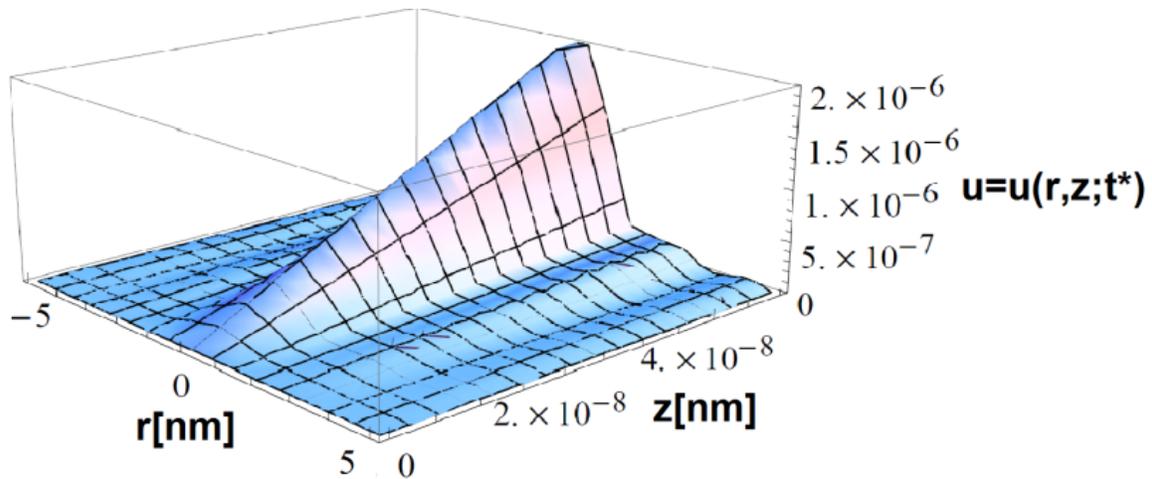


Fig. 8. Gráfica de la concentración  $u$  como función del radio  $r$  y la altura  $z$  para un tiempo dado.

## 5. RESULTADOS

Se encontró la solución a la ecuación homogénea de difusión, que gobierna el proceso de difusión de neurotransmisor dentro del espacio sináptico, el cual es primordial para la comunicación neuronal. Al hacer el análisis de la solución temporal se encontró que la dependencia del tiempo en que se da la comunicación neuronal, así como el tiempo en que se llega a un denominado valor de limpieza, depende fuertemente del tiempo de relajación, esto de modo matemático, de modo físico-biológico se traduce como una dependencia de la constante de difusión, lo cual está ligado con la química del ES.

## 6. CONCLUSIONES

Ya que el comportamiento temporal de la comunicación neuronal es el mismo independientemente de la geometría de la sinapsis y es de esta variable de la que depende una correcta comunicación, es importante el análisis desde distintos enfoques, como lo es el físico-matemático, para apoyar a la Neurociencia mediante el análisis de los parámetros de la solución y sus consecuentes variaciones. Se mostró la gran importancia del  $\tau$ , que está directamente ligado con  $D$ . Es en este último parámetro que debe recaer el estudio biológico-neuronal para el tratamiento y prevención de las enfermedades psicológicas-neurológicas.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Gazulla y Cavero-Nagore M "Glutamato y enfermedad de Alzheimer". *Revista de Neurobiología*. España. 2006. pp.427-432.
2. Medina M. A. y Escobar B. M. "Plasticidad neural y su relación con el sistema de transportadores de glutamato". *Revista Colombiana de Psiquiatría*. No. 1. Vol. XXXIII. Colombia. 2004. pp.155-164.
3. Torres Mena O y Zamorano Ulloa R. "Modelo de difusión de glutamato en el espacio sináptico", Memorias de la XIX Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas. México. 2014. pp.508-516.

4. Zill. D. *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores a la frontera*. Cengage Learning. México 2015.
5. Scimemi y Beato. . "Determining the neurotransmitter concentration profile at active synapses". Springer. 2009. pp.289-306.

# **EFFECTO TALBOT Y USO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER EXTENDIDA PARA LA RECONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES**

Jennifer López Chacón, Mauricio Ortiz Gutiérrez, Rafael González Campos, Marco Antonio Salgado Verduzco

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

## **RESUMEN**

Cuando se proyecta un patrón de franjas de líneas paralelas, claras y oscuras, sobre una superficie aparece una modulación de fase en las líneas que se relaciona con las coordenadas locales y con la altura de la superficie. Una técnica para hacer esta proyección de franjas es por medio del bien conocido efecto Talbot, en el que se generan autoimágenes de objetos periódicos iluminados con luz coherente y monocromática en posiciones discretas múltiples de la distancia de Talbot. En estos planos se coloca un objeto con relieve sobre el que se forma una de las autoimágenes de una rejilla binaria deformada. Capturando esta imagen con una cámara CCD y por medio de la transformada de Fourier este patrón es demodulado para obtener el mapa de fase envuelta. El proceso de desenvolvimiento de la fase se puede llevar a cabo mediante el método de K. Itoh el cual produce una nube de puntos que corresponden con las alturas locales de la superficie respecto a un plano de referencia. En este trabajo se presenta la técnica anteriormente descrita con la implementación de la transformada de Fourier extendida (XFT) para la reconstrucción de superficies en 3D. El uso de la XFT mejora los resultados que si se utiliza la FFT de programas comerciales y no es necesario contar con programas complejos para el desenvolvimiento de la fase. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de las superficies con objetos simulados digitalmente y reales.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Hoy en día el desarrollo de la óptica tiene un gran auge gracias al impacto que tienen sus aplicaciones en las actividades del ser humano. Estas se pueden dividir en cuatro grandes áreas y en las cuales inciden las investigaciones que en la actualidad se realizan: instrumentación óptica [1], comunicaciones ópticas [2], fotónica [3] y metrología óptica [4].

La metrología óptica es de suma importancia en la solución de problemas relacionados con la industria automovilística, aerostática, análisis no destructivo de materiales compuestos, inspección de turbinas y detección de fracturas en elementos mecánicos, entre otras.

Gracias a la Metrología Óptica se pueden realizar mediciones de objetos con relativa facilidad y permite analizar algunas de sus propiedades físicas tales como esfuerzo, desplazamiento, distancia, presión, temperatura, velocidad, forma, dimensiones, etc., de objetos y/o regiones de observación. Entre algunas de las técnicas que se emplean en la metrología óptica cuya característica principal es que son pruebas sin contacto, se encuentran los sistemas ópticos basados en la técnica de proyección de franjas, efecto moiré, efecto Talbot e interferometría de moteado [4].

En este trabajo se utiliza el efecto Talbot para la proyección de franjas para digitalizar la superficie de los objetos a analizar. Mediante una aplicación de procesamiento de imágenes utilizando el método de Takeda por transformada de Fourier se implementa la forma que permite visualizar e interpretar la topografía de las superficies y proporciona información cualitativa de los cambios superficiales que presentan. La propuesta en este trabajo es el uso de la extensión de la transformada de Fourier discreta que mejora los resultados que se obtienen con el algoritmo tradicional de la transformada de Fourier discreta que viene implementada en los programas de cómputo tales como MatLab, Mathematica, etc.

## 2. TEORÍA

Con frecuencia, las rejillas utilizadas en metrología óptica son transparencias cuya función matemática que la describe es llamada función de transmitancia  $t(x,y)$  y es dada por una función de onda cuadrada (Gasvik, 2002). Una alternativa de estas funciones es describir la transmitancia de la rejilla, con una función cosenoidal de frecuencia constante  $f$ . La razón por la que estas rejillas son usadas en metrología es debido a que pueden ser moduladas en fase. Esto significa que la rejilla se puede expresar por

$$t(x, y) = a + b \cos[2\pi(fx + \Psi(x))] \quad (1)$$

Donde  $f = 1/d$  es la frecuencia de la rejilla,  $d$  el periodo y  $a$  y  $b$  son constantes conocidas como iluminación de fondo y contraste respectivamente. En la ecuación (1) el argumento de la función coseno es conocido como fase además,  $\Psi(x)$  es la función de modulación de fase y es igual al desplazamiento lateral de las líneas de la rejilla respecto a su posición original dividido por el periodo de la rejilla y está dada por

En la literatura ha sido ampliamente discutido el procedimiento para encontrar la modulación en fase  $\Psi(x)$  de la rejilla cosenoidal; así mismo, se ha comprobado cómo es que esta expresión se relaciona con la altura  $z$  de una superficie. En la figura 1 se muestra el esquema que muestra los parámetros necesarios para calcular el desfase que produce una superficie sobre una rejilla proyectada.

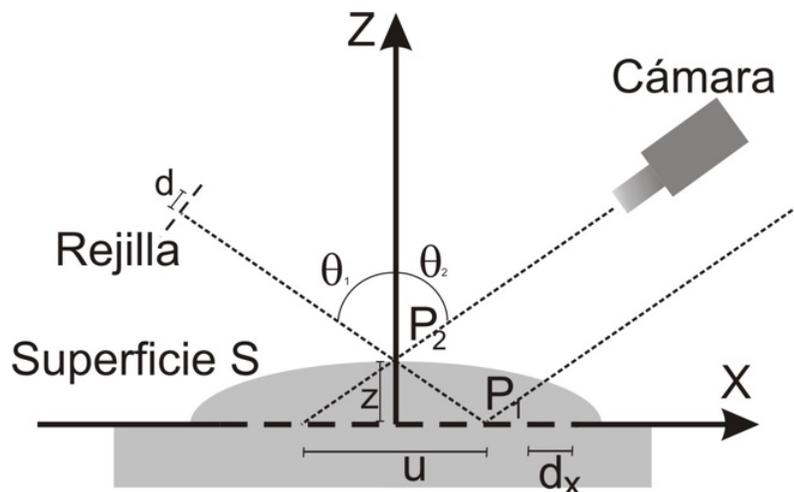


Figura 1. Geometría para la proyección de una rejilla sobre una superficie S. Se muestra el perfil de la rejilla pero no el sistema óptico que la proyecta.

Como puede observarse en la figura 1 las franjas de la rejilla son proyectadas sobre la superficie de un objeto colocado sobre el plano xy y observadas por una cámara. Un rayo de luz que sale de la rejilla forma un ángulo  $\theta_1$  con la normal a la superficie, mientras que el haz reflejado forma un ángulo  $\theta_2$  con la normal. La irradiancia que se registra en la cámara de la figura 1 está dada por la expresión siguiente

$$I(x) = a + b\cos[\Phi(x)] \quad (2)$$

donde

$$\Psi(x) = \frac{2\pi}{d} \left( x\cos\theta_1 + z \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos\theta_2} \right). \quad (3)$$

Comparando las ecuaciones (2) y (1) se observa que tiene la misma forma, con la diferencia que la fase en la ecuación (2) está relacionada con la altura z de la superficie que se analiza tal como se muestra en la ecuación (3). De esta manera, si se conoce la fase de la rejilla deformada se puede determinar la forma en 3D que tiene la superficie.

Para obtener el valor de la fase se emplea el método de la transformada de Fourier que fue presentado originalmente por Takeda et, al (1982). Siguiendo el método de Takeda, la ecuación (2) se puede reescribir como:

$$h(x, y) = a(x, y) + c(x, y)e^{i2\pi fx} + c^*(x, y)e^{-i2\pi fx} \quad (4)$$

Donde

$$c(x, y) = \frac{1}{2} [h(x, y) - a(x, y)] e^{-i2\pi fx} \quad (5)$$

y el símbolo (\*) denota el complejo conjugado del término dado en la ecuación (5).

La transformada unidimensional de Fourier del patrón de franjas con respecto a la variable x da como resultado:

$$H(v, y) = A(v, y) + C(v-f, y) + C^*(v+f, y), \quad (6)$$

Donde las letras mayúsculas denotan el espectro o transformada de Fourier  $v$  y es la frecuencia espacial en la dirección x. Para que el método funcione, la separación espacial  $f$  debe ser tal que permita separar los órdenes en el espectro de Fourier. Colocando un filtro en el plano de frecuencias que permita el paso del primer orden de difracción del espectro de Fourier, la función  $C(v-f, y)$  puede ser aislada y además si se traslada hacia el origen se elimina la dependencia de la frecuencia  $f$  y entonces se puede obtener  $C(v, y)$ . El siguiente paso es tomar la Transformada Inversa de Fourier de la función  $C(v, y)$  cuyo resultado es la función compleja  $c(x, y)$  La fase entonces puede ser determinada a través del logaritmo de la función  $c(x, y)$  tal como se muestra en la ecuación siguiente:

$$\log[c(x, y)] = \log \left[ \frac{1}{2} b(x, y) \right] + i\Psi(x, y), \quad (7)$$

La fase se encuentra en la parte imaginaria de dicha ecuación y está completamente separada de la variación de amplitud en  $b(x, y)$  la parte real. Por tanto, la fase se calcula considerando únicamente la parte imaginaria de la ecuación (7) despejando la altura z se obtiene

$$z = \frac{\cos\theta_2}{2\pi\sin(\theta_1+\theta_2)} \text{Im}\{\log[c(x,y)]\}, \quad (8)$$

Los valores de la fase que se obtienen por medio de la ecuación (8) presentan discontinuidades debido a que la función coseno que se utiliza para definir la rejilla no es inyectiva. Cuando la fase presenta discontinuidades se dice que la fase está envuelta en el rango 0 a  $2\pi$ . El término fase desenvuelta surge como resultado del proceso computacional en el cual se integra el valor de  $2\pi$  la fase para eliminar las discontinuidades en los valores de la fase, es decir, se suma o se resta este valor a lo largo de una trayectoria o línea cuando se leen los datos en sentido de derecha a izquierda. Las discontinuidades en la fase pueden ser causadas por cambios rápidos en el parámetro medido, es decir, tales defectos pueden aparecer como un cambio repentino en el espaciado de las franjas o como un punto donde las franjas se detienen (también conocido como ruptura de franjas). En estas circunstancias, los errores en el desenvolvimiento de la fase son propagados desde el defecto al resto del arreglo de valores de la fase. En este trabajo se desenvuelve la fase utilizando el método de Itoh (1982) sin embargo no se proporcionan detalles del algoritmo empleado.

En este trabajo se usa el efecto Talbot para proyectar una rejilla sobre la superficie de un objeto, por lo que a continuación se hace una breve descripción del Efecto Talbot. Al iluminar un objeto periódico con periodo  $p$ , con una función de transmitancia cualquiera, con un frente de onda plano con longitud de onda, se obtiene un campo de onda con modulación periódica, el cual si se deja propagar libremente se formarán autoimágenes del objeto periódico localizadas en planos equidistantes separados por la distancia dada por la ecuación:

$$(9)$$

La ecuación 9 representa la distancia de Talbot. Este fenómeno es el bien conocido efecto Talbot que se muestra esquemáticamente en la figura 2.

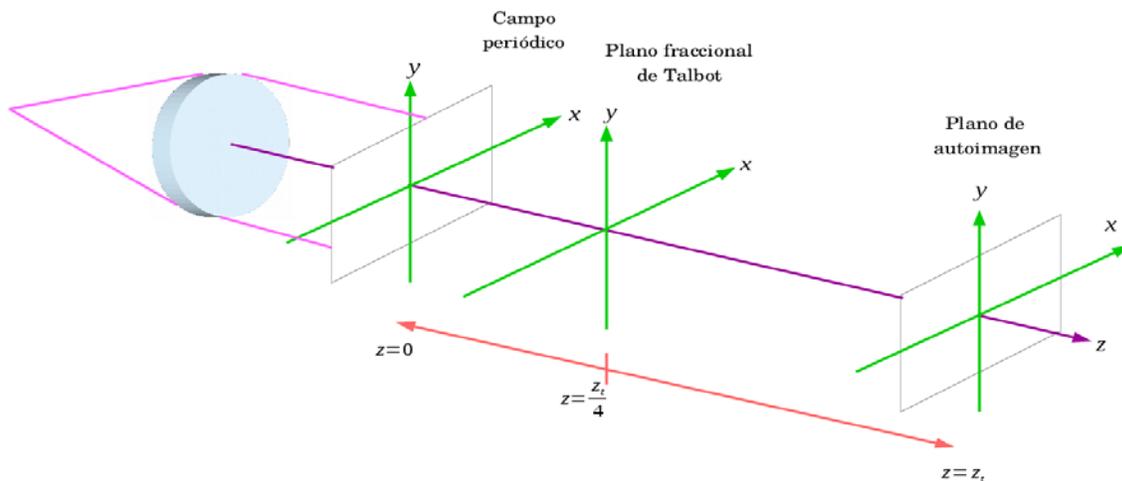


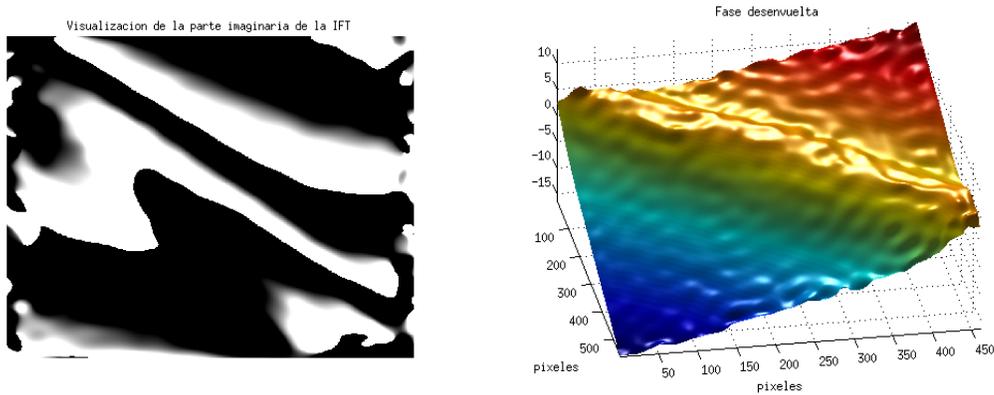
Figura. 2. Esquema que representa el efecto Talbot.

En la figura 2 se muestra que en el plano  $z=0$  se coloca el objeto periódico que es representado por una rejilla binaria tipo Ronchi y en los siguientes planos localizados a múltiplos de la distancia de Talbot se muestran las autoimágenes de la rejilla. Obsérvese que para la formación de estas autoimágenes no es necesario utilizar lentes o algún sistema óptico, sino que por simple propagación libre se forma la misma distribución del campo óptico que la que se tiene inmediatamente después de que la onda plana ilumina el objeto periódico.

Es necesario destacar que los planos intermediarios entre el plano  $z=0$  y  $z=z_T$ , conocidos como planos fraccionarios también resultan interesantes; en particular en el plano  $z=z_T/2$  la distribución del campo óptico es idéntica a la distribución del campo en  $z=0$  pero desplazado medio periodo y, además, en el plano  $z=z_T/4$  se tiene una distribución del campo puramente de fase, sin embargo, estos dos planos, aunque son interesantes no se analizan en este trabajo.

### 3. RESULTADOS

A continuación se muestran el resultado después de la análisis de la imagen muestra, la figura 3(a) muestra la parte imaginaria de la transformada inversa de Fourier, mientras que en la figura 3(b) se observa la reconstrucción de nuestra muestra



(a)

(b)

Figura 3. (a) Parte Imaginaria del logaritmo de la imagen de transformada inversa de Fourier; (b) reconstrucción del objeto muestra en 3D usando la XFT.

### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se utiliza la técnica de proyección de luz estructurada mediante el efecto Talbot para la reconstrucción tridimensional de la topografía de superficies. Con esta técnica se reconstruye la topografía de los objetos utilizados a partir de la deformación de las franjas proyectadas mientras es observado a través de un microscopio óptico. La imagen que se obtiene de las franjas deformadas es registrada por una cámara CCD. Mediante una aplicación de procesamiento de imágenes, además del uso del método de Takeda se implementa la forma que permite visualizar e interpretar la topografía de las superficies y proporciona información de los cambios superficiales que presentan.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Torres Vidales Eugenia. (2010). "Análisis cualitativo de la topografía de objetos por proyección de luz estructurada". Tesis de Licenciatura, UMSNH, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Morelia, Michoacán.
2. Jasprit Singn. (1996). Optoelectronics an introduction to materials and devices. USA. McGraw-Hill.
3. Bahaa E.A Saleh, Malvin Carl Teich. (2002). Fundamentals of photonics. USA. John Wiley. (1999).
4. Gasvik Kjell J. Optical Metrology. England. John Wiley.
5. Itoh K. (1982) . Analisis of the phase unwrapping problem. Applied Optics. 21(14),2470-2479.
6. Arias del Angel Jorge. (2013). "Obtención de relieves y reconstrucción de objetos en 3D utilizando proyección de luz estructurada". Tesis de licenciatura, UMSNH, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Morelia, Michoacán.
7. Takeda Mitsuo, Hideki Ina, Seiji Kobayashi. (1982). Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. J. Opt. Soc. Am. 72(1), 156-160.

# CERÁMICOS MAGNÉTICOS DE CAOLÍN-MAGNETITA PARA LA REMOCIÓN DE $\text{Ni}^{2+}$ DE EFLUENTES ACUOSOS

Diana Saray Delgadillo Moreno<sup>1</sup>, Ana María Bolarin Miró<sup>1</sup>, Félix Sánchez de Jesús<sup>1</sup>, Claudia Alicia Cortés Escobedo<sup>2</sup>, Arturo Barba Pingarrón<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, UAEH. <sup>2</sup> Instituto Politécnico Nacional, IPN. <sup>3</sup> Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM

## RESUMEN

Este trabajo presenta una alternativa de tratamiento de aguas contaminadas con materiales magnéticos a partir de la fabricación de compuestos cerámicos hechos a base de caolín con diferentes proporciones de magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Con las mezclas de polvos se fabricaron probetas cilíndricas con distintos grados de densidad (porosidad) y posteriormente se procedió a evaluar su capacidad en la adsorción de iones de níquel ( $\text{Ni}^{2+}$ ) contenidos en agua. Para la caracterización se utilizó difracción de rayos X para corroborar las fases cristalinas del compuesto; se obtuvieron curvas de histéresis para determinar la magnetización y el campo coercitivo a través de un análisis de magnetometría de muestra vibrante; se determinó la densidad y la porosidad de los compactos de Caolín-Magnetita (C:M), en diferentes proporciones, y finalmente se presentan los resultados de la evaluación de la concentración de iones de níquel  $\text{Ni}^{2+}$ , antes y después de la exposición de los compactos de C:M, así como de polvos de las mismas mezclas, dentro de una solución acuosa. Por último se estudió la cinética de adsorción utilizando ecuaciones de pseudo primer-orden y pseudo-segundo orden para analizar los datos experimentales y se constató que estas describen muy bien la capacidad de adsorción del ion  $\text{Ni}^{2+}$  sobre el material magnético.

## 1. INTRODUCCIÓN

La actividad industrial, específicamente la dedicada a la minería y los recubrimientos metálicos generan, en sus procesos, efluentes acuosos con altos contenidos en metales contaminantes, tales como Ni, Cu y Zn que exceden valores de 4, 10 y 6 mg/L respectivamente, niveles máximos permitidos por la normatividad actual (Norma Oficial Mexicana NOM-002-Semarnat-1996) [1]. Estos metales, en altas concentraciones son tóxicos, ya que algunos órganos del ser humano los retienen, sin tener capacidad para eliminarlos naturalmente, lo cual hace que los órganos vitales como el hígado y riñones se deterioren rápidamente. Es por lo anterior, que es necesaria la implementación de sistemas de remoción de iones pesados, particularmente de níquel, de efluentes acuosos [2].

Los tratamientos para los efluentes contaminados incluyen el uso de procesos y tecnologías convencionales como la precipitación química, adsorción con resinas de intercambio iónico, empleo de membranas en la aplicación de ósmosis, electrodiálisis, adsorción en carbón, extracción por solventes entre otros [3]. Sin embargo, estas tecnologías presentan inconvenientes de carácter técnico y económico, razón por la cual ha surgido un interés creciente en el uso de materiales adsorbentes naturales [4].

En este trabajo se propone fabricar filtros o compactos para adsorción de iones metálicos contaminantes ( $\text{Ni}^{2+}$ ), siendo el material del filtro el caolín, como material base, y un material

magnético, magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Las arcillas se han empleado desde hace muchos años como un material adsorbente natural de metales pesados, debido a sus propiedades intrínsecas: elevada área superficial, capacidad para intercambio catiónico, capacidad de adsorción física debido a la morfología de sus partículas y la presencia de grupos hidroxilos superficiales. [5-6].

La magnetita,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  ( $\text{FeOFe}_2\text{O}_3$ ), presenta una estructura cúbica-espinela, la cual presenta un comportamiento de material magnético "suave", es una material con una elevada estabilidad química y ampliamente empleada en aplicaciones tecnológicas avanzadas, Las ferritas, debido a su carácter magnético, son materiales prometedores para propiciar la adsorción de metales que presentan momento magnético, como es el caso del  $\text{Ni}^{2+}$ , los cuales en conjunto con el caolín, conocido adsorbente por sus propiedades físicas y químicas, incrementará el proceso de remoción de iones metálicos disueltos en efluentes acuosos contaminados. [7]

## 2. PARTE EXPERIMENTAL

Se prepararon mezclas estequiométricas de polvo de magnetita y caolín modificando la proporción en peso de caolín: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70,80 y 90%. Las mezclas se sometieron a molienda de alta energía durante 10 min. para asegurar la homogeneidad de las mismas. Las mezclas obtenidas se caracterizaron mediante Difracción de rayos X, Magnetometría de muestra vibrante y Difracción Láser. Para la obtención de los compactos se agregó 1% de polvo de etilen-bis-estearamida (cera) garantizando la resistencia en verde de las pastillas, a la vez de facilitar el prensado. Se conformaron en una prensa hidráulica aplicando una presión de 500 MPa. Los compactos fueron medidos para determinar su densidad en verde, y posteriormente se sometieron a un proceso de sinterización a  $1200^\circ\text{C}$  durante 2 h. Finalmente los compactos sinterizados fueron caracterizados.

La capacidad de adsorción de los compactos sinterizados se determinó a temperatura ambiente, mediante análisis cinético de adsorción. El ensayo consistió en colocar el compacto o pastilla en un vaso de precipitado con 100 mL de la solución preparada con una concentración de 200 ppm de  $\text{N}^{2+}$  en solución. Se mantuvo con agitación mecánica a 200 rpm y se tomó 1 mL de muestra de la solución a los siguientes tiempos: 0.1s, 5 min, 15 min, 25 min, 45 min, 60 min y 20 hr.

El ensayo se repitió, pero esta vez sustituyendo los compactos por 0.2g de polvo con una relación de 80% de Magnetita y 20% de caolín. Las muestras de 1 mL que se tomaron durante el ensayo, se aforaron a 50 mL para después poder ser analizadas mediante absorción atómica.

## 3. RESULTADOS

Se presenta en la Figura 1 el difractograma de mezclas de los polvos de partida: caolín y magnetita. Tal como se esperaba, los difractogramas de los polvos puros coinciden con los patrones que identifican a estos materiales, particularmente con los patrones COD # 0441500 y 9005813 para el caolín, y la magnetita, respectivamente. Del mismo modo, en las mezclas, es posible identificar las dos fases en diferentes proporciones (intensidades relativas).

Se muestran en la Figura 2 los ciclos de histéresis magnética, a temperatura ambiente, de las mezclas de los polvos empleados para la fabricación de los filtros. En estas gráficas se puede observar que el comportamiento del caolín es semejante al de un material ferrimagnético débil, con una magnetización específica de 7.9 emu/g y un campo coercitivo de 0.12 kOe, lo anterior es atribuido a la presencia de óxidos de hierro que le confieren dicho comportamiento. En el ciclo de histéresis magnético de la magnetita pura, su comportamiento es ferrimagnético, con una magnetización específica, del orden de 63.8 emu/g y muy baja coercitividad, 0.12 kOe. El comportamiento magnético de las mezclas de polvos es ferromagnético, y corresponde a la suma de los comportamientos de los dos materiales, debido a que la magnetización es una variable que

cumple la teoría de mezclas. Se observa que la magnetización específica incrementa desde 7.9 emu/g para el caolín puro hasta ~64 emu/g, característico de la magnetita.

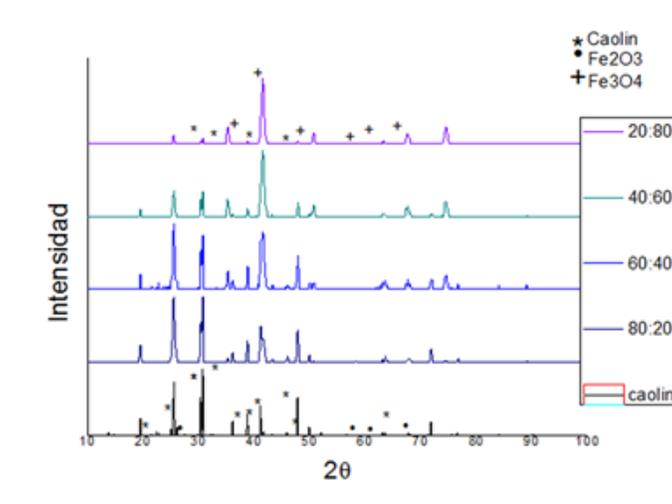


Figura 5. DRX Polvos de partida

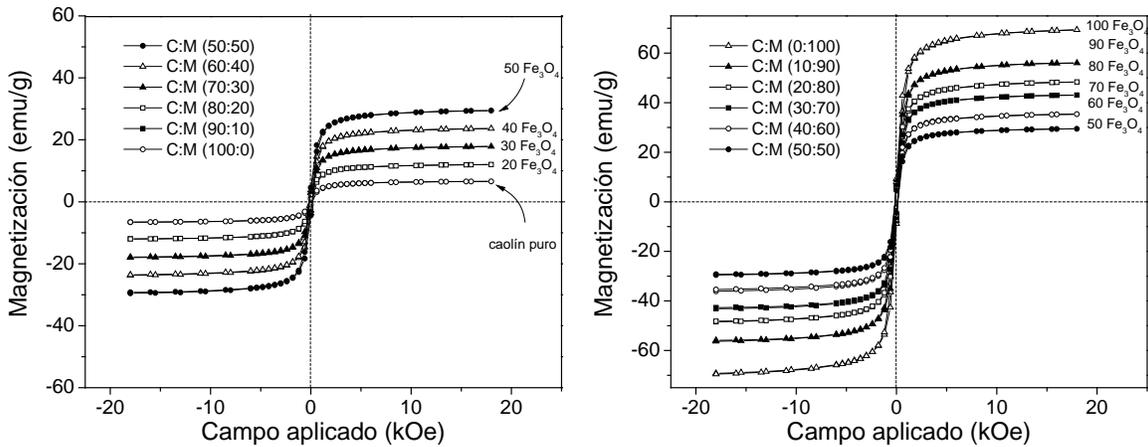


Figura 2 Ciclos de Histéresis magnética de mezclas con diferentes porcentajes en peso de caolín-magnetita (C: M)

En la Figura 3 es posible apreciar los compactos sinterizados de 10 mm de diámetro y 3 mm de espesor que se obtuvieron, con la finalidad de llevar a cabo las pruebas de adsorción. Adicionalmente se observa el rango de colores en función de la proporción de caolín que contiene cada compacto

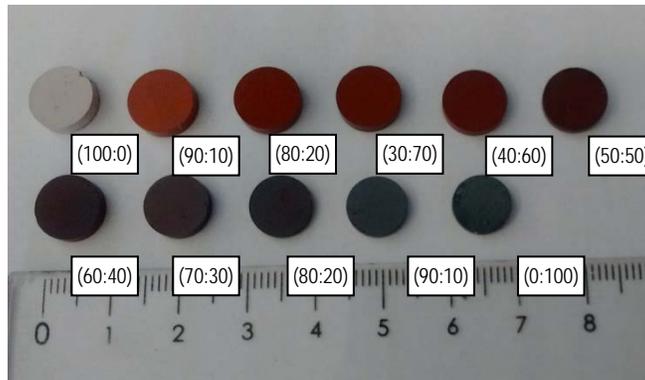


Figura 3. Macrofotos compactos sinterizados modificando su relación en peso (caolín: magnetita)

Los compactos sinterizados se sometieron a estudios de adsorción de iones de  $\text{Ni}^{2+}$ , a partir de una solución de 200 mg/L de  $\text{Ni}^{2+}$  (200 ppm). En la Figura 4 se presentan los resultados obtenidos, donde se presenta la capacidad de adsorción o remoción de los cerámicos magnéticos fabricados a base de caolín: magnetita, en función del tiempo de contacto, manteniendo la temperatura y agitación constantes. La capacidad de adsorción se evaluó a través de la determinación de  $q_e$ , de acuerdo a la expresión:

$$q_e = \frac{C_o - C_e}{m_{\text{compacto}}} \cdot V \quad \text{ec. 1}$$

Siendo:

$q_e$ = capacidad de adsorción

$C_o$ = Concentración inicial de iones Niquel

$m_{\text{compacto}}$  = Masa del material adsorbente

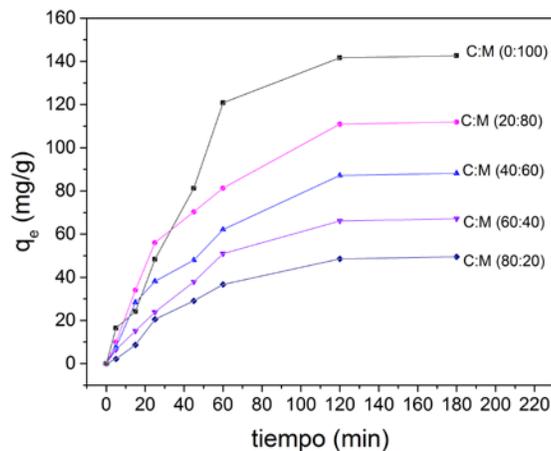


Figura 5. Capacidad de remoción de  $\text{Ni}^{2+}$  por unidad de masa.

En las curvas mostradas en la Figura 5 es posible observar que la adsorción/remoción inicia muy rápidamente y, a partir de 120 min de tiempo de contacto, la concentración se mantiene constante, lo cual significa que el compacto/filtro cerámico se ha saturado. Del comportamiento observado, se puede concluir que al incrementar la cantidad de magnetita en el cerámico, incrementa la capacidad de remoción, lo cual soporta la hipótesis según la cual el carácter magnético de la magnetita puede ser responsable del incremento de capacidad de remoción.

Mediante el análisis matemático de las curvas mostradas en la Figura 5, se determinó la cinética de adsorción/remoción para el sistema particular de cerámico-níquel, se analizó un comportamiento de pseudo-primero orden. De acuerdo al modelo cinético de adsorción de pseudo-primero orden, se debe cumplir la relación:

$$\ln(q_e - q_t) = \ln q_e - k_1 \cdot t \quad \text{ec. 2}$$

Siendo:

$q_e$ : cantidad de  $\text{Ni}^{2+}$  adsorbido (mg/g) en el equilibrio.

$q_t$ : cantidad de  $\text{Ni}^{2+}$  adsorbido (mg/g) en un tiempo  $t$ .

$t$ : tiempo (min).

$k_1$ : es la constante de velocidad de equilibrio de pseudo-primero orden de adsorción

La pendiente e intersección en la gráfica de  $\ln(q_e - q_t)$  frente al tiempo (mostrada en la Figura 6), se emplea para determinar la constante de velocidad de la ecuación cinética de primer orden,  $k_1$ . Para conocer si el sistema experimental estudiado cumple con la relación cinética mostrada, se representó gráficamente el  $\ln(q_e - q_t)$  frente al tiempo, los resultados se muestran en la Figura 6, donde se observa un comportamiento lineal entre estas dos variables, indicando que la cinética es de pseudo-primero orden, para este sistema particular estudiado.

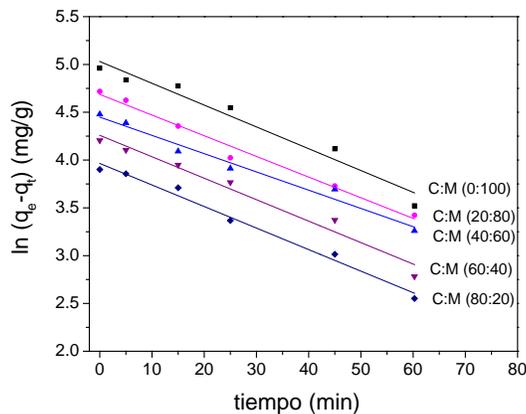


Figura 6. Cinética de reacción del tipo pseudo-primero orden.

#### 4. CONCLUSIONES

Se caracterizaron los materiales de partida: el caolín presentó una magnetización específica de 7.9 emu/g y un campo coercitivo muy pequeño de 0.12 kOe y la magnetita muestra una magnetización específica elevada, del orden de 63.8 emu/g y muy baja coercitividad, 0.12 kOe. Se obtuvieron compactos a partir de mezclas de polvos de cerámicos magnéticos mediante compactación a 500 MPa y sinterización a 1200°C, alcanzando densidades en el rango de 2.3 a 4.5 g/cm<sup>3</sup>.

Se determinó la capacidad de adsorción/remoción de iones de Ni<sup>2+</sup> de efluentes acuosos que presentan cerámicos magnéticos, a través de ensayos cinéticos. Los resultados mostraron que el cerámico caolín-magnetita (0:100) presenta una mejor capacidad de remoción/adsorción que las demás mezclas, con menor proporción de material magnético (q<sub>e</sub>=140 mg/g). En términos absolutos, la capacidad de remoción del cerámico caolín-magnetita oscila en el rango de 24 mg/L hasta 65 mg/L de Ni<sup>2+</sup>, dependiendo del porcentaje de material magnético,

La capacidad de remoción de los cerámicos magnéticos obtenidos es superior a la concentración de Ni<sup>2+</sup> que se puede encontrar en un efluente real, donde la concentración de Ni<sup>2+</sup> debe ser inferior a 6 mg/L de Ni<sup>2+</sup> (6ppm). El cerámico presenta un comportamiento cinético prioritariamente de pseudo-primer orden

#### BIBLIOGRAFÍA

1. A. Ornella, A. Maurizio, M. Mery, E. Mentastia, C. Sarzaninia y R. Barberisc, «Distribution and Mobility of Metals in Contaminated Sites,» *Environmental Pollution*, vol. 119, nº 2, pp. 177-193, 2002.
2. A. Violina, I. Ruzha, D. V y K. L. Ivanov, «Bio-accumulation and distribution of heavy metals in fibre crops (flax, cotton and hemp),» *Industrial Crops and Products*, vol. 19, nº 3, pp. 197-205, 2004.
3. J. Echeverria, J. Indurain, J. J. Garrido y E. Churrio, «Simultaneous effect of pH, temperature, ionic strength, and initial concentration on the retention of Ni on illite,» *Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. 218, nº 1, pp. 175-187, 2002.
4. C. A. L. Constantino, Á. S. Miriam, B. H. Rosa I., P. G. Francisco y P. V. Héctor, «A multivariate analysis of the accumulation and fractionation of major and trace elements in agricultural soils in Hidalgo State, Mexico irrigated with raw wastewater,» *Environment Internacional*, vol. 31, pp. 313-232, 2005
5. C. G. d. Minería, Perfil de mercado del caolín, México: Secretaría de Economía, 2013.
6. E. Bartolomé, «El Caolín: composición, estructura, génesis y aplicaciones,» *Boletín de la sociedad española de cerámica y vidrio*, vol. 36, pp. 7-19, 1997.
7. J. Mazo- Zuluaga, «Una mirada al estudio y las aplicaciones tecnológicas y biomédicas de la magnetita,» *Revista EIA*, nº 16, pp. 207-223, 2011.

# **PREDICCIÓN DEL PRECIO DEL DÓLAR CON RESPECTO AL PESO MEXICANO USANDO REDES NEURONALES Y REGRESIONES LINEALES.**

Dulce Nataly Silva Mendoza<sup>1</sup>, José Antonio González Cervera<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Edificio Alfa, Cd. Universitaria, 58040, Morelia, Michoacán, México. <sup>2</sup>Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Edificio C3, Cd. Universitaria, 58040, Morelia, Michoacán, México.

## **RESUMEN**

En este trabajo, hacemos dos modelos para entender y predecir la serie de tiempo que representa el precio del dólar de Estados Unidos con respecto al peso de México utilizando dos herramientas de análisis: las Redes Neuronales Artificiales (RNAs) y las regresiones tipo Vectores Auto Regresivos (VARs). Se explica brevemente en que consisten ambos modelos y la manera en la que se implementan. Con ambos modelos encontramos capacidades predictivas superiores al 60% teniendo amplio margen de mejora en ambos casos.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Resulta de bastante importancia para la ciencia encontrar buenos modelos matemáticos que nos permitan obtener pronósticos a problemas específicos. El desarrollo del cómputo científico ha proveído mejores técnicas gracias a las cuales se ha podido llevar a cabo la implementación de estos modelos de una manera eficaz. En este trabajo nos enfocaremos al desarrollo de dos modelos matemáticos poderosos, uno es el conocido como redes neuronales artificiales (RNAs) y el otro es el llamado vector auto regresivo (VAR). Las RNAs son modelos inspirados en las redes neuronales biológicas que intentan imitar la forma en la que el cerebro humano procesa la información y son una alternativa computacional que proporcionan una amplia gama de técnicas para resolver problemas en reconocimiento de patrones, optimización, clasificación, análisis de datos, control, aproximación de funciones y predicciones. El modelo auto regresivo a diferencia de las redes neuronales, es un modelo enfocado específicamente a obtener predicciones en series de tiempo. No por esto debemos subestimar este modelo ya que las predicciones son constantemente utilizadas en diversas áreas como economía, finanzas, mercadeo, medio ambiente e ingeniería.

El contenido del artículo es el siguiente: en el capítulo dos presentaremos la teoría usada para el desarrollo de los dos modelos, en el capítulo tres explicaremos las implementaciones para ambos modelos, en el capítulo cuatro mostramos los resultados obtenidos y comparaciones entre las RNAs y el VAR. Finalmente en el capítulo 5 presentamos conclusiones y la propuesta para el trabajo futuro.

## **2. TEORÍA**

### **REDES NEURONALES ARTIFICIALES**

Las RNAs son un modelo inspirado en las redes neuronales biológicas, las cuales están conformadas por un número de  $10^{11}$  neuronas aproximadamente que están interconectadas y que transmiten impulsos eléctricos gracias a los cuales se da el intercambio de información entre las neuronas. Las partes principales que constituyen una neurona son: las dendritas, soma o cuerpo de la neurona, axón y sinapsis, véase la Figura 1. Las dendritas son las encargadas de recibir los impulsos eléctricos, el cuerpo de la neurona se encarga de hacer la suma del total de señales recibidas, después los impulsos son transmitidos y procesados a través del axón y las sinapsis son las zonas donde las dendritas se conectan con las ramificaciones del axón o bien donde las neuronas se enlazan entre sí.

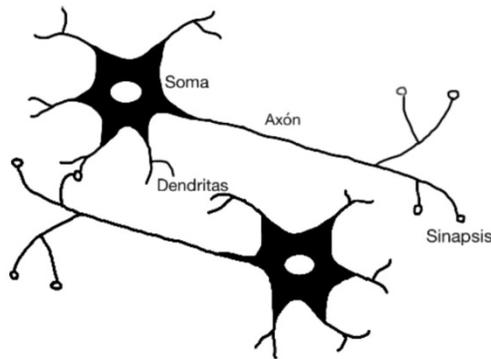


Figura 1. Representación de las partes principales que conforman una neurona y la forma en la que se conectan unas con otras, para una descripción más a detalle consultar el texto.

La manera de aproximar la estructura y el comportamiento de estas neuronas en una computadora, con el fin de procesar información y encontrar patrones se resume en la Figura 2. La red está compuesta por una capa de entrada, una capa de salida y las capas ocultas. Cada capa consta de un conjunto de neuronas al igual que las redes neuronales biológicas. Las neuronas de la capa de entrada reciben los datos de entrada a la red, las neuronas que conforman la capa de salida constituyen los valores que la red nos arroja como resultado. El número de capas ocultas debe ser mayor o igual a cero.

Las neuronas de las capas oculta y de salida procesan la información que reciben a través de la siguiente ecuación:

$$salida_j = f \left( \sum_{i=0}^k w_{ij} * entrada_i \right), \quad (1)$$

donde el valor  $salida_j$  es el valor de la neurona j-esima de alguna capa oculta o de la capa de salida. El valor  $entrada_i$  representa la neurona i-esima de la capa anterior y el índice k es el número de neuronas en esa capa.

Las conexiones entre las neuronas se representan por pesos  $w_{ij}$  que conectan la neurona i-esima de una capa con la j-esima de otra capa. Estos pesos se inicializan de manera aleatoria y después

de ser entrenados, serán los que almacenen la información requerida por la red para poder predecir resultados correctos.

Por último  $f$  es conocida como la función de activación y puede ser altamente no lineal. Esta cumple una labor similar a la del axón con la información que se transmite a través de él. Existe un gran número de funciones que pueden ser utilizadas. Para nuestros fines utilizaremos la función sigmoidea representada en la Figura 3 y definida por la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot (2)$$

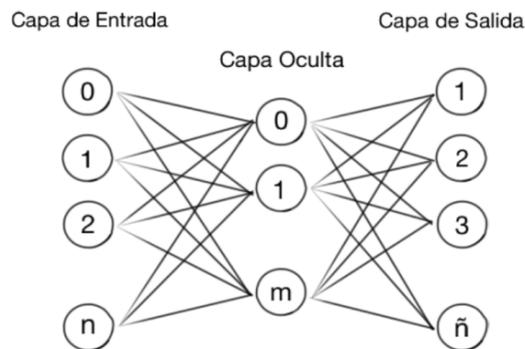


Figura 2. Se muestra el diseño de una RNA que intenta aproximar la estructura de una red neuronal biológica. Cuenta con una capa de entrada, una oculta y una de salida con  $n$ ,  $m$  y  $\tilde{n}$  neuronas respectivamente.

Al proceso de actualizar los pesos de la red utilizando un conjunto de datos con resultados conocidos, se le conoce como aprendizaje supervisado y su funcionamiento se basa en dos pasos principales: i) *Propagación hacia adelante*: se introduce a la red un conjunto de datos de los que se conoce el resultado deseado y se calculan los valores de las neuronas propagando la información desde la capa de entrada hasta la capa de salida. ii) *Propagación hacia atrás*: una vez que se obtienen los valores de la propagación hacia adelante se comparan con los resultados esperados y se calcula el error. Para actualizar los valores de los pesos de manera sistemática, se calculan las derivadas del error con respecto a los pesos y de esta manera se calculan los nuevos pesos en función de los pesos viejos y las derivadas usando la siguiente expresión:

$$w_{ij}^{nuevo} = w_{ij}^{viejo} - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}, (3)$$

donde al número  $\eta$  se llama el parámetro de aprendizaje.

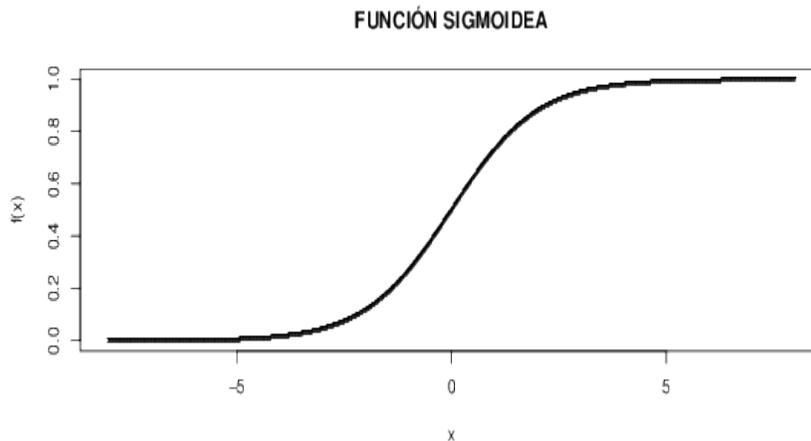


Figura 3. Gráfica de la función sigmoidea representada por la ecuación (2). Esta función es la que utilizamos como función de activación en la RNA. Podemos apreciar que los valores centrales de la variable  $x$  (valores entre -2 y +2) son los que ocasionan los mayores cambios en la función de activación.

Conforme se actualizan los pesos el error total disminuye y cuando se llega a una tolerancia deseada, se detiene el entrenamiento y se puede pasar a la fase de predicción.

### VECTOR AUTO REGRESIVO

El modelo de regresión lineal o vector auto regresivo es básico para algunos de los modelos de las series de tiempo. Una serie de tiempo es un conjunto de datos recopilados que se encuentran a la misma distancia de separación y parametrizados por el índice  $t$ . Para obtener una predicción digamos en el tiempo  $t+1$  se piensa en un modelo que depende de los valores en tiempos anteriores:

$$\hat{y}_{t+1} = g(y_t, y_{t-1}, \dots). \quad (4)$$

La forma de la función  $g(\cdot)$  es uno de los principales intereses en el análisis unidimensional, muchas veces y en particular en nuestro caso es lineal

$$\hat{y}_{t+1} = B_0 + B_1 y_t + B_2 y_{t-1} + \dots \quad (5)$$

En este modelo los  $B_j$  son coeficientes constantes y más adelante explicaremos el método para calcularlos. El modelo del vector auto regresivo de orden  $p$  (abreviado como VAR( $p$ )) es un modelo que depende de  $p$  valores hacia atrás en el tiempo

$$\hat{y}_{t+1} = B_0 + B_1 y_t + B_2 y_{t-1} \dots + B_p y_{t-p} \quad (6)$$

Sean  $Y^T = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-k})$ ,  $B^T = (B_0, B_1, \dots, B_p)$ ,  $\hat{Y}^T = (\hat{y}_t, \hat{y}_{t-1}, \dots, \hat{y}_{t-k})$  y  $\mathcal{V}^T = (v_t, v_{t-1}, \dots, v_{t-k})$  vectores, y

$$X = \begin{pmatrix} 1 & y_{t-1} & \dots & y_{t-p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_{t-k-1} & \dots & y_{t-p-k-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

una matriz de  $(k \times (p + 1))$ . Podemos modelar a la variable  $y$  al tiempo  $t$  como:  $y_t = \hat{y}_t + v_t$  donde  $v_t$  es el error entre el valor verdadero  $y_t$  y la aproximación  $\hat{y}_t$  de nuestro modelo, de manera que escribimos el modelo VAR(p) en su forma matricial como

$$Y = X \cdot B^T + \mathcal{V}. \quad (8)$$

Como lo que nos interesa encontrar es el vector de coeficientes  $B$ , este vector debe cumplir que el total de la suma de los errores sea mínimo o bien, que  $\sum_{i=t-p}^t v_i^2 \rightarrow 0$ . A este método se le conoce como método de mínimos cuadrados y se calcula de la siguiente forma

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (9)$$

De esta manera, una vez que calculamos los coeficientes  $B$ , tenemos una expresión analítica en la que podemos calcular los valores futuros y predecir con el modelo.

### 3. IMPLEMENTACIÓN

#### RNAs

Para entrenar la red y realizar el análisis de las series de tiempo dividiremos la serie en ventanas de tiempo, véase Figura 4.

Primera ventana de tiempo. Abarca el 60% de los datos. A este conjunto se le conoce como conjunto de entrenamiento y es el conjunto con el que los pesos se actualizan para minimizar el error.

Segunda ventana de tiempo. Es llamada el conjunto de validación y abarca un 20% de los datos. Este conjunto sirve para ir calculando el error de predicción durante el periodo de entrenamiento y así saber el número de iteraciones suficientes para obtener la reducción del error deseada, así como evitar el sobre-entrenamiento.

Tercera ventana de tiempo. Usa también 20% de los datos y es llamado el conjunto de predicción. En base a este se estima el poder de predicción que tiene nuestro modelo.



*Figura 4. En esta figura mostramos las tres ventana de tiempo en la serie de la cotización del dólar y muestra las proporciones de cada ventana.*

La red que implementamos consta de 10 neuronas en la capa de entrada, una capa oculta que está formada por 20 neuronas y en la capa de salida una neurona. Como función de activación se usará la función sigmoidea dada en la ecuación 2. El número de neuronas de la capa de entrada depende del número de valores en el tiempo que deseemos tomar hacia atrás. De los diferentes valores de esta elección dependen los resultados de nuestra predicción. En este caso lo implementamos para 10 pero es un parámetro que puede variar al igual que el número de neuronas en la capa oculta. La capa de salida solo cuenta con una neurona que arrojará la predicción de la red. Los datos se han normalizado para tener una serie con valores entre 0 y 1 la cual es más fácil de manejar para la RNA.

#### VAR

En este caso las series de tiempo son divididas en dos ventanas de tiempo.

Primera ventana de tiempo. El numero de datos en esta ventana podría variar de un 60% a un 70%. Estos datos los usaremos para el ajuste del vector de coeficientes de la regresión.

Segunda ventana de tiempo. Consta del 30% o 40% de los datos sobrantes de la serie y son usados para calcular el porcentaje de predicción del modelo.

Al igual que en la RNA, usamos 10 valores hacia atrás en el tiempo para hacer nuestra predicción por lo que el modelo que implementaremos será un VAR(10).

#### 4. RESULTADOS

La Figura 5 muestra el comportamiento del error de los conjuntos de entrenamiento y de validación para la RNA. En ambos casos vemos que el error disminuye en función del número de iteraciones aunque después de aproximadamente 25 iteraciones la disminución del error es tan pequeña que se vuelve imperceptible. Una vez que llegamos a esa región, consideramos entrenada a la red y tomando esos pesos comenzamos a estimar el número de aciertos que tiene sobre el conjunto de predicción.

### COMPARACIÓN DE ERRORES

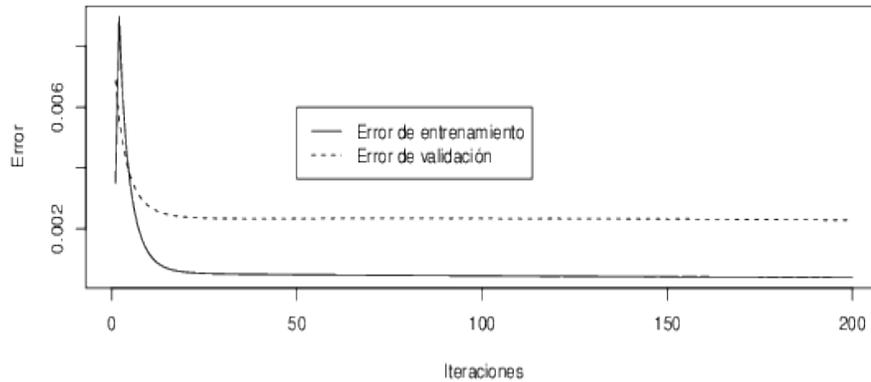


Figura 5. Error de entrenamiento que disminuye en función del número de iteraciones y es menor que el de validación. Podemos apreciar que a partir de la iteración 25 aproximadamente la disminución del error es muy pequeña.

Para ambos modelos estimamos que la predicción es correcta si el cambio entre el valor al tiempo  $t$  y el tiempo  $t+1$  es en la misma dirección, es decir, si se predice un aumento en el precio y eso ocurre, se considera un acierto sin importar cuanto haya sido el cambio. Lo mismo se hace para cuando el precio disminuye. En el caso de la RNA, el porcentaje a aciertos es de un 65.07%. En la Figura 6 mostramos los valores reales de la serie de tiempo, comparados con los predichos por la red neuronal descrita.

### SERIE ORIGINAL VS APROXIMACIÓN

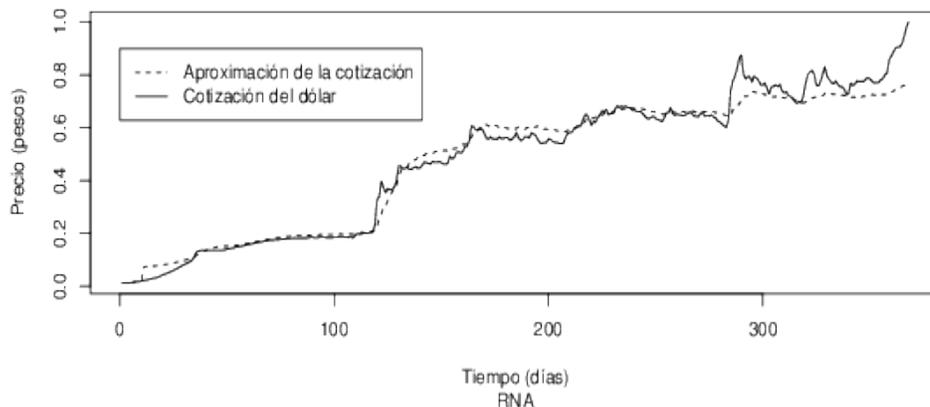
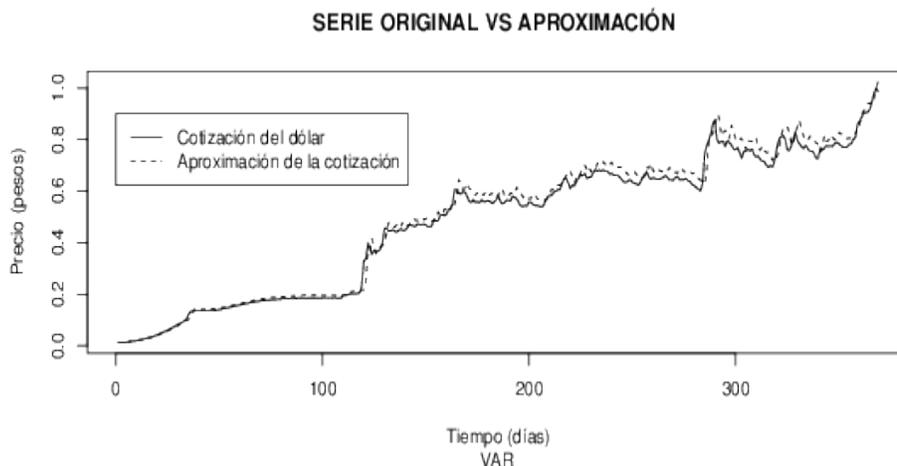


Figura 6. Presentamos el valor real de la serie de tiempo comparada con los valores predichos por la red neuronal artificial. Utilizando el criterio de que consideramos un acierto el que se prediga correctamente la dirección del cambio en el precio, el porcentaje de aciertos de la red es del 65.07%.

En el caso de la regresión lineal se ajustaron los pesos utilizando la ventana que contiene el 60% de los datos y se verifica la cantidad de aciertos que se tienen sobre el 40% restante de los datos. En este caso obtuvimos un 60.13% de efectividad de predicción. En la Figura 7 presentamos los valores obtenidos en la aproximación de este modelo y su comparación con los datos originales.



*Figura 7. En esta figura mostramos la aproximación que el modelo VAR(10) hace a la serie tiempo de la cotización del dólar. El porcentaje de aciertos que obtiene la regresión lineal utilizando el criterio descrito en el texto es del 60.13%.*

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos realizado una comparación detallada entre el comportamiento y capacidad predictiva de una red neuronal artificial comparada con una regresión lineal utilizando el modelo VAR ambos aplicados a una serie de tiempo económica. Encontramos que el rango de predicción obtenido es del 65% para la red y del 60% para la regresión. Debemos de tomar en cuenta que ambos modelos son muy sencillos y que se pueden buscar nuevas formas de ampliar su capacidad de predicción. Además, la representación de las series de tiempo en modelos de finanzas sabemos que tienen un comportamiento muy complicado, por lo que una descripción más detallada también requiere de incluir más parámetros y de más variables relacionadas. Por ejemplo, para el tipo de cambio del dólar con respecto al peso, variables como la inflación, la tasa de interés o hasta el precio del petróleo pueden contribuir a mejorar los análisis aquí presentados. También es importante considerar que desde el punto de vista de las regresiones, tomamos el modelo más sencillo (lineal) lo que significa que modelos más sofisticados pueden mejorar los resultados.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado parcialmente a través de proyecto CIC-UMSNH 4.23.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Anil K. Jain, Jianchang Mao, K. Mohiuddin, "Artificial Neural Networks: A Tutorial", IEEE Computer, Vol 29, 1996, pp. 31-44.
2. Chris M. Bishop, "Neural networks and their applications", Rev.Scl. Instrum, Vol. 65 (5), 1994, pp 1803-1832 .
3. <http://www.banxico.org.mx>
4. Robert H. Shumway, David S. Stoffer, "Time Series Analysis and Its Applications", Springer, 2011 , Chapters 1-2, pp. 1-82.
5. Keun Young Lee, Namil Chung, Suntae Hwang, "Aplicaciones of an neural network (ANN) model for predicting mosquito abundances in urban areas", ELSEVIER B.V.,2015, pp. 1-9.

# EVALUACIÓN DEL CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE MEDIANTE DIAGRAMAS DE LEVEY JENNINGS.

Gabino Estévez Delgado<sup>1</sup>, Arturo Chávez Esquivel<sup>1</sup>, Johann Castillo Gallo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Químico Farmacobiología. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

## RESUMEN

Es bien conocido que los diagramas de Levey-Jennings o cartas control se utilizan como una forma de medir las variables controladas y prever riesgos o desviaciones en los sistemas implantados bajo un esquema de gestión de la calidad. Paralelamente, cuando en un proceso se tiene variables de influencia, pueden existir mediciones indirectas que generan, en los modelos tanto físicos como matemáticos, incertidumbres estándar que al participar en el cálculo de la propia incertidumbre tendrá que expandirse, lo que comúnmente definiremos como incertidumbre expandida; la incertidumbre expandida engloba finalmente un recurso geométrico que nos representa tanto aspectos normalizados. Algunas de las variables, como la repetibilidad o reproducibilidad de manera directa pueden generar condiciones de robustez; en tanto que las variables que son determinadas por una función normal expresada en un certificado, informe o inserto, de igual manera, pueden participar en la ley de propagación de errores en la incertidumbre expandida y garantizar la normalidad. En nuestra propuesta, presentamos un análisis de la incertidumbre estándar de cada una de las mediciones que intervienen en la propagación de los errores, aprovechando que los valores que se consideran en una verificación intermedia. En nuestra consideración puntualizamos los historiales que se han presentado a lo largo de las verificaciones y que formaran parte de los puntos a presentarse en los diagramas de Levey Jennings. Concluimos que esta metodología permite verificar tanto la robustez como el mantenimiento del sistema de calidad metrológico y que puede ser una metodología para encontrar el cálculo presupuesto de la incertidumbre propuesto en la Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida.

## 1. INTRODUCCIÓN

La normalización en el sentido de Metrología ha tenido un auge importante en los últimos diez años [1, 2], particularmente en algunas áreas que poco se habían explorado, pero que debido a la presión de los tratados de libre comercio y de los tratados que han requerido de reconocimiento mutuo de las profesiones han cobrado un éxito singular [3, 4, 5]. Para vigilar los procesos, en las actividades reguladas por una determinada norma, se ha hecho necesario el poder desarrollar herramientas de control de calidad.

Una de las herramientas más utilizadas en el control de la calidad son las cartas control o llamadas gráficos de Levy Jennings, mediante el cual se pretende analizar cuándo un proceso se encuentra controlado o cuando está fuera de control. Al respecto se han construido diversas metodologías de análisis [6, 7, 8], en ellos se considera dos tipos de datos aquellos que tienen tendencias aleatorias y los que tienen un origen sistemático. De esta manera podemos considerar que la información regulada alrededor del promedio es tanto información debida a la aleatoriedad de la información como aquellas que se generan producto de los errores sistemáticos asociados a una intencionalidad o a descuidos recurrentes con causas comunes. Este tipo de herramientas

generalmente se vincula a otras herramientas de control de calidad, principalmente llamadas herramientas de Ishikawa, como lo son los diagramas de Pareto y los diagramas de causa efecto. Sin embargo, debido a las consideraciones de variabilidad que se pueden observar en los diagramas de Levy Jennings pueden ser útiles en el análisis de otro tipo de herramientas que demandan la concentración de todas las variabilidades. La información presentada a través de estos gráficos, consiste en considerar la información de los datos a partir del valor de la media, la media más o menos  $k$  veces la desviación estándar, como se verá más adelante con la Gráfica 1.

La incertidumbre en las mediciones se construye a partir de la estandarización de variables que influyen en la variación de todo el modelo, proceso o secuencia de lo medido. A este tipo de variables se les llama variables de influencia, las cuales a su vez se clasifican como aquellas que generan una distribución normal, como lo es el caso de los datos obtenidos mediante la repetibilidad o reproducibilidad, siempre y cuando estos datos tengan variaciones pequeñas o muestras suficientemente grandes. En tanto que existen otras distribuciones asociadas a las mediciones realizadas con los instrumentos y sus características metrológicas como son la resolución, precisión y método de medición, este último solo en algunos casos.

La determinación de la incertidumbre se puede también entender como la determinación de las variaciones producto de la expansión de los errores, consiste además en que experimentalmente, mediante métodos directos podamos geoméricamente analizar los errores, es por ello que la ley que permite el cálculo de la incertidumbre asociado a una medición se llama “Ley de propagación de errores”. De manera preferencial se establecen modelos físicos, químicos y biológicos que puedan no tener correlaciones entre las diferentes magnitudes o variables de influencia. En el caso de magnitudes de entrada no correlacionadas la incertidumbre asociada a dicha magnitud, incertidumbre combinada, se calcula por la suma geométrica de las contribuciones particulares asociando su respectiva distribución de probabilidad, tomando en cuenta el coeficiente de sensibilidad de una relación funcional tenemos la siguiente ecuación:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i \cdot u(x_i)]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u(x_i) \right]^2} \quad (1)$$

Con  $u_c(y)$  la incertidumbre expandida de la variable  $y$ , con  $c_i$  los coeficientes de sensibilidad, que expresa las variaciones de las respectivas variables de influencia o magnitudes de entrada.

Para el caso de magnitudes de entrada correlacionadas, debe considerarse la covarianza entre ellas, y entonces la ecuación se modifica como [9]:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right]^2 + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)} \quad (2)$$

En este caso se destaca la medición de grado de correlación medido mediante el coeficiente de correlación de Pearson  $r(x_i, x_j)$ .

## 2. DESARROLLO

A continuación presentaremos el análisis de los variables de influencia que intervienen en la obtención de la corriente eléctrica ( $I$ ) en un circuito de corriente continua, por ser un modelo simple que permitirá el análisis inicial, en el que se mide el potencial eléctrico ( $V$ ) con un multímetro digital y cuya resistencia ( $R$ ) es de  $1 \Omega$ .

Recordando que la ley que relaciona la corriente eléctrica, el potencial eléctrico y la resistencia es la ley de Ohm, para el caso de corriente continua.

Hagamos el caso del cálculo de la incertidumbre en la medición, en el caso que no pudiéramos medir directamente la corriente eléctrica, la obtención la realizaríamos mediante el uso de un modelo indirecto, en este caso mediante la Ley de Ohm:

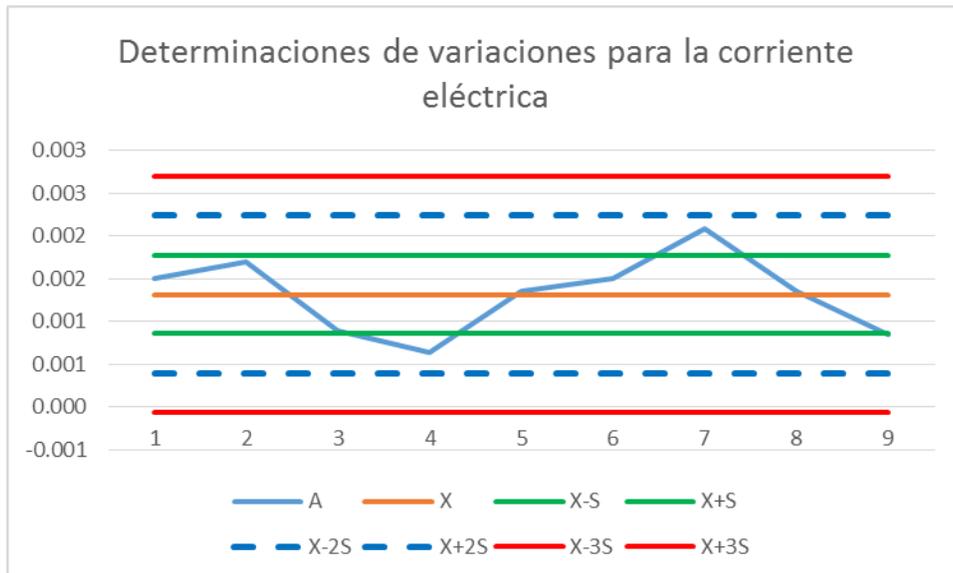
$$I = \frac{V}{R} \quad (3)$$

Utilizando las condiciones del Voltmetro digital, con una resolución de 0.01 en la escala medida, y una potencia de 5 V, de alimentación; así mismo con una resistencia de 1  $\Omega$ , medido o verificado con una resolución de 0.01  $\Omega$ , con un factor de cobertura K=2. Utilizando una distribución rectangular, tanto para las mediciones de potencial eléctrico y resistencia eléctrica, como la que se da a continuación:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1 - \theta_2}, & \theta_1 \leq y \leq \theta_2 \\ 0, & \text{cualquier otro punto} \end{cases} \quad (4)$$

Una vez que se realizaron las mediciones con una repetibilidad de 10 veces se encontró que su valor promedio y desviación estándar, con (5.1 V, 0.03 V) y (0.9  $\Omega$ , 0.01  $\Omega$ ) respectivamente y considerando los valores de los certificados para los instrumentos, tenemos una incertidumbre, de acuerdo a la ecuación (1), de U=0.0038 A.

Ahora realicemos el análisis mediante los diagramas de Levy Jennings, utilizando las variabilidades.



Gráfica 1. Diagrama de Levi-Jennings para corriente eléctrica.

Considerando el intervalo que existe entre el promedio y mas menos dos desviaciones estar tenemos un valor de 0.0036A lo cual difiere del valor mediante el cálculo de la incertidumbre mediante la ley de propagación de errores en 0.0002A, que dadas las variaciones metrológicas y de repetibilidad no resulta significativo.

### 3. CONCLUSIONES

El cálculo de la incertidumbre mediante la ley de propagación de errores, resulta un importante recurso para obtener las determinaciones tanto de las desviaciones estándar que intervienen en el proceso como para determinar el presupuesto de la incertidumbre de las variables que intervienen en el proceso. Esta última consideración resulta de gran utilidad para determinar que variables controlar, para finalmente considerarlas como variables controladas o constantes, y que variables afectan más en el proceso y que pudieran mejorar como parte de los procesos de mejora continua.

Si bien es cierto que el procedimiento expuesto, mediante diagramas de Levy-Jennings, no supe al proceso del cálculo de la incertidumbre, si puede ser un recurso que permite de manera visual darle consistencia al análisis de la dispersión y complementarse con la primera.

### BIBLIOGRAFÍA

1. CENAM. (Noviembre de 2005). EURACHEM, METODOS ANALÍTICOS ADECUADOS A SU PROPOSITO. Guía de Laboratorios para la Validacion de Métodos y Temas Relacionados . Queretaro, Los Cués, México.
2. Entidad Mexicana de Acreditación, A. (2009). *EMA*. Recuperado el 24 de Marzo de 2010, de <http://www.udlap.mx/Conoce/video/files/02ValidaciondeMetodosdeMedici%3n%B3n.pdf>
3. Instituto Mexicano de Normalización y Certificación, A.C. (1997). *NMX-Z-055-1997-IMNC Metrología* – Instituto Mexicano de Normalización y Certificación, A.C. (2000).
4. ISO 15161:2001/ NMX-CC-15161-IMNC-2007, Directrices para la aplicación de la Norma NMX-CC-9001-IMNC-2000 en la industria de alimentos y bebidas. México, D.F, México: COTENNSISCAL.
5. Instituto Mexicano de Normalización y Certificación, A.C. (2000a). *ISO/IEC 17025:2005/ COPANT - ISO/IEC 17025:2005/ NMX-EC-17025-IMNC-2006 Evaluación de la conformidad — Requisitos generales para la competencia de los laboratorios de ensayo y de calibración*. México, D.F, México: COTENNSISCAL.
6. Instituto Mexicano de Normalización y Certificación, A.C. (2000b). *ISO/ TR 10017:2003/ COPANT/ISO TR 10017:2004/ NMX-CC-10017-IMNC-2006 Orientación sobre las técnicas estadísticas para la norma NMX-CC-9001-IMNC-2000* . México, D.F, México: COTENNSISCAL.
7. Khatri R, K C S, Shrestha P, Sinha JN, Implementing self-sustained quality control procedures in a clinical laboratory. *JNMA J Nepal Med Assoc*. 2013 Jan-Mar;52(189):233-7.
8. Kauffmann-Lacroix C, Cassaing S, Bessieres MH, Mayet D, Linas MD, Roques C, Quality controls in medical mycology. *J Mycol Med*. 2011 Mar;21(1):15-8.
9. Gomes IC, Mingoti SA, Oliveira CD, A novel experience in the use of control charts for the detection of nosocomial infection outbreaks. *Clinics (Sao Paulo)*. 2011;66(10):1681-9.
10. SCHMID, Wolfgang A. y LAZOS Martínez Rubén J. *Guía para estimar la incertidumbre de la medición*. CENAM. 2004. México.

## ROADMAP PARA SISTEMAS DE MANEJO DE RESIDUOS SÓLIDOS URBANOS EN MÉXICO

Nadia Isabel López-Escamilla<sup>1</sup>, René Bernardo Elías Cabrera-Cruz<sup>2</sup>, Alberto José Gordillo-Martínez<sup>3</sup>, Juan Manuel Islas-Islas<sup>1</sup>, Miguel Ángel Téllez-Jardínez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Tecnológica de Tulancingo. <sup>2</sup>Facultad de Ingeniería "Arturo Narro Siller", Universidad Autónoma de Tamaulipas. <sup>3</sup>Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

### RESUMEN

Los *roadmaps* representan una técnica flexible utilizada en múltiples áreas para la planeación estratégica a largo plazo. Su elaboración implica un análisis complejo que interrelaciona procesos y sistemas sociales. Permite plasmar en un gráfico simple la evolución y desarrollo de sistemas. Asimismo, representa una herramienta que permite proporcionar la síntesis del análisis del entorno y un medio de evaluación de los sistemas a través del tiempo. El enfoque de los *roadmaps* tecnológicos integra al análisis las relaciones socio-técnicas que se identifican como factores que facilitan cambios en procesos complejos. Puntualmente, en el presente trabajo se describe la importancia de su implementación en el análisis de la tecnología para sistemas de Manejo de Residuos Sólidos Urbanos a partir de estudios prospectivos y sus escenarios generados para el territorio mexicano.

### 1. INTRODUCCIÓN

La prospectiva es una técnica para la planeación a largo plazo que permite gestionar la incertidumbre de un sistema. A diferencia de otras herramientas que permiten el estudio de escenarios futuros, la prospectiva tiene una naturaleza voluntarista, es decir, el escenario identificado como futurible (probable y deseable) depende de las decisiones que tomen los actores implicados en el sistema. La prospectiva, como apoyo de la planeación estratégica a largo plazo, se ha utilizado ampliamente en el estudio de escenarios futuros que implican condiciones sociales, económicas, políticas y ambientales complejas [1, 2, 3, 4].

Por otra parte, se han realizado estudios prospectivos del sistema de MRSU en la región de Tula del estado de Hidalgo [5]. Mismo que se caracteriza por una dinámica y diversidad de condiciones socio económicas que se proyecta en cada una de las etapas de manejo de residuos, desde su generación hasta la disposición final.

Como parte de los resultados obtenidos en el estudio prospectivo se evaluó la probabilidad de los escenarios posibles, probables y deseados y en base a un modelo dinámico se tienen proyectados los siguientes indicadores principales:

- Población
- Porcentaje de manejo de RSU
- Desarrollo local de la región: económico, social y ambiental.

Particularmente, los sistemas de MRSU se caracterizan por integrar en su dinámica un grupo de actores con la capacidad de generar nuevas tendencias en el entorno [6].

En las condiciones anteriormente descritas y la elaboración de roadmaps se espera detectar puntos de oportunidad con la implementación de tecnología que permita aumentar la eficiencia del sistema de MRSU.

## 2. TEORÍA

El término *roadmap* ha surgido como una metáfora para la planeación de ciencia y tecnología. La implementación de esta técnica implica el análisis de mecanismos sociales, permite el aprovechamiento de la experiencia y propicia el aprendizaje, así como la comunicación entre los actores interrelacionados en un sistema [7]. Robert Galvin [8] describe al roadmapping como el estudio del futuro en un campo de investigación y se construye de los conocimientos colectivos y las aportaciones de los tomadores de decisión como conductores de cambio en esa área. El proceso de elaboración de roadmaps es una forma de identificar, evaluar y seleccionar estratégicamente alternativas que puedan ser utilizadas para lograr los objetivos deseados en la ciencia y tecnología [7].

Los distintos enfoques de análisis de la técnica integran relaciones sociales, económicas, políticas, ambientales y tecnológicas. Esta última toma mayor relevancia como factor de cambio en los procesos de un sistema al identificarse como el medio facilitador. La implementación de tecnología en sistemas complejos permite alcanzar con mayor rapidez objetivos.

Los roadmaps de ciencia y tecnología son usados en la industria, gobierno y la academia para representar la estructura de las relaciones entre ciencia, tecnología y sus aplicaciones. Los roadmaps se emplean como herramientas de apoyo para la toma de decisiones y mejorar la coordinación de actividades y recursos complejos en ambientes de incertidumbre. Proporcionan un enfoque para el análisis del entorno. Los usos específicos para el manejo de la ciencia y tecnología incluyen la estrategia, planeación, ejecución, revisión y la transición de las mismas, la identificación de brechas y oportunidades, la determinación de obstáculos de forma rápida y a bajo costo para el desarrollo de productos y servicios. Asimismo, permiten detectar áreas con alto potencial y acelerar la transferencia de la ciencia y la tecnología a productos eventuales [7, 9].

Entre las posibilidades que ofrecen los roadmaps se encuentra el desarrollo tecnológico integrado a una planeación estratégica [9]. La implementación de roadmaps permite:

- Identificar los máximos exponentes en los sistemas de innovación.
- Describir el estado actual de la tecnología.
- Visualizar la tecnología futura, incluyendo las posibilidades para el desarrollo y la innovación.
- Identificar las necesidades y prioridades del sistema, incluyendo las necesidades de desarrollo e innovación, normatividad.

Con lo anterior, se permite llegar a un consenso entre los distintos actores que interactúan en el sistema.

Las aplicaciones independientes del roadmap se pueden clasificar en [7]:

- Roadmap de Ciencia y Tecnología.
- Roadmap de tecnología industrial.
- Roadmap corporativas o de producto-tecnología.

- Roadmaps de manejo de producto.

Los roadmaps no se deben entender como un procedimiento para realizar proyecciones o pronósticos, sino una herramienta que permite combinar tres formas de entender el futuro: expectativas, qué probabilidad hay de que suceda; deseos, qué es lo que se desea que suceda, y promesas, qué es lo que se debe hacer para que suceda [9]).

En el esfuerzo de integrar en un plan de trabajo la imagen deseada del futuro con las acciones del presente, el roadmap se basa en la prospectiva, incluyendo escenarios y consulta a expertos [9].

Los escenarios y visiones que se forman del futuro distintos estudios, introducen expectativas de diversos actores que compiten y promueven el predominio de sus intereses. Esta perspectiva solo introduce en el estudio los cambios sociales y culturales, con lo cual deja exceptuada la parte tecnológica que genera presión sobre los sistemas al facilitar procesos. La visión socio-técnica debe incluirse en los escenarios [9].

El principal problema de la herramienta de roadmapping para algunos grupos de interés radica en la medición de cuán deseable es un escenario a diferencia de otro, dentro de un análisis pluralista y con distintas posturas. Algunos autores han sugerido que el único propósito de construir visiones tecnológicas y planes de trabajo que los integren es el de proporcionar un espacio de debate y deliberación sobre opciones tecnológicas y determinar las preferencias, valores y perspectivas de distintos grupos sociales, para finalmente generar un plan de consenso [9, 12, 18, 1].

La construcción de un roadmap requiere de la especificación de todos los elementos y actores del sistema de estudio. Las primeras tres capas del roadmap se centran en el mercado/negocio, producto o servicio y la tecnología [10]. A partir de los cuales se determinarán las interrelaciones. Para la construcción específica del roadmap se requiere a un grupo de expertos versados directamente en un tema en particular y relacionados indirectamente con otra parte del sistema de estudio. A los cuales se les pedirá participar en el desarrollo del trabajo. El grupo que se conforme se recomienda multidisciplinario para aumentar las posibilidades de innovación, al dar por hecho que los sistemas de estudio comprenden una amplia variedad de enfoques y elementos interrelacionados a los que se les puede tratar con la implementación de una tecnología o conocimiento específico.

Con los representantes de los distintos enfoques se solicitará un taller, en el cual habrá un intercambio preliminar de múltiples conceptos de la disciplina por Internet y posteriormente, se recomienda el trabajo de forma presencial para acelerar los procesos creativos y generar hipótesis específicas, las cuales deberán ser probadas.

Una vez que los expertos han dialogado y conciliado acuerdos se puede comenzar a construir el roadmap. De acuerdo a Kostoff y Schaller [7] la estructura general del roadmap se presenta en cuatro niveles.

El roadmap se plantea como una representación estructurada de distintas dimensiones y las relaciones temporales entre los elementos de ciencia y tecnología (nodos y enlaces), así como la evolución a aplicaciones prácticas de productos o servicios. La localización de nodos y enlaces son vectores que necesitan describir tanto magnitud como dirección. Igualmente, los roadmaps consideran dimensiones espaciales y temporales. La dimensión espacial refleja la relación entre las disciplinas, programas y proyectos de ciencia y tecnología en un momento dado, mientras que la dimensión temporal representa la evolución de las mismas capacidades [7].

#### Roadmaps en los Sistemas de Manejo de Residuos Sólidos Urbanos

El roadmapping en Sistemas de Manejo de Residuos Sólidos Urbanos (MRSU) se ha implementado en regiones de Europa, Estados Unidos e India. Sin embargo, aún no es aplicada la

región de América Latina, incluyendo a México. Su funcionalidad se ha probado en ámbitos gubernamentales y donde se involucran políticas públicas [9]. Tal es el caso de los sistemas de MRSU, los cuales son dirigidos por las municipalidades y se rige por la normatividad ambiental.

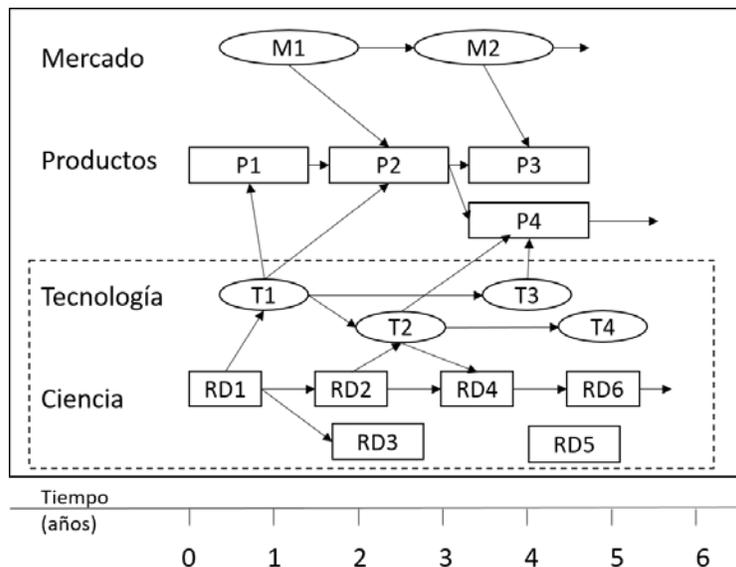


Figura 2. Roadmap general de nodos y enlaces [7, 15].

#### Caso: Sistema de Manejo de Residuos de Holanda

En el análisis que realiza Verhoef y colaboradores [16] del sistema de Manejo de Residuos Sólidos Urbanos de Holanda compara las condiciones normativas y políticas ambientales para la infraestructura requerida en el manejo de residuos. Principalmente señalan que la tendencia mundial, incluyendo la de Estados Unidos, es generar proyectos de desarrollo sustentable sin que haya un entendimiento de cómo lograrlo.

Para desarrollar el manejo de residuos sólidos urbanos, considerando sus complejas necesidades de infraestructura, se propuso integrar a los trabajos de sustentabilidad el concepto de ecología industrial en un roadmap. Lo anterior permitirá cerrar ciclos de vida de materiales, el aprovechamiento de energía en cascada y la configuración de un sistema flexible.

El sistema de manejo de residuos hasta entonces realizado en Holanda consistía en un multisistema de recolección en varias estaciones. Los residuos son transportados en varios transbordos o nodos de pre-tratamiento. Los residuos que no se recuperaron para tratamiento los dirigen a un relleno sanitario para ser sometidos a un número de operaciones limitadas como incineración o compostaje. Las instalaciones del relleno sanitario permiten obtener de los residuos energía eléctrica y térmica, fertilizante y cenizas utilizables en la construcción de caminos o en la producción de cemento, por lo que la cantidad de residuos confinados en las instalaciones son mínimos (Figura 2). Sin embargo, la operación de las instalaciones y los procesos conllevan grandes inversiones al incrementar año con año la cantidad de material de desecho que genera la población. Además, a pesar del incremento de medidas ambientales y objetivos políticos, la construcción de nuevas instalaciones para el manejo de residuos se torna más complicado [16].

La toma de decisiones en el sistema se percibe complejo por los actores interesados, la información difusa y los objetivos en conflicto. Por una parte, el Consejo Holandés de Manejo de Residuos intentó fortalecer la recuperación de materiales residuales, promovieron la recogida selectiva y se impulsaron campañas para reducir los desechos. Sin embargo, la gran cantidad de residuos heterogéneos que aún se producían terminaron por destinarse a un relleno sanitario o a un incinerador. Los objetivos no se cumplieron y se tomó la decisión de suspender el programa.

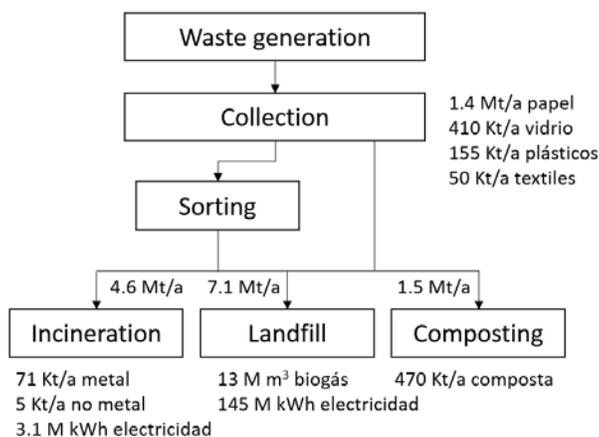


Figura 3. Esquema de la infraestructura para el manejo de residuos en Holanda [16].

La ecología industrial es una analogía entre los sistemas vivientes y la industria, y para Holanda se sugirió como un roadmap para la sustentabilidad en el sistema de Manejo de Residuos Sólidos Urbanos. Los residuos de producción industrial y la gestión se consideran como sistemas complementarios. Los materiales que no se utilizan en los procesos productivos deben ser procesados en otros más compatibles con la naturaleza en cantidad y composición. Además, como sucede en los ecosistemas, es uso de la energía de maximiza.

Para cumplir con lo anterior, el roadmap consideró los siguientes criterios [16]:

Infraestructura para optimizar la recuperación de materiales. Los residuos separados y el sistema de eliminación deben cumplir con especificaciones compatibles con el aire, agua y suelo del entorno. Para ello se considera en el roadmap los procesos de incineración de residuos domiciliarios y sus efectos, la colecta selectiva de vidrio y su reciclaje en una planta.

Optimización en el cierre de ciclos de los materiales, con alto grado de recuperación. A través de un sistema conformado por distintos grados de separación de materiales.

Sustentabilidad. La cual dependerá de las dos condiciones anteriores y puede cambiar con el tiempo. A corto plazo, se espera cambiar del uso de rellenos sanitarios a procesos de incineración, que se considera más sustentable al reducir la disipación de energía y no requerir mayor trabajo por la recuperación de residuos desde el hogar.

El roadmap propuesto considera en su conformación la infraestructura para tratar los residuos sólidos urbanos de Holanda. Sin embargo, no presentan un gráfico o diagrama donde muestren la interrelación entre elementos o capas del sistema para identificar nuevas áreas de oportunidad con la implementación de alternativas más sustentables. Además, en una crítica más puntual, la

sustentabilidad que describen está más orientada al enfoque ambiental y no especifica las afectaciones en los aspectos sociales y económicos.

#### Caso: Roadmap del Manejo de Residuos Sólidos en Florida

En apoyo al estado de Florida y sus dirigentes, se estableció un documento que describe el sistema de manejo de residuos sólidos en el estado. Aunque la participación en las prácticas de reciclaje es elevada, la legislatura se propuso elevar su nivel de participación al 75% y crear mejores procesos para el manejo de residuos. Los enfoques que aborda corresponden a la economía, tecnología y a las barreras políticas que limitan el crecimiento en el aprovechamiento de material reciclable. Los procesos que incluye en su análisis son [17]:

- Objetivos y planes.
- Residuos de construcción y demolición.
- Disposición de residuos.
- Los cuellos de botella.
- Orgánicos.
- Mercado de desarrollo.
- Administración de productos.
- Asistencia técnica.
- Financiamiento fiscal.

El documento contiene un diagnóstico de los elementos antes mencionados y realiza una proyección de los indicadores. También identifica algunos de los actores de interés en el sistema para valorar su posición. Sin embargo, no presentan ningún diagrama o esquema de roadmap que permita observar la evolución e interrelación entre los elementos.

#### Caso: Sistema de Manejo de Residuos electrónicos en India

Los sistemas de manejo de residuos electrónicos en India no están desarrollados u organizados formalmente. El estudio y análisis del escenario para este tipo de residuos lo dividió Wath [18] en tres niveles (Figura 4):

Nivel I – Generación de electrónicos y electrodomésticos. Se identifican los nuevos equipos electrónicos y eléctricos, materias primas, componentes, conjuntos y subconjuntos en India en forma de producción o manufactura.

Nivel II – Generación de residuos electrónicos y electrodomésticos. Se consideran a los consumidores de electrónicos y electrodomésticos. Es una práctica común la donación de estos equipos a distintas instituciones para continuar con su aprovechamiento.

Nivel III – Residuos electrónicos reprocesados. Se consideran los artículos que han sido utilizados y cuando se dona a otro elemento de la comunidad puede aprovecharlo. En los reprocesos se extraen todos los minerales de alto valor y se sustituyen por otros para su funcionalidad. La determinación exacta de esta práctica no es sencilla dado que no es una organización que lo realiza.

El análisis del sistema de manejo de residuos electrónicos considera las actividades que se realizan en todas las etapas de generación de residuos electrónicos, así como los actores interesados en el sistema que faciliten un logro y los contrarios que se oponen ante estas actividades. Asimismo, integra a su análisis el aspecto ambiental, económico y social para generar una propuesta relevante para el desarrollo sustentable.

#### Roadmap prospectivo del sistema de MRSU

En el sistema de Manejo de Residuos Sólidos Urbanos de México, se identifican deficiencias en los procesos y grandes inversiones no generan los resultados esperados. Los esfuerzos para aumentar la eficiencia y optimizar el sistema convergen en planes de trabajo a largo plazo. Sin embargo, las condiciones en el futuro del sistema de estudio generan tanta incertidumbre que no se puede asegurar la gestión de eventualidades y evitar desviaciones del plan original o al menos se pueda continuar obteniendo los resultados favorables.

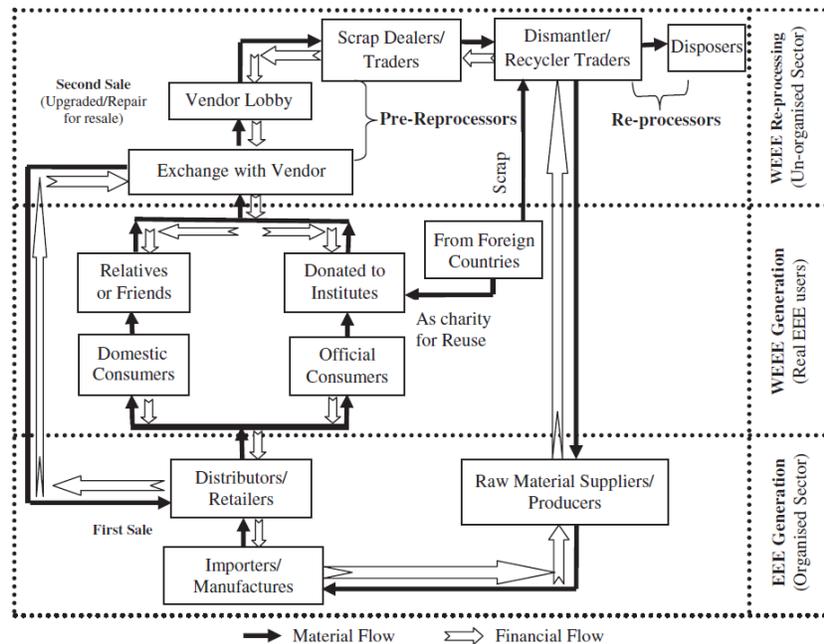


Figura 4. Esquema de flujos en el comercio de residuos electrónicos en la India.

Al respecto, se mencionó al inicio de este documento que para la planeación estratégica en el sistema de MRSU se consideró la aplicación de la técnica prospectiva. El uso de la prospectiva integra a su análisis todos los factores sin considerarlos determinantes y asocia todos los procesos a un análisis de juego de actores. Se establecen las preferencias y diferencias entre grupos de personas o individuos y se prevén tendencias en cuanto a los posibles resultados.

La gran diferencia entre la prospectiva y otras herramientas que hacen estudios con una visión a largo plazo es que desde un principio no se determina un solo escenario como meta de la planeación. Se identifica toda un área de probables escenarios con las condiciones más parecidas a lo que se desea alcanzar. Por lo que las pequeñas desviaciones del plan original se pueden gestionar hasta alcanzar los mejores resultados posibles.

Para poder lograr un sistema de MRSU más eficiente se utilizan alternativas tecnológicas y el análisis de las mejores opciones se obtendrá como resultado de implementar la técnica de roadmap. Se prevé que el uso de esta herramienta permitirá establecer estrategias para optimizar el sistema de MRSU y robustecer el estudio prospectivo.

### 3. CONCLUSIONES

La planeación estratégica de los sistemas de Manejo de Residuos Sólidos Urbanos a largo plazo se torna compleja por la naturaleza de los elementos que la integran, desde los procesos hasta los grupos o actores de interés que les compete su intervención. Si a lo anterior se le agrega el factor tiempo, las condiciones para poder responder oportunamente ante las necesidades de la población disminuyen sobremanera. Sin embargo, la herramienta de la prospectiva permite evaluar distintos escenarios con alta probabilidad de cumplirse y a partir del presente se construye el camino hacia ese futuro más deseado. Los medios para lograrlo son limitados, sin embargo, la implementación de alternativas tecnológicas podrán coadyuvar al cumplimiento de metas en el desarrollo del sistema.

La tecnología aplicada al Manejo de Residuos Sólidos Urbanos optimiza los procesos y, en muchos casos, se esfuerza por disminuir los efectos negativos de las operaciones para generar una alternativa factible.

El roadmap tecnológico es la técnica que permite visualizar el camino a seguir para lograr objetivos en el sistema de estudio. Su implementación en este tipo de sistemas no es novedosa como se mostró en los casos anteriores.

En complemento con el estudio prospectivo, el roadmap representa el cómo se logrará llegar a un punto del sistema de manejo de residuos más eficiente, con servicio a toda la población, con disminución de cantidades de materia residual enviada a un relleno sanitario y con aprovechamiento energético. Asimismo, se fomentarán actividades secundarias para fortalecer los aspectos económicos y sociales.

### BIBLIOGRAFÍA

1. Miles, I. (2012). Dynamic foresight evaluation, *Foresight*, Vol. 14:1, pp. 69 – 81
2. Destatte, P. (2010). Foresight: A major tool in tackling sustainable development.
3. Calof, J. y Smith, J. (2012). Foresight impacts from around the world: a special issue, *Foresight*, Vol. 14: 1 pp. 5 – 14.
4. Godet, M. (2010). Future memories. *Technological Forecasting and Social Change*, 77(9), 1457-1463.
5. López-Escamilla, N. I. (2013). Modelo prospectivo para el Manejo de Residuos Sólidos Urbanos en la región de Tula, Hidalgo. Tesis para optar el grado de doctorado, Mención: Ciencias Ambientales, Centro de Investigaciones Químicas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.
6. López, N.I., Gordillo, A.J., Cabrera, R.B.E., Rolón, J.C. (2014). Análisis de actores en la gestión de Residuos Sólidos Urbanos en una comunidad urbana mexicana. En Sampedro, M.L., Rosas, J.L., Juárez, A.L., *Calidad Ambiental y Desarrollo Sustentable Tomo III(22-50)*. México: Universidad Autónoma de Guerrero.
7. Kostoff, R. N., y Schaller, R. R. (2001). Science and technology roadmaps. *Engineering Management, IEEE Transactions on*, 48(2), 132-143.
8. Galvin, R. (1998). Science roadmaps, *Science*, Vol. 280, p. 803.

9. McDowall, W. (2012). Technology roadmaps for transition management: The case of hydrogen energy. *Technological Forecasting and Social Change*, 79(3), 530-542.
10. Phaal, R., Farrukh, C. J., y Probert, D. R. (2004). Technology roadmapping – a planning framework for evolution and revolution. *Technological forecasting and social change*, 71(1), 5-26.
11. Lowe, P. (1995). *The Management of Technology: Perceptions and Opportunities*, Chapman & Hall, London.
12. Eames, M., McDowall, W. (2010), Sustainability, foresight and contested futures: exploring visions and pathways in the transition to a hydrogen economy, *Technol. Anal. Strateg. Manage.* 22:671–692.
13. Berkhout, F., Smith, A. y Stirling, A. (2004). Socio-technical regimes and transition contexts, in: B. Elzen, F.W. Geels, K. Green (Eds.), *System Innovation and the Transition to Sustainability: Theory, Evidence and Policy*, Edward Elgar, Camberley.
14. Grin, J., Grunwald, A. (2000), *Vision Assessment: Shaping Technology in the 21st Century*, Springer, Berlin.
15. Groenveld, P. (1998). *The Roadmapping Creation Process*, Presentation at the Technology Roadmap Workshop, Washington, DC.
16. Verhoef, E. V., Van Houwelingen, J. A., Dijkema, G. P. J., y Reuter, M. A. (2006). Industrial ecology and waste infrastructure development: A roadmap for the Dutch waste management system. *Technological Forecasting and Social Change*, 73(3), 302-315.
17. Kessler C. (2009). *The greening of Florida: A Solid Waste Management Roadmap*. Kessler Consulting.
18. Wath, S. B., Vaidya, A. N., Dutt, P. S., y Chakrabarti, T. (2010). A roadmap for development of sustainable E-waste management system in India. *Science of the Total Environment*, 409(1), 19-32.
19. Zurcher, R.J. y Kostoff, R.N. (1997). Modeling technology roadmaps, *Accelerating the Conversion of Science to Technology*, *J. Technol. Transf.* 22 (3).
20. Phaal, R., Farrukh, C. J., y Probert, D. R. (2005). Developing a technology roadmapping system. *Technology Management: A Unifying Discipline for Melting the Boundaries*, 31, 99-111.
21. Albright, R. y Schaller, R. (1998). *Technology Roadmap Workshop*, moderated by the Office of Naval Research, Washington, DC.

## AMBIGÜEDAD EN SISTEMAS LÓGICOS FORMALES.

Erika Berenice Roldan Roa<sup>1</sup>, Froylán Hernández Alfaro<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Centro de Investigación en Matemáticas. <sup>2</sup>Universidad Autónoma de Zacatecas.

### 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se aborda el concepto de *ambigüedad* dentro de los sistemas lógicos formales. Que un sistema lógico formal tenga ambigüedades no implica que dicho sistema sea inconsistente, ni mucho menos que en dicho sistema se halla dejado de lado el rigor propio de la matemática. Veremos que el concepto de ambigüedad, el cual se definirá en términos lógicos en este trabajo, es inherente a la mayoría de los sistemas lógicos formales que conforman las estructuras de las matemáticas modernas.

### 2. DESARROLLO

No existe una definición precisa de lo que es un sistema lógico no formal (SL), sin embargo es posible caracterizarlo. En un SL se organizan las proposiciones de tal forma que con sólo un mínimo de proposiciones y reglas de inferencia se pueden obtener otras proposiciones y teoremas. No es necesario demostrar cada término o proposición, las proposiciones que se aceptan de entrada como verdaderas sin demostración son llamadas postulados o axiomas. Un ejemplo de un sistema lógico no formal es la geometría de Euclides. Cuando en un sistema lógico se reemplazan las palabras por símbolos arbitrarios se logra tener más rigor en las deducciones. Si además se agregan reglas de inferencia para el manejo de los símbolos y se especifica bajo qué criterios una expresión es válida dentro del sistema, entonces se dice que tal sistema es un sistema lógico formal (SLF). Así las proposiciones o expresiones de un SL pasan a ser fórmulas bien formadas (fbf) dentro del SLF, al igual que los teoremas.

Algunas de las características -no las únicas- de un SLF son:

- 1) Que es consistente.
- 2) Que sus fbf únicamente pueden ser independientes o redundantes.
- 3) Es completo o incompleto.

Un SLF es consistente cuando no contiene contradicciones. Sin embargo, un SLF no es capaz de probar su propia consistencia, como ya lo demostró Gödel con sus teoremas de incompletud, empero es posible demostrar que un SLF es consistente si encontramos una interpretación del sistema en la cual todos sus axiomas son verdaderos. Por otro lado, si podemos deducir como teoremas del sistema una fbf y su negación, entonces se dice que el sistema es inconsistente, ya que habremos llegado a una contradicción. Un sistema que es inconsistente carece de valor, ya que de una contradicción se sigue cualquier cosa. Por lo tanto, un SLF es en efecto un SLF si y sólo si es consistente.

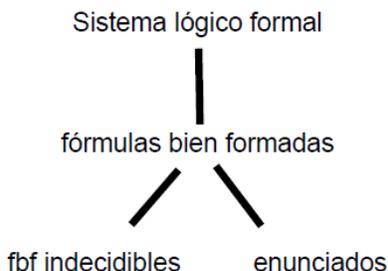
Dentro de un SLF una fbf es independiente cuando no puede ser deducida lógicamente, ni ella ni su negación, de las otras fórmulas o axiomas del sistema. Si es posible hacer la deducción lógica de una fbf en base a las otras que conforman el SLF, entonces se dice que la fórmula es

redundante, y se le puede asignar un valor de verdad o falsedad dentro del sistema. Verdadero si es posible deducir la afirmación de la fbf, falso si es posible deducir su negación, pero no ambas ya que esto sería una contradicción. Toda fórmula redundante es un enunciado de nuestro SLF. Observar que un enunciado siempre es verdadero o falso. Para demostrar la independencia de una fbf es suficiente encontrar una interpretación del sistema que haga falsa la fórmula en cuestión y verdaderos a todos los enunciados verdaderos del SLF.

Un sistema es completo cuando todas las fbf del sistema pueden ser deducidas dentro del sistema utilizando las otras fbf. Por ejemplo, si A es una fbf de nuestro SLF, entonces o A puede ser deducida como teorema o  $\sim A$  puede ser deducida como teorema, pero no ambas, utilizando las otras fbf del sistema. Si en nuestro SLF existe una fbf que no se puede deducir como teorema, ni ella ni su negación, entonces se dice que nuestro sistema es incompleto.

La incompletud de un sistema lógico formal no implica que no sea funcional. La geometría euclidiana menos el postulado de las paralelas es un ejemplo de SLF incompleto pero funcional.

Como apoyo visual las definiciones anteriores se pueden ver como sigue:



Es decir dentro de todo SLF las fbf pueden ser únicamente o fbf indecidibles o enunciados.

Llegados a este punto es preciso decir que el primero en demostrar que existen SLF que contienen fbf de las que no se puede decidir ni su verdad ni su falsedad dentro del sistema fue Gödel en 1931 cuando presenta las demostraciones de sus teoremas de incompletud. Con estos teoremas Gödel afirma que ningún sistema lógico formal que contenga *suficiente cantidad de aritmética* puede ser completo, es decir siempre habrá dentro de nuestro SLF alguna fbf indecidible. Hilbert, antes que Gödel, había llamado fórmulas ideales a aquellas en las que no se puede decidir su verdad o falsedad en una cantidad finita de pasos. Una consecuencia de la demostración de Gödel es que existe una cantidad infinita de fbf indecidibles.

A lo que se refiere Gödel cuando habla de *suficiente cantidad de aritmética*, es que:

- 1) Todo enunciado del SLF cuya verdad o falsedad pueda comprobarse en una cantidad finita de pasos, es demostrable a partir de los axiomas.
- 2) Cualquiera que sea el numeral n, el enunciado  $\forall x(x \leq n \vee n \leq x)$  es demostrable.
- 3) Cualquiera que sea el numeral n, el enunciado  $\forall x(x \leq n \rightarrow (x=0 \vee x=1 \vee \dots \vee x=n))$  es demostrable.

El teorema de incompletud de Gödel se enuncia como sigue:

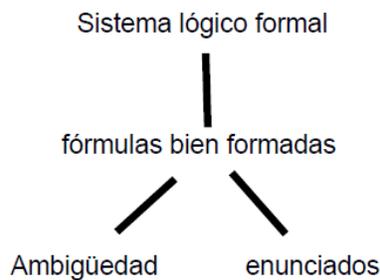
*Para toda teoría recursiva y consistente (es decir un SLF) que contenga suficiente aritmética existe un enunciado indecidible, es decir, existe un enunciado  $G$  tal que ni  $G$  ni  $\sim G$  son demostrables.*

Con base en lo dicho hasta ahora podemos decir que una ambigüedad en sentido lógico sería:

*Una fórmula bien formada o un axioma tal que al ser introducida dentro de un sistema lógico formal no genera inconsistencias, aun si se decide introducir la fbf negada.*

Nuestra ambigüedad comparte con una fbf indecidible el hecho de que no puede ser demostrada dentro del sistema, ni ella ni su negación, ya que si, por ejemplo,  $A$  es una ambigüedad y pudiera ser deducida como teorema de nuestro SLF, entonces introducir  $\sim A$ , la ambigüedad negada, generaría una contradicción lo cual haría inconsistente a nuestro SLF, y viceversa. Por lo tanto si  $A$  es una ambigüedad es también una fbf indecidible. Una ambigüedad también es independiente del SLF en el que se encuentra ya que no puede ser deducida como teorema utilizando los otros axiomas o fbf del sistema. Como no tiene un valor de verdad dentro del SLF, de lo contrario sería un enunciado, se puede decir que una ambigüedad tal como ha quedado definida en términos lógicos, puede ser verdadera o falsa, lo cual justifica el que la nombremos efectivamente una ambigüedad.

Podemos entonces renombrar nuestro esquema inicial como sigue:



Como ejemplo de ambigüedad ya se ha comentado más arriba el quinto postulado de Euclides, en tanto que puede estar dentro de un SLF, afirmado o negado, y mantenerlo consistente. La geometría euclidiana es el producto de esta ambigüedad más los enunciados de la teoría. Sin embargo, se puede introducir la negación de tal postulado y aun así el sistema se mantiene consistente. Las geometrías no euclidianas son el resultado de la negación de esta ambigüedad más los enunciados de la teoría.

El primero en encontrarse con una fbf de este tipo fue Girolamo Saccheri (1667-1733) Jesuita de la orden de Italia, quién quería demostrar por reducción al absurdo que el postulado de las paralelas es deducible de los axiomas de la geometría euclidiana. En su investigación, al introducir el postulado negado no fue capaz de encontrar contradicción alguna, ya que no existía, sin saberlo estaba creando la primer geometría no euclidiana. Sin embargo, a pesar de la consistencia que tenían los nuevos teoremas que podía deducir suponiendo la negación del quinto postulado de euclides, él creyó que había algo mal en ese sistema y que no se había percatado de eso, por lo que no concluyó con sus investigaciones.

Pasaré ahora a contrastar la definición aquí expuesta de ambigüedad con la utilizada en otras áreas ajenas a los sistemas lógicos formales. También abordaré un poco el uso que se ha hecho

del concepto de ambigüedad en SLF para mostrar la importancia de haberlo definido en términos lógicos.

William Quine define la ambigüedad como un término que es "... a la vez verdadero y falso de la misma cosa"<sup>2</sup>. La anterior definición se aplica generalmente en las distintas áreas de la lingüística, donde también se distingue entre ambigüedad semántica, fonética, etc. Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro, en Gödel para todos, partiendo de lo anterior dicen que no existe ambigüedad en los sistemas lógicos formales ya que en estos no existen los problemas que acosan al lenguaje común.

Maurice Loi, por otro lado, en su ensayo "ambigüedad y rigor" que se presenta dentro del libro *Pensar la matemática*, pone como antónimo de rigor dentro de los SLF a la ambigüedad, como si esta última fuera un mal que los matemáticos debieran de evitar a toda costa. Sin embargo podemos ver que nuestra definición de ambigüedad comparte con la de Quine el hecho de que puede ser verdadera o falsa, en nuestro caso dentro de un SLF en el caso de la lingüística cuando se refiere a algo, y aún así no es un mal que se deba de evitar ya que no genera contradicciones.

Dice Ivorra Castillo "La existencia de afirmaciones indemostrables desconcierta a muchos matemáticos, cuando -en el fondo- se trata de un fenómeno que en otros contextos similares se ve como algo obvio y natural"<sup>3</sup>. El problema de tal confusión radica en que el concepto de ambigüedad se utiliza en matemáticas dando por hecho su definición sin precisarla, lo cual se ha hecho en este trabajo.

### 3. CONCLUSIÓN

Una ambigüedad al no generar contradicciones, puede ser introducida dentro de un SLF y los teoremas que se pueden deducir con ella son distintos a los que se pueden deducir si la introducimos en su forma negada. Incluso podemos no introducir la ambigüedad en cuestión y deducir así otros teoremas distintos, sin embargo siempre habrá alguna ambigüedad dentro de nuestro SLF aun cuando no podamos identificarla. El encontrar la ambigüedad y usarla como axioma del SLF no significa que ya hemos agotado la posibilidad de encontrar otra, porque por la demostración de Gödel debe de haber otra en nuestro SLF que no hemos encontrado, al encontrarla volvemos al argumento anterior y así *ad infinitum*. Por lo tanto en todo SLF riguroso, si se quiere llamar así, existen fbf que caen dentro de la definición de ambigüedad y son infinitas.

Además, el que existan ambigüedades dentro de los SLF no es un mal, en el sentido de que una ambigüedad hace más rico a nuestro sistema. Ya que podemos crear nuevas matemáticas al introducir tales fbf en nuestro SLF, ya sea en su forma negado o afirmada, y las posibilidades son infinitas. Dice I. Castillo, en *pruebas de consistencia*, "todos los matemáticos saben, hoy en día, que hay afirmaciones matemáticas que no pueden ser demostradas ni refutadas". Eso es lo que es una ambigüedad en un sistema lógico formal.

### BIBLIOGRAFÍA:

1. C. B. Boyer, "Historia de la matemática", Alianza Editorial, 1999.
2. W. Quine, "Palabra y objeto", Herder, 1960.
3. H. S. Lim "Español como lengua extranjera, enfoque comunicativo y gramática" en *estudio sintáctico-semántico de la ambigüedad*, actas del IX congreso internacional del ASELE, 1999.
4. G. Martínez & G. Piñeiro, "Gödel para todos", Destino, 2010.

5. M. Kline, "El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días", Alianza Editorial, 1972.
6. J. Dieudonné, "Pensar la matemática", Tusquets Editores, 1984.
7. K. Gödel, "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los principios matemáticos y sistemas afines", Krk Ediciones, 2009.
8. C. I. Castillo, "Pruebas de consistencia", recuperado de [www.uv.es/ivorra/libros/consistencia.pdf](http://www.uv.es/ivorra/libros/consistencia.pdf).
9. L. Michelena, "Obras completas", Universidad del País Vasco, 2011.

# **LA GUÍA RÁPIDA PARA APAGAR UN INCENDIO PARA LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA-MATEMÁTICA**

José Siddhartha García Sánchez, Alicia Campos Valencia, Isabel Rodríguez Castillo, Carolina Gabriela Analco Panohaya

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Preparatoria 2 de Octubre de 1968, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

## **1. INTRODUCCIÓN**

Durante muchos años he observado que los estudiantes no se llevan bien con los materiales bibliográficos que tienen que consultar o comprar según sea el caso. Yo mismo no compraría casi todos los libros que escribí para una casa editorial. ¿Por qué? porque los textos más allá de ser contenidos muertos y convencionales son ¡aburridos!. Y por supuesto ya surgió una idea en la mente de muchos de ustedes:

“pero si a la escuela uno no viene a jugar”. Les doy toda la razón a los que pensaron de esa manera, pero quiero decir aquí que a partir de mis años de experiencia, como docente y alumno, he visto en toda mi vida un par de libros que a mi parecer han sido elaborados pensando en los estudiantes. Libros que uno tiene ganas de abrir para trabajar, libros para recordar. Aunque parezca ingenua y tonta esta idea, creo que por lo antes mencionado (referente a la causas de la baja calidad en los trabajos escolares) es de vital importancia atender las últimas y más fundamentales expectativas de nuestros estudiantes: -danos algo que nos llame la atención-. En lo que respecta al área de ciencias físicas en el nivel medio superior son muy pocos los textos que se sitúan dentro de un verdadero bestseller de la física. Si lo son, eso responde a un éxito comercial, más allá de sus contenidos o forma de presentarlos.

La guía rápida para apagar un incendio es un proyecto que intenta desarrollar libros de texto para los estudiantes antes que para los profesores.

## **2. FUNDAMENTOS**

Estado del Arte y Justificación

En la actualidad los profesores de Nivel Medio Superior de las preparatorias de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla nos encontramos con la empresa de reestructurar los planes, programas, materiales didácticos y materiales bibliográficos homologando nuestro quehacer docente con la Reforma Integral para la Educación Media Superior. Con estas primeras bases debemos mencionar que nuestro trabajo se enmarca dentro del Proyecto Tuning Mundial y se sustenta a través del paradigma Histórico-Cultural.

El paradigma Histórico-Cultural en lo que respecta a la educación se puede puntualizar de la siguiente manera:

- El docente es un guía y su dirección disminuye conforme el que aprende va adquiriendo autonomía.
- La educación debe promover el desarrollo sociocultural y cognoscitivo del alumno.

- El alumno debe verse como un ente social, protagonista y producto de las múltiples interacciones sociales en que se ve involucrado a lo largo de su vida.
- El docente se considera un experto que enseña en una situación esencialmente interactiva.

Es importante señalar que el Modelo Universitario Minerva (MUM) que actualmente sustenta el quehacer universitario en la BUAP, está en completa comunión con el Proyecto Tuning Mundial, el paradigma histórico cultural y la reforma integral para el nivel medio superior.

La nueva propuesta en materiales bibliográficos es desarrollar los contenidos ahora llamados saberes en actividades educativas basadas en el enfoque por competencias.

Es el acuerdo el 444 de la reforma integral para la educación media superior la que muestra las diferentes categorías de competencias a consolidar en las nuevas generaciones de estudiantes, según la reforma integral para la educación en el nivel medio superior.

Nuestro trabajo es un primer esbozo en el desarrollo de materiales bibliográficos que cumplan con los requisitos mínimos sobre el enfoque educativo basado en competencias.

Como el mismo MUM en la BUAP propone, nosotros seguimos un sistema constructivista en cuanto a la forma de enseñar nos referimos.

A pesar de pensar en los ejes de la educación basada en competencias y en sus distintas dimensiones como: el saber hacer, el saber conocer y el saber ser, nosotros debemos mencionar que en nuestro texto atendemos casi de forma clásica aquella dimensión que es el “saber hacer”. Nuestra guía, aclaro, no es un libro de texto. Hablando de forma un tanto informal, nuestra guía es un refuerzo de lo obtenido en las sesiones de clase, también es una opción para ser autodidacta ó puede ser un bomberazo para sacar adelante el examen final o el extraordinario.

#### Objetivos

Construir una guía que permita al estudiante de nivel medio superior y superior entender de una forma concreta y asequible la teoría operacional de vectores vistos desde un enfoque matemáticos, es decir, vistos los vectores como  $n$ -ádas de números según sea el números de dimensiones que se le asignen.

### 3. METODOLOGÍA

Elegimos en este trabajo piloto el tema “Vectores” que se encuentra en el bloque número uno del Plan 06 por competencias para la asignatura en física de las preparatorias de la BUAP.

Por la naturaleza de los objetivos se ha desarrollado una serie de definiciones y ejercicios que cumplan de manera óptima con la labor de fortalecer las capacidades de construcción de estructuras algebraicas que permitan resolver un problema en vectores de forma operacional. Por ello cada sección cumple con ofrecer las definiciones pertinentes en lo que respecta a las operaciones básicas de vectores y una serie de ejemplos que permiten construir de forma paulatina las diferentes estructuras matemáticas básicas para desarrollar a buen término y concluir con las metas de nuestros objetivos en el aula

El desarrollo del texto en forma de dialogo es una estrategia que presumimos potencia la capacidad de concentración, permitiendo al estudiante de alguna manera ir interactuando a través de los personajes del texto.

La importancia de un lenguaje ordinario y simple nos parece fundamental para el mejor entendimiento de los saberes aquí propuestos. Aunque no tenemos bases para sustentar lo que

hemos escrito aquí, la experiencia a través del aula de clase nos permite entender que en la mayoría de las situaciones un estudiante se encuentra en mayor comunión con un texto que no usa tantos tecnicismos o lenguaje científico que de alguna forma no se ha homologado con el lenguaje de uso diario del estudiante.

Se realizó la versión en inglés y una sección de TIC's para el fortalecimiento del inglés técnico en Física ocupado durante todo el texto. Este punto atiende tanto a la interdisciplina y transversalidad, ejes rectores del MUM.

Se realiza la versión en lenguaje Braille y se desarrolla el Audio libro con el fin de no sólo impactar a el estudiante estándar, sino también cubrir un mayor número de estudiantes.

Se realizaron cuestionarios de satisfacción donde se somete a opinión del alumnado de nuestra institución cuestiones en lo referente a las tipografías, color y diseño de la guía.

Se realizó un diagnostico del funcionamiento de la guía con estudiantes de grados inferiores y propios al que lleva la asignatura abordada en la guía.

#### **4. RESULTADOS**

En este apartado mostramos la prueba piloto que realizamos con estudiantes de los tres grados escolares que ofertamos como preparatoria y como podemos observar en la tabla que se encuentra bajo de este texto podemos ver que la muestra no se eligió considerando sólo estudiantes que cursan el tema que hemos considerado en esta versión de la guía, sino se ha elegido una mezcla de los tres niveles con la intención de cubrir un mayor espectro de estudiantes los cuales han cursado el tema, y los que en un futuro muy cercano llevarán acabo la tarea de aprenderlo en la asignatura en física. También es importante señalar que se han elegido grupos de los dos turnos que oferta nuestra institución con la finalidad de saber si impacta de la misma manera en ambos turnos.

La prueba que realizamos fue bastante sencilla. En la cual se le entregó una copia de la versión en español a los estudiantes. Se les pidió que leyeran completamente la guía, incluyendo la introducción. Se solicitó que no se pasara por alto ninguna figura, ningún texto, ni caption de las figuras. A cada alumno se le entrego la misma prueba por escrito, la cual contaba con seis reactivos que involucraban las seis diferentes operaciones que se presentan en la guía. Otro elemento que es importante resaltar es que se cuestionó a los grupos de niveles anteriores sobre la posibilidad de tener conocimiento del material presentado en la prueba de los cuales obtuvimos una negativa del grueso de la población al cuestionamiento.

Se integró en cada ejercicio operaciones con enteros (negativos y positivos), racionales (positivos y negativos), con la intención de hacer de forma secundaria una revisión de sus operaciones elementales con racionales (fracciones).

Se pidió a los estudiantes que apagaran sus equipos electrónicos y que se concentraran en el trabajo considerando el hecho de que esta prueba no es tiene la figura de una evaluación en su trabajo diario.

Se otorgó a los alumnos cincuenta minutos para contestar con la guía en la mano y sus lapiceros la evaluación piloto que consta de:

- Un ejercicio para obtener la magnitud y la dirección de un vector
- Un ejercicio de suma de vectores y resta de vectores
- Un ejercicio de multiplicación de un vector por un escalar

- Un ejercicio de producto escalar entre vectores
- Un ejercicio de producto cruz entre vectores
- Un ejercicio de normalización de vectores
- 

Una vez terminada la evaluación piloto se les entregó un cuestionario de satisfacción con preguntas acerca de su experiencia con la guía. Atendiendo rubros como la tipografía, el dialogo, el lenguaje, el color.

Grupos	Alumnos	Construcción de estructuras algebraicas	Resultados de ejercicios tipo
1DM	47	40	30
2BV	40	35	25
2GV	39	35	23
3EV	52	47	35
3DM	59	52	30
total	237	209	143

La muestra que tomamos de nuestra población de estudiantes es de aproximadamente el 15% de la misma. Cabe resaltar que todas las pruebas se hicieron de forma aleatoria y no se les previno a los estudiantes de la existencia de esta.

Básicamente nuestras preguntas a atender fueron dos y una secundaria:

Preguntas	porcentaje del total de la muestra
¿es útil la guía?	88%
¿Su uso da satisfacción al su usuario?	
¿cómo estamos en aritmética con fracciones?	60%

## 5. CONCLUSIONES

Al momento de escribir este texto debemos mencionar que nos encontramos en la etapa tres del proyecto que es la elaboración de la versión en Braille. La guía solo fue probada en su versión en español. Podemos observar de la sección anterior que la guía permite la autonomía del 88% de los evaluados a la hora de resolver ejercicios de vectores vistos como pares y ternas ordenados de números. En contraste con este gran resultado para nosotros se encuentra que un 60% de los estudiantes pudieron obtener un resultado correcto. Por otra parte, aunque no tenemos datos que nos ofrezcan el índice de satisfacción de los estudiantes ante la guía presentada, tenemos un conjunto de sugerencias hechas por los mismos donde se jerarquiza en cuanto al diseño, ofrecer la guía a color, y presentar mayores ilustraciones que hagan alegoría al contenido, como es el caso de la ilustración referente a la sección de normalización de vectores.

Finalmente un punto que llama la atención no sólo por esta prueba, sino por la experiencia docente es que los estudiantes tanto en el ámbito básico, medio y superior tienen una habilidad desarrollada para construir estructuras, pero en la mayoría de los casos no razonan las operaciones que suceden a la estructura.

### Trabajo Futuro

La Guía Rápida para Apagar un Incendio deberá someterse a un análisis crítico donde tomemos la determinación de caminar por el mismo rumbo o tomar otros, e independiente de esto, lo más importante para nosotros es desarrollar textos que se encuentren en completa armonía con el quehacer diario de nuestros estudiantes, y que estos textos sean en primera instancia para nuestros alumnos en toda la dimensión de la palabra. También es visión de los participantes de este proyecto continuar ampliando la zona de interacción con otras asignaturas con la finalidad de tener más guías que incluyan un trabajo interdisciplinario digno de lo estudiantes de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

# PROPAGACIÓN LÁSER EN ESPACIO LIBRE

Rebeca Baltazar Barrón<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

## RESUMEN:

En este trabajo se explica el funcionamiento del sistema de propagación óptica en espacio libre (Free-Space Optical), así como también, las ventajas y desventajas con respecto a otros sistemas de propagación de ondas electromagnéticas. También se explican los retos que se deben afrontar y la investigación que se lleva a cabo con el fin de determinar los instrumentos óptimos necesarios para establecer un enlace. Estos instrumentos analizados son los tipos de láseres y detectores. Puesto que la selección de una longitud de onda apropiada es esencial para minimizar las pérdidas de información por esparcimiento y absorción, y el tipo de detector que capte toda la información posible. Además se explicará los usos de este sistema óptico.

## 1. INTRODUCCIÓN

Con el término de comunicación óptica se piensa en la transmisión de información por fibra óptica. La comunicación por este medio se ha vuelto muy popular debido al gran ancho de banda que proporciona este medio. La principal desventaja de este medio es el hecho de que resulta muy costoso realizar las conexiones a varios metros de distancia. El costo principal reside en el tendido de la fibra de un lugar a otro.

Los enlaces de radio frecuencia y microondas están altamente desarrollados pero son limitados en el anchos de banda y la tasas de transferencia de datos. Sin embargo, la luz además de viajar por la fibra óptica también puede viajar por el aire a sin necesidad de realizar un tendido de fibra. De esta manera surgen los sistemas comunicación conocidos como sistemas FSO. (*Free Space Optics*).

Por lo tanto, el objetivo de las Free Space Optics (FSO) es transmitir información por el espacio libre utilizando señales ópticas similares a las que viajan a través de las fibras ópticas. Además que las señales por FSO permiten conectar edificios cercanos entre sí de una forma barata y sencilla, al no tener que hacer prácticamente ninguna obra. Además, los anchos de banda que proporcionan son muy grandes, gracias a que la información viaja en señales luminosas.

## 2. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

El principio de funcionamiento tiene como base usar transmisores y receptores, entre estos elementos se transmiten haces de láser en infrarrojo a través de la atmósfera como se muestra en la Figura 1. Estos haces de radiación láser pueden transportar mensajes de Internet, vídeo, señales de radio o ficheros informáticos.

La capacidad de estos enlaces se encuentra entre los 100 Mbps y los 2.5 Gbps, esto se puede conseguir mediante el uso de un formato de modulación, sin embargo, es un poco difícil de generar y detectar tales señales de alta frecuencia por el uso de dispositivos eléctricos, debido a la limitación de ancho de banda de circuitos eléctricos [1.]

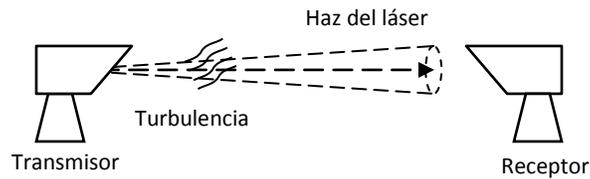


Figura 1. Esquema de componentes de un sistema de comunicación FSO donde se muestra un transmisor láser y un receptor donde la señal viaja a través de la atmósfera.

El término “espacio libre” se refiere al espacio vacío, sin embargo, la propagación de ondas electromagnéticas a través de la atmósfera terrestre se llama “propagación por espacio libre”. Se debe tomar en cuenta que la atmósfera terrestre está constituida por moléculas lo cual ocasiona pérdidas de señal.

Cuando una onda electromagnética se propaga a través de la atmósfera terrestre se transfiere energía a los átomos y moléculas atmosféricas. Una vez absorbida la energía, causa una atenuación en la intensidad detectada y una reducción de densidad de potencia. La absorción de las ondas electromagnéticas en una atmósfera normal depende de su longitud de onda [2].

En la Figura 2 se muestra la transmitancia de la atmósfera en condiciones meteorológicas claras (visibilidad > 10 millas) como una función de longitud de onda de transmisión en el rango espectral del infrarrojo cercano entre 700 nm y 1600 nm.

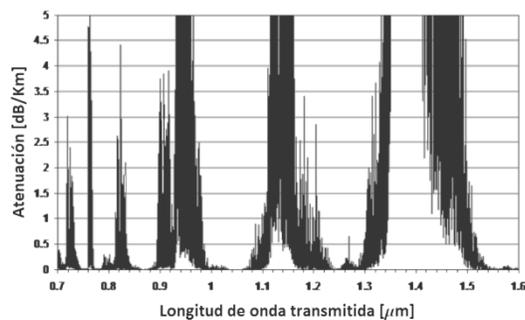


Figura 2. Transmitancia de la atmósfera en condiciones meteorológicas claras.

La ventana de transmisión de 1060 nm muestra valores extremadamente bajos de atenuación [3]. Las longitudes de onda comunes de comunicación óptica por espacio libre están en un promedio de 1550 nm.

### 3. DETECCIÓN EN EL ESPACIO LIBRE

La propagación de una onda óptica, a través de turbulencias atmosféricas, puede experimentar fluctuaciones de la irradiancia llamadas titilación, esto es debido a la fluctuación de la densidad del

medio por corrientes de aire, cambios de temperatura y variación de cantidades de moléculas es zonas específica, todo esto provoca cambios en el índice de refracción, haciendo una variación del camino óptico.

Para reducir la pérdida de energía, que conlleva a la pérdida de información, se pueden implementar diferentes métodos, por ejemplo:

*Reducir la abertura de recepción.* Reducir el diámetro de la abertura de recepción por debajo del tamaño de longitud de coherencia de Fried, este parámetro representa el diámetro de la apertura de un telescopio que, en ausencia de atmósfera, ofrecería el mismo poder resolutivo que un telescopio de gran tamaño. El problema con pequeñas aberturas es un bajo recibimiento de potencia y centelleos causada por la fluctuación lenta del haz e interferencia.

*Óptica adaptativa.* Con la óptica adaptativa se miden las deformaciones del frente de onda (fase) de la luz recibida y se corrige mediante la aplicación de la deformación inversa, por ejemplo, mediante un espejo deformable.

*Codificación multimodo diferencial por desplazamiento de fase.* Se basa en la interferencia de bits de datos sucesivos en un interferómetro de longitud de brazo desigual, donde la diferencia de camino óptico corresponde a la duración de un bit. Este método resuelve el problema de contraste de interferencia, pero no elimina las distorsiones del frente de onda atmosféricos [4].

Los fotodetectores utilizados en frecuencias de 1060 nm generalmente están compuestos de arsenuro de indio y galio (InGaAs) y otros de silicio (Si) con responsividad de aproximadamente 0.7, es decir, la cantidad de electrones que es capaz de generar en relación con los fotones recibidos. Es recomendable que el área de detección no sea una matriz de sensores, puesto que esto encamina a un proceso de integración de datos lento, y como su finalidad es recibir datos de alta velocidad es mejor un sensor de área no mayor de 1 mm<sup>2</sup>.

#### **4. ESTADO ACTUAL DE FSO**

La propagación de ondas ópticas en el espacio libre es un campo de investigación que no solo está dedicado para comunicación terrestre, sino también, en comunicación espacial entre satélites [5], transmisión de video espacio-Tierra [6], uso de la energía del láser para transmitir impulso a objetos espaciales [7], monitoreo de la atmósfera [8], redes inalámbricas móviles de próxima generación [9], entre otros.

#### **5. CONCLUSIONES**

FSO tiene un futuro y presente en el mercado de comunicaciones, teniendo la mayoría de sus aplicaciones en el ámbito de transmitir información de forma segura y eficiente. Además que es una alternativa para evitar el uso fibras ópticas, que tienen que cruzar una gran longitud lo que ocasiona un gran costo, y eficiencia de transmisión puesto que su radiación está dirigida hacia un lugar en específico sin perder energía en varias direcciones como ocurre en transmisiones de tipo de radio frecuencias.

Para realizar de forma exitosa un sistema de FSO se debe tomar en cuenta la longitud de onda a usar para evitar pérdida de información por la absorción atmosférica como por ejemplo, la longitud de onda de 1600 nm es una frecuencia con pocas pérdidas y con una amplio panorama de investigación. También se debe contemplar como parte fundamental el sistema de modulación y decodificación de la señal aún con la señal de ruido que adquiere la señal durante la propagación.

## BIBLIOGRAFÍA

1. T. Kawanishi. Transparent waveform transfer for resilient and low-latency links. IEEE photonics society news, 28(4):4-8, August 2014.
2. W. Tomasi. Sistemas de comunicaciones electrónicas. Pearson Educación, 4 ed, 2003.
3. LightPointe. Lightpointe how to design a reliable fso system, 2009.
4. Z. Sodnik and M. SANS. Extending edrs to laser communication from space to ground. International Conference on Space Optical Systems and Applications, 13(2):9-12, October 2012.
5. F.J. Duarte, T.S. Taylor. Quantum entanglement physics secures space-to-space interferometric communications. Laser Focus World, 51(4):54, April 2015.
6. M. Freebody. Space lasers set to protect earth, project data. PHOTONICS spectra, 47(11):42-46, November 2013.
7. V. C. Coffey. Lasers find varied uses in space applications. PHOTONICS spectra, 46(11):40-45, November 2012.
8. C. W. Chow, C. H. Yeh, Y. Liu, Y. F. Liu. Digital signal processing for light emitting diode based visible light communication. IEEE photonics society news, 24(5):9-13, October 2012.
9. L. Yang, B. Zhu, J. Cheng. Free-space optical communications using on-off keying and source information transformation.

# DINAMICA NO LINEAL DE UN SISTEMA BASADO EN UNA VARIANTE DEL SISTEMA DE DIXON

Gabriel Arroyo Correa<sup>1</sup>, Alicia Campos Hernández<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH. <sup>2</sup>Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro.

## RESUMEN:

El sistema de Dixon es un modelo bidimensional usado para modelar el campo magnético de una estrella de neutrones. El modelo da origen a un comportamiento caótico como consecuencia de una singularidad en el origen. En este trabajo se estudia numéricamente la dinámica no lineal de un modelo basado en una variante del modelo de Dixon en donde la singularidad en el origen es removida y se introduce además un término de perturbación armónica. Se estudia el efecto de la amplitud y de la frecuencia de la perturbación sobre el estado dinámico del sistema. Los resultados muestran que la evolución dinámica del sistema es más rica que la del modelo de Dixon original, ya que es posible tener un punto límite, un ciclo límite, una región anular doble ó una región anular simple definida en un semiplano y que se puede invertir esta región anular simple variando la frecuencia de la perturbación. Se agradece el apoyo a través del programa CIC-UMSNH 2016.

## 1. INTRODUCCIÓN

En 1993 Dixon et al. [1] introdujeron un modelo simplificado para describir la dinámica del campo magnético de una estrella de neutrones. El modelo de Dixon está descrito por el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{xy}{x^2 + y^2} - \alpha x \\ \dot{y} &= \frac{y^2}{x^2 + y^2} - \beta y + \beta - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde  $x$  e  $y$  están relacionados con las componentes de la magnetización en el plano ecuatorial y axial de la estrella, respectivamente, y  $\alpha$  y  $\beta$  representan términos de amortiguamiento por viscosidad. Debido a la singularidad del sistema (1) en el origen, este no cumple con los requerimientos del teorema de Poincaré-Bendixon. Como resultado de esto, todas las órbitas son atraídas hacia la singularidad y hay una alta sensibilidad a las más pequeñas perturbaciones. En la Fig. 1 se muestra la dinámica en el espacio XY para  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0.7$ , y para tres condiciones iniciales ligeramente diferentes. Se ha usado un método Runge-Kutta de cuarto orden para resolver el sistema (2), considerando 45000 puntos en tiempo, con paso de 0.01.

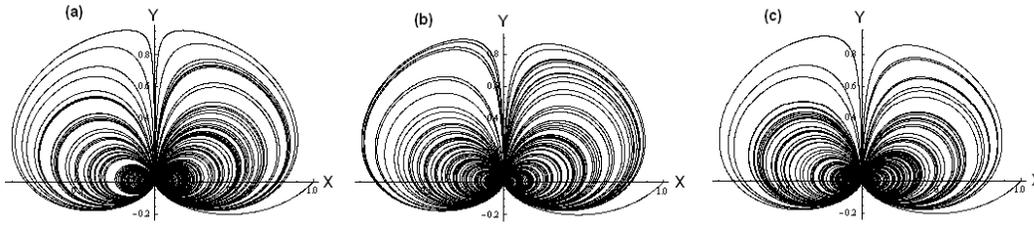


Figura 1. Dinámica del sistema de Dixon, Ec. (1), para tres condiciones iniciales ligeramente diferentes: (a),  $(0.999999,0)$ ; (b),  $(1.000000,0)$ ; (c),  $(1.000001,0)$ ; La singularidad en el origen produce una alta sensibilidad a las condiciones iniciales en la evolución dinámica del sistema. Aquí  $\alpha=0$  y  $\beta=0.7$ .

## 2. TEORÍA

En este trabajo se propone la siguiente variante del sistema (1), que remueve la singularidad en el origen y que adiciona un término armónico perturbativo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{xy}{a+x^2+y^2} - \alpha x + A \cos(\omega t) \\ \dot{y} &= \frac{y^2}{b+x^2+y^2} - \beta y + \beta - 1\end{aligned}\quad (2)$$

en donde  $a, b \geq 0$ ,  $A$  y  $\omega$  es la amplitud y frecuencia de la perturbación armónica. Shannon en su trabajo clásico acerca de la teoría de la comunicación [2], estableció resultados generales tanto para la información transmitida en sistemas discretos como continuos. La idea básica de este concepto se puede describir en los siguientes términos. Supóngase que se tiene un conjunto de puntos definidos en un plano. Se define una malla (cuadrícula) la cual se divide en  $N$  celdas rectangulares idénticas. El número de puntos contenidos en una celda dividido entre el número total de puntos del mapa da la probabilidad de ocupación  $p_i$  de la  $i$ -ésima celda. La entropía de Shannon  $E_s$  se define como:

$$E_s = -\sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i) \quad (3)$$

en donde  $\ln$  denota el logaritmo natural. En un trabajo previo aplicamos la Ec. (3) para estudiar experimentalmente el comportamiento de la entropía de Shannon en un sistema mecánico caótico [3]. Se analiza la dinámica del sistema (2) en base a su comportamiento entrópico en el plano  $XY$ .

## 3. RESULTADOS

En el resto de este trabajo se supondrá que  $\alpha=0$  y  $\beta=0.7$ . En la Fig. 2 se muestra la evolución dinámica del sistema original de Dixon (1), a medida que cambian las condiciones iniciales  $(x_0, 0)$ , con  $x_0$  variando en el intervalo de 0.1 a 0.9. El atractor está confinado en una región finita, que excluye el origen.

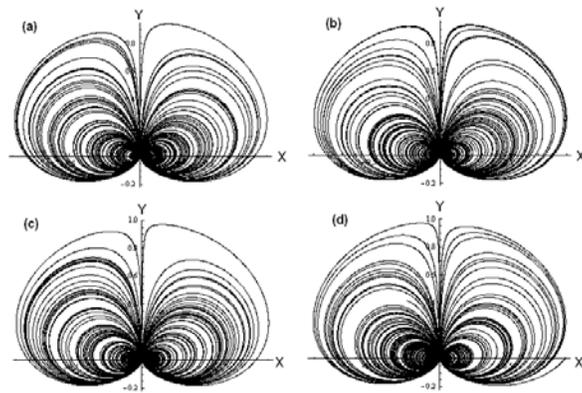


Figura 2. Dinámica del sistema original de Dixon, Ec. (1), para condiciones iniciales diferentes: (a),  $(0.1, 0)$ ; (b),  $(0.3, 0)$ ; (c),  $(0.6, 0)$ ; d),  $(0.9, 0)$ .

En la Fig. 3 se presenta la evolución dinámica del sistema de Dixon modificado descrito por la Ec. (2). Aquí se supone  $a=b=0$ , y que la perturbación es estática ( $\omega = 0$ ). Puede verse que el efecto de la perturbación (parámetro  $A$ ) es acotar la región del atractor. De hecho, se ha verificado numéricamente que para  $A \rightarrow 2$ , el sistema (2) colapsa a un punto fijo alrededor del origen.

El efecto de la frecuencia en la evolución dinámica del sistema (2) se presenta en la Fig. 4. La condición inicial es  $(1, 0)$ . Aquí se supone  $a=b=0$ , y que la amplitud de la perturbación es  $A=0.01$ . Se consideran 4 órdenes de magnitud diferentes en el valor de la frecuencia  $\omega$ . De esta figura se puede inferir que el efecto de la frecuencia es preservar la dinámica del atractor en forma similar a lo que ocurre en el sistema original de Dixon (compárense las Figs. 2 y 4). Este es de esperarse, ya que en ambos sistemas el origen es una singularidad.

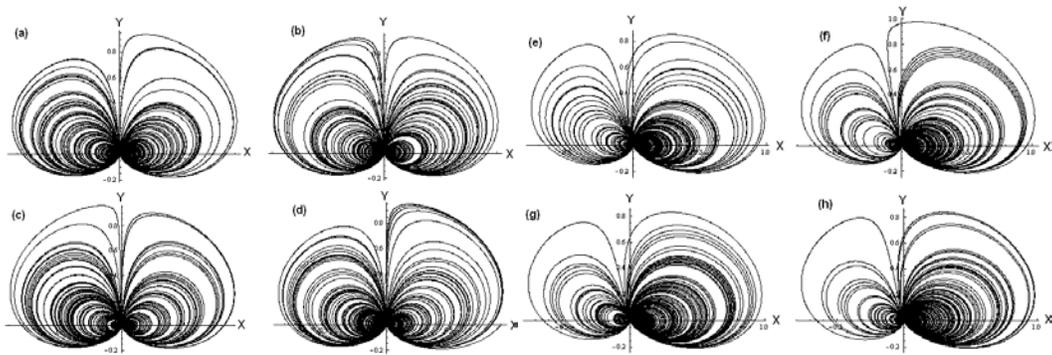


Figura 3. Dinámica del sistema de Dixon modificado, Ec. (2), para las mismas condiciones iniciales de la Fig. 2, con  $\omega = 0$ . En (a)-(d)  $A=0.01$ , en (e)-(h)  $A=0.1$ .

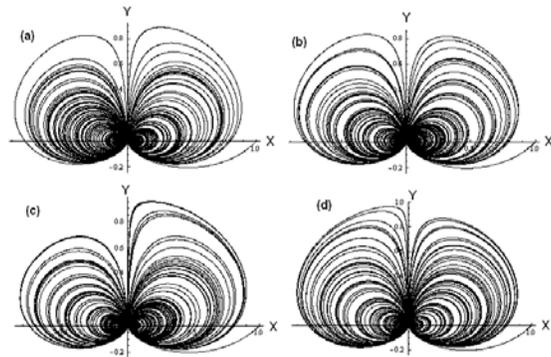


Figura 4. Dinámica del sistema de Dixon modificado, Ec. (2), cuando se varía la frecuencia de la perturbación. Los valores de  $\omega$  corresponden a: (a), 0.1; (b), 1; (c), 10; (d), 100. Aquí  $A=0.01$  y la condición inicial es  $(1,0)$ .

Cuando se remueve la singularidad del origen el sistema (2), como podría esperarse, modifica su dinámica drásticamente. En la Fig. 5 se muestra la evolución del sistema cuando se perturba armónicamente. Se puede percibir que el efecto de la frecuencia es romper la dinámica al punto límite y acotar la región del atractor hacia una región más compacta. Nótese la existencia de una región anular de repulsión.

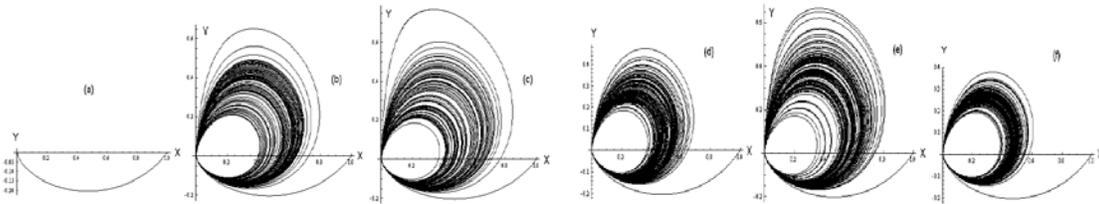


Figura 5. Dinámica del sistema de Dixon modificado, Ec. (2), cuando se varía la frecuencia de la perturbación y se remueve la singularidad en el origen. Los valores de  $\omega$  corresponden a: (a), 0; (b), 0.01; (c), 0.1; (d), 1; (e), 10; (f), 100. Aquí  $A=0.01$ ,  $a=0.0001$ ,  $b=0.000001$ , y la condición inicial es  $(1,0)$ .

De los resultados anteriores, es claro que en el espacio de configuración XY las órbitas que forman el atractor llenan una región densamente poblada alrededor del origen (cuando se tiene la singularidad,  $a=b=0$  en la Ec. (2)) ó alrededor de una región anular (cuando se ha removido la singularidad en el origen,  $a$  y  $b \neq 0$  en la Ec. (2)). En estas circunstancias resulta interesante analizar el comportamiento de la entropía de Shannon dada por la Ec. (3). En la Fig. 6 se presentan las evoluciones de la entropía de Shannon para las dinámicas de la Fig. 4 (singularidad presente) y de la Fig. 5 (singularidad removida), como función de la frecuencia. En el caso en que se ha removido la singularidad, para valores pequeños de la frecuencia la evolución del sistema es hacia un punto límite por lo que su entropía es casi nula (véase el gráfico de la izquierda en la Fig. 6). A medida que aumenta la frecuencia la entropía aumenta, lo cual es un indicativo de lo denso

del atractor en una región acotada del espacio XY (véase el gráfico de la derecha en la Fig. 6). Asimismo, cuando la singularidad está presente la entropía se mantiene en valores altos, entre 9.7 y 10, lo que explica una mayor densidad del atractor en una región acotada más grande que cuando no se tiene la singularidad.

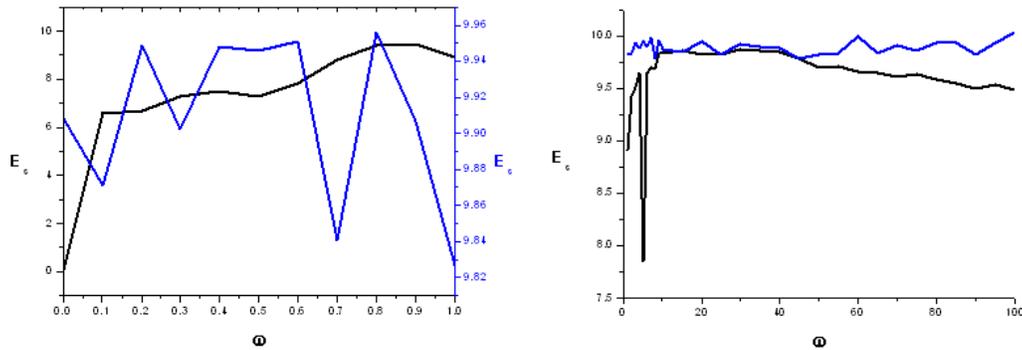


Figura 6. Comportamiento de la entropía de Shannon como función de la frecuencia de perturbación, para los casos en que la singularidad está presente (línea en color azul) y cuando se ha removido (línea en color negro). El gráfico de la izquierda comprende un rango en frecuencias de 0 a 1, en tanto que el gráfico de la derecha corresponde al rango de 1 a 100.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado una variante del sistema de Dixon en donde se incluye una perturbación armónica. Los resultados numéricos han mostrado que la evolución dinámica es diferente cuando la singularidad está presente que cuando no lo está. El análisis entrópico del sistema ha demostrado su utilidad para caracterizar su dinámica. Si la singularidad está presente la entropía de Shannon se mantiene en valores altos, lo cual es una manifestación de lo denso del atractor en una región acotada del espacio XY. Si la singularidad se remueve, la entropía de Shannon es casi nula para frecuencias bajas y se mantiene en valores más grandes para frecuencias mayores. Se ha verificado numéricamente que para valores de  $a$  y  $b$  en un orden de magnitud menor a los correspondientes de la Fig. 5, la evolución del sistema (2) es más variada, ya que para ciertos valores de la frecuencia se presentan características similares a la del sistema de Dixon original mezcladas con las que se han reportado en la Fig. 5.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. J. C. Sprott, "Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows" (World Scientific, Singapore, 2010). Chapter 5, pp. 109-112.
2. C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", The Bell System Technical Journal, Vol. 27, 1948, pp. 379-423, 623-656.
3. G. Arroyo Correa et al., "Estudio experimental de la entropía de Shannon en un sistema mecánico caótico", Memorias del IX encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, 2012, trabajo S4-FMCT10.

## PÉNDULO DE TORSIÓN DE MASA VARIABLE: OSCILACIONES I

Gabriela Del Valle<sup>1</sup>, Guadalupe Hernández Morales<sup>1</sup>, Rodolfo Espíndola Heredia<sup>1</sup>, Ariadna Gutiérrez Rosales<sup>1</sup>, Damian Muciño<sup>1</sup>, Genaro Gallardo<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco.

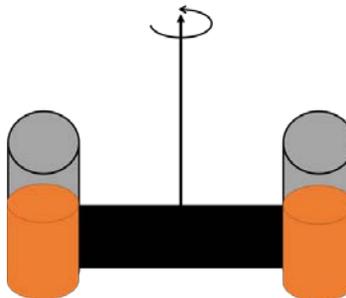
### RESUMEN

En este trabajo desarrollamos un Péndulo de Torsión de Masa Variable, el cual se utiliza para estudiar sus propiedades dinámicas rotacionales. Se mide el desalojo de masa como una función del tiempo y establecemos la relación (forma funcional) que tiene con respecto a la oscilación, los resultados son comparados con resultados similares que tenemos en el laboratorio para sistemas oscilatorios como el péndulo Físico de Masa Variable y el Oscilador Vertical de Masa Variable, Asimismo estos resultados se contrastan con los resultados que ofrece un tratamiento analítico en la formulación Lagrangiana y con resultados de simulación, al resolver numéricamente la ecuación de movimiento con las consideraciones necesarias para el tratamiento de la masa variable.

### 1. INTRODUCCIÓN

En 1779 Coulomb aborda el estudio del péndulo de torsión, al tatar de buscar una mejor técnica para la brújula marina. El péndulo de torsión es un dispositivo consistente en una barra horizontal sujeta a un hilo de acero que funciona como soporte, que a su vez está sujeto a un alambre con constante de torsión  $\kappa$ . Este hilo de acero ofrece una torca proporcional al ángulo de giro que se le impone pero en sentido contrario.

En trabajos desarrollados anteriormente en el Laboratorio de Investigación en Dinámica Rotacional, nos hemos interesado en sistemas físicos rotacionales de masa variable, tales como: Péndulos físicos de masa variable [1], Oscilador Vertical de masa variable [2], y los estudios que hemos realizado son teóricos, experimentales y numéricos [3].



*Figura 1 Esquema que presenta el sistema del péndulo de torsión de masa variable. El péndulo oscila de manera transversal y la constante se opone al cambio del ángulo  $-\kappa \theta$ , la torca permite la oscilación del sistema.*

En la literatura encontramos trabajos experimentales en los cuales el movimiento de un péndulo de torsión, presentado como un sistema oscilatorio, sirve como base para la construcción de las balanzas de torsión. Sin embargo existen pocas referencias al sistema del péndulo de torsión de masa variable, considerando que el sistema en primer lugar es oscilatorio y también es un sistema no lineal. Por esta razón decidimos iniciar el estudio de este sistema considerando su masa variable en el tiempo. Este estudio se realizó de manera experimental, teórica y numérica.

## 2. TEORÍA

Ecuación de movimiento

Desde la perspectiva de la formulación Newtoniana [4-5] podemos establecer la ecuación de movimiento del péndulo de torsión. Sabemos que para ángulos pequeños, la torca restauradora es proporcional al desplazamiento angular de forma que:  $\tau = -\kappa\theta$ . Sin embargo para torsiones más grandes se obtendrá

$$\tau = -\kappa \sin \theta \quad (1)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton para el caso rotacional se sabe que:  $\sum \tau = I\alpha$ , y como  $\alpha$  es la segunda derivada del ángulo podemos establecer que:

$$-\kappa \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

Lo cual nos lleva a la siguiente ecuación de movimiento:

$$I\ddot{\theta} + \kappa \sin \theta = 0 \quad (3)$$

La cual estudiaremos de manera experimental, teórica y numérica.

Momento de inercia

El dispositivo experimental consiste de un cilindro de acero [6-7], con una varilla que sirve como el eje de rotación, fijada al centro del cilindro, en cada extremo se colocó un cilindro de PVC con su respectiva tapa en la parte inferior, con una perforación por la que será desalojado material granular, al oscilar el péndulo de torsión.

Entonces es necesario obtener el momento de inercia para incluirlo en la ecuación 3. El momento de inercia del cilindro de acero es conocido pues el eje de rotación está en el *CM* del cilindro por lo tanto:

$$I_{CA} = \frac{1}{12} M_{CA} L^2 \quad (4)$$

Donde,  $M_{CA}$  es la masa del cilindro, y  $L$  es su longitud, para el caso del cilindro que está en uno de los extremos sabemos que el momento de inercia de un cilindro recto rotando alrededor de un eje longitudinal, el momento de inercia es:

$$2I_{C_{PVC}} = 2(M_{C_{PVC}}R^2 + M_{C_{PVC}}\left(\frac{L+R}{2}\right)^2) = \frac{M_{C_{PVC}}}{2}(4R^2 + (L+R)^2) \quad (5)$$

Donde se ha utilizado el teorema de Steiner para conocer el momento de inercia cuando gira alrededor de un eje que no está en el centro de masa. Se consideran 2 momentos de inercia por ser dos cilindros de PVC, donde  $R$  es el radio del cilindro de PVC y  $L$  es la longitud del cilindro de acero; entonces el momento de inercia de todo el sistema está dado por:

$$I_T = \frac{1}{12}(M_{CA}L^2 + 6M_{C_{PVC}}(4R^2 + (L_{PVC} + R)^2)) \quad (6)$$

El momento de inercia dado por (6) implicaría el movimiento de un péndulo de torsión de masa constante, sin embargo, en el cilindro de PVC se colocan diferentes materiales granulares que harán que nuestro péndulo sea de masa variable, por ello debemos analizar cómo cambia la masa en el tiempo.

Masa variable

Proponemos un modelo lineal para el caso de la masa variable:

$$m_g(t) = m_0(1 - \lambda t) \quad (7)$$

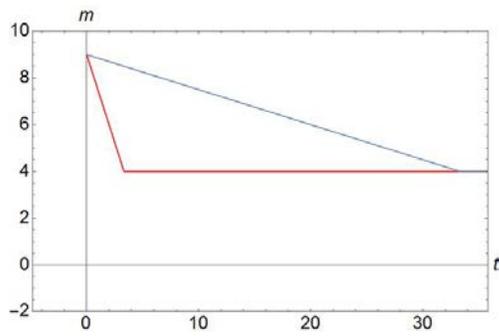
Donde  $m_g$ , representa la masa granular como función del tiempo,  $m_0$  es la masa granular al tiempo cero,  $\lambda$  es la rapidez con la que se desaloja el material, y  $t$  es el tiempo.

Al considerar que el medio granular será desalojado por efecto de la gravedad, la densidad del grano, el número de partículas y la longitud del cilindro, seguimos el análisis propuesto por Del Valle [1] y se encuentra lo siguiente:

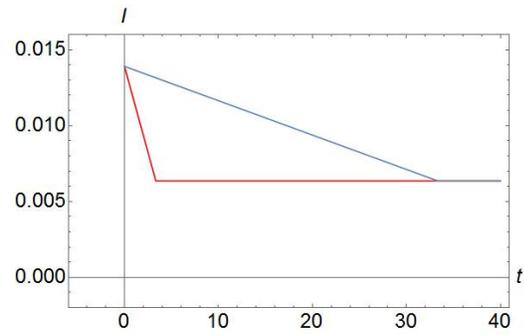
$$\lambda = \frac{N\rho}{R} \sqrt{\frac{g}{2L_1}} \quad (8)$$

Así, que la masa variable que debe ser incluida en la ecuación (6) debe ser:

$$M(t) = M_{C_{PVC}} + m_g(t) \quad (9)$$



a)



b)

Figura 2 a) Gráfica que muestra el comportamiento de la ecuación (9) con  $m_0=5$  kg,  $\lambda=0.03$  s<sup>-1</sup> y  $M_{CPVC}=4$  kg, línea gris y  $\lambda=0.3$  s<sup>-1</sup> línea roja, se aprecia que el tiempo de desalajo es distinto, sin embargo ambos casos parten del mismo valor de masa inicial y tienden a la misma masa  $M_{CPVC}$ . b) Momento de inercia ecuación (10), con los mismos valores que en a) y con los valores de  $M_{CA}=1.5$  kg,  $L=0.05$  m,  $R=0.025$  m,  $L_{PVC}=0.1$  m. Se observa el mismo efecto que en a)

Entonces la ecuación (6) debe ser escrita de la siguiente manera:

$$I_T(t) = \frac{1}{12} (M_{CA} L^2 + 6 M(t) (4R^2 + (L_{PVC} + R)^2)) \quad (10)$$

La ecuación (3) se divide entre el momento de inercia y se define la frecuencia de oscilación  $\omega$  como:

$$\omega(t)^2 = \frac{\kappa}{I_T(t)} \quad (11)$$

se encuentra que la frecuencia es también una función del tiempo, la figura 3 muestra su comportamiento para dos casos teóricos.

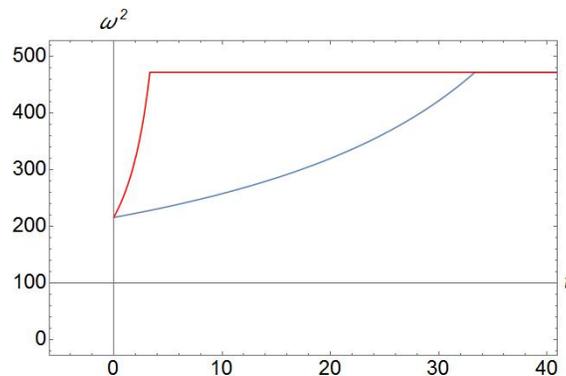


Figura 3 a) Gráfica que muestra el comportamiento de la ecuación (11) los mismos valores que en la figura 2 b), con un valor de constante de torsión  $\kappa=3$  N/m

## SOLUCIÓN NUMÉRICA

Resolvemos la ecuación de manera numérica, para ello es necesario separar la ecuación (3) en dos ecuaciones diferenciales de primer orden, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{\theta} \\ f_2 &= -\omega(t)^2 \text{ Sen } \theta \end{aligned} \quad (12)$$

El método numérico Runge-Kutta, es utilizado para la resolución del conjunto de ecuaciones (12). Para resolver este sistema de ecuaciones, debemos contar con valores iniciales; para el caso que nos ocupa tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_0(t_0) &= \theta_0 \\ \dot{f}_0(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Se calculan para este caso los valores de  $z$  y  $\dot{z}$  en el tiempo, el cual se va corriendo  $t = t + \delta h$ ,

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \\ \dot{\theta}_{i+1} &= \dot{\theta}_i + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \end{aligned} \quad (14)$$

Con las funciones siguientes que nos permiten calcular el promedio de las pendientes dado por (12) y obtener de esta manera el siguiente valor de la variable

$$\begin{aligned} k_{11} &= \delta h f_1(t, z_i, \theta_i, \dot{z}) \\ k_{21} &= \delta h f_2\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{11}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{12}}{2}\right) \\ k_{22} &= \delta h f_1\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{11}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{12}}{2}\right) \\ k_{31} &= \delta h f_1\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{21}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{22}}{2}\right) \\ k_{41} &= \delta h f_2\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{21}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{22}}{2}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

Comenzaremos por describir los materiales utilizados para la realización de la parte experimental, se utilizaron una barra de hierro de 1,1/2 pulg, tubo de PVC de 1,1/2 pulg, tornillo sin fin de 15 cm de longitud, un acoplador metálico, dos resortes con la misma constante, dos soportes de Pasco (modelo ME-8951), un sensor de rotación de Pasco (modelo PS-2120) y un poco de pegamento.

La realización de este aparato experimental se llevó a cabo en el Laboratorio de Investigación en Dinámica Rotacional, de la UAM unidad Azcapotzalco en el cual se pegaron el PVC junto con los tapones previamente perforados con un diámetro de 0.6cm, a los extremos de la barra de hierro de longitud 3.5pulg, en el centro de la barra se pegó el tornillo sin fin de 15cm y por el otro extremo se sujetó el acoplador metálico mismo que contiene orificios que nos ayudan a sujetar los resortes del sistema así mismo ayudar al péndulo a mantener el movimiento de nuestro sistema, como puede observarse en la Figura

Posteriormente el análisis de datos se realizó a través del sensor de movimiento obteniendo las posiciones  $\theta$  y las velocidades  $\dot{\theta}$  [8-9]

#### 4. RESULTADOS

##### 4.1 NUMÉRICOS

Se resolvieron las ecuaciones de manera numérica, con los datos que muestran en la Tabla 1, factores que provienen de la ecuación de movimiento, la simulación se realizó con un valor de  $\delta h = 0.08$ , para 100 condiciones iniciales distintas, por cada simulación se obtienen 500 datos, ente  $a=0$  y  $b= 4.00607$ . Las figuras 2 a 9 muestran los resultados obtenidos para las simulaciones realizadas, mostrando el comportamiento con el tiempo y entre las dos variables  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ , con tres distintos condiciones iniciales  $\theta_0 = 95^\circ, 45^\circ, 23^\circ$ .

**TABLA 1, CONSTANTES NECESARIAS PARA LA SIMULACIÓN**

<i>Datos numéricos de prueba</i>						
Masa granular	Longitud	Constante de torsión	Rapidez de salida.	Masa del cilindro	Radio del contenedor	Masa del contenedor
$m_0$ (kg)	L (m)	$\kappa$ (N m)	$\lambda$ (s <sup>-1</sup> )	M (kg)	R (m)	$M_{PVC}$ (kg)
3	0.2	3	1.5	1.5	0.025	0.980
<i>Datos Experimentales Reales</i>						
0.18	0.91	10	1/20	0.98	0.02	0.04
0.24	“	“	1/30	“	“	“
0.28	“	“	1/36	“	“	“

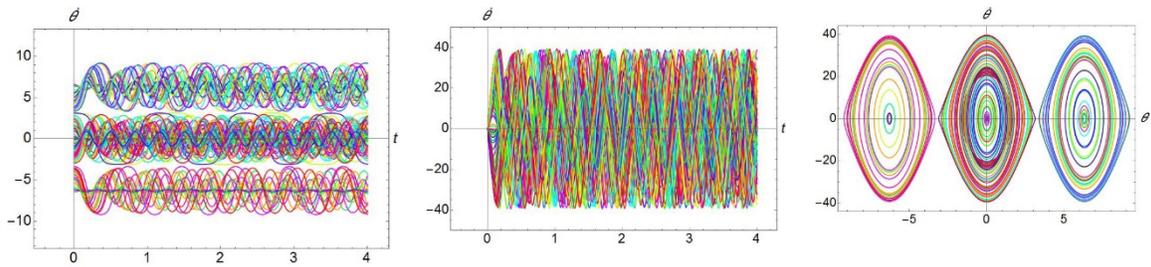


Figura 3 Comportamiento con el tiempo de la variable  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ , así como el plano fase para una condición inicial de  $\theta_0 = 90^\circ$  y los datos numéricos de prueba

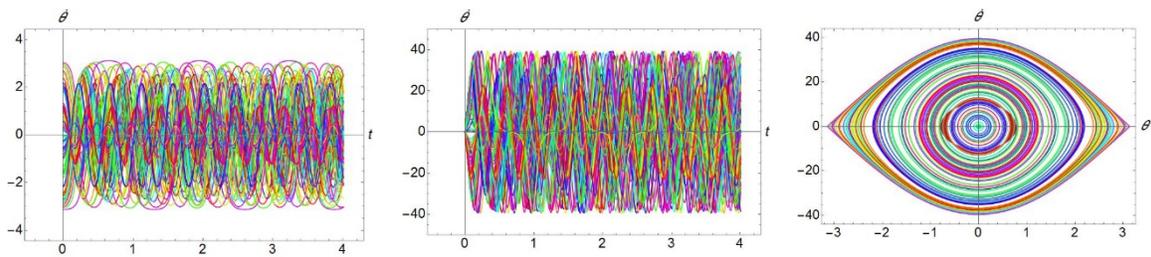


Figura 4 Comportamiento con el tiempo de la variable  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ , así como el plano fase para una condición inicial de  $\theta_0 = 45^\circ$  y los datos numéricos de prueba.

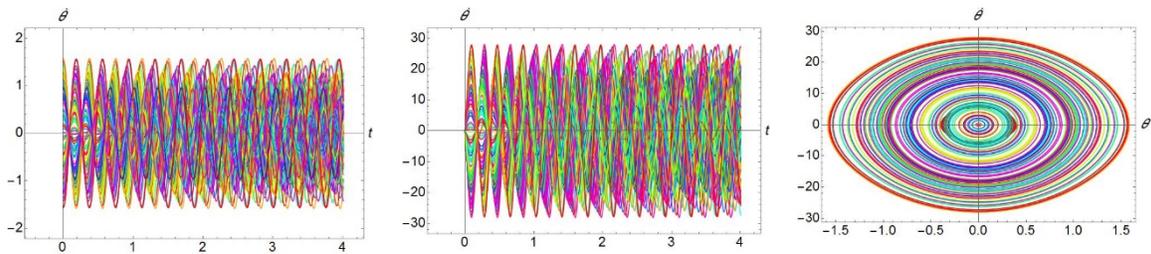


Figura 5 Comportamiento con el tiempo de la variable  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ , así como el plano fase para una condición inicial de  $\theta_0 = 23^\circ$  y los datos numéricos de prueba.

Se observa como el comportamiento del plano fase es sensible a las condiciones iniciales, y desde luego por el resultado expuesto, se muestra que la variable  $\theta$  resulta ser mucho más sensible que la rapidez angular, un resultado similar al mostrado en la figura 3, se muestra en la figura 5, donde se ha trabajado la simulación con los valores experimentales y la condición inicial de  $\theta = 90^\circ$

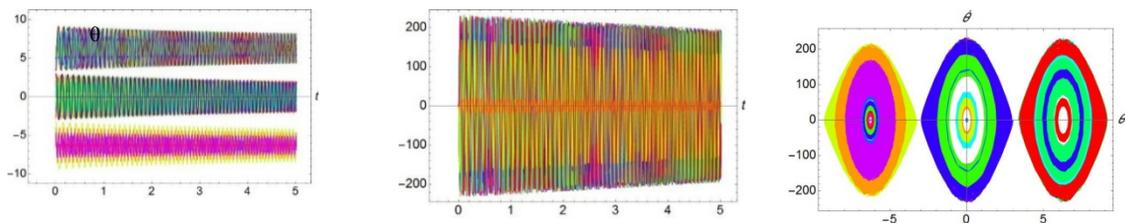
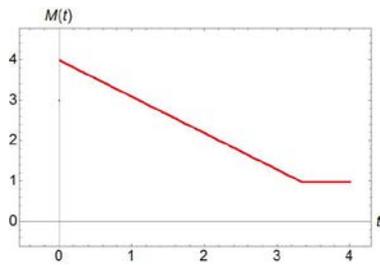
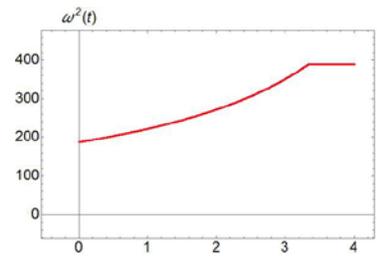


Figura 6 Comportamiento con el tiempo de la variable  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ , así como el plano fase para una condición inicial de  $\theta_0 = 90^\circ$  y los datos experimentales reales de la Tabla 1

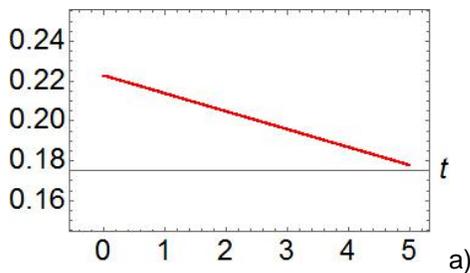


a)

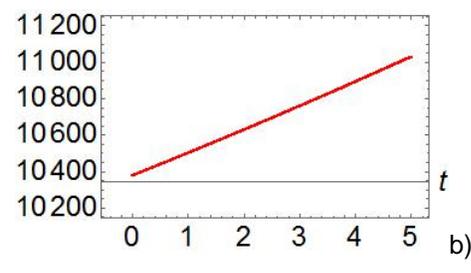


b)

Figura 7 a) Comportamiento de la masa como función del tiempo, para la simulación con los datos de prueba. b) Comportamiento con el tiempo de la frecuencia de oscilación ecuación (11) con los datos de prueba.



a)



b)

Figura a) Comportamiento de la masa como función del tiempo, para la simulación con los datos experimentales. b) Comportamiento con el tiempo de la frecuencia de oscilación ecuación (11) con los datos experimentales. En ambos casos se observa, que el tiempo de simulación no es suficiente para vaciar el material granular.

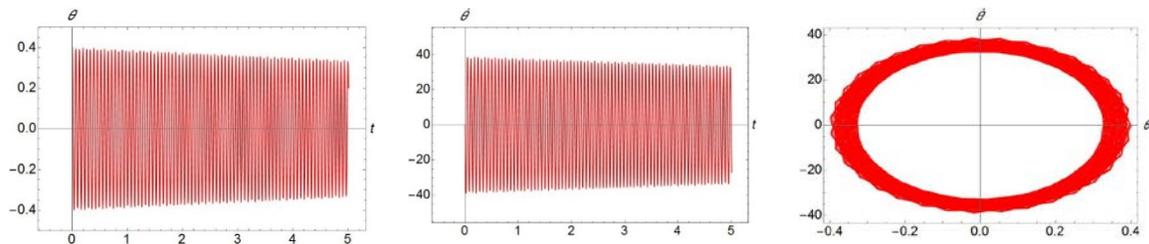


Figura 8 Relación para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  como función del tiempo para los datos experimentales con material granular de arena para gato  $m = 0.24$  kg y  $\theta_0=23^\circ$ , se muestra también el plano fase.

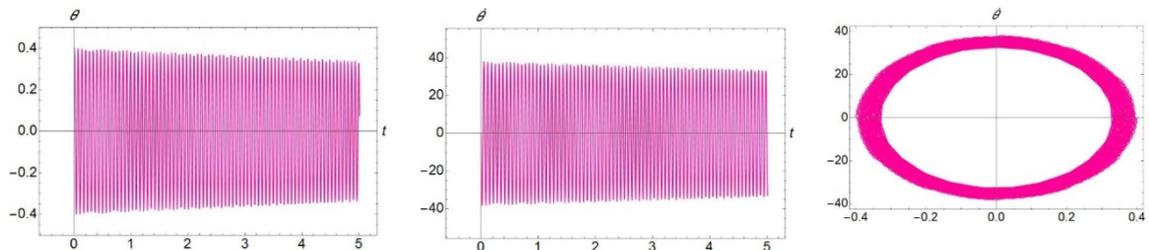


Figura 9 Relación para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  como función del tiempo para los datos experimentales con material granular de arena para gato fina  $m = 0.28$  kg y  $\theta_0=23^\circ$ , se muestra también el plano fase.

## 4.2 EXPERIMENTALES

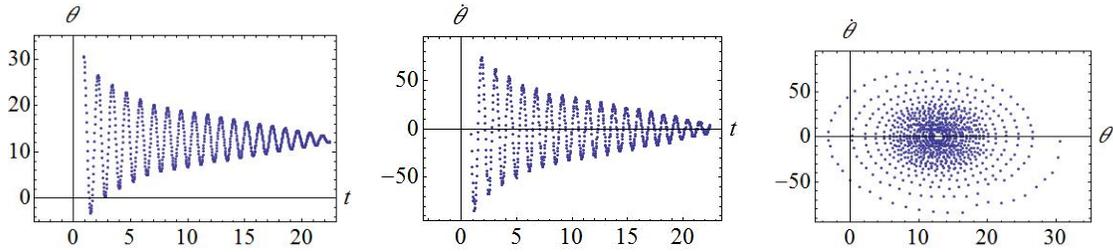


Figura 10 Relación para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  como función del tiempo para los resultados experimentales con material granular de azúcar  $m = 0.18$  kg y  $\theta_0 = 23^\circ$ , se muestra también el plano fase.

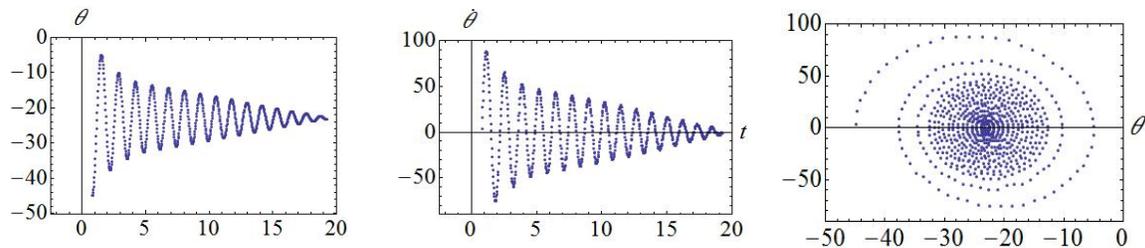


Figura 11 Relación para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  como función del tiempo para los resultados experimentales con material granular de arena para gato  $m = 0.24$  kg y  $\theta_0 = 23^\circ$ , se muestra también el plano fase.

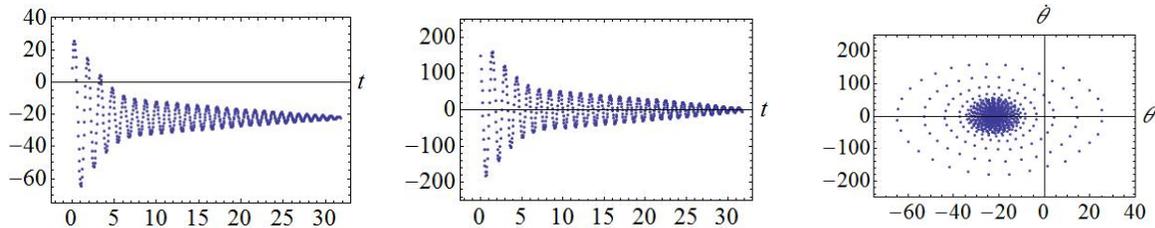


Figura 12 Relación para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  como función del tiempo para los resultados experimentales con material granular de arena para gato  $m = 0.28$  kg y  $\theta_0 = 23^\circ$ , se muestra también el plano fase.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan tanto resultados experimentales como numéricos relacionados con el sistema del péndulo de torsión de masa variable. Se montó un dispositivo experimental que permite medir las oscilaciones del péndulo cuando este desaloja masa, tanto el comportamiento experimental como el numérico, coinciden entre ellos al menos de manera cualitativa. Se requiere un mejor control del experimento para que la correspondencia logre ser cuantitativa. Se tiene un código de simulación de la ecuación diferencial no lineal, al cual se le puede agregar más información para hacerlo corresponder con el experimento, por ejemplo algún término de amortiguamiento. Asimismo se observa que el sistema es bastante sensible a las condiciones

iniciales, y como en este caso depende de muchas variables, tenemos un código que nos permita evaluar el comportamiento de las variables y su sensibilidad a ciertos cambios.

## BIBLIOGRAFÍA

1. S. Maca García, G. Del Valle, G. Hernández, S. E. Juárez Rodríguez, (2012), Estudio de un péndulo físico y un péndulo simple, de masa variable, Trabajo presentado en el Congreso Nacional de Física.
2. R. Espíndola-Heredia, Gabriela del Valle M. and G. Hernández. (2012). Numerical study of pendulums: from the simple pendulum approximation to the damped physical pendulum with variable mass. *Latin American Journal Education*, Vol 6, No 2, 201-207.
3. R. Espíndola; G. Del Valle; G. Hernández; A. Gutiérrez; J. Vivas, (2015), Oscilador Armónico Vertical de Masa Variable: Soluciones Experimentales, Teóricas y Numéricas, Trabajo presentado en el Congreso Nacional de Física.
4. Sears, Zemansky, Young, Freedman, *Física Universitaria* Vol. I, 12a Ed Pearson, 2009,
5. Tipler, Mosca, *Física 1. Para la Ciencia y la Tecnología* vol. I
6. C.Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mecánica, Berkeley Physics Course Volumen 1*, Segunda edición, ED Reverté.
7. Xiang-Dong Fan, Qi Liua, Lin-Xia Liu, Vadim Milyukov, Jun Luo, Coupled modes of the torsion pendulum, *Elsevier Physics Letters A* 372 (2008) 547–552
8. Massimo Bassan, Fabrizio De Marchi, Lorenzo Marconi, Giuseppe Pucacco, Ruggero Stanga, Massimo Visco, Torsion pendulum revisited *Elsevier Physics Letters A* 377 (2013) 1555–1562

## MODELOS DE COMPONENTES DE LA VARIANZA: TEORÍA Y APLICACIONES

Fernando Velasco Luna<sup>1</sup>, Hugo Cruz Suarez<sup>1</sup>, Hortensia Reyes Cervantes<sup>1</sup>, Ana Gabriela Santanero Alatoma<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

### RESUMEN

La metodología del diseño de experimentos ha mostrado una constante evolución, esto debido al desarrollo de la teoría estadística, en particular de la modelación estadística. Para el análisis de los datos generados por diseños experimentales se utiliza el análisis de la varianza, debido a su simplicidad computacional y sencillez para comprender la estimación de los parámetros y las pruebas de hipótesis. Variabilidad entre datos puede ser estudiada también a través de modelos estadísticos. Uno de tales modelos son los modelos multinivel o modelos de componentes de la varianza, estos modelos están enmarcados en el modelo lineal mixto. En este trabajo se presenta la teoría y aplicaciones relacionadas con los modelos de componentes de la varianza.

### 1. INTRODUCCIÓN

El análisis de varianza es un enfoque estadístico muy utilizado por su simplicidad computacional y por su sencillez para la estimación de parámetros en modelos que tienen efectos fijos, aleatorios o mixtos. Esta flexibilidad lo hace apropiado para una gran variedad de diseños, que incluyen diseños anidados y diseños de medidas repetidas. En general los diseños experimentales en la actualidad se utilizan en diversas áreas, por ejemplo la agronomía, la medicina, las ciencias sociales, entre otras. El procedimiento del Análisis de la Varianza se ha utilizado para el análisis de datos que son generados por los diseños experimentales, ya que por medio de este se obtiene de manera sencilla la estimación de modelos de efectos fijos, aleatorios o mixtos. Cuando se tienen dos factores el modelo utilizado para el análisis es el modelo de dos criterios de clasificación. Existe una gran variedad de literatura relacionada con la teoría y aplicaciones del ANOVA, Hocking, (1996), Rencher y Schaalje (2008), Sahai y Ojeda (2005).

En un trabajo monográfico muy amplio, Sahai y Ojeda (2005), hacen una revisión de los modelos de efectos: fijos, aleatorios, mixtos, y de los modelos de componentes de la varianza. Consideran el problema de la estimación puntual de los componentes de la varianza, llevando a cabo un análisis de varios métodos clásicos de estimación puntual de los componentes de la varianza. Lo anterior lo llevan a cabo considerando modelos de una y dos vías de clasificación. Variabilidad entre datos puede ser estudiada también a través de modelos estadísticos. Uno de tales modelos son los modelos multinivel o modelos de componentes de la varianza, estos modelos están enmarcados en el modelo lineal mixto. En este trabajo se presenta la teoría y aplicaciones relacionadas con los modelos de componentes de la varianza.

### 2. TEORÍA

Considérese que en un experimento se desea comparar  $a$  niveles de un factor  $A$ , la respuesta  $Y$  que se observa en cada uno de los  $a$  niveles del factor es una variable aleatoria. Estas observaciones pueden describirse mediante el modelo estadístico

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij},$$

$$i = 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, a, \quad (1)$$

Donde  $Y_{ij}$  denota la  $i$ -ésima observación del  $j$ -ésimo nivel del factor,  $\mu$  denota la media general de todos los niveles del factor,  $\alpha_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$ , y  $e_{ij}$  es el error aleatorio correspondiente a la  $i$ -ésima observación del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$ . Un experimento con estas características se denomina de un criterio de clasificación, ya que en este se estudia la variabilidad de la variable respuesta respecto a un sólo factor, y el modelo se denomina modelo ANOVA de un criterio de clasificación.

El diseño estadístico permite planear las condiciones en que se desarrollará un experimento, de manera que los datos puedan analizarse mediante un modelo estadístico particular apropiado. En este sentido es necesario que el investigador determine con anticipación la cobertura que tendrán las inferencias y conclusiones que se obtengan a partir de dicho análisis. Por esta razón es importante hacer una breve revisión de la forma como se determinan los  $a$  niveles del factor  $A$  que serán incluidos en el diseño experimental. En el modelo ANOVA dado por (1) pueden presentarse dos casos relacionadas con los  $a$  niveles del factor  $A$ . En el primer caso el interés del experimentador se centra en hacer inferencias acerca de los efectos de únicamente los  $a$  niveles del factor  $A$  bajo estudio. En este caso el modelo (1) se conoce como modelo de efectos fijos. El otro caso es cuando el experimentador desea realizar inferencias acerca de la población de niveles del factor  $A$  y los  $a$  niveles del factor  $A$  bajo estudio representan únicamente una muestra de esta gran población. En este caso el modelo (1) se conoce como modelo de efectos aleatorios. A continuación se describe brevemente estas dos situaciones.

*Modelo de efectos fijos.* En este caso el experimentador realiza una selección específica de los  $a$  niveles de interés ya que estos son los únicos niveles para los cuales se desea hacer inferencia acerca de su efecto. Para este caso las conclusiones obtenidas únicamente serán para estos  $a$  niveles considerados en el estudio.

Sea un experimento de un criterio de clasificación en el que se tienen  $a$  niveles del factor  $A$  y  $n_j$  observaciones por nivel. Cada una de las observaciones puede describirse mediante el modelo lineal

$$Y_{ij} = \mu_j + e_{ij},$$

$$i = 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, a, \quad (2)$$

Donde  $\mu_j$  denota la media del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$ . Este modelo también se puede describir por medio de:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij},$$

$$i = 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, a, \quad (3)$$

Donde  $\mu$  denota la media general,  $\alpha_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$  y  $e_{ij}$  es el error aleatorio, con los supuestos  $E(e_{ij}) = 0$ ,  $Var(e_{ij}) = \sigma_e^2$  y  $Cov(e_{ij}, e_{lk}) = 0$ , para  $(i, j) \neq (k, l)$ .

Bajo los supuestos del modelo dado por (3), la varianza de la variable respuesta  $Y_{ij}$ , está dada por

$$\text{Var}(Y_{ij}) = \sigma_e^2. \quad (4)$$

*Modelo de efectos aleatorios.* Si el factor  $A$  tiene un gran número de niveles, que provienen de una gran población de niveles, y el interés es realizar inferencias acerca de la población de niveles, lo que hace el investigador es seleccionar en forma aleatoria  $a$  niveles de esta gran población de niveles del factor. En este caso el interés no son los  $a$  niveles que se eligieron, sino la población completa de los niveles del factor  $A$ . En este caso el factor se denomina aleatorio. El modelo que describe esta situación está dado por

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu + \alpha_j + e_{ij}, \\ i &= 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, a, \\ \alpha_j &\sim N(0, \sigma_\alpha^2), \quad e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2), \end{aligned} \quad (5)$$

En este caso tanto  $\alpha_j$  y  $e_{ij}$  se consideran variables aleatorias independientes.

Bajo los supuestos del modelo dado por (5), la varianza de la variable respuesta  $Y_{ij}$ , está dada por

$$\text{Var}(Y_{ij}) = \sigma_e^2 + \sigma_\alpha^2. \quad (6)$$

Existen situaciones experimentales donde el interés se encuentra en estudiar de manera simultánea los efectos de dos factores sobre la variable respuesta de interés, así que se investiga todos los niveles de ambos factores así como sus posibles combinaciones. El objetivo es determinar si los dos factores influyen sobre la respuesta y si existe una interacción significativa entre ellos. Un experimento con estas características se denomina de dos criterios de clasificación.

Sea un experimento de dos criterios de clasificación en el que se tienen  $a$  niveles del factor  $A$ ,  $b$  niveles del factor  $B$ , y  $n$  observaciones por celda, denótese por  $y_{ijk}$  la  $k$ -ésima observación tomada en el  $i$ -ésimo nivel del factor  $A$  y el  $j$ -ésimo nivel del factor  $B$ , cada una de las  $abn$  observaciones pueden describirse mediante el modelo lineal

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}; \quad i = 1, \dots, a; \quad j = 1, \dots, b; \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

donde  $\mu$  denota la media general,  $\alpha_i$  es el efecto del  $i$ -ésimo nivel del factor  $A$ ,  $\beta_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo nivel del factor  $B$ ,  $(\alpha\beta)_{ij}$  es el efecto de la interacción del  $i$ -ésimo nivel del factor  $A$  y del  $j$ -ésimo nivel del factor  $B$ , y  $e_{ijk}$  es el error aleatorio. Existen posibles escenarios que dependen de cómo se consideren los factores  $A$  y  $B$ .

*Modelo de efectos fijos.* Si en el modelo (7) los factores  $A$  y  $B$  son fijos, los factores  $A$  y  $B$  tienen la misma importancia, por ello, interesa probar hipótesis acerca de la igualdad de los efectos de niveles de cada factor y de su interacción; esto es

$$\begin{aligned}
a) H_0 : \alpha_i = 0 \forall i & \quad \text{vs } H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i \\
b) H_0 : \beta_j = 0 \forall j & \quad \text{vs } H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ para algún } j \\
c) H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \forall (i, j) & \quad \text{vs } H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \text{ para algún } (i, j)
\end{aligned}
\tag{8}$$

Para probar las hipótesis anteriores se hace uso del procedimiento del ANOVA, el cual es un procedimiento mediante el cual la variabilidad total de la variable respuesta se descompone en la suma de sus componentes, en este caso se tiene  $SC_{Total} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{Error}$ , donde  $SC_{Total}$  denota la suma de cuadrados total,  $SC_A$  es la suma de cuadrados debida al factor  $A$ ,  $SC_B$  es la debida al factor  $B$ ,  $SC_{AB}$  es la debida a la interacción entre  $A$  y  $B$ , y  $SC_{Error}$  es la debida al error aleatorio.

*Modelo de efectos aleatorios* Si en el modelo (7) los factores  $A$  y  $B$  son aleatorios, los parámetros del modelo  $\alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}$ , y  $e_{ijk}$  son variables aleatorias independientes y se supone que  $\alpha_i$  es  $N(0, \sigma_\alpha^2)$ ,  $\beta_j$  es  $N(0, \sigma_\beta^2)$ ,  $(\alpha\beta)_{ij}$  es  $N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$  y  $e_{jki}$  es  $N(0, \sigma_e^2)$ . La varianza de cualquier observación,  $y_{ijk}$  está dada por:

$$Var(y_{ijk}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_e^2, \tag{9}$$

Donde  $\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_{\alpha\beta}^2, \sigma_e^2$  se denominan los componentes de la varianza. En el modelo de efectos aleatorios las hipótesis de interés son:

$$\begin{aligned}
a) H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0 & \quad \text{vs } H_1 : \sigma_\alpha^2 \neq 0 \\
b) H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 & \quad \text{vs } H_1 : \sigma_\beta^2 \neq 0 \\
c) H_0 : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0 & \quad \text{vs } H_1 : \sigma_{\alpha\beta}^2 \neq 0
\end{aligned}
\tag{10}$$

*Modelo de efectos mixtos.* Suponiendo que en el modelo de la ecuación (7) el factor  $A$  es fijo y el factor  $B$  es aleatorio, entonces se denomina modelo mixto, donde  $\alpha_i$  es el efecto del  $i$ -ésimo nivel del factor  $A$  y  $\beta_j$  es el efecto aleatorio del  $j$ -ésimo nivel del factor  $B$  y se supone que es una variable aleatoria  $N(0, \sigma_\beta^2)$ , la interacción  $(\alpha\beta)_{ij}$  es un efecto aleatorio y se supone  $N(0, [(a-1)/a] \sigma_{\alpha\beta}^2)$ , y  $e_{jki}$  es  $N(0, \sigma_e^2)$ . En el modelo mixto, el factor  $A$  es fijo y el factor  $B$  aleatorio, las hipótesis de interés son:

$$\begin{aligned}
a) H_0 : \alpha_i = 0 \forall i & \quad \text{vs } H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i \\
b) H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 & \quad \text{vs } H_1 : \sigma_\beta^2 \neq 0 \\
c) H_0 : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0 & \quad \text{vs } H_1 : \sigma_{\alpha\beta}^2 \neq 0
\end{aligned}
\tag{11}$$

En el modelo de análisis de varianza modelo habitual, el interés radica principalmente en la estimación acerca de las funciones lineales de los efectos en los modelos. Como se mencionó anteriormente estos efectos se llaman efectos fijos, y los modelos que contienen estos efectos se denominan modelos de efectos fijos. Hay, sin embargo, situaciones en las que no tenemos ningún interés en funciones lineales de efectos, pero en su caso, el interés primordial son las varianzas. Efectos de esta naturaleza se denominan efectos aleatorios, los modelos que implican ellos se llaman modelos de efectos aleatorios. Las variaciones asociadas con efectos aleatorios se

denominan componentes de la varianza. Un modelo lineal puede implicar algunos efectos fijos y algunos efectos aleatorios. Dicho modelo se denomina modelo de componentes de la varianza. El objetivo de utilizar este tipo de modelos es estimar los componentes de varianza. El modelo general de componentes de la varianza está dado por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}_1 e_1 + \mathbf{U}_2 e_2 + \cdots + \mathbf{U}_k e_k, \quad (12)$$

Donde  $\mathbf{X}, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{k-1}$  y  $\mathbf{U}_k$  son matrices conocidas,  $\boldsymbol{\beta}$  es un vector de efectos fijos, y  $e_1, e_2, \dots, e_k$  son vectores de efectos aleatorios. Para un modelo de componentes de la varianza el principal objetivo es la estimación y pruebas de hipótesis acerca de  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$ .

A continuación se expresa el modelo de dos criterios de clasificación sin interacción como caso particular del modelo de componentes de la varianza:

Sea un experimento de dos criterios de clasificación sin interacción en el que se tienen  $a$  niveles del factor  $A$ ,  $b$  niveles del factor  $B$ , y  $n$  observaciones por celda, cada una de las  $abn$  observaciones pueden describirse mediante el modelo lineal

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}; \quad i = 1, \dots, a; \quad j = 1, \dots, b; \quad k = 1, \dots, n, \quad (13)$$

Desarrollando el modelo para cada una de las observaciones, tomando, 2 niveles para el factor  $A$ , 3 niveles para el factor  $B$  y 2 observaciones para cada tratamiento, se tiene

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{122} \\ e_{131} \\ e_{132} \\ e_{211} \\ e_{212} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{231} \\ e_{232} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

Considerando  $\beta$  fijo y  $\alpha$  aleatorio, el modelo de dos criterios de clasificación sin interacción, en términos de producto de Kronecker, toma la forma

$$\mathbf{Y} = [(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2) : (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2)] \begin{pmatrix} \mu \\ \beta \end{pmatrix} + [(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2)] \alpha + \mathbf{I}_{12} e. \quad (15)$$

Definiendo

$$\mathbf{X} = [(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2) : (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2)], \quad \mathbf{U}_1 = [(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{1}_2)], \quad \text{y} \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{I}_{12}, \quad (16)$$

se tiene el modelo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\gamma + \mathbf{U}_1\varepsilon_1 + \mathbf{U}_2\varepsilon_2, \quad (17)$$

Donde  $\gamma = (\mu, \beta_1, \beta_2, \beta_3)^t$  y  $\varepsilon_1 = (\alpha_1, \alpha_2)^t$ , y  $\varepsilon_2 = e^t$ .

En el caso general se tiene considerando  $\beta$  fijo y  $\alpha$  aleatorio, el modelo de dos criterios de clasificación sin interacción, en términos de producto de Kronecker, toma la forma

$$y = [(I_a \otimes I_b \otimes I_n) : (I_a \otimes I_b \otimes I_n)] \begin{pmatrix} \mu \\ \beta \end{pmatrix} + [(I_a \otimes I_b \otimes I_n)]\alpha + I_{abn} e. \quad (18)$$

Tomando

$$\mathbf{X} = [(I_a \otimes I_b \otimes I_n) : (I_a \otimes I_b \otimes I_n)], \quad \mathbf{U}_1 = [(I_a \otimes I_b \otimes I_n)], \quad \text{y } \mathbf{U}_2 = \mathbf{I}_{abn}, \quad (19)$$

Se tiene el modelo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\gamma + \mathbf{U}_1\varepsilon_1 + \mathbf{U}_2\varepsilon_2, \quad (20)$$

Donde  $\gamma = (\mu, \beta_1, \dots, \beta_b)^t$  y  $\varepsilon_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_a)^t$  y  $\varepsilon_2 = e^t$ .

Para un modelo de componentes de la varianza el principal objetivo es la estimación y pruebas de hipótesis acerca de  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$ . Considérese el modelo de dos criterios de clasificación con interacción

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}; \quad i = 1, \dots, a; \quad j = 1, \dots, b; \quad k = 1, \dots, n, \quad (21)$$

Donde  $\mu$  y  $\alpha_i$  son los efectos fijos y  $\beta_j$  y  $(\alpha\beta)_{ij}$  son los efectos aleatorios. Suponiendo que  $\beta_j$ ,  $(\alpha\beta)_{ij}$ , y  $e_{ijk}$  están no correlacionados con media cero. Denotando  $Var(\beta_j) = \sigma_\beta^2$ ,  $Var((\alpha\beta)_{ij}) = \sigma_{\alpha\beta}^2$ , y  $Var(e_{ijk}) = \sigma_e^2$ . En primer lugar tratando  $\beta_j$  y  $(\alpha\beta)_{ij}$  como efectos fijos y particionando la suma total de cuadrados de la siguiente forma

$$\mathbf{y}^t \mathbf{y} = SS(\mu) + SS(\alpha) + SS(\beta) + SS(\alpha\beta) + SS(e), \quad (22)$$

Donde

$$\begin{aligned} SS(\mu) &= abc \bar{y}_{...}^2, \\ SS(\alpha) &= bc \sum_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2, \\ SS(\beta) &= ac \sum_j (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2, \\ SS(\alpha\beta) &= c \sum_i \sum_j (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$SS(e) = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2.$$

La suma de cuadrados medio de  $\beta$ ,  $\alpha\beta$ , y el error aleatorio  $e$  pueden ser obtenidas dividiendo por sus respectivos grados de libertad, es decir,

$$\begin{aligned} Q_\beta &= \frac{SS(\beta)}{b-1}, \\ Q_{\alpha\beta} &= \frac{SS(\alpha\beta)}{(a-1)(b-1)}, \\ Q_e &= \frac{SS(e)}{ab(c-1)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Consecuentemente, el siguiente sistema de ecuaciones puede ser obtenido igualando  $Q_\beta$ ,  $Q_{\alpha\beta}$  y  $Q_e$  con sus correspondientes valores esperados:

$$\begin{aligned} ac \sigma_\beta^2 + c \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_e^2 &= Q_\beta, \\ c \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_e^2 &= Q_{\alpha\beta}, \\ \sigma_e^2 &= Q_e. \end{aligned} \tag{25}$$

Los estimadores de análisis de varianza para  $\sigma_\beta^2$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^2$  y  $\sigma_e^2$  pueden ser obtenido resolviendo el sistema de ecuaciones, de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\beta^2 &= \frac{Q_\beta - Q_{\alpha\beta}}{ac}, \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 &= \frac{Q_{\alpha\beta} - Q_e}{c}, \\ \hat{\sigma}_e^2 &= Q_e. \end{aligned} \tag{26}$$

En esta parte nos hemos enfocado en el uso del método de Análisis de Varianza para obtener estimadores para los componentes de la varianza para modelos de componentes de la varianza en el caso balanceado. Para modelos de componente de la varianza caso desbalanceado Henderson propone tres métodos para la estimación de los componentes de la varianza (ver Searle, 2006). Algunos otros métodos de estimación de componentes de la varianza son el método de máxima verosimilitud, el método de máxima verosimilitud restringida.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una breve introducción a los modelos de componentes de la varianza, se mostró como los modelos de uno y dos criterios de clasificación son casos particulares del

modelo de componentes de la varianza. Además se presentó como se obtienen las estimaciones de los componentes de la varianza para el caso del modelo de dos criterios de clasificación con interacción. Se espera en trabajos futuros tratar otros métodos de estimación como el método de máxima verosimilitud y el método de máxima verosimilitud restringida.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. R.R. Hocking, *Methods and Applications of Linear Models; Regression and the Analysis of Variance*, John Wiley and Sons, New York, USA, 1996.
2. A.C. Rencher and G.B. Schaalje, *Linear Models in Statistics*, 2nd. edn, Wiley-Interscience, New Jersey. 2008.
3. H. Sahai, and M.M. Ojeda, *Analysis of Variance for Random Models, Unbalanced Data, Volume II*, Birkhäuser, U.S.A, 2005.
4. S.R., Searle, G., Casella, G. and C.E., McCulloch, *Variance Component*, 2nd Ed., John Wiley, New York, USA, 2006.

# DISEÑO DE UN PROGRAMA INSTRUCCIONAL PARA UN CURSO DE MATEMÁTICAS UTILIZANDO TECNOLOGÍAS EMERGENTES

Martha L García<sup>1</sup>, Kevin R. Tovar Ochoa<sup>1</sup>, Alejandro Valdovinos Maceiras<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto Politécnico Nacional ESIME Zacatenco

## RESUMEN

Se reportan resultados relacionados con una investigación que tiene como propósito diseñar y aplicar un programa instruccional para la materia de cálculo diferencial e integral a estudiantes de ingeniería incorporando diferentes tecnologías emergentes. Las nuevas formas de brindar a los estudiantes, oportunidades de aprendizaje están relacionadas con las tecnologías de información y comunicación, en esto, el diseño instruccional es sustancial para organizar las actividades propuestas a los estudiantes, en un ambiente presencial, híbrido o virtual. Después de analizar diferentes modelos se seleccionó el modelo ADDIE, acrónimo de los pasos clave que lo conforman: Análisis (análisis), Design (diseño), Development (desarrollo), Implementation (Implementación) y Evaluation (evaluación) debido a que es acorde con las características del programa instruccional a diseñar, y con la población a quién está dirigido. Se concluye que es necesario que el modelo elegido sea flexible y no se desarrolle de manera lineal-secuencial, debido a que se requiere evaluar cada una de las fases del modelo, antes de continuar con la siguiente para corregir o complementar lo que sea necesario.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los nuevos ambientes de aprendizaje han surgido de la mano con los desarrollos tecnológicos que los apoyan, y han modificado el rol de los profesores. Martínez (2009) identifica mayores exigencias para los profesores; quienes además de contar con los conocimientos disciplinares de las diferentes asignaturas que imparten, requieren ahora de conocimientos relacionados con el diseño de un plan o metodología para la organización de un curso o de una clase, bien sea presencial, en una modalidad mixta o en una a distancia. En este último caso, el papel del profesor cobra mayor relevancia por la separación geográfica entre el maestro y el alumno en tiempo. Tanto para la modalidad mixta como para la modalidad a distancia las tecnologías digitales brindan herramientas de apoyo, tal es el caso de los SGC (Sistemas de Gestión de Contenidos) que es un software que se encuentra en un servidor web al que se le incorporan, una o varias bases de datos, lo que permite a un desarrollador crear, administrar y actualizar páginas o sitios web de manera simple y dinámica, a través de interfaces gráficas y plantillas de diseño predefinidas (Baltazar, 2008).

En estas modalidades la experiencia de aprendizaje es compartida, por una parte el profesor proporciona las herramientas para que sean utilizadas por el estudiante; quién asume el compromiso tomar estas herramientas para iniciar el proceso de aprendizaje. Para que los resultados de este proceso sean favorables, se cuenta también con diferentes modelos de diseño instruccional, para el desarrollo de un programa instruccional, desde su inicio hasta su final.

Pero conocer los modelos y aplicarlos no forma parte de las actividades cotidianas que un profesor realiza en los ambientes presenciales, por lo que asumiendo la importancia del diseño instruccional

como eje de un programa de instrucción en la modalidad mixta o a distancia, se desarrolló una investigación que tuvo como propósito el diseño e implementación de un programa instruccional para la materia de Cálculo Diferencia e Integral de variable real. En este documento se reportan resultados parciales de dicha investigación, relacionados con la fase de diseño de las actividades de aprendizaje. Para llevar a cabo la investigación se analizó la clasificación propuesta por Braxton, Bronico, y Loms (1995) para seleccionar un modelo que cumpliera con las características del programa instruccional a diseñar, y que estuviera acorde con la población que participó en la investigación.

## 2. TEORÍA

Existen muchos modelos que son utilizados por los diseñadores para el desarrollo de un programa instruccional. Orellana, Suárez, y Belloch, (2001) identifican 5 fases en común en ellos: análisis, diseño, desarrollo, implementación y evaluación. Estas fases pueden variar de un modelo a otro, pero tiene el objetivo común de conformar una guía flexible para garantizar una instrucción eficiente.

Braxton, Bronico, y Loms (1995) clasificaron los modelos de diseño instruccional de acuerdo con seis factores: nivel de experiencia del diseñador; orientación (descriptivos o prescriptivos); estructura del conocimiento (procesual o declarativa); contexto (orientado al nivel educativo); propósito y utilización (a pequeña escala o gran escala) y su base teórica (teoría del aprendizaje).

A partir de las ideas anteriores, en este documento se asume la importancia del diseño instruccional como eje de un programa de instrucción en una modalidad mixta.

Para esta investigación se seleccionó el modelo ADDIE por tres razones, por ser acorde con los lineamientos de la institución en el que se llevó a cabo la investigación, por tener mayor flexibilidad en comparación con los otros modelos, lo que da la posibilidad de evaluar las fases anteriores y de ser necesario realizar una modificación y por haber obtenido resultados satisfactorios al utilizarlo en un curso de cálculo vectorial (García González y Mendoza, 2015).

El modelo ADDIE incluye las siguientes etapas (Sarmiento, 2004):

*Análisis.* En esta etapa, el diseñador debe evaluar las necesidades que se tienen en el entorno, definir el problema y buscar posibles soluciones para el mismo. Los resultados que se obtienen en la etapa de análisis son las metas instruccionales y las tareas que serán instrumentadas.

De la fase de análisis se obtiene los insumos para la siguiente etapa; información como el perfil del público al que va dirigido el programa instruccional, recursos materiales y humanos disponibles, tiempo disponible y la descripción de la forma que será evaluado el éxito o fracaso del diseño.

González y Mauricio (citados por Muñoz, 2011) sintetizan el análisis como la fase en la que el diseñador recolecta información preliminar que deberá tomar en cuenta para diseñar el curso.

*Diseño.* Tiene como objetivo planificar una estrategia para desarrollar el programa instruccional, tomando en cuenta los resultados obtenidos en la etapa de análisis.

En la etapa de diseño se especifica cómo alcanzar las metas educativas y ampliar los fundamentos educativos mediante algunos elementos como una descripción de la población a la que va dirigido el programa instruccional, escribir los objetivos y temas a evaluar, elegir el sistema de entrega y ordenar la instrucción.

Muñoz (2011) enlista los elementos de la etapa de diseño

- Escribir los objetivos de la unidad o módulo

- Diseñar la evaluación
- Escoger los medios y el sistema de hacer llegar la información a los alumnos.
- Determinar el enfoque didáctico general
- Planificar la formación, decidiendo las partes y el orden del contenido.
- Diseñar las actividades para los alumnos.
- Identificar los recursos necesarios

*Desarrollo.* Tiene como propósito generar las unidades, y para sus respectivos materiales didácticos. Se incluye la escritura del texto que contendrá el módulo didáctico, la programación de las páginas web y los materiales multimedia, etc. Después del desarrollo de los módulos didácticos son sometidos a pruebas piloto y revisión. Se incluyen actividades como:

- Trabajo con programadores para desarrollar los medios.
- Desarrollo del manual del usuario y de la guía del alumno si es necesario.
- Desarrollo de las actividades del alumno.
- Desarrollo de la formación.
- Revisión y agrupación del material existente.

*Implementación.* Para poner en funcionamiento el programa instruccional, se utiliza una prueba piloto que servirá para identificar si el programa funciona de forma eficiente y efectiva. En la prueba piloto se verifica que los alumnos comprendan el contenido de los materiales, que los materiales logren los objetivos propuestos, que se lleva a cabo una transferencia del conocimiento en los alumnos a su vida diaria, este último punto es difícil de alcanzar. En esta etapa en ocasiones se incluye la publicación de los materiales y la formación del profesorado.

*Evaluación.* Esta etapa, de acuerdo con Muñoz (2011), brinda la posibilidad de ser aplicada de manera formativa a lo largo del proceso; y de manera sumativa al final del proceso.

### **3. PARTE EXPERIMENTAL**

#### *Análisis*

En esta etapa se retomaron los resultados obtenidos en experiencias anteriores en las que se identificó que una modalidad blended learning es adecuada para brindar un apoyo para aquellos alumnos que requieran información complementaria, o aprender los conceptos vistos en una clase presencial y que eliminan las dificultades que surgen cuando los estudiantes no pueden asistir a las clases presenciales. Se consideró abordar los contenidos atendiendo a dos dimensiones: una relacionada con el contenido matemático y otra cognitiva. En la dimensión de contenido se identificaron las principales ideas relacionadas con el concepto de función; covariación y razón de cambio.

Hauger (1995) indica la conveniencia de desarrollar tres tipos de conocimiento de la razón de cambio: global, en un intervalo y puntual. La razón de cambio global es concomitante con las propiedades generales de una función, como su monotonía. El conocimiento de la razón de cambio, en un intervalo, se refiere al cambio de la variable dependiente para diferentes intervalos en los que se encuentra la variable independiente. Razón de cambio puntual (instantánea) tiene

que ver con qué rapidez con que cambia la variable dependiente respecto a un valor de la variable independiente. Hauger (Ibíd.) señala que estos tres tipos de conocimiento de la razón de cambio pueden ser examinados utilizando diferentes representaciones de las funciones, incluyendo gráficas, tablas de valores, ecuaciones y descripciones verbales.

Confrey y Smith (1994) indican que la covariación se enfoca en el cambio entre los valores de entrada y salida, más que en encontrar una fórmula para describir cómo obtener el valor de salida de un valor de entrada dado. En un problema, el estudiante llena una columna de una tabla con valores de la variable  $x$ , que encuentra al sumar una unidad al valor anterior; después construye una columna para valores de  $y$ . Obtiene estos valores mediante operaciones establecidas de acuerdo con el contexto del problema. Los autores señalan que el acercamiento covariacional tiene la ventaja de enfatizar la razón de cambio de una función respecto a la variable independiente y hacerla visible para los alumnos. Zandieh (2000) también recomienda estudiar el concepto de función como la covariación de los valores de entrada con los valores de salida, y señala que el acercamiento covariacional es esencial para entender el concepto de razón de cambio.

### Diseño

Para brindar una base teórica que permitiera que el alumno reforzara lo que el profesor impartía en clase, así como que contara con una serie de ejemplos resueltos, ejercicios, y actividades con las cuales el estudiante podía poner en práctica la teoría revisada, se capturaron las notas del curso en látex (figura 1).

Las actividades que corresponden a cada tema, se diseñaron para promover el trabajo de los estudiantes en tres representaciones: la representación verbal, la algebraica y la gráfica, lo que contribuye para que los estudiantes tengan acceso a información específica de cada representación, orientando su reflexión sobre el contenido matemático.

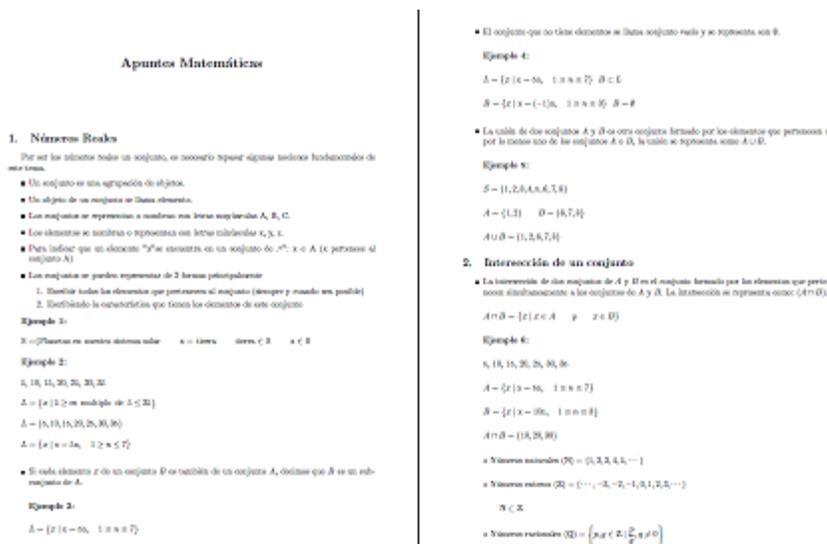


Figura 1. Notas del curso, proporcionadas a los estudiantes

En el caso de las funciones, pueden ser clasificadas en diferentes familias y cada una cuenta con sus propias características: Cada familia puede ser utilizada para modelar diferentes fenómenos

del mundo real. Así encontramos las familias de funciones polinomiales, funciones racionales, funciones exponenciales, funciones logarítmicas y funciones trigonométricas. Dentro de estas familias también es posible identificar subfamilias, como ejemplo se tienen dentro de la familia de las funciones polinomiales a las funciones cuadrática y lineal. Las funciones dentro de una familia se encuentran relacionadas de acuerdo con las propiedades específicas que comparten y los tipos de situaciones que modelan.

Un ejemplo se tiene en las Funciones exponenciales que describen muchos fenómenos del mundo real que involucran crecimiento y decaimiento

- La acumulación de interés compuesto
- Crecimiento de la población
- El decaimiento de elementos radiactivos
- Depreciación en el valor de un objeto

En las funciones exponenciales, la razón de cambio no es constante, se caracterizan por una razón de cambio que es proporcional al valor de la función. Es en este sentido que la razón de cambio de las funciones exponenciales juega un papel esencial en determinar los tipos de situaciones del mundo real que las funciones modelan (Thompson, Byrley, & Hatfield, 2013).

Un contexto en el que la razón de cambio es proporcional a la función. Considere que una población, de animales, tiene una gran cantidad de comida, agua, espacio, y recursos, y no existen depredadores. Después de un tiempo se esperaría que a la población se incorporen más miembros, porque cada pareja dará lugar a nuevos miembros. Si la población tiene 40,000 miembros y aumenta la población en 2,000 miembros en un año. Entonces, si todas las condiciones permanecen iguales, se esperaría que la población aumente en más de 2,000 miembros. Esto debido a que 42,000 miembros pueden generar más crecimiento que 40,000.

Time in Years ( $t$ )	Population ( $P$ )	
0	40,000	
1	42,000	
2	44,100	↻ × 1.05
3	46,305	↻ × 1.05
4	48,620	↻ × 1.05
5	51,051	↻ × 1.05
6	53,604	↻ × 1.05
7	56,284	↻ × 1.05
8	59,098	↻ × 1.05
9	62,053	
10	65,156	

Figura 2. Análisis de las funciones exponenciales

La razón de cambio en este caso es proporcional a la población, con constantes de proporcionalidad .05.

Otro ejemplo se tiene en las funciones cuadráticas, las primeras experiencias con las funciones con razones de cambio no constantes. Para las funciones cuadráticas la razón de cambio no es constante. Por definición, las funciones cuadráticas son funciones que se pueden escribir en la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para algunas constantes a, b y c.

Un contexto propuesto a los estudiantes fue el de una colina para esquiar que se modela gráficamente con dos arcos parabólicos que se encuentren combinados en un punto (figura 2).

¿Cuáles podrían ser las ecuaciones que representen a las parábolas y cuáles las coordenadas del punto de intersección?

El objetivo de esta actividad fue que los estudiantes exploraran el comportamiento de las parábolas, de acuerdo con lo que se encontró en la literatura relacionada en la que se señala que una tarea de exploración interesante es identificar en una gráfica el efecto de sumar y multiplicar por una constante una función dada, en este caso se explora el efecto que tiene en la función cuadrática el coeficiente que acompaña a  $x^2$ .

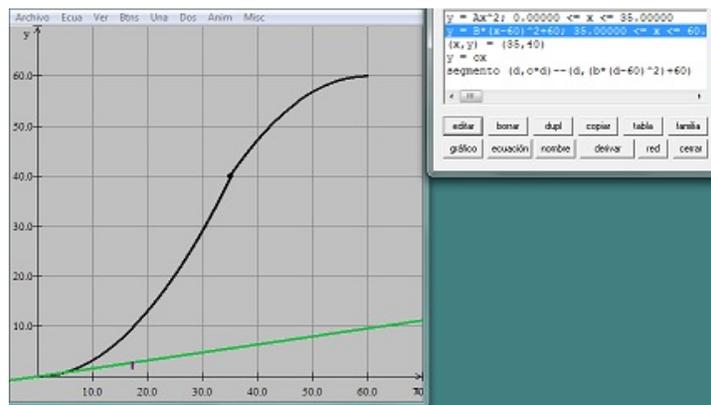


Figura 3. El problema de la colina

En la figura se identifica el punto de intersección de dos parábolas con diferente concavidad que fueron propuestas por los estudiantes durante esta actividad.

En una siguiente fase se procederá a la implementación de los materiales, se propone realizar esta etapa mediante una página web. Los servicios de almacenamiento en la nube son populares entre los usuarios porque permiten salvaguardar los datos, compartir archivos fácilmente o mantener sincronizada la información de nuestro equipo. Un servicio gratuito disponible es Google Drive, se revisarán las ventajas y desventajas de su uso para la implementación.

#### 4. RESULTADOS

Las actividades diseñadas e implementadas en una prueba piloto en esta investigación, han servido para obtener información relacionada no sólo con el aprendizaje de las matemáticas, específicamente el concepto de función, sino que también con el uso de diferentes tecnologías digitales. Se identificaron dificultades que deben tomarse en cuenta si se espera que los estudiantes potencien sus habilidades mediante su uso.

Por una parte se muestra la importancia de tomar en cuenta los elementos teóricos relacionados con el aprendizaje conceptual de las funciones, siendo este un elemento central en el estudio del cálculo, que permite interpretar, analizar y modelar el comportamiento de distintos fenómenos.

Por otra parte se obtuvo información acerca de las dificultades que tienen todavía nuestros estudiantes para utilizar las llamadas tecnologías emergentes en estos procesos de construcción conceptual. Dificultades que deben ser tomadas en cuenta para no ponerlos en desventaja en comparación de aquellos que pueden acceder a diferentes tecnologías emergentes.

#### 5. CONCLUSIONES

La revisión de la bibliografía relacionada con el aprendizaje de las funciones, fue pieza fundamental en el diseño de las actividades, en las que se buscó que los estudiantes reflexionaran en la posibilidad de clasificar a las funciones en diferentes familias y de identificar que cada una cuenta con sus propias características, utilizando para esto los conceptos de razón de cambio y covariación. Así mismo las actividades diseñadas brindaron a los estudiantes un contexto que fuera el punto de partida para modelar diferentes fenómenos del mundo real.

Las funciones exponenciales utilizadas en los el problema de el crecimiento de una población, resultaron de mayor dificultad para los estudiantes, pero sin duda tienen que ser incluidas en las actividades que trabajen.

En la investigación se ejemplificaron las etapas que se sugieren en el modelo ADDIE para utilizar un diseño instruccional. El modelo ADDIE resultó ser de gran apoyo ya que es un modelo flexible que permite incorporar diferentes materiales y utilizar una modalidad B-Learning,

#### BIBLIOGRAFÍA

1. Baltazar. L. Sistemas Gestores de Contenido, SGC. *Entér@te en Línea. Internet Cómputo y Telecomunicaciones*. Año 5, Núm. 53, 2006. Recuperado el 13 de febrero de 2015 de <http://www.enterate.unam.mx/Articulos/2006/octubre/sistemas.htm>
2. Braxton, S; Bronico, K. y Loms, T. Instructional Design Methodologies and Techniques (1995) Recuperado el 2 de enero de 2013 de :
3. [http://tangle.seas.gwu.edu/~sbraxton/ISD/design\\_models.html](http://tangle.seas.gwu.edu/~sbraxton/ISD/design_models.html)
4. Confrey, J. & Smith, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 1994, pp. 135-164.
5. García, M. González, C. y Mendoza, F. Una experiencia de diseño instruccional para un curso de matemáticas utilizando la herramienta Sphinx. *Memorias del IX Congreso Internacional de Innovación Educativa: Tendencias y Desafíos*. Realizado del 21 al 23 de octubre de 2015, Veracruz, México.
6. Hauger, G. *Rate of change knowledge in high school and college students*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association 2009. San Francisco, CA. Recuperado el 18 de julio de 2006, de:

[http://www.eric.ed.gov:80/ERICWebPortal/custom/portlets/recordDetails/detailmini.jsp?\\_nfpb=true&\\_ERICExtSearch\\_SearchValue\\_0=ED392598&ERICExtSearch\\_SearchType\\_0=eric\\_accno&accno=ED392598](http://www.eric.ed.gov:80/ERICWebPortal/custom/portlets/recordDetails/detailmini.jsp?_nfpb=true&_ERICExtSearch_SearchValue_0=ED392598&ERICExtSearch_SearchType_0=eric_accno&accno=ED392598)

7. Martínez, A. El diseño instruccional en la educación a distancia. Un acercamiento a los Modelos. *Apertura*, México, 9,10, 2009, pp.104-119.
8. Muñoz, P. Modelos de diseño instruccional utilizados en ambientes teleformativos. *Revista digital de investigación educativa Conect@dos*, II Edición, Año 2, 2011, pp. 29-59.
9. Orellana, M<sup>a</sup>., Suárez, J. y Belloch, C. El diseño instruccional una dimensión clave insuficientemente atendida en Teleformación [CD ROM]. En UNED (Ed.). *Actas de la Conferencia Internacional sobre Educación, Formación y Nuevas Tecnologías*. Virtual Educa 2001, Madrid, 3, 042, 2001
10. Thompson, P. W, Byerley, C., y Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools*, 30, 124-147.
11. Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, 4, 103-127. Providence, RI: American Mathematical Society.

## LA CIENCIA FICCIÓN COMO HERRAMIENTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Laura Ivonne Álvarez González<sup>1</sup>, Olga Leticia Fuchs Gómez<sup>1</sup>, Ma Guadalupe Raggi Cárdenas<sup>1</sup>,  
Eugenia Erica Vera Cervantes<sup>1</sup> y Blanca Susana Soto Cruz<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP.

### RESUMEN:

El objetivo del estudio es identificar condiciones didácticas para las situaciones de lectura de la ciencia ficción que favorezcan una buena aproximación al conocimiento disciplinar de la física. Se desarrolla una propuesta didáctica constructivista a partir de la ciencia ficción para la asimilación de conceptos físicos analizándolos desde de una perspectiva científica. Los resultados del aprendizaje de los estudiantes se comparan con los obtenidos en una clase tradicional obteniéndose una mejora significativa con este tipo de recursos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Desde el inicio de los tiempos, el ser humano ha valorado el arte y se ha expresado mediante ella. El desarrollo de la ciencia también ha sido vital para nuestra evolución. Sin embargo, cada vez es más común observar que si las cosas no tienen *utilidad* inmediata, dejan de ser trascendentes. Hoy, el ser humano promedio espera que otros le faciliten la vida y automatiza su comportamiento, deja de pensar en el entorno, lo que importa es cuán perezoso pueda volverse... La creatividad se ve limitada cada vez más, a pesar de ser la mayor arma de un científico, después de todo, "la imaginación es más importante que el conocimiento", así que promoverla es casi una obligación.

¿Cómo incentivar su desarrollo? Sin duda hay muchos medios, aunque elegimos la literatura porque ha sido un gran estímulo para la imaginación desde siempre. Dado que queremos desarrollar la creatividad y la imaginación desde una perspectiva científica, ponemos nuestra atención en la literatura de ciencia ficción. Este género ha sido escrito por hombres de ciencia (es decir, que se han instruido de alguna manera) que dejaron volar su imaginación, claro que conscientes de las limitaciones (o posibilidades) que nos ha brindado el estudio de la naturaleza, anticipando en diversas ocasiones el camino por el que nos llevaría el aprovechamiento de dichos estudios. Así, se hace evidente que el estímulo de la ciencia ficción es sumamente aprovechable para la enseñanza de las ciencias, particularmente la Física, con ventajas adicionales como una mejora en la comunicación escrita (tan obligada hoy en día).

Este último beneficio es de suma importancia, sobre todo si consideramos que cada vez hay más estudiantes de nivel superior, e incluso de posgrado, que no son capaces de redactar adecuadamente, requerimiento básico para cualquier investigador; por ende, se vuelve imperativo mejorar dichas habilidades; una vez más, la lectura de ciencia ficción se vuelve un excelente estímulo para lograrla<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Las obras de ciencia ficción aprovechables son principalmente del siglo XX. Después nos referiremos a la calidad de las mismas.

Así pues, se pretende facilitar la comprensión que los estudiantes de diferentes niveles puedan tener sobre diversos conceptos físicos y, además, las herramientas necesarias para expresar sus conocimientos y observaciones de manera escrita. Después de todo, gran parte de las investigaciones científicas se han realizado por personas que no han recibido una educación formal (pensando en el desarrollo de la teoría del electromagnetismo, por ejemplo), pero que sí tienen el interés y la creatividad necesarios para observar la naturaleza y desarrollar explicaciones al respecto. Es decir, la clave es estimular a los jóvenes para que sean capaces de notar que la física está presente en todos lados y vale la pena comprenderla al menos un poco.

## 2. TEORÍA

Si pensamos en que hay una gran dificultad para definir a las ciencias como la Física, la Química o la Biología<sup>2</sup>, es evidente que también se vuelve muy complicado definir la ciencia ficción. Muchos expertos en teoría literaria se debaten respecto a cómo definir este género. “Se trata de una tarea ardua porque es una literatura amplia y que varía con el tiempo. Más ardua aún si se pretende que la definición sea exhaustiva, [porque] suele pecar de imprecisa, excluyendo marcos referenciales extensos.”<sup>3</sup>

No tratamos de distinguir a la ciencia ficción según su extensión y no la pretendemos agrupar con los géneros clásicos (épico, lírico y dramático). Consideramos que “es un género narrativo que sitúa la acción en unas coordenadas espacio-temporales imaginarias diferentes a las nuestras, y especula racionalmente sobre posibles avances científicos o sociales y su impacto en la sociedad”.<sup>4</sup>

*El término “ciencia ficción” nació en 1926 de la mano del escritor Hugo Gernsback, quien lo utilizó en la portada de la que sería una de las más famosas revistas del género: Amazing Stories. Sin embargo, hay que remontarse más atrás para encontrar los primeros relatos de este género. Aunque los expertos encuentran ejemplos mucho más antiguos, el que está considerado generalmente el primer relato de ciencia ficción es Frankenstein, de Mary Shelley (1818). Posteriormente, en los años 30 del siglo XIX, Edgar Allan Poe escribió relatos como La incomparable aventura de un tal Hans Pfaal o Revelación mesmérica, que sin duda deben englobarse en la ciencia ficción. (...) También en el siglo XIX aparecerían Julio Verne y H. G. Wells, ambos considerados dos maestros del género, si bien el primero se centraba mayormente en el desarrollo de ingenios e inventos científicos y el segundo en la crítica social. (...) Pero seguramente fue la primera mitad del siglo XX la que podríamos denominar como Edad de Oro de la ciencia ficción, con la aparición de autores como Isaac Asimov, Arthur C. Clarke, Aldous Huxley, George Orwell o Ray Bradbury<sup>5</sup>.*

Como se ha mencionado, varios autores destacan por apelar más a las cuestiones científicas y explicar diversos fenómenos naturales en sus textos. Aunque también hay varios escritores que profundizan las implicaciones sociales de los posibles desarrollos científicos. “En todos los casos, y a lo largo de la historia, la ciencia ficción ha mantenido siempre la característica principal que la hace tan interesante: la capacidad de crear escenarios que inspiren debates filosóficos, sociales o científicos sobre la naturaleza del hombre y de la sociedad, plantear dudas, señalar peligros o buscar respuestas”<sup>6</sup>.

---

<sup>2</sup> Consideremos que todas estudian la naturaleza, pero desde diferentes perspectivas.

<sup>3</sup> Guillem Sánchez y Eduardo Gallego, ¿Qué es la ciencia ficción?, Universidad de Almería, p.1 (consultado en: [http://www.ual.es/~egallego/textos/que\\_cf.pdf](http://www.ual.es/~egallego/textos/que_cf.pdf)).

<sup>4</sup> “La novela de ciencia ficción: una introducción” en *Novela de ciencia ficción*, Biblioteca Nacional de España (consultado en: <http://www.bne.es/es/Micrositios/Guias/NovelaCienciaFiccion/Introduccion/>).

<sup>5</sup> Biblioteca Nacional de España, *Ibidem*.

<sup>6</sup> *Ibidem*.

Si el fundamento de la ciencia ficción son las ideas o prodigios, hemos de ver en qué consisten y cómo se formulan. [...] atribuimos a la ciencia ficción una cualidad racionalista. [...] Este componente racionalista está en los orígenes de la ciencia ficción. [...] Hugo Gernsback dirige la revista *Amazing Stories*, a partir de 1926 [que] fomentará [...] una concepción tecnicista y científicista de la ciencia ficción. Los prodigios y misterios deben racionalizarse hasta el punto que resulten creíbles como especulación amparada en las leyes de la ciencia<sup>7</sup>.

A pesar de que muchas veces se considera que las narraciones de ciencia ficción son completamente imposibles, la historia nos ha demostrado lo contrario (después de todo, Verne predijo diversos avances tecnológicos). La ciencia ficción lleva los conocimientos científicos al límite y exhorta al público a imaginar nuevos contextos en los que se puedan desarrollar, por ello, resulta muy conveniente para motivar y simplificar el aprendizaje de la física.

“La ciencia ficción ofrece una forma de enganchar a los estudiantes en nociones tomadas seriamente por la mayoría”<sup>8</sup>. Vandana Singh menciona en su artículo que Stephen Hawking decía que “la ciencia ficción es útil tanto para la estimulación de la imaginación como para difusión del miedo al futuro”.

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

En esencia, se siguió un procedimiento similar al propuesto por Vandana Singh en su artículo (véase el primer título en la bibliografía). Se trabajó con dos grupos de estudiantes de tercer año de nivel preparatoria sobre los temas de reflexión y refracción de la luz. En primera instancia, se realizó un cuestionario de preguntas previas:

¿Qué entiendes por reflexión?

¿Y por refracción?

¿En dónde puedes observar estos fenómenos?

¿En dónde crees que se pueden aplicar?

¿Se puede hablar de reflexión y refracción sin luz?

¿Por qué los espejos invierten izquierda y derecha, pero no arriba y abajo?

Además, para sondear el tipo de estudiantes con los que se estaba trabajando, se les preguntó si planeaban cursar una carrera universitaria y, de ser afirmativa su respuesta, si esta sería relacionada con las ciencias naturales y/o exactas; además, se indagó el interés de los alumnos por la ciencia ficción, así como su interpretación del concepto. De tarea, se le asignó al grupo experimental leer dos capítulos (XIX y XX) de *El hombre invisible* de H. G. Wells.

En la siguiente clase, al grupo de control se le aplicó una prueba rápida que incluía ejercicios y preguntas relacionadas con reflexión y refracción de la luz. Al grupo experimental se aplicó primero una *pregunta de lectura*<sup>9</sup>; a continuación, se formaron equipos para discutir brevemente la lectura y hacer una lista con los conceptos científicos que encontraron en los capítulos de la novela. Posteriormente, se profundizó en los temas de reflexión y refracción. Se estimuló la participación activa y se discutieron algunas cuestiones al respecto de los tópicos estudiados. Se concluyó la sesión con la misma serie de ejercicios y preguntas que se aplicó al grupo de control. Se procuró que los tiempos fueran asignados a las pruebas fueran aproximadamente iguales.

---

<sup>7</sup> Sánchez y Gallego, *Op. cit.*, p. 3.

<sup>8</sup> Vandana Singh, “More than cool science” en *The physics teacher*.

<sup>9</sup> Basado en el libro de Eric Mazur, *Peer instruction: a user’s manual*, Prentice Hall.

La prueba efectuada se enuncia a continuación:

¿Qué característica tenían los libros que le robó el vagabundo (pregunta de lectura)

¿Es válida la ley de reflexión en espejos curvos?

Un rayo de luz que se propaga por el aire ( $n=1$ ) incide en un medio con índice de refracción  $\sqrt{3}$ . Si la suma de los ángulos de incidencia y refracción es  $90^\circ$ , calcular el valor de los ángulos.

Un vidrio determinado posee un índice de refracción  $n = \sqrt{2}$ . ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total interna que sale de este vidrio y entra al aire ( $n=1$ )?

¿En qué diagrama se muestra una situación en que es posible que haya reflexión total interna?

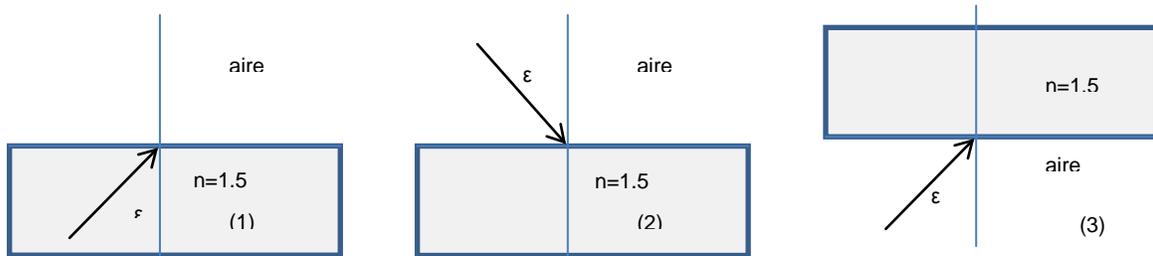


Fig. 1. Esquemas para identificar en qué situación hay RTI.

Un rayo de luz incide con un ángulo de  $60^\circ$  sobre una superficie plana que separa dos medios de diferente índice. Si el medio incidente es aire, ¿cuál es el valor del índice de refracción del segundo medio, si entre el rayo incidente y el refractado hay una desviación de  $30^\circ$ ?

Dibuje el trazado de al menos tres rayos y encuentre la imagen para espejos planos.

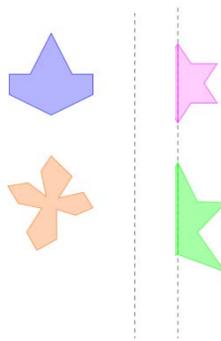
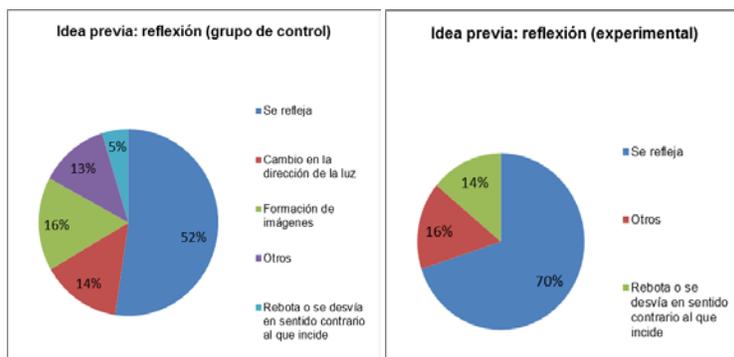


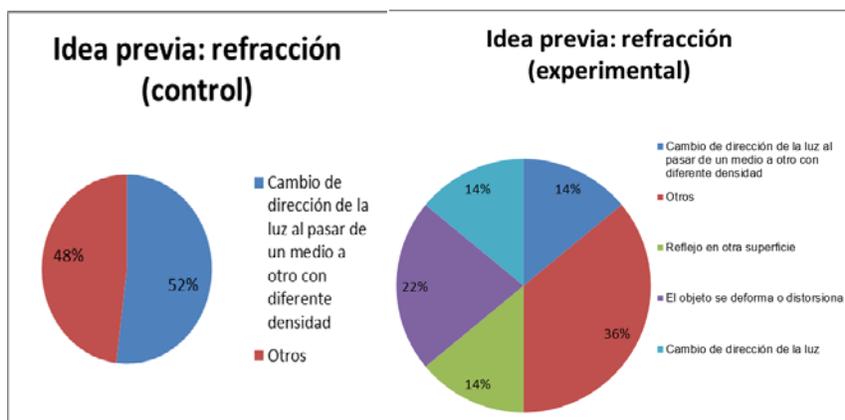
Fig. 2. Figuras cuya reflexión en un espejo plano debían dibujarse.

#### 4. RESULTADOS

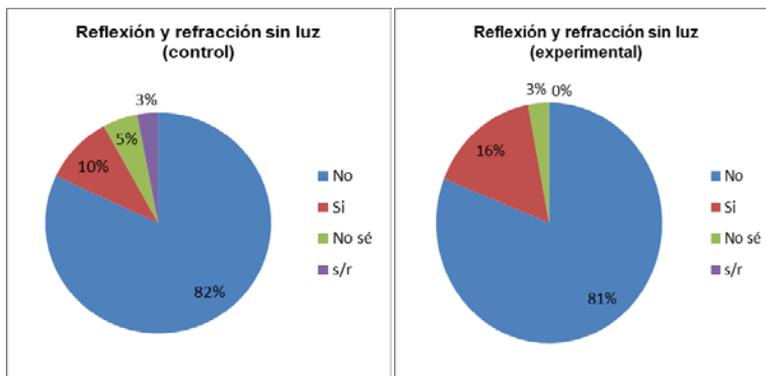
A pesar de que los estudiantes ya habían asistido a clases respecto a los temas elegidos en su curso normal, había mucha confusión al momento de explicar qué eran esos fenómenos. En ambos grupos, más del 50% aludía a la palabra “reflejo” para definir la reflexión y muy pocos explicaban cómo era la desviación de la luz al producirse este fenómeno. En las siguiente gráfica se muestran algunos resultados obtenidos del cuestionario de preguntas previas, aunque al ser tan variadas algunas respuestas, se agrupan en la categoría “Otros”.



Gráficas 1 y 2. Muestran las respuestas a la idea previa de reflexión.

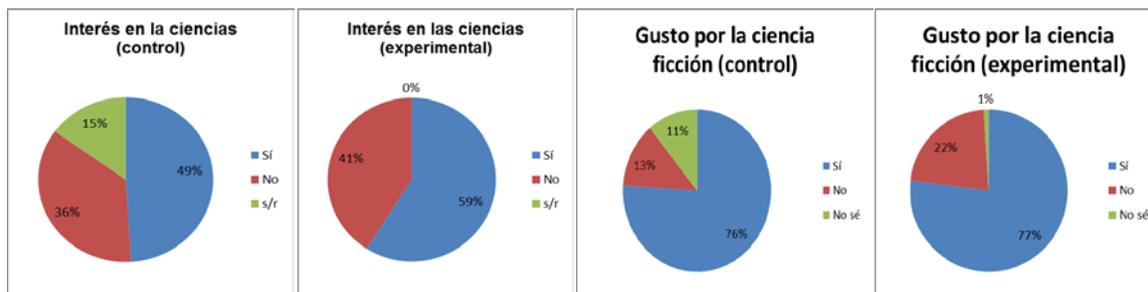


Gráficas 3 y 4. Muestran las respuestas a la idea previa de refracción



Gráficas 5 y 6. Muestran las respuestas a la idea previa de reflexión y refracción sin luz

Las otras respuestas son muy variadas, habiendo incluso una desde una perspectiva filosófica. Además, se preguntó a los estudiantes sobre sus intereses a futuro y en la ciencia ficción. En el grupo de control el 100% quería estudiar una carrera universitaria y en el experimental, un 94%. En las siguientes gráficas se muestra que gran parte se interesa en áreas relacionadas con las ciencias naturales y/o exactas. Además, también hay un interés muy marcado en la ciencia ficción.



Gráficos 7-10. Muestra interés de ambos grupos por las ciencias naturales y/o exactas (7 y8) y por la ciencia ficción (9 y10).

En el grupo experimental, los resultados de la pregunta de lectura (¿Qué contenían los libros que se llevó el vagabundo?) se ilustran en la gráfica siguiente. El 75% de los estudiantes respondió correctamente.

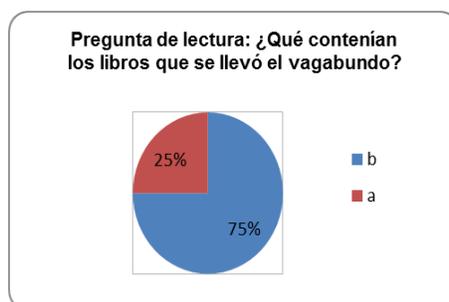
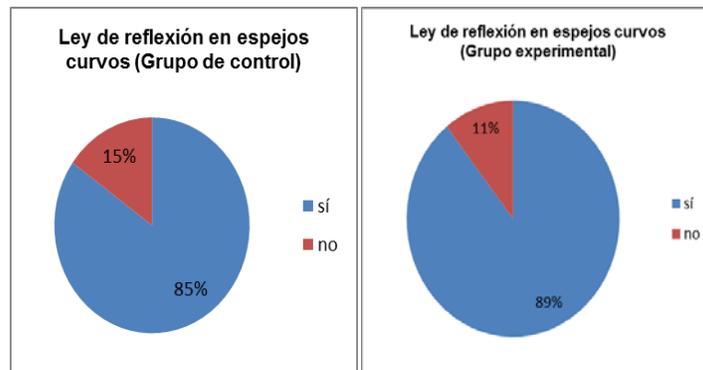


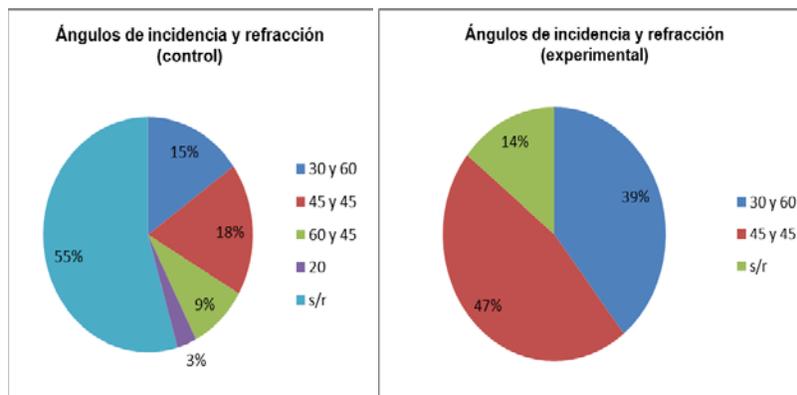
Gráfico 11. Muestra la distribución de respuestas de la pregunta de lectura (siendo b la correcta).

A continuación, se muestran dos gráficas que muestran los resultados a la pregunta sobre la validez de la ley de reflexión en espejos curvos. En este caso, la diferencia no es notable.



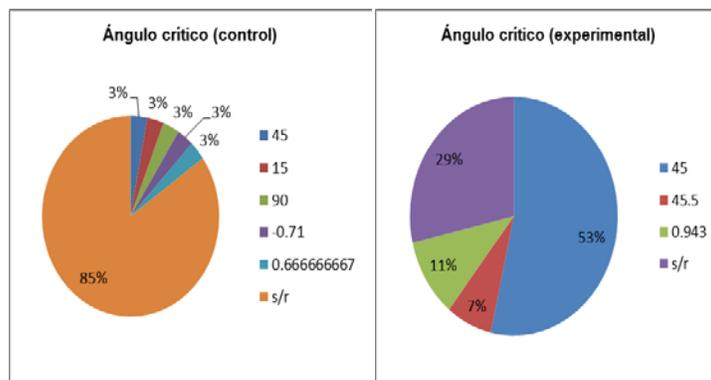
Gráficos 12 y 13. Muestra la distribución de respuestas de la pregunta de ley de reflexión sobre espejos curvos en el grupo de control y en el experimental.

El siguiente problema era de tipo numérico. A pesar de que a ambos grupos se les otorgó el mismo tiempo para responder cada ejercicio, empieza a notarse una gran diferencia. En el grupo de control, el 15% respondió correctamente, mientras en el grupo experimental fue el 39%. Además, en el grupo de control hubo mayor diversidad de respuestas y una mayor cantidad de estudiantes que no respondieron (el 55%).



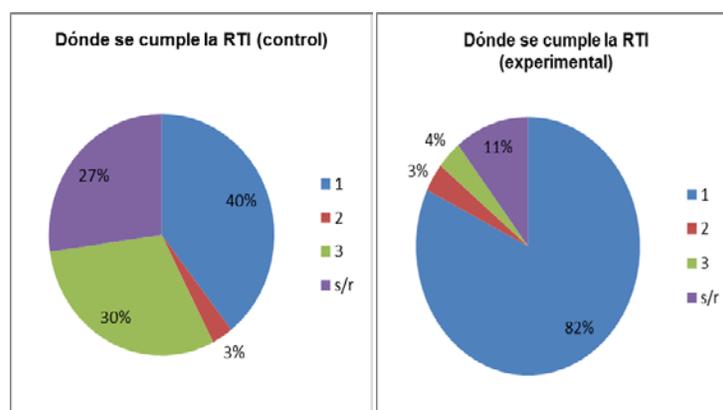
Gráficos 14 y 15. Muestra la distribución de respuestas al ejercicio de refracción del grupo de control y del experimental.

El siguiente problema también era de tipo numérico. Los estudiantes del grupo de control no respondieron en su mayoría (85%) y, además, los que respondieron lo hicieron de forma muy variada. Solo uno logró responder correctamente. En contraparte, el 53% del grupo experimental logró responder correctamente y, aunque el 29% no respondió, hubo menos variedad de respuestas.



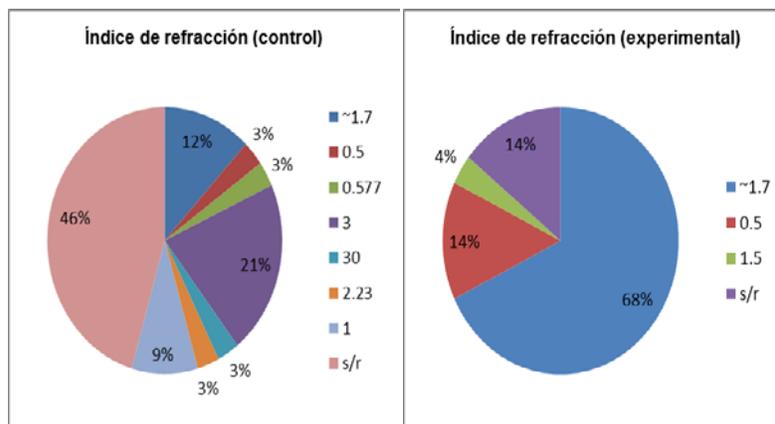
Gráficos 16 y 17. Muestra la distribución de respuestas al cálculo del ángulo crítico en el grupo de control y en el experimental.

El complemento de ese ejercicio numérico era uno de tipo conceptual en que el alumno debía elegir el diagrama que representara la situación en que se podía dar el fenómeno de reflexión total interna. La respuesta correcta fue elegida por el 40% de los estudiantes del grupo de control y por el 82% del grupo experimental. Apenas el 11% de los alumnos del grupo experimental no respondió, mientras el 27% de los del grupo de control optaron por la misma opción.



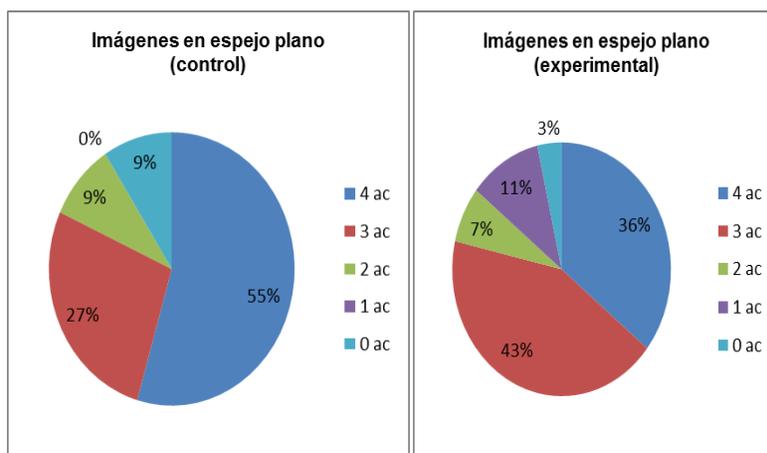
Gráficos 18 y 19. Muestra la distribución de respuestas sobre el caso donde puede haber RTI en el grupo de control y en el experimental.

En el penúltimo ejercicio se solicitaba que resolvieran para encontrar el índice de refracción en un caso particular. El 12% del grupo de control respondió correctamente, mientras el 68% del grupo experimental logró acertar. Además, la diversidad de respuestas en el grupo de control también fue mucho mayor. Es posible que el 21% de estudiantes que respondieron 3 se haya confundido y por eso omitió la raíz.



Gráficos 20 y 21. Muestra la distribución de respuestas al cálculo del índice de refracción en el grupo de control y en el experimental.

Finalmente, en el último ejercicio se pidió a los alumnos que dibujaran las imágenes que se crearían al colocar un espejo plano. En este caso, el 55% del grupo de control obtuvo los cuatro aciertos o puntos que correspondían, mientras en el grupo experimental fue el 36%. A pesar de ello, en el grupo de control el 9% no obtuvo acierto alguno y en el grupo experimental, el 3%.



Gráficos 22 y 23. Muestra la distribución de aciertos en el ejercicio de reflexión en espejo plano en el grupo de control y en el experimental.

Para cerrar, hace falta mencionar que la calificación promedio de los grupos fue 4.28 para el grupo de control y 7.03 para el grupo experimental, que es 1.6 veces mejor que el de control.

## 5. CONCLUSIONES

Hemos observado que la ciencia ficción no solamente estimula la imaginación y el interés en la ciencia formal, sino que permite clarificar conceptos cuando se desarrolla un proceso que la involucre como herramienta. Los resultados no solo muestran una gran diferencia entre el grupo de

control y el experimental, también muestran una gran mejoría entre los resultados de las ideas previas, así como un mayor interés por aprender más sobre la física a partir del uso de esta herramienta. Cabe aclarar que el grupo de control era mucho menos participativo y a pesar de que se le propuso en primera instancia ser el grupo experimental, rechazó la propuesta, lo cual es importante, pues también hay que considerar que los estudiantes están acostumbrados a la enseñanza tradicional. En contraparte, el grupo experimental desde el principio se manifestó interesado y se esforzó por participar activamente durante toda la sesión.

En el trabajo que se reporta no se ha desarrollado al máximo el potencial de la ciencia ficción y, sin embargo, se notan enormemente sus efectos en la comprensión. El grupo experimental expresó su interés en continuar siendo parte de esta propuesta.

### **BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS**

1. Singh, Vandana, "More than "Cool Science": Science Fiction and Fact in the Classroom" en *The Physics Teacher* 52, 106 (2014).
2. Palacios, Sergio L., "El cine y la literatura de ciencia ficción como herramientas en la enseñanza de la física: un experimento en el aula" en *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de la Ciencias*, 2007 4(1) pp. 106-122 (consultado en <http://hdl.handle.net/10498/16129>).
3. Sánchez, Guillem y Eduardo Gallego, *¿Qué es la ciencia ficción?*, Universidad de Almería (consultado en: [http://www.ual.es/~egallego/textos/que\\_cf.pdf](http://www.ual.es/~egallego/textos/que_cf.pdf)).
4. "La novela de ciencia ficción: una introducción" en *Novela de ciencia ficción*, Biblioteca Nacional de España (consultado en: <http://www.bne.es/es/Micrositios/Guias/NovelaCienciaFiccion/Introduccion/>).

## CRECIMIENTO Y CONTROL DE TUMORES CEREBRALES

Venecia Chávez Medina<sup>1</sup>, Francisco Siddhartha Guzmán<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Edificio Alfa, Cd. Universitaria, 58040 Morelia Michoacán. <sup>2</sup> Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Edificio C3, Cd. Universitaria, 58040 Morelia Michoacán.

### RESUMEN

En este trabajo se presenta un código capaz de simular el crecimiento de tumores cerebrales como un proceso de difusión. Al proceso de difusión se agregan términos de crecimiento de la población de células enfermas. La dinámica del proceso es dictada por una ecuación parcial de difusión con términos fuente, que resolvemos usando métodos numéricos basados en diferencias finitas. Presentamos el proceso de motilidad de una población inicial de células como un fenómeno de difusión para probar nuestro código. Posteriormente evolucionamos tumores con datos iniciales correspondientes a una población detectable de células afectadas tanto en una región de materia gris como en una de materia blanca. Presentamos la evolución del tumor cuando pasa a través de una interfaz entre materia gris y blanca. Para ello consideramos parámetros altos de reproducción de células  $k=1.2 \times 10^{-2} \text{ cel / día}$ , un coeficiente alto de difusión en la materia gris  $D_g=1.3 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 / \text{ día}$  y un coeficiente de difusión en la materia blanca alto  $D_w=5D_g$ . En estos experimentos numéricos, las condiciones iniciales corresponden a distribuciones iniciales escalón con una población detectable de  $500 \text{ cel / cm}^2$ .

### 1. INTRODUCCIÓN

Los tumores cancerígenos, se originan por la mutación de una o más células bajo un crecimiento rápido y descontrolado que afecta el funcionamiento del tejido normal. En este trabajo nos enfocamos en los tumores cerebrales, en especial los gliomas (que surgen de células gliales, encargadas de mantener las neuronas en su lugar y funcionando correctamente) y glioblastomas o astrocitomas (el tipo de glioma más común que se desarrolla a partir de los astrocitos -célula en forma de estrella- y que usualmente es altamente maligno), que forman alrededor de la mitad de los tumores cerebrales diagnosticados, con grandes habilidades invasoras y cuyo tratamiento temprano ha tenido pocos beneficios.

Para nuestro análisis suponemos que el cerebro cuenta con dos tipos de tejido: materia gris y materia blanca. La materia gris se compone de células neuronales y gliales que controlan la actividad cerebral, que entre otras estructuras constituye el córtex. Los caminos fibrosos de materia blanca son manojos de axones neuronales mielinados ubicados en regiones internas del cerebro. Estas fibras de materia blanca se abren camino entre regiones de materia gris conectando, en cada hemisferio, el córtex a las regiones centrales del cerebro.

El pronóstico para pacientes diagnosticados con neoplasias que afectan el sistema nervioso, depende de muchos factores. Un elemento importante en el pronóstico es la evaluación cuantitativa de la evolución del tumor y una predicción de la evolución del tumor en función de la

zona donde ha comenzado a desarrollarse. A diferencia de otros tumores, los gliomas son altamente difusos y un diagnóstico rápido es importante. Para ello es que es importante usar modelos matemáticos capaces de predecir en el corto y mediano plazos, la evolución del tumor.

En la actualidad los modelos matemáticos comunes para la evolución de tumores involucran procesos de difusión. En el caso de las células cancerígenas, la difusión por sí mismas de las células representa un fenómeno que puede estudiarse incluso in vitro, y permite incluso estimar la eficacia de modelos matemáticos que describen el proceso.

Adicional al proceso de difusión, los modelos deben incluir una componente reproductiva de las células. Comúnmente se usa el modelo maltusiano de reproducción que ofrece un comportamiento exponencial de la población de células en el tiempo. No es complicado agregar componentes de tratamiento. La quimioterapia por ejemplo, es una de las terapias con que se trata éste tipo de tumores. Usa químicos especializados para envenenar las células anormales, sin embargo, los gliomas suelen ser tumores de naturaleza altamente difusiva y heterogéneos. Así, mientras una población de células se reproduce otra responde al tratamiento y muere (Shochat et al. 1999). En este trabajo nos limitamos a presentar solamente la evolución de tumores sin terapia.

Una vez que se ha definido el modelo, es necesario resolver la ecuación de difusión resultante, con términos de crecimiento, que representa un problema parabólico de problemas iniciales. Para resolver dicho problema hay métodos semianalíticos que buscan soluciones aproximadas (por ejemplo Kevorkian J. 1999) o las ecuaciones se resuelven numericamente (por ejemplo Swanson 2000, Murray 2000). En este trabajo adoptamos el enfoque de la solución numérica y procedemos a presentar nuestro código capaz de simular la evolución de un tumor de acuerdo al modelo difusivo.

## 2. MODELO MATEMÁTICO Y MÉTODOS NUMÉRICOS

Partimos de la suposición de que los procesos de difusión están gobernados por la ecuación de difusión con un término reproductivo de fuente de tipo maltusiano. En nuestro caso, si  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  representa la distribución de células en el punto  $\vec{x}$  al tiempo  $t$  en el dominio espacial y temporal. La ecuación de evolución que obedece  $\rho$  es por tanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\vec{x}) \nabla \rho) + k\rho \quad (1)$$

Donde  $k$  representa la tasa de crecimiento del número de células y  $D(\vec{x})$  es el coeficiente de difusión, que en general depende de la posición donde se mide  $\rho$ . Se ha verificado que el coeficiente de difusión de células cancerígenas en los tumores que aquí nos ocupan son distintos en la materia gris y en la región blanca (Giese and Westphal 1996). En humanos, los valores típicos de los coeficientes de difusión en la materia gris son de alrededor de  $D_g = 1.3 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 / \text{día}$ , mientras que el coeficiente de difusión en la materia blanca varía de entre 3 y 5 veces el de la materia gris (Tracqui et al. 1995). Que la materia blanca tenga un mayor coeficiente de difusión significa que las células afectadas se reproducen y difunden de modo mucho más eficiente en regiones blancas que en grises. Por ello, la evolución de un tumor depende en gran medida de dónde surja y comience a propagarse.

El método numérico. Para que la ecuación de difusión (1) quede completamente planteada es necesario definir algunas propiedades. En los experimentos numéricos de este trabajo se resolverá la ecuación (1) en dos dimensiones espaciales para estudiar la evolución de la población de

células enfermas  $\vec{x} \in [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$  para  $t \geq 0$ . Esto significa que se considera un corte de dos dimensiones y por ello la evolución de la población de células supone simetría s-lab. Las condiciones iniciales para los resultados en este trabajo constan de una distribución escalón de las células:

$$\rho(\vec{x}, 0) = \begin{cases} \rho_0, & x^2 + y^2 \leq R \\ 0, & x^2 + y^2 > R \end{cases} \quad (2)$$

Donde  $R$  es el radio de un círculo donde inicialmente hay una población uniformemente distribuida de células.

La evolución del sistema está a cargo de la ecuación (1), que resolvemos usando el método de líneas. Para ello usamos estenciles de discretización de segundo orden y como integrador en el tiempo se usa el método de Runge-Kutta de tercer orden. La discretización del dominio corresponde a una malla uniforme con  $x_j = x_{\min} + j\Delta x$  y  $y_j = y_{\min} + j\Delta y$ , donde  $\Delta x = \Delta y$  son las resoluciones espaciales, con  $j = 0, \dots, N$ . La discretización temporal es tal que  $t^k = k\Delta t, k \in Z^+$ , con la relación  $\Delta t / \Delta x^2 \leq 0.5$  para garantizar la estabilidad con los parámetros usados en nuestro problema. Las condiciones de frontera son de no flujo  $\hat{n} \cdot \nabla \rho(\vec{x}, t) = 0$ , en la frontera del dominio.

### 3. PRUEBAS DEL CÓDIGO

La *primera prueba* del código consiste en reproducir experimentos elementales in vitro. Se trata de una prueba en la que experimentalmente se permite la motilidad de células cancerígenas en gel, y se mide la distribución de células en función del tiempo (Chicoine and Silbergeld 1995), en tal caso, las condiciones en la ecuación (1) son tales que  $k=0$  porque se inhibe la reproducción y el coeficiente de difusión es constante  $D$ .

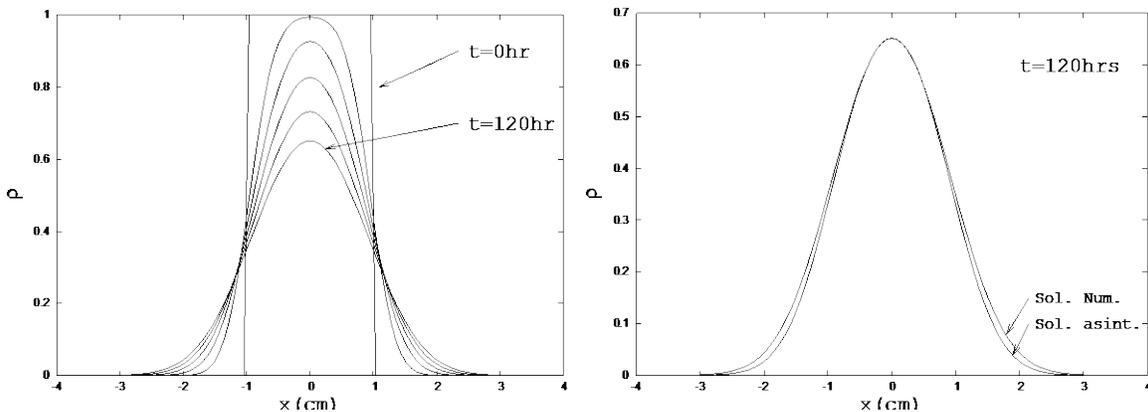


Figura 1. Motilidad de células cancerígenas in vitro bajo un coeficiente de difusión constante y sin proliferación. En la parte izquierda se muestra  $\rho$  cada 24 horas a partir de los datos iniciales de escalón. En el panel derecho se muestra una comparación entre nuestra simulación y una solución aproximada usando funciones de Bessel modificadas (Kevorkian 1999, Swanson 1999), misma que reproduce los datos experimentales en el régimen de 72 a 120 horas.

Al tratarse de una prueba estándar de motilidad, usamos el valor de  $D=0.002\text{cm/hr}$  que se ha inferido del experimento in vitro y el valor  $R=1$  (Swanson 1999). Esta prueba suele realizarse en coordenadas polares, pero aquí lo hemos hecho directamente en el dominio descrito en coordenadas cartesianas con  $-x_{\min}=-y_{\min}=x_{\max}=y_{\max}=4$ . Los resultados de la solución numérica son comparados con los experimentos en la Figura 1. Se muestra el valor de  $\rho$  cada 24 horas y la comparación con una solución cerrada aproximada del sistema (1) en coordenadas polares, en términos de funciones de Bessel modificadas. Dicha aproximación ajusta los datos experimentales en el rango de 72 a 120 horas.

Para esta prueba se cubrió el dominio con una malla de 100x100 nodos y se usó un factor  $\Delta t/\Delta x^2=0.2$  donde  $\Delta t$  es la resolución temporal que se usa en el método de líneas y  $\Delta x$  es la resolución espacial del dominio espacial discreto.

Una *segunda prueba* consiste en mostrar que el código es capaz de manejar funciones de difusión discontinuas, pues la evolución de un tumor cerebral involucra regiones con materia tanto gris como blanca. Para esta prueba elegimos el dominio  $-x_{\min}=-y_{\min}=x_{\max}=y_{\max}=1$ , y definimos la función de difusión

$$D(\vec{x}) = \begin{cases} D_w, & x \leq 0 \\ D_g, & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Donde  $D_w$  y  $D_g$  representan la constante de difusión en la materia blanca y gris respectivamente. Para esta prueba usamos valores observados en el cerebro humano para estos coeficientes  $D_g=1.3 \times 10^{-3} \text{cm}^2/\text{día}$  y  $D_w=5D_g$ . En esta prueba también suponemos que las células no se reproducen y por ello  $k=0$ . El objetivo es mostrar que el método numérico es capaz de lidiar con la diferencia del coeficiente de difusión tan grande. Con la finalidad de que sea posible definir los estenciles de diferencias finitas, aproximamos la función en (3) con una función suave que asintóticamente toma los valores  $D_w$  y  $D_g$

$$D(\vec{x}) = \frac{1}{2}(D_g - D_w) \tanh\left(\frac{x}{\delta}\right) + \frac{1}{2}(D_g + D_w) \quad (4)$$

Donde  $\delta = 3\Delta x$  es el ancho de la zona de transición entre la materia gris y blanca.

La evolución de una población centrada justo en la interfaz para determinar si el código y la función que hemos definido para el coeficiente de difusión permiten un caso con datos iniciales tan discontinuos. El resultado es que la solución es suave en el dominio de espacio y tiempo y una muestra aparece en la Figura 2.

#### 4. RESULTADOS EN LA INTERFAZ ENTRE MATERIA GRIS Y BLANCA

El código debe ser capaz de reproducir los lapsos de difusión de los tumores reales, Por ello consideramos que el umbral para entrar en el régimen de detección es de 500  $\text{cel}/\text{cm}^2$ . Como se describe en (Murray 2003, Swanson 2000), el tamaño de un tumor detectable se compone de dicha densidad de células afectadas, concentradas en un círculo de radio  $R=1.5\text{cm}$ , valor que usamos para la distribución de datos iniales en (2).

La primera evolución consiste en iniciar con un tumor con estas características en una región gris y trazar su difusión a través de la interfaz con la materia blanca. En la Figura 3 se presentan isocurvas de  $\rho$ , en distintos valores del tiempo. En el dominio mostrado, a la izquierda del eje vertical el coeficiente de difusión es  $D_w$ , mientras que a la derecha es  $D_g$ . El centro de la posición inicial del tumor está a 1.84cm a la izquierda de la interfaz. La isocurva más externa en cada caso representa el valor de 0.07, un poco por encima del nivel de detección que corresponde a 500  $cel/cm^2$ , exceptuando el día 0 en el que representa el valor de 0.067. La instantánea de los 300 días permite estimar la velocidad a la que se propaga el tumor, considerando el máximo alcance hacia la derecha dentro de la región de materia gris se tiene que  $v \sim 6.5 \times 10^{-3} cm/día$ , mientras que el límite de Fisher-Kolmogorov predice que  $v = \sqrt{4kD_g} \sim 7.9 \times 10^{-3} cm/día$ , lo cual indica que la difusión es consistente con la predicción de soluciones aproximadas.

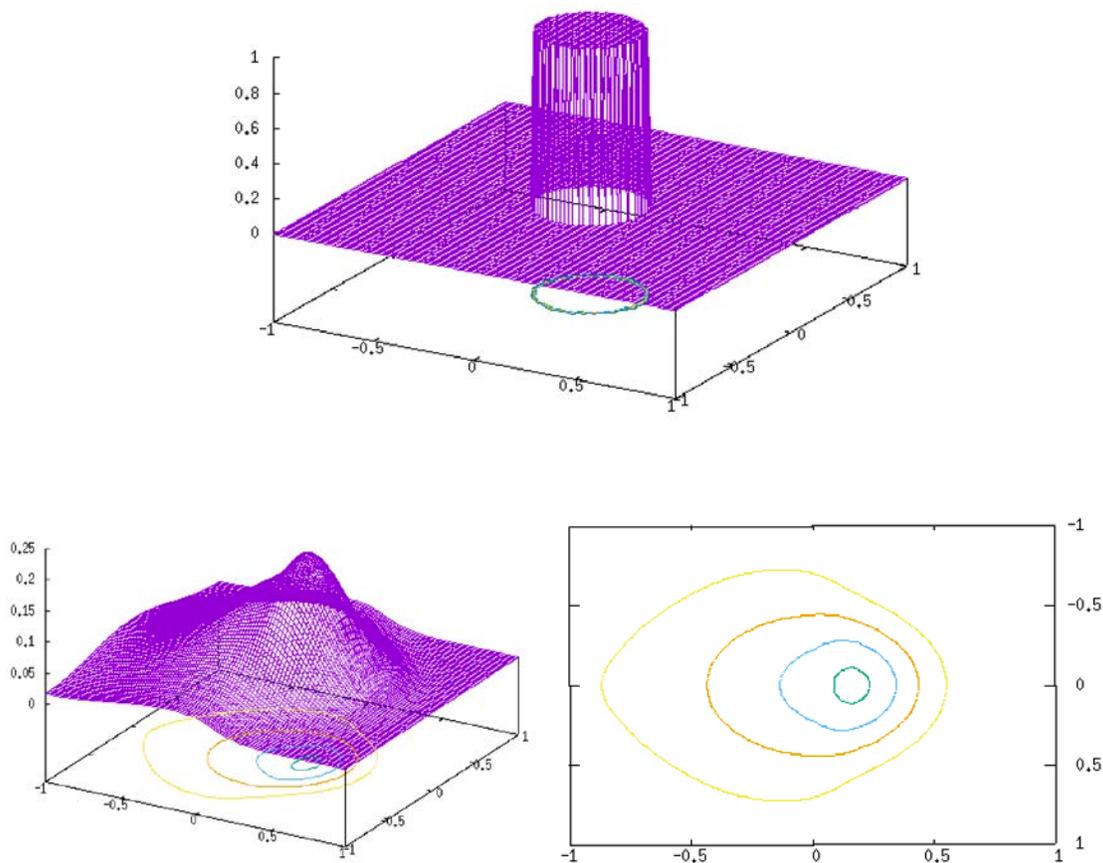
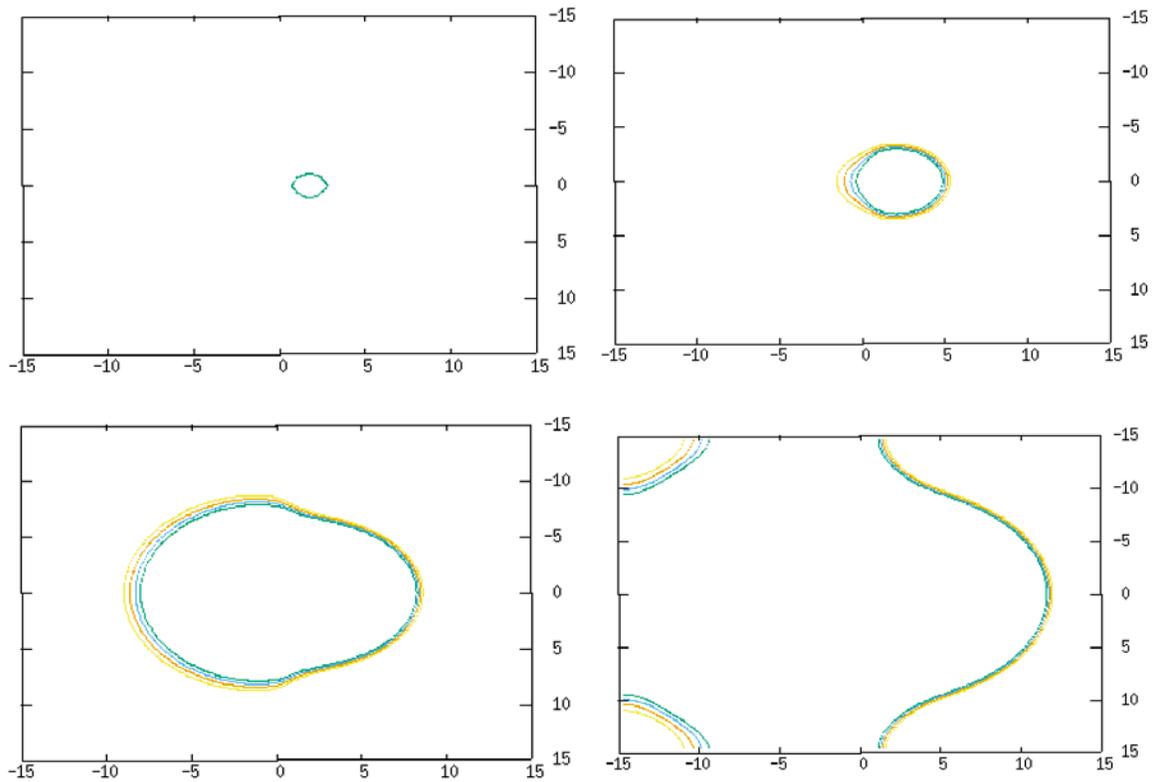


Figura 2. (Arriba) Distribución de células al tiempo inicial. (Abajo) Del lado izquierdo la función  $\rho$  a los 15 días de evolución de la distribución inicial células cancerígenas in vitro bajo un coeficiente de difusión (4) que depende de la posición y cero proliferación ( $k=0$ ). Del lado derecho aparecen las curvas de nivel que permiten trazar la rapidez con la que se difunde un tumor.



*Figura 3. Difusión de células cancerígenas con una distribución inicial en materia gris y una tasa constante de crecimiento  $k$ . Se muestran las isocurvas de  $\rho$  que tienen valores cercanos a los detectables de  $500 \text{ cel/cm}^2$ . Cada imagen corresponde a los 0, 300, 500 y 700 días a partir del tiempo inicial. Los ejes tienen unidades de cm. Puede observarse que después de 500 días la invasión es absoluta.*

La segunda evolución consiste en iniciar el tumor en la región blanca de mayor coeficiente de difusión y hacer un seguimiento de la evolución del tumor. En la Figura 4 se presenta la evolución del tumor cuando éste es colocado inicialmente en la zona de materia blanca, a 1.84 cm de la interfaz. Como es de esperarse, al ser el coeficiente de difusión cinco veces mayor en la materia blanca que en la gris, el tumor se difunde más rápidamente.

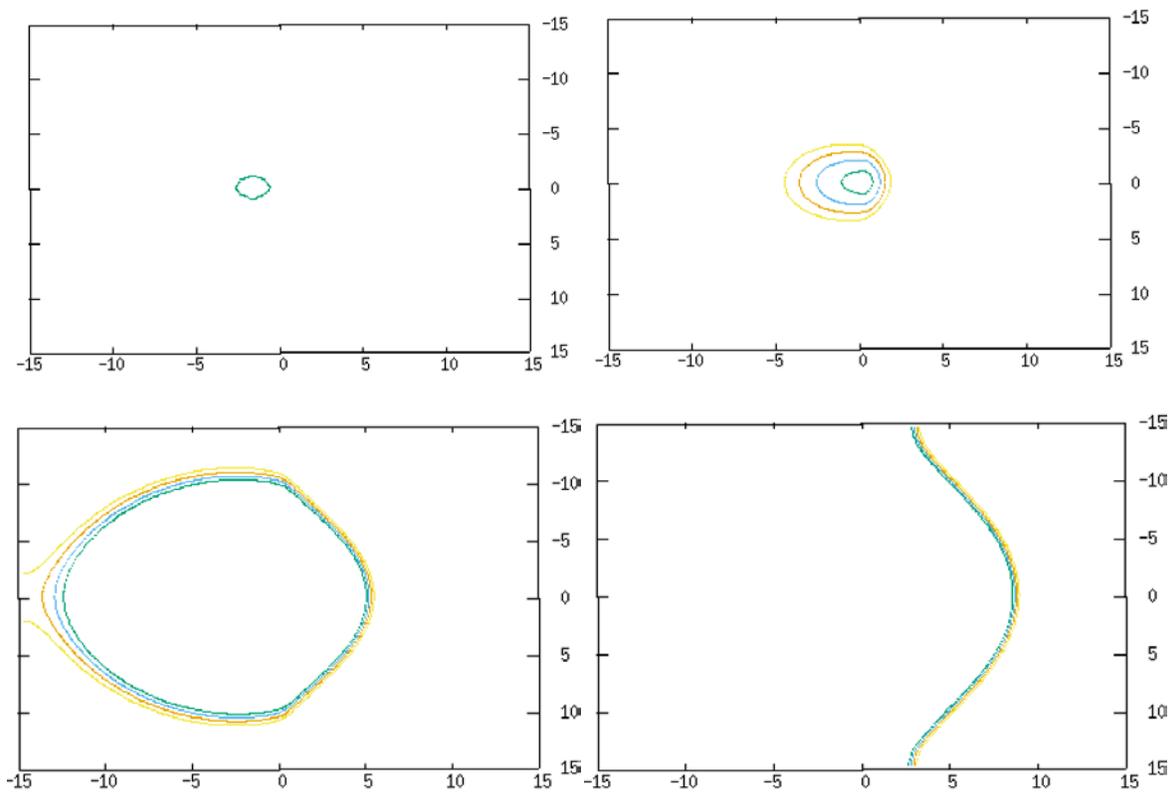


Figura 4. Difusión de células cancerígenas con una distribución inicial en la materia blanca y una tasa constante de crecimiento  $k$ . Se muestra la evolución del tumor a los 0, 300, 500 y 700 días.

En este caso la invasión absoluta ocurre desde los 300 días.

Los cálculos de estas dos simulaciones se llevaron a cabo discretizando el dominio con una malla de 200x200 nodos y se usó un factor  $\Delta t / \Delta x^2 = 0.3$ .

## 5. CONCLUSIONES

Hemos presentado un nuevo código que resuelve la ecuación de difusión de células enfermas con fuentes de reproducción en 2D. Mostramos que reproduce bien las pruebas de motilidad in vitro al comparar con soluciones obtenidas previamente.

El código es capaz de trazar la evolución de un tumor en una interfaz entre materia blanca y gris, tanto si inicialmente se encuentra en una región o en la otra. Se ha verificado que la velocidad de crecimiento del tumor es aproximadamente la calculada con la aproximación de Fisher-Kolmogorov, que corresponde a una solución aproximada de la ecuación de difusión con ondas circulares. Para ello hemos usado parámetros de reproducción y difusión *High-High* que simulan un crecimiento rápido de la población de células enfermas y también una difusión rápida.

Los proyectos son los siguientes. Se espera que el código pueda aplicarse a mapas reales de materia gris y blanca en cerebros humanos para poder predecir la evolución de tumores. También se agregarán términos de muerte de células cancerosas como producto de terapia y se hará la extensión a tres dimensiones.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Chicone M. R. and Silbergeld D. L. 1995. Assesment of brain tumor cell motility in vivo and in vitro. *J. Neurosurg.*, 82:614-622.
2. Giese A. and Westphal M.1996, Glioma invasion in the central nervous system. *Neurosurgery* 39(2):235-252.
3. Kevorkian J. 1999. Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques. Springer-Verlag New York.
4. Murray 2003, Mathematical Biology II: spatial models and biomedical applications. Springer 3rd Edition.
5. Shochat E., Hart D. and Agur Z. 1999. Using computer simulation for evaluating the efficacy of breast cancer chemotherapy protocols. *Math. Models and Methods in Appl. Sciences*, 9:599-615.
6. Swanson K. R. 1999. Mathematical Modeling of the Growth and Control of Tumors, PhD Thesis. University of Washington, Seattle WA.
7. Swanson K.R., Alvord E. C. and Murray J. D. 2000. A quantitative model for differential motility of gliomas in grey and white matter. *Cell Prolif.* 33:317-329.
8. Tracqui et al. 1995. From passive diffusion to active cellular migration in mathematical models of tumour invasion. *Acta Biotheorica*, 43:443-464.

# ESTUDIO POR QUÍMICA COMPUTACIONAL DE LA ESTRUCTURA Y REACTIVIDAD DE CÚMULOS DE COBALTO, $Co_n^q$ ( $N=7-9$ , $Q=0,1$ ), PUROS Y MEZCLADOS CON NO

Facio Muñoz J. G.<sup>1</sup>, Tenorio Rangel F. J.<sup>2</sup> Rodríguez Zavala J. G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Posgrado en Ciencia y Tecnología, Centro Universitario de los Lagos. <sup>2</sup>Departamento de Ciencias Exactas y Tecnología, Centro Universitario de los Lagos

## RESUMEN

El estudio tanto teórico como experimental acerca de la estructura y el comportamiento electrónico de los cúmulos metálicos se ha incrementado debido a las aplicaciones en catálisis. Los cúmulos, definidos como sistemas finitos de átomos o moléculas con número de componentes entre dos y miles de ellos, se consideran una especie intermedia entre el átomo y el sólido debido a que sus propiedades electrónicas y estructurales no corresponden con las de ninguno de ellos, comportándose en función de su tamaño. En este trabajo se presentan los resultados de un estudio teórico por funcionales de la densidad (TFD) utilizando el funcional BPW91 y el conjunto de base 6-311G para investigar cúmulos de cobalto,  $Co_n^q$  ( $n=7-9, q=0,1$ ), puros e interaccionando con óxido nítrico, analizando el comportamiento de cúmulos dependientes del tamaño y la reactividad como agentes disociativos. Se calcularon los índices de reactividad global tales como el potencial de ionización, la afinidad electrónica y el potencial químico, además de las funciones de Fukui como descriptor local de los sistemas neutros. Se compararon satisfactoriamente las estructuras de los cúmulos de cobalto puros con otras antes reportadas.

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años el interés por el estudio tanto teórico como experimental de los cúmulos metálicos [1] y en especial de los cúmulos de metales de transición ha crecido de manera considerable debido a que estos sistemas se caracterizan por presentar una relativa dependencia entre las propiedades físicas, químicas, electrónicas y magnéticas con respecto al tamaño y a la geometría del sistema [2], además de que difieren de manera sustancial con respecto a las propiedades del *bulk* [3]. Entre las áreas de mayor interés para el estudio y aplicación de los cúmulos, se encuentra la reactividad de estos en procesos de adsorción, fenómeno que se presenta particularmente en cúmulos de metales de transición [4]. El cobalto, siendo uno de estos metales, posee características y propiedades con alto poder catalítico en reacciones de rompimiento de moléculas, además de que los cúmulos de este metal muestran diversas propiedades magnéticas y electrónicas las cuales son dependientes de su tamaño y geometría [5][6][7]. En este trabajo se presenta un estudio teórico TFD [8], donde se investiga la estructura electrónica y reactividad de cúmulos de cobalto de naturaleza neutra ( $Co_n$ ) y catiónica ( $Co_n^+$ ) para  $n=7-9$ , tanto de naturaleza pura como interaccionando con óxido nítrico (NO). Basándose en el poder catalítico de este metal, se busca aportar información y resultados que ayuden a determinar algún mecanismo para el control de la producción de sustancias nocivas para el ser humano como lo es éste óxido de nitrógeno, ya que en la literatura se muestra una posible quimisorción disociativa para el NO con cúmulos de este metal [9].

## 2. METODOLOGÍA

Inicialmente se llevó a cabo una búsqueda de mínimos sobre la superficie de energía potencial de estructuras de cúmulos de cobalto puros e interaccionando con NO tanto neutros como cationes y probando con diferentes multiplicidades utilizando algoritmos genéticos, GEGA [10] (de sus siglas en inglés *Gradient Embedded Genetic Algorithm*). En esta búsqueda de estructuras se utilizó el funcional con aproximación de densidad de espín local propuesto por Vosko, Wilk y Nusair [11][12] junto con el pseudopotencial LANL2DZ para los átomos de Co [13] y la base D95V para N y O [14]. Posteriormente con las estructuras obtenidas, las cuales fueron visualizadas empleando el software Gaussview [15], se realizó una reoptimización mediante el funcional para la energía de intercambio y correlación BPW91 [16][17] en combinación con la base 6-311G [18] y mediante el programa Gaussian 09 [19]. Finalmente y con el objetivo de conocer la reactividad de las geometrías obtenidas se procedió a calcular los índices de reactividad [8] tales como: el potencial de ionización,  $I$ , y la afinidad electrónica,  $A$ , de naturaleza vertical. Mediante el promedio de estos índices de reactividad global se calculó el potencial químico,  $\mu$ . Se calcularon las Funciones de Fukui [8], es decir, los sitios  $A$  regiones de cada sistema neutro para identificar zonas susceptibles a ataques de naturaleza nucleofílica,  $f^+$ , electrofílica,  $f^-$ , y el ataque ante especies radicalarias,  $f^0$ .

$$f^+(\bar{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial I}{\partial N} + \frac{\partial A}{\partial N} \right) \quad f^-(\bar{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial I}{\partial N} - \frac{\partial A}{\partial N} \right) \quad f^0(\bar{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial I}{\partial N} \right)$$

## 3. RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados correspondientes a las geometrías de los mínimos encontrados sobre la superficie de energía potencial así como los índices de reactividad global y local para los sistemas en cuestión bajo el nivel de teoría mencionado antes.

### Geometrías

Cúmulos:  $\text{Co}_7$ ,  $\text{Co}_7^+$ ,  $\text{Co}_7\text{NO}$ ,  $\text{Co}_7\text{NO}^+$

La estructura más estable para el cúmulo de siete átomos de cobalto de manera pura y neutra corresponde a una bipirámide pentagonal presenta una multiplicidad de 16, misma que se presenta en la Figura 1. Es importante señalar que esta geometría ha sido comparada con la ya reportada por Zhan y colaboradores [20] resultando ser geoméricamente idénticas. En esta misma figura, para este tamaño de cúmulo pero ahora de naturaleza catiónica, los resultados muestran una geometría bastante similar al caso neutro con una multiplicidad de espín igual a 15, variando únicamente en las distancias de enlace las cuales están dadas en Angstroms (Å). La estructura más favorecida energéticamente para el sistema  $\text{Co}_7\text{NO}$  presenta una multiplicidad de 11. Para esta geometría, en la Figura 1 se muestra que el NO ha sido quimisorbido de manera disociativa. La geometría original de  $\text{Co}_7$  se distorsiona al interaccionar con la molécula del NO incrustándose cada uno de sus átomos en caras diferentes del cúmulo la cual se asemeja a una bipirámide cuadrangular. Con respecto a la estructura de menor energía para la composición  $\text{Co}_7\text{NO}^+$ , resulta ser aquella con multiplicidad igual a 12 donde tampoco hay enlace evidente entre N y O. De la misma manera que en el estado puro, la geometría del  $\text{Co}_7\text{NO}^+$  es parecida al  $\text{Co}_7\text{NO}$ .

Cúmulos:  $\text{Co}_8$ ,  $\text{Co}_8^+$ ,  $\text{Co}_8\text{NO}$ ,  $\text{Co}_8\text{NO}^+$

En la Figura 2 se muestran las geometrías para el cúmulo de ocho átomos de Co de manera pura e interaccionando con NO de naturaleza neutra y catiónica. El sistema  $\text{Co}_8$  (multiplicidad igual a 17) sugiere un adecuado nivel de teoría utilizado hasta el momento ya que nuevamente la geometría obtenida con esta metodología coincide con lo reportado en la literatura [20]. Con una multiplicidad de espín igual a 18, el cúmulo  $\text{Co}_8^+$  mantiene la misma geometría que para el caso neutro, indicando que no sufre distorsión o fragmentación cuando el  $\text{Co}_8$  es ionizado. Con respecto al

mínimo sobre la superficie de energía potencial del sistema  $\text{Co}_8\text{NO}$ , el cual presenta una multiplicidad de 12, en la Figura 2 se observa que se lleva a cabo una fragmentación de la molécula del NO, donde los átomos de N y de O son quimisorbidos en posiciones intermedias entre las caras opuestas de la estructura del cúmulo de  $\text{Co}_8$ , que como se observa en la figura, el arreglo original del sistema neutro de ocho átomos de Co ha sido distorsionado al interactuar con el NO. Este reacomodo estructural también sucede para la geometría de mínima energía encontrada para el sistema  $\text{Co}_8\text{NO}^+$ , la cual posee una mutiplicidad de 15, donde nuevamente se observa una quimisorción disociativa del NO, no obstante se muestra que ambas estructuras (neutro y catión) difieren considerablemente.

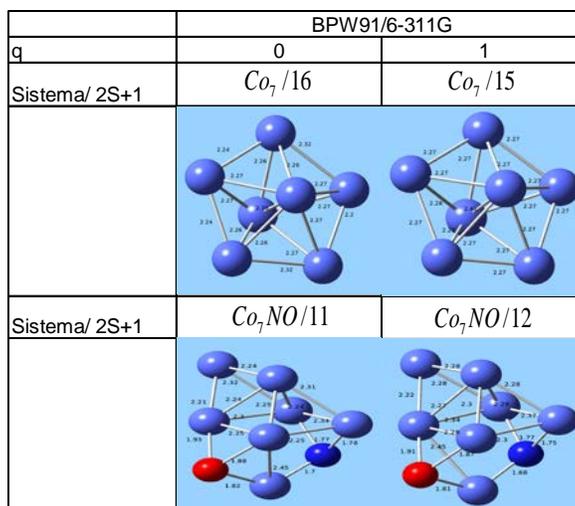


Figura 1. Estructuras de mínimos de energía para sistemas neutros y catiónicos de siete átomos de cobalto puros e interaccionando con óxido nítrico obtenidas por Gaussian 09 [19] con el funcional BPW91[16][17] y la base 6-311G[18].

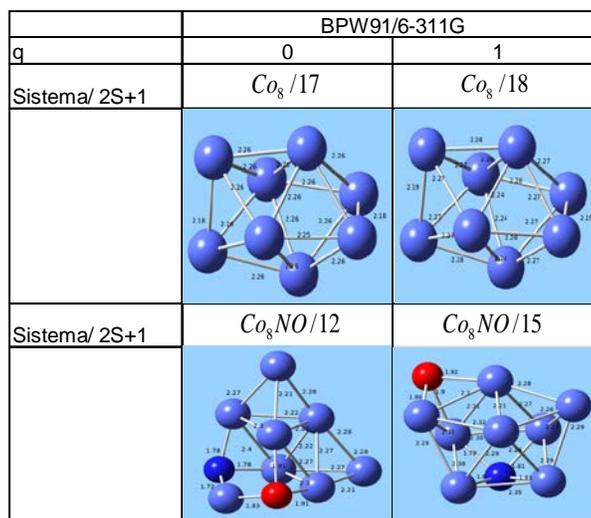


Figura 2. Estructuras de mínimos de energía para sistemas neutros y catiónicos de ocho átomos de cobalto puros e interaccionando con óxido nítrico obtenidas por Gaussian 09 [19] con el funcional BPW91[16][17] y la base 6-311G[18].

Cúmulos:  $\text{Co}_9$ ,  $\text{Co}_9^+$ ,  $\text{Co}_9\text{NO}$ ,  $\text{Co}_9\text{NO}^+$

Los mínimos encontrados sobre la superficie de energía potencial para los cúmulos constituidos por nueve átomos de cobalto, es decir, para los sistemas  $\text{Co}_9$ ,  $\text{Co}_9^+$ ,  $\text{Co}_9\text{NO}$ ,  $\text{Co}_9\text{NO}^+$  se muestran en la Figura 3. La geometría obtenida para  $\text{Co}_9$  con multiplicidad de 18, al igual que sucede con  $\text{Co}_7$  y  $\text{Co}_8$ , coincide con la encontrada por Zhan [20] lo cual confirma con los de mínimos de energía encontrados en este trabajo. Cuando el sistema es ionizado,  $\text{Co}_9^+$ , los resultados sugieren que la estructura con mayor estabilidad energética es aquella con una multiplicidad de 19 donde además se observa que ambas geometrías, neutro y catión, son parecidas salvo pequeñas diferencias en longitudes de enlace. El arreglo estructural atómico obtenido de los sistemas  $\text{Co}_9\text{NO}$  y  $\text{Co}_9\text{NO}^+$  (multiplicidad de 17 y 14 respectivamente) indica una quimisorción disociativa del NO, donde los átomos se unen en centros de las caras de la geometría original, resultando ser además bastante similares estructuralmente lo cual sugiere gran estabilidad energética.

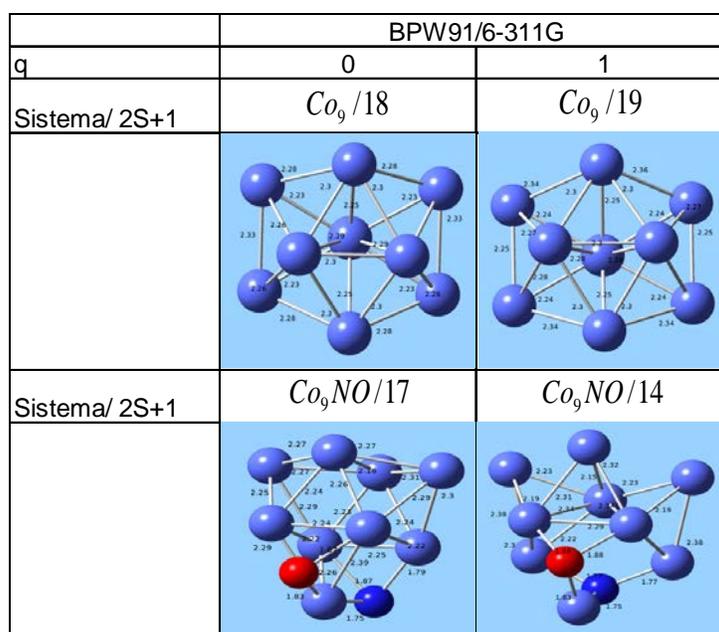


Figura 3. Estructuras de mínimos de energía para sistemas neutros y catiónicos de nueve átomos de cobalto puros e interaccionando con óxido nítrico obtenidas por Gaussian 09 [19] con el funcional BPW91[16][17] y la base 6-311G[18].

### Índices de reactividad global

Cúmulos:  $\text{Co}_7$  y  $\text{Co}_7\text{NO}$

Como parte de los resultados obtenidos en este estudio, en la Tabla 1 se muestran los valores para los índices de reactividad global calculados para los sistemas  $\text{Co}_7$  y  $\text{Co}_7\text{NO}$ .

Sistema	$I$	$A$	$\mu$
Co <sub>7</sub>	5.17	0.91	-3.04
Co <sub>7</sub> NO	5.70	0.92	-3.31

Tabla 1. Potencial de ionización ( $I$ ), afinidad electrónica ( $A$ ) y Potencial químico ( $\mu$ ) para los cúmulos de siete átomos de cobalto puros e interaccionando con NO. Energía dada en electrón-Volts (eV).

Los datos para el potencial de ionización muestran un aumento cuando el Co<sub>7</sub> interacciona con el NO, con respecto al sistema puro. Por tanto, se requiere de mayor energía para ionizar al Co<sub>7</sub>NO. La afinidad electrónica tanto para el sistema puro como con NO, prácticamente no varía. Esto indica un pobre efecto de la inclusión del NO en la estructura para esta propiedad. Por otro lado, los valores para el potencial químico de estos sistemas Co<sub>7</sub> y Co<sub>7</sub>NO, advierten que al darse la interacción del cúmulo y el NO, el sistema se vuelve menos reactivo ya que de acuerdo a los resultados el Co<sub>7</sub>NO presenta menor tendencia a que se produzca un flujo de densidad de carga.

Cúmulos: Co<sub>8</sub> y Co<sub>8</sub>NO

En la Tabla 2 se muestran los valores de los índices de reactividad global para los cúmulos de ocho átomos de Co puros e interaccionando con NO de naturaleza neutra.

Sistema	$I$	$A$	$\mu$
Co <sub>8</sub>	5.23	0.89	-3.06
Co <sub>8</sub> NO	5.81	1.13	-3.47

Tabla 2. Potencial de ionización ( $I$ ), afinidad electrónica ( $A$ ) y Potencial químico ( $\mu$ ) para los cúmulos de ocho átomos de cobalto puros e interaccionando con NO. Energía dada en electrón-Volts (eV).

De acuerdo a los resultados obtenidos para el potencial de ionización de este tamaño de cúmulo, se puede decir que a partir de la interacción del Co<sub>8</sub> y el NO, el sistema se vuelve menos susceptible, que el sistema puro, a ser ionizado de manera catiónica. El sistema Co<sub>8</sub>NO muestra un valor mayor para la afinidad electrónica, con respecto al Co<sub>8</sub>, lo cual sugiere que se trata de un sistema con menor reactividad a ganar un electrón. Con respecto a los valores para el potencial químico de estos dos sistemas, Co<sub>8</sub> y Co<sub>8</sub>NO, se puede concluir que existe mayor tendencia del Co<sub>8</sub> a reaccionar con otras sustancias.

Cúmulos: Co<sub>9</sub> y Co<sub>9</sub>NO

Toca el turno de analizar la reactividad global de los sistemas  $\text{Co}_9$  y  $\text{Co}_9\text{NO}$  la cual se muestra en la Tabla 3.

Sistema	$I$	$A$	$\mu$
$\text{Co}_9$	4.86	1.35	-3.10
$\text{Co}_9\text{NO}$	6.02	1.32	-3.67

Tabla 3. Potencial de ionización ( $I$ ), afinidad electrónica ( $A$ ) y Potencial químico ( $\mu$ ) para los cúmulos de nueve átomos de cobalto puros e interaccionando con NO. Energía dada en electrón-Volts (eV).

Es evidente que el valor del potencial de ionización del  $\text{Co}_9\text{NO}$  es mucho mayor que el del  $\text{Co}_9$ , lo cual lo clasifica como menos reactivo a ceder un electrón. Sin embargo en el proceso contrario, es decir, la susceptibilidad a ganar un electrón, existe poca diferencia en los valores encontrados para los dos sistemas (ver Tabla 3). Finalmente comparando los resultados encontrados para el potencial químico para este tamaño de cúmulo, se puede decir que el cúmulo de nueve átomos de cobalto se vuelve menos reactivo al interaccionar con el NO que cuando se encuentra de manera pura, de acuerdo a la diferencia energética observada en la Tabla 3.

### Índices de reactividad local

Cúmulos:  $\text{Co}_7$  y  $\text{Co}_7\text{NO}$

A continuación se muestra la reactividad local calculada mediante funciones de Fukui para los cúmulos  $\text{Co}_7$  y  $\text{Co}_7\text{NO}$  donde las zonas moradas en cada una de las figuras definen las regiones susceptibles a la reactividad del cúmulo ante ataques de tipo nucleofílico, electrofílico y el ataque ante una especie radical tal como se muestra en la Figura 4. Las zonas que definen el ataque nucleofílico para el  $\text{Co}_7$  están ubicadas principalmente en los átomos 6 y 7 que corresponde a átomos que forman el eje de la bipirámide pentagonal. Por otro lado y de acuerdo a la figura, aunque parece ser que todos los átomos de este sistema son susceptibles a ceder densidad de carga, los átomos 1 y 4 muestran mayor afinidad ante ataques electrofílicos, además de que en estos mismos átomos se concentra la mayor proporción reactiva frente a un ataque radicalario lo cual es mostrado en esta representación. El sistema  $\text{Co}_7\text{NO}$  muestra regiones con susceptibilidad a reaccionar ante un ataque nucleofílico en los átomos 1, 6 y 2 de cobalto, siendo los átomos que se encuentran a mayor distancia del átomo de oxígeno de acuerdo a la Figura 4. En esta misma figura se observa que el átomo 3 de cobalto, el cual es el más cercano con el átomo de oxígeno, es el que muestra la mayor zona reactiva ante un electrófilo, indicando así la región con mayor concentración de carga para reaccionar ante una especie de tal naturaleza. Esta misma proporción se presenta para la reactividad ante ataques radicalarios, es decir, el átomo 3 de cobalto exhibe la mayor zona con esta reactividad.

Cúmulos:  $\text{Co}_8$  y  $\text{Co}_8\text{NO}$

Al parecer el sistema  $\text{Co}_8$  no muestra zonas con reactividad ante nucleófilos de acuerdo a lo que se observa en la Figura 5, sin embargo ante un ataque electrofílico, este sistema presenta sensibilidad en todos los átomos de cobalto que lo conforman. Los resultados que caracterizan a este sistema para ataques ante especies radicales también se muestran en esta figura. Como se puede observar las regiones con mayor probabilidad de reaccionar están situadas la parte

periférica de los átomos 2 y 7 de cobalto de esta representación. La composición  $\text{Co}_8\text{NO}$  muestra que el ataque nucleofílico es más probable en los átomos 2, 3 y 4 mismos que se encuentran cercanos al átomo oxígeno, hecho al que se le atribuye tal reactividad ya que para el ataque electrofílico resulta que los átomos con mayor susceptibilidad la presentan los átomos 1 y 5 los cuales tienen mayor distancia de los átomos de O. En referencia al ataque ante radicales, se observa que la mayor reactividad en el  $\text{Co}_8\text{NO}$  la presentan los átomos de cobalto 2, 3 y 4, que de igual manera son los átomos con mayor cercanía al átomo de oxígeno.

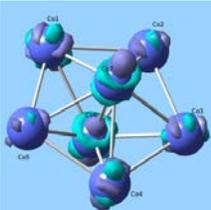
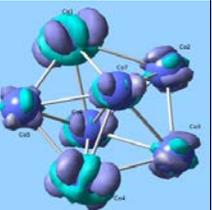
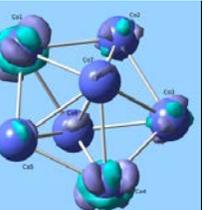
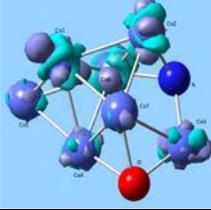
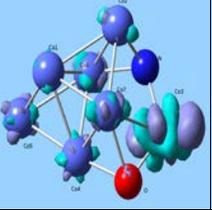
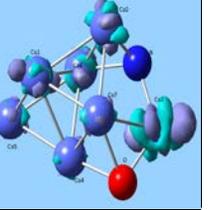
Sistema	Funciones de Fukui		
	Ataque nucleofílico $f^+(\vec{r})$	Ataque electrofílico $f^-(\vec{r})$	Ataque ante radical $f^0(\vec{r})$
$\text{Co}_7$			
$\text{Co}_7\text{NO}$			

Figura 4. Funciones de Fukui para los cúmulos neutros de siete átomos de cobalto puros e interaccionando con NO. Reactividad hacia un ataque nucleofílico,  $f^+(\vec{r})$ , ataque electrofílico  $f^-(\vec{r})$  y ante radicales  $f^0(\vec{r})$ , (el isovalor utilizado en la representación es de 0.006).

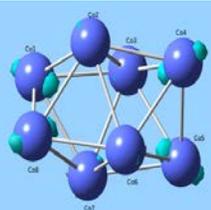
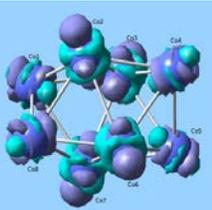
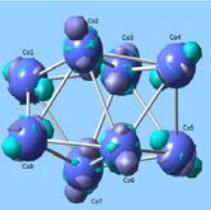
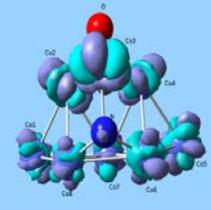
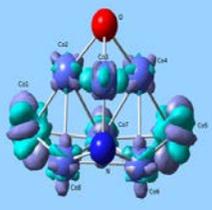
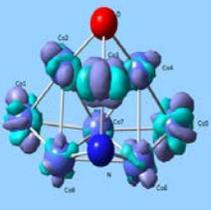
Sistema	Funciones de Fukui		
	Ataque nucleofílico $f^+(\vec{r})$	Ataque electrofílico $f^-(\vec{r})$	Ataque ante radical $f^0(\vec{r})$
$\text{Co}_8$			
$\text{Co}_8\text{NO}$			

Figura 5. Funciones de Fukui para los cúmulos neutros de ocho átomos de cobalto puros e interaccionando con NO. Reactividad hacia un ataque nucleofílico,  $f^+(\vec{r})$ , ataque electrofílico  $f^-(\vec{r})$  y ante radicales  $f^0(\vec{r})$ , (el isovalor utilizado en la representación es de 0.006).

Cúmulos:  $\text{Co}_9$  y  $\text{Co}_9\text{NO}$

Como se observa en la Figura 6 el sistema  $\text{Co}_9$  muestra que la zona con mayor probabilidad de recibir densidad de carga se encuentra en los átomos 1, 3, 4 y 6 los cuales están situados en los vértices más alejados del centro de esta estructura hexagonal. De igual manera se observa que los átomos 2 y 5 presentan regiones similares que son susceptibles a esta reactividad. Estas mismas proporciones de zonas reactivas con respecto a la probabilidad de ceder densidad de carga se presentan en este sistema  $\text{Co}_9$ , lo cual es atribuido a la simetría del cúmulo en cuestión. De acuerdo a la Figura 6 el sistema de nueve átomos de Co no es reactivo ante radicales ya que no muestra regiones representativas ante tal reactividad. Las funciones de Fukui del cúmulo de  $\text{Co}_9\text{NO}$  también se muestran en la Figura 6 donde es claro que las regiones susceptibles a ataques de tipo nucleofílico están presentes en todos los átomos de cobalto siendo en menor proporción en aquellos que están más cercanos al átomo de oxígeno. Con respecto a la función que describe la reactividad electrofílica, se muestra que los átomos con mayor probabilidad a ceder densidad de carga son los átomos 2, 4, 8 y 9. Finalmente se muestra que para la reactividad ante radicales todos los átomos cobalto muestran zonas susceptibles excepto el átomo 3 el cual es el más cercano al átomo de O sugiriendo que a menor distancia se esté de ese átomo también se tendrá menor probabilidad de reaccionar con algún radical.

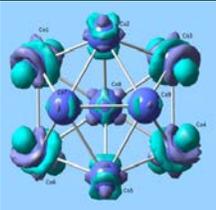
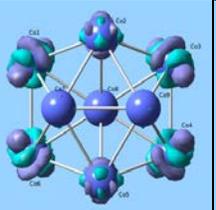
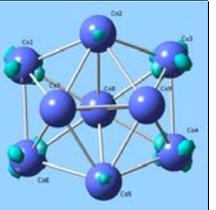
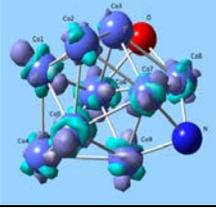
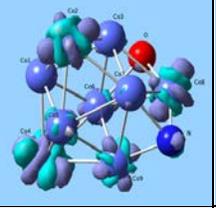
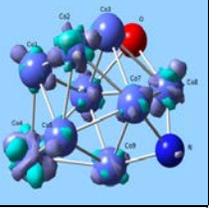
Sistema	Funciones de Fukui		
	Ataque nucleofílico $f^+(\vec{r})$	Ataque electrofílico $f^-(\vec{r})$	Ataque ante radical $f^0(\vec{r})$
$\text{Co}_9$			
$\text{Co}_9\text{NO}$			

Figura 6. Funciones de Fukui para los cúmulos neutros de nueve átomos de cobalto puros e interaccionando con NO. Reactividad hacia un ataque nucleofílico,  $f^+(\vec{r})$ , ataque electrofílico  $f^-(\vec{r})$  y ante radicales  $f^0(\vec{r})$ , (el isovalor utilizado en la representación es de 0.006).

#### 4. CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos hasta el momento se concluye lo siguiente:

La metodología utilizada en este trabajo permite demostrar el poder analítico de estos métodos de cálculo ya que la geometría obtenida para cada sistema puro y neutro coincide con lo reportado.

En cada uno de los sistemas donde se produce la interacción con el NO, se lleva a cabo una quimisorción disociativa de éste óxido de nitrógeno.

Excepto para la afinidad electrónica en el Co<sub>9</sub>, los índices de reactividad global indican que para los tres tamaños de cúmulo, el sistema menos reactivo es cuando el sistema puro interacciona con el NO.

Las funciones de Fukui de estos tamaños de cúmulo de Co muestran zonas reactivas donde sería posible la interacción con más moléculas de NO

Agradecimiento de J.G.F.M. a CONACYT por la beca de posgrado número 502772 y al Centro Universitario de Los Lagos, Universidad de Guadalajara.

## REFERENCIAS

1. Cotton, F. A. *Inorg. Chem.* 1964, 3(9), 1217-1220.
2. Castleman A. W. Jr., Keesee R. G., *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 1986 37, 525-50
3. Reddy B. V, Khanna S. N., Dunlap B. I., *Phys. Rev. Lett.* 1993 70 (21), 3323
4. Geusic M. E., Morse M. D., Smalley R. E., *J. Chem. Phys.*, 1985, 82 590
5. Rodriguez Lopez J.L., Aguilera Granja F., Michaelian K., Vega A. *Phys. Rev. B* (2003) 67, 174413
6. Zhan L., Y. Chen J. Z., Luis W. K., Lai S. K., *J. Chem. Phys.* (2005) 122, 244707.
7. Martínez A., Jamorski C., Medina G., Salahub D. R., *J. Phys. Chem. A*, 1998, 102 (24), 4643-4651
8. Parr Robert G., Yang Weitao, *Density-Functional Theory of Atoms and Molecules*, Oxford University, New York, 1994.
9. Anderson M. L., Lacz A., Drewello T. Derrick Peter J., Woodruff D. Phil, Mackenzie S. R., *Chem. Phys.*(2009), 130 064305
10. Alexandrova N. A., Alexander I. B., *J. Chem.Theory Comput*, 2005, 4 566-580.
11. Hohenberg P., Khon W., *Phys. Rev.* 1964, 136, B864.
12. Vosko S. H., Wilk L., Nusair M., *Can J. Phys.*,1980, 58, 1200.
13. Hay P. J. Wadt W. R. *J. Chem. Phys.*, 1985, 82, 270.
14. Dunning T. H., Hay P. J., in *Modern Theoretical Chemistry*, Ed. H. F. Schaefer III, Vol. 3 (Plenum, New York, 1977) 1-28.
15. GaussView, Version 5.0.9 Dennington R., Keith T., Millan J., Semichen Inc., Shawnee Mission KS, 2009.
16. Becke A. D, *J. Phys. Rev. A* 1988, 38, 3098.
17. Perdew J. P., Wang Y., *Phys. Rev. B.* 1991, 43, 8911.
18. Krishnan R., Binkly J. S., Seeger R., People J., *J. Chem. Phys.* 1980, 72 650.
19. Frisch et. al., *Gaussian, Inc.*, Wallingford CT, 2009.
20. Zhan L., Y. Chen J. Z., Luis W. K., and Lai S. K., *J. Chem. Phys.* (2005) 122, 244707.

# CONVERSIÓN PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESPONTÁNEA EN CRISTALES CON CHIRP

X. Sánchez-Lozano, J. L. Lucio M.

Departamento de Física, División de Ciencias e Ingenierías-Campus León, Universidad de Guanajuato

## RESUMEN

Se presenta un análisis teórico del proceso de Conversión Paramétrica Descendente Espontánea (SPDC, por sus siglas en inglés) usando un cristal no lineal caracterizado por un chirp lineal (aperiodicidad) a lo largo de la dirección de propagación. Se obtiene una expresión para la amplitud espectral conjunta, de la cual se pueden derivar varias propiedades espectrales y temporales de la pareja de fotones y de los fotones individuales asociados, como: la función espectral de fotones individuales, la función cronocíclica de Wigner y el número de Schmidt. Las simulaciones que se realizaron son para el caso específico de una fuente SPDC colineal usando un cristal PPLN para emitir fotones cerca de la ventana de telecomunicaciones. Se discute el mecanismo de ensanchamiento espectral debido a la presencia del chirp lineal, mostrando que no únicamente el ancho puede ser controlado sino también la forma del espectro SPDC. Además, los resultados muestran que diferentes componentes espectrales son emitidas en diferentes planos del cristal no lineal generando fotones individuales con chirp.

## 1. INTRODUCCIÓN

Generar luz no clásica de manera eficiente y controlable es esencial para la implementación de varios esquemas de información cuántica. Actualmente uno de los procedimientos más usados es la Conversión Paramétrica Descendente Espontánea (SPDC) que consiste en que algunos fotones de un haz de bombeo son aniquilados en un cristal no lineal a segundo orden ( $\chi^{(2)}$ ) dando lugar a la generación de parejas de fotones conocidos como señal y acompañante, respectivamente. Estos fotones a través de la amplitud conjunta (JA) del estado cuántico que los describe ponen de manifiesto sus correlaciones en diferentes grados de libertad como número, frecuencia, momento, polarización, entre otros. La JA depende tanto de las características del haz de bombeo como del cristal no lineal lo que abre una amplia flexibilidad en el diseño e ingeniería de los estados cuánticos de los fotones generados para necesidades específicas.

Este trabajo se enfoca en una extensión del uso de cristales no lineales con cuasi-empatamiento de fases (QPM), es decir de cristales periódicos, donde el periodo tendrá una variación cruzando longitudinalmente el cristal en la forma de un chirp lineal. El periodo del cristal está ligado con las frecuencias de los fotones que pueden ser generadas, por lo tanto la disponibilidad de un rango de periodos en un cristal con chirp conduce a la emisión de parejas de fotones con un ancho de banda amplio [1-3]. Aunque hay otras formas de generar luz SPDC con un ancho de banda grande, por ejemplo, usando cristales no lineales muy delgados, esto implica un flujo pequeño [1]; otra posibilidad es el uso de cristales con bombeos específicos para condiciones especiales de dispersión, que aunque es un método efectivo resulta muy poco práctico [3]. En contraste, con el uso de cristales QPM con chirp se puede diseñar una fuente con un ancho de banda de emisión grande para frecuencias de bombeo arbitrarias (asumiendo que la rejilla requerida pueda ser fabricada).

Resultados teóricos sobre generación SPDC con diferentes suposiciones y aproximaciones han sido reportados usando este tipo de cristales con chirp a lo largo de la dirección de propagación, por ejemplo Fraine et al. [4] consideran un haz de bombeo modelado como onda plana monocromática y su tratamiento se restringe a la producción de modos señal y acompañante colineales. Como se menciono antes el estado SPDC puede ser controlado a través de las características del bombeo [5], y/o del cristal no lineal resultando cada una en un camino para manipular el estado en diferentes grados de libertad. En este trabajo se hace un estudio sin aproximaciones del uso de la microestructura del cristal para controlar el grado de libertad de frecuencia de los fotones generados.

## 2. SPDC EN CRISTALES NO LINEALES CON CHIRP

El estado de dos fotones para el proceso SPDC siguiendo una aproximación perturbativa estándar y asumiendo direcciones específicas de propagación, esto es usando un filtrado espacial tal que únicamente las componentes de momento paralelas a la dirección de bombeo sean retenidas, se puede expresar como

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \eta \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle, \quad (1)$$

Donde  $\eta$  es una constante relacionada con la eficiencia de conversión,  $|\omega_\mu\rangle = \hat{a}_\mu^\dagger(\omega)|0\rangle$  con  $\mu = s, i$  y  $|0\rangle$  representa el estado de vacío. La amplitud espectral conjunta (JSA)  $f(\omega_s, \omega_i)$  es el producto de dos cantidades: la función de empatamiento de fases ( $\Phi(\omega_s, \omega_i)$ , PMF) y la función envolvente de bombeo ( $\gamma(\omega_s + \omega_i)$ , PEF). La PMF incorpora propiedades de la microestructura del cristal (dependencia espacial asociada al tensor de susceptibilidad  $\chi^{(2)}$ ) y de la distribución espacial de bombeo. La PEF, mientras que para un bombeo monocromático corresponde a una función delta centrada en la frecuencia de bombeo, para el caso de láseres pulsados corresponde a una adición coherente de diferentes componentes espectrales del bombeo sobre un ancho de banda. En este trabajo se modela como una Gaussiana de ancho  $\sigma$ :  $\gamma(\omega_s + \omega_i) = \text{Exp}[-(v_s + v_i)^2/\sigma^2]$ , donde  $v_\mu = \omega_\mu - \omega_c$  son los corrimientos de la frecuencia central de generación  $\omega_c$ . Por lo tanto, la libertad para controlar el estado de los fotones generados puede observarse a través de la JSA que incluye todas las propiedades tanto del cristal como del bombeo. Además, si la JSA está normalizada representará una distribución de probabilidad conjunta para la emisión de parejas de fotones con frecuencias  $\omega_s$  y  $\omega_i$ , conocida como intensidad espectral conjunta (JSI).

Un reto importante en el proceso SPDC es aumentar la eficiencia de conversión que suele ser baja y por lo tanto limita el flujo de parejas de fotones generados. Este flujo SPDC es proporcional a la longitud del cristal ( $L$ ) y la potencia de bombeo, tal que aumentando la longitud del cristal se podría resolver esta limitación, pero existe una relación inversa entre  $L$  y el ancho de banda espectral SPDC. Una alternativa es entonces el uso de cristales QPM con chirp, en particular un chirp lineal, es decir involucrar una variación del periodo QPM a lo largo del eje de propagación, teniendo así un flujo SPDC mayor sin sacrificar el ancho de banda de los fotones generados.

Para un cristal QPM sin chirp, la no linealidad alterna en signo sobre segmentos subsecuentes de longitud  $\Lambda/2$ , donde  $\Lambda$  es el periodo QPM; un chirp en el cristal QPM puede introducirse sustituyendo este periodo por uno efectivo que es función de la distancia de propagación y proveerá de una colección de condiciones de empatamiento de fase sobre toda la longitud del cristal:  $\Lambda(z) = 2\pi/K_0 + D(z_0 + z)$ , donde  $K_0 = 2\pi/\Lambda_c$ ,  $D$  representa el parámetro de chirp, y  $z = -z_0$  es la coordenada espacial para la cual el periodo espacial es  $\Lambda_c$  (como si no hubiera chirp).

Si las tres ondas involucradas en el proceso SPDC tienen la misma polarización, se puede tener acceso a elementos diagonales del tensor de susceptibilidad a segundo orden que suelen tener valores mayores que los otros términos resultando en eficiencias de emisión superiores. Entonces,

en el análisis que aquí se presenta se supone empatamiento de fase tipo-0 (ondas de bombeo, señal y acompañante co-polarizadas) y se asume geometría colineal tal que las tres ondas se propagan sobre el mismo eje. Para un bombeo Gaussiano y una no linealidad en el cristal dependiente de la distancia de propagación, se obtiene la PMF [6]

$$\Phi(\omega_s, \omega_i) \propto \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} e^{i\frac{(-x+r\xi)^2}{4\xi}} \left( \text{Erf}\left[\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}(-x+r\xi)}{2\sqrt{\xi}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}(-x+\xi(r-2))}{2\sqrt{\xi}}\right] \right), \quad (2)$$

donde se han expresado varios parámetros en términos de cantidades adimensionales: la coordenada de referencia  $z_0 = rL$ ,  $\xi = DL^2$  que corresponde a un parámetro de chirp efectivo y el empatamiento de fase  $x = \Delta k$ , con  $\Delta k = k_p(\omega_s + \omega_i) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i) - 2\pi/\Lambda_c$ .

Con base en la ecuación (2) se han realizado simulaciones numéricas en las cuales es posible variar el parámetro de chirp  $D$  para observar su efecto sobre la JSI, el espectro de fotones individuales (SPS), la función cronocíclica de Wigner (CWF) y el número de Schmidt. Es posible extender el estudio a variaciones en la longitud del cristal y la coordenada de referencia espacial [6].

### 3. RESULTADOS

Para el análisis numérico realizado se usa un cristal PPLN (Periodically Poled Lithium Niobate) de 5 mm con periodo central de  $20.33 \mu\text{m}$ ,  $z_0 = 0.5 L$  (corresponde a un periodo efectivo local  $\Lambda = \Lambda_c$  en el centro del cristal) y un parámetro de chirp variable, la dependencia del índice de refracción del mismo con la frecuencia es introducida a través de la ecuación de Sellmeier [7]. Se mantiene la temperatura fija a  $25^\circ\text{C}$  para evitar cambios en la dispersión y/o alguna expansión /contracción térmica del cristal que afecten su estructura periódica (aperiódica cuando  $D \neq 0$ ). El haz de bombeo está centrado en  $800 \text{ nm}$  con  $10 \text{ nm}$  de FWHM, tal que cuando las parejas de fotones son generadas colineales con el haz de bombeo se producen bifotones anticorrelacionados a  $1600 \text{ nm}$ , muy cerca de la ventana de telecomunicaciones. Además, en las simulaciones numéricas no se usaron aproximaciones tal que los resultados incluyen efectos de dispersión a todos los órdenes.

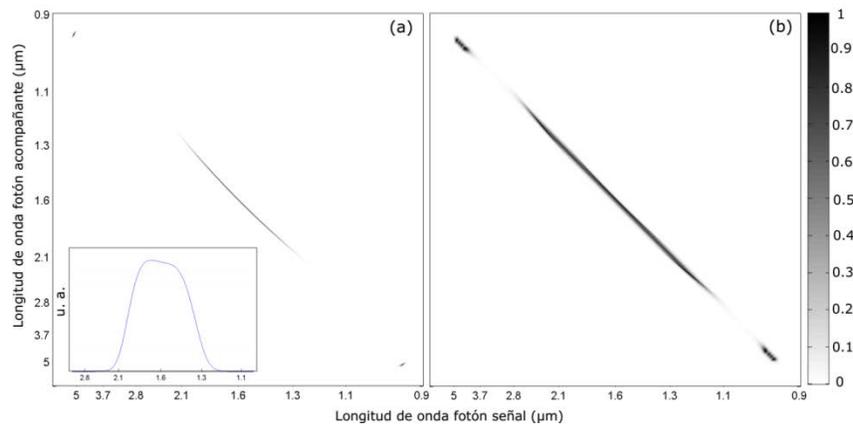


Figura 1. Intensidad espectral conjunta para generación SPDC degenerada a  $1600 \text{ nm}$  usando un cristal PPLN de  $5 \text{ mm}$  bombeado a  $800 \text{ nm}$ . (a)  $D = 0$ . Recuadro corresponde a la SPS del fotón señal. (b)  $D = 2 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$ .

En la Figura 1(a) se muestra la JSI para el estado espectralmente anticorrelacionado en la ausencia de chirp, el recuadro corresponde al SPS del fotón señal (será análogo para el acompañante) cuyo ancho de banda es de  $0.60 \mu\text{m}$ . En este caso, la condición de empatamiento de fase para la generación de bifotones centrados en  $1600 \text{ nm}$  es satisfecha en cualquier posición sobre el cristal. Esto no se cumple para  $D = 0$ , donde frecuencias de emisión diferentes serán generadas sobre los diferentes planos dentro del cristal. Entonces, al considerar un cristal con chirp ( $D = 2 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$ ), como muestra la Figura 1(b), un efecto importante es un incremento sustancial en el ancho de banda de emisión de la JSI. Este incremento en el ancho de banda de emisión resultará más evidente al graficar la SPS.

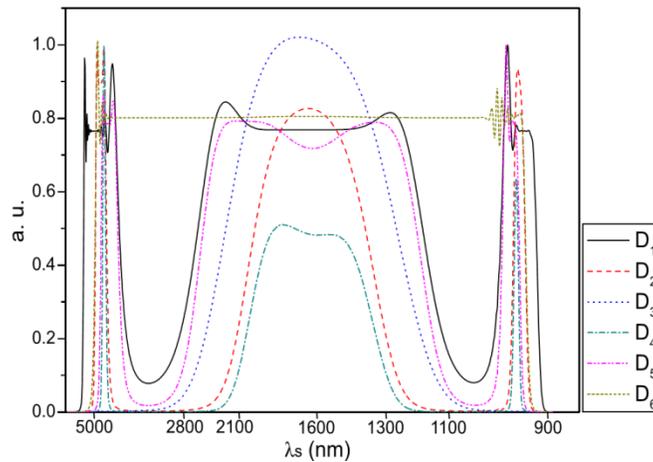


Figura 2. Espectro del fotón individual en unidades arbitrarias como función de la longitud de onda del fotón señal para  $z_0 = 0.5 L$  y diferentes valores de chirp: línea negra,  $D_1 = -7 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$ ; línea roja,  $D_2 = -2 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$ ; línea azul,  $D_3 = -3 \times 10^{-7} \mu\text{m}^{-2}$ ; línea cian,  $D_4 = 3 \times 10^{-7} \mu\text{m}^{-2}$ ; línea rosa,  $D_5 = 2 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$  y línea verde  $D_6 = 7 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$ .

La Figura 2 muestra la SPS para diferentes valores de chirp tal que se puede observar lo siguiente: 1) la SPS muestra una estructura central y dos picos laterales, 2) se obtiene un ancho de banda máximo de  $1.62 \mu\text{m}$  (para el caso  $D_6$ ), mucho mayor que el obtenido para el caso sin chirp y 3) dependiendo del valor del chirp, la distribución de probabilidad muestra una pequeña disminución en la longitud de onda central de generación, en este caso a  $1.6 \mu\text{m}$ . En trabajos previos, se ha estudiado la relevancia del parámetro  $z_0$ , dependiendo de su posición (dentro o fuera del cristal) existe también una redistribución de las frecuencias de emisión tal que para algunos casos la generación en la longitud de onda central es prácticamente suprimida generando con mayor probabilidad otras frecuencias [6]. Con chirp, aunque para algunos valores disminuye un poco la emisión central, no se logra una supresión completa de dicha emisión.

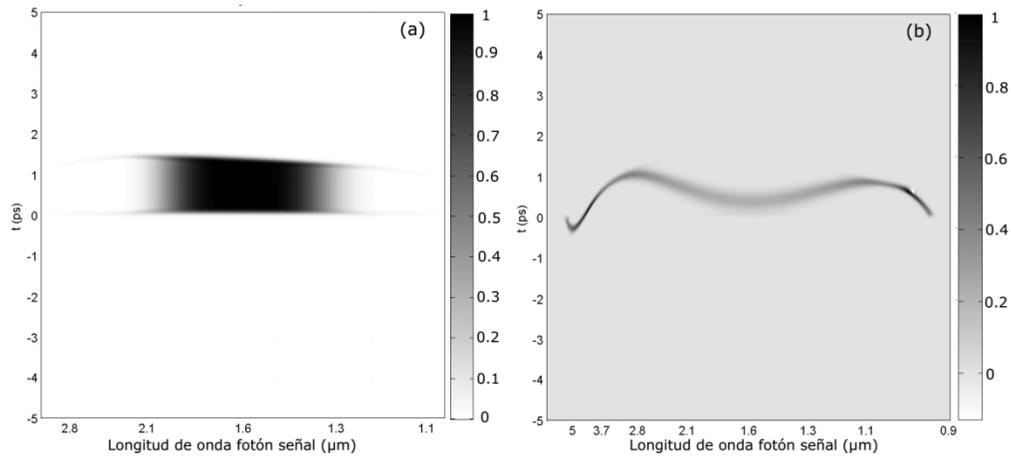


Figura 3. Función Cronocíclica de Wigner para  $z_0 = 0.5 L$ . (a)  $D = 0$ , (b)  $D = 3 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$ .

Otra función relevante a estudiar es la CWF que da información espectral y temporal de los fotones individuales, además de tener una cercana conexión con las matrices de densidad reducidas y por lo tanto con la pureza [5]. La expresión usada para el cálculo numérico de la CWF fue tomada de [5,8], tal que introduciendo la JSA que se calcula usando la Ecuación (2) se obtiene para el caso con y sin chirp lo que se muestra en la Figura 3. Como se espera, debido a que la SPS puede obtenerse a partir de una integración sobre el tiempo de la CWF, el ensanchamiento espectral del paquete de onda asociado al fotón individual con respecto al caso sin chirp es evidente también con esta función. Además, mientras que en el caso sin chirp básicamente todas las frecuencias SPDC son emitidas en un intervalo de tiempo igual, para el caso con chirp, frecuencias diferentes son emitidas a tiempos específicos y por lo tanto, hay una especie de chirp adquirido por los fotones individuales generados.

Finalmente, al tener control sobre la forma que se desea generar el estado espectral de los fotones SPDC usando chirp, es importante cuantificar si hay un cambio en el enredamiento de la pareja de fotones cuando se varia este parámetro. El número de Schmidt es una cantidad que sirve para cuantificar el grado de enredamiento espectral de las parejas de fotones [9] y es inversamente proporcional a la pureza de los fotones individuales [10]. Para un estado factorizable es igual a 1, por lo que los fotones individuales a su vez son puros ( $p = 1$ ); para un estado máximamente enredado tiende a infinito, tal que los fotones individuales son impuros ( $p \rightarrow 0$ ). Se ha calculado la pureza del fotón señal producido en el cristal PPLN para  $D=0$ ,  $p = 0.0087$ , y para  $D = 3 \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-2}$ ,  $p = 0.0116$ , tal que el enredamiento de la pareja de fotones se mantiene al usar chirp en el cristal.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un análisis teórico de SPDC basado en cristales no lineales con chirp. Se muestra una expresión general para la función de amplitud conjunta que caracteriza la pareja de fotones y se ilustra el comportamiento de los mismos a través de simulaciones numéricas. En particular, se ha mostrado el efecto del chirp en la JSI (pareja de fotones) y la SPS (fotones individuales) para una fuente SPDC basada en un cristal PPLN. De los resultados es claro que tanto el ancho como la forma de la SPS pueden ser controladas a través del parámetro de chirp.

Si bien se conoce que un cristal con chirp conduce a una ampliación del espectro SPDC, es interesante investigar en qué tiempos son emitidas frecuencias específicas. De las simulaciones de

la CWF esto resulta evidente, para el caso con chirp, el fotón en el modo señal exhibe una correlación entre la frecuencia de emisión y el tiempo, tal que el fotón individual adquiere un chirp.

También se muestra, qué además de que se puede controlar la forma del espectro de la pareja de fotones y de los fotones individuales, así como las correlaciones internas de los fotones en alguno de los modos, el estado SPDC permanece en un estado espectral máximamente enredado.

## BIBLIOGRAFÍA

1. G. Giuseppe, M. Atatre, M. D. Shaw, A. V. Sergienko, B. E. A. Saleh, C. Teich, "Entangled-photon generation from parametric down-conversion in media with inhomogeneous nonlinearity", *Phys. Rev. A*, Vol. 66, 2002, 013801.
2. J. P. Torres, A. Alexandrescu, S. Carrasco, L. Torner, "Quasi-phase-matching engineering for spatial control of entangled two-photon states", *Opt. Lett.* 29, 4, 2007, pp. 376-378.
3. K. A. O'Donnell, A. B. U'Ren, "Observation of ultrabroadband, beamlike parametric downconversion", *Opt. Lett.* 32, 7, 2007, pp. 817-819.
4. A. Fraine, O. Minaeva, D. S. Simon, R. Egorov, A. V. Sergienko, "Broadband source of polarization entangled photons", *Opt. Lett.* 37, 11, 2012, pp. 1910-1912.
5. X. Sánchez-Lozano, A. B. U'Ren, J. L. Lucio, "On the relationship between pump chirp and single-photon chirp in spontaneous parametric downconversion", *J. Opt.* 14, 2012, 015202.
6. X. Sánchez-Lozano, J. L. Lucio M., "Spontaneous parametric down-conversion in chirped, aperiodically-poled crystals", *International Journal of Quantum Information* 13, 5, 2015, 1550032.
7. D. H. Jundt, "Temperature-dependent Sellmeier equation for the index of refraction,  $n_e$ , in congruent lithium niobate", *Opt. Lett.* 22, 20 (1997), pp. 1553-1555.
8. Y. Jeronimo-Moreno, A. B. U'Ren, "Control, measurement, and propagation of entanglement in photon pairs generated through type-II parametric down-conversion", *Phys. Rev. A* 79, 2009, 033839.
9. C. K. Law, I. A. Walmsley, J. H. Eberly, "Control, measurement, and propagation of entanglement in photon pairs generated through type-II parametric down-conversion", *Phys. Rev. Lett.* 84, 23, 2000, pp. 5304-5307.
10. A. B. U'Ren, C. Silberhor, R. Erdmann, K. Banaszek, W. P. Grice, I. A. Walmsley, M. G. Raymer, "Generation of Pure-State Single-Photon Wavepackets by Conditional Preparation Based on Spontaneous Parametric Downconversion", *Laser Phys.* 15, 1, 2005, pp. 146-161.

# ESTRUCTURA ESTÁTICA PROMEDIO DEL MODELO PRIMITIVO RESTRINGIDO: UNA PROPUESTA SENCILLA BASADA EN LA APROXIMACIÓN ESFÉRICA

Lucero Torres López<sup>1</sup>, Juan Nieto Frausto<sup>1</sup>, O. Leticia Fuchs Gómez<sup>1</sup>, Honorina Ruiz Estrada<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

## RESUMEN

En este trabajo se propone un procedimiento sencillo para calcular los factores de estructura parciales,  $S(q)$ , de equilibrio de una solución de iones de igual tamaño con consistencia termodinámica. Consideramos el caso general de asimetría en carga y diámetro (modelo primitivo, PM por sus siglas en inglés) y se toma el límite de diámetros iguales (modelo primitivo restringido, RPM por sus siglas en inglés). Siguiendo la propuesta de Sharma y Sharma [1] se escribe a la función de correlación directa,  $c(r)$ , del modelo PM como la suma de tres términos: uno inherente a la interacción de esfera dura, otro relativo a la interacción de Coulomb y un tercero que es una exponencial decreciente con la distancia. La transformada de Fourier de  $c(r)$  conduce a los  $S(q)$  y en particular a la compresibilidad isotérmica de exceso a través de la ecuación para la compresibilidad. Esta variable de estado se iguala a la compresibilidad isotérmica que se desprende de la ecuación de estado vía la energía de Blum-Hoye [2] del modelo PM, y se obtiene una ecuación para los dos parámetros de ajuste involucrados en la exponencial decreciente. Se fija el valor del inverso del alcance de la exponencial y se resuelve para la amplitud, logrando así la consistencia termodinámica y como consecuencia una estructura estática termodinámicamente consistente.

## 1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que las tres rutas que ofrece que la teoría de líquidos para calcular la ecuación de estado (de la energía, de la ecuación del virial y de la ecuación para la compresibilidad), conducen a resultados diferentes. Este hecho es conocido como inconsistencia termodinámica. Esta carencia se debe a que estos diferentes caminos involucran a la función de distribución radial y ésta no se conoce. Hay varias maneras de acercarse a esta propiedad estructural. Una de ellas es resolviendo la ecuación de Ornstein-Zernike para la aproximación esférica media (MSA por sus siglas en inglés) que relaciona a la función de correlación directa  $c(r)$ , con el potencial de interacción a para,  $u(r)$ . Sin embargo, la estructura estática promedio obtenida de esta aproximación es pobre desde el punto de vista termodinámico. En particular, la ruta de la ecuación para la compresibilidad no predice la transición de fase líquido-gas. Afortunadamente, ya existe una versión (bien establecida) de consistencia termodinámica para el modelo RPM [3], conocida como la aproximación esférica media generalizada (GMSA por sus siglas en inglés). Por otro lado, esta metodología no ha sido extendida para abarcar al modelo PM (electrolitos asimétricos en la carga y el tamaño de los iones). Uno de los impedimentos es la gran cantidad de ecuaciones que involucra la solución de Blum y Hoye [2]. En este sentido, el presente trabajo es un intento por salvar este obstáculo. Observe que si contáramos con una expresión sencilla para la función de correlación directa en el espacio de Fourier,  $c(q)$ , que tuviera parámetros ajustables, se podría forzar la igualdad de la compresibilidad isotérmica vía la ecuación para la compresibilidad con la proveniente de la ruta de la energía, y como consecuencia, se garantizaría una estructura estática promedio del modelo PM con consistencia termodinámicamente que fuese más confiable al usarse,

por ejemplo, en la predicción de diagramas de arresto de electrolitos asimétricos. Hasta donde sabemos, solo se ha logrado hacer un estudio de diagramas de fase de este tipo en el caso del modelo PM [4]. Con esto en mente, seguimos la propuesta de Sharma y Sharma, pero a diferencia de ellos, consideramos que el término de perturbación involucra al potencial de Coulomb más una exponencial decreciente de la distancia que tiene dos parámetros de ajuste. Observe que ya se conoce la  $c(r)$  para el modelo de esfera dura (HS por sus siglas en inglés), así que de inmediato se puede calcular  $c(q)$  y como consecuencia a  $S(q=0)$ , con lo que se tiene acceso a la compresibilidad isotérmica vía la ecuación para la compresibilidad. Es menester contar con una ecuación de estado vía la energía del modelo PM; aquí se considera la presión de exceso de Blum-Hoye[2]. Igualando estas dos ecuaciones para la compresibilidad isotérmica se obtiene una ecuación para la amplitud de exponencial; para esto se puede fijar en 10 al inverso de su alcance. Nosotros hemos observado que  $S(q)$  cambia apreciablemente con la amplitud de la exponencial decreciente, pero no con el inverso de su alcance. Los valores de los parámetros de la exponencial que se desprendan de este procedimiento son los que se deben usar para calcular los datos de  $S(q)$  para un estado den equilibrio dado. En la siguiente sección proporcionamos los resultados teóricos relevantes que permiten obtener a los  $S(q)$  con consistencia termodinámica y finalizamos dando las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

## 2. TEORÍA

Considere una solución electrolítica de  $N$  especies, contenida en un volumen  $V$  en equilibrio térmico a la temperatura  $T$ . Los iones se modelan como esferas duras con carga en su centro, inmersos en un medio continuo de constante dieléctrica  $\epsilon$ . La densidad de número de la  $i$ -ésima especie es  $\rho_i = \frac{N_i}{V}$ ; uno de sus iones tiene un diámetro  $\sigma_i$  y carga  $q_i = z_i e$  donde  $e$  es la carga elemental. La interacción entre dos partículas separadas la distancia  $r$  se modela a través del potencial de Coulomb y se propone que la función de correlación directa está dada como,

$$c_{ij}(R) = c_{ij}^{HS}(R) + c_{ij}^I(R), \quad (1)$$

Donde

$$c_{ij}^I(R) = -\left(\frac{\beta}{\epsilon \sigma_0}\right) q_i q_j \frac{1}{R} - \beta A \exp\{-\lambda R\}; R > \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j), \quad (2)$$

En esta ecuación,  $\sigma_0 = (\sum_i \sigma_i)/N$ , es la unidad de longitud,  $R = r/\sigma_0$ ,  $\beta^{-1} = k_B T$  y  $\sigma_{ij}$  es la distancia de máximo acercamiento entre dos iones de la especies  $i$  y  $j$ , dada en unidades de  $\sigma_0$ .

La matriz de factores de estructura estática promedio se obtiene de la expresión  $S(q) = [I - C(q)]^{-1}$  donde  $q$  es el número de onda adimensionado,  $I$  es la matriz identidad de orden  $N \times N$  y  $C(q)$  es la matriz de transformadas de Fourier de las funciones de correlación directa, que se obtiene de las ecuaciones (1) y (2),

$$C_{ij}(q) = \sqrt{\rho_i \rho_j} \hat{c}_{ij}(q) = C_{ij}^{HS}(q) - B_{ij} \frac{1}{q^2} \cos q \sigma_{ij} - D_{ij} F_{ij}(q) \quad (3)$$

Donde  $C_{ij}^{HS}(q) = \sqrt{\rho_i \rho_j} \hat{c}_{ij}^{HS}(q)$ ,  $B_{ij} = \left(\frac{4\pi\beta}{\epsilon \sigma_0}\right) \rho^* \sqrt{x_i x_j} q_i q_j$  y  $D_{ij} = 4\pi\beta A \rho^* \sqrt{x_i x_j} \exp\{-\lambda \sigma_{ij}\}$ . Además,

$$F_{ij}(q) = \frac{1}{(q^2 + \lambda^2)^2} \left\{ [2\lambda + (q^2 + \lambda^2)\sigma_{ij}] \cos q \sigma_{ij} + [\lambda^2 + \lambda^3 \sigma_{ij} + (\lambda \sigma_{ij} - 1)q^2] \frac{1}{q} \sin q \sigma_{ij} \right\} \quad (4)$$

Con  $x_i = \rho_i/\rho$  y  $\rho$  es la densidad total de número.

Cuando el número de onda es cada vez más pequeño ( $q \ll 1$ ) el segundo sumando de la ecuación (3) tiene un polo de orden 2. Sin considerar este término se toma el límite  $q$  tendiendo a cero y se obtiene,

$$C_{ij}(q=0) = C_{ij}^{HS}(q=0) - \frac{1}{2} B_{ij} \sigma_{ij}^2 - D_{ij} F_{ij}(q=0) \quad (5)$$

$$F_{ij}(q=0) = \frac{1}{\lambda^3} \{2 + 2\lambda \sigma_{ij} + \lambda^2 \sigma_{ij}^2\} \quad (6)$$

A partir de la ecuación (5) se obtiene la expresión para la compresibilidad isotérmica de exceso vía la ecuación para la compresibilidad,

$$\left(\frac{\chi^{id}}{\chi}\right)^{ex} = \sum_{i,j} \sqrt{x_i x_j} B_{ij} \sigma_{ij}^2 + \sum_{i,j} \sqrt{x_i x_j} D_{ij} F_{ij}(q=0) \quad (7)$$

Que se reescribe como,

$$\left(\frac{\chi^{id}}{\chi}\right)^{ex} = -\frac{1}{8} \left(\frac{4\pi\beta}{\epsilon \sigma_0}\right) \rho^* \Phi^2 + \frac{1}{2\lambda^3} (4\pi\beta A \rho^*) \{4\psi_0^2 + 4\lambda \psi_0 \psi_1 + \lambda^2 \psi_0 \psi_2 + \lambda^2 \psi_1^2\} \quad (8)$$

Con

$$\Phi = \sum_i x_i \sigma_i q_i \quad (9)$$

$$\psi_n = \sum_i x_i \sigma_i^n \exp\{-\lambda \sigma_i / 2\}; \quad n = 0, 1, 2. \quad (10)$$

La presión osmótica de exceso sin unidades (ruta de la energía) de Blum-Hoye [2] es,

$$(\Delta P)^{ex} = -\frac{\gamma^3}{3\pi\rho^*} - \frac{\pi L_B}{2\rho^*} \left(\frac{p_n}{\Delta}\right)^2 \quad (11)$$

En esta ecuación,  $L_B = \beta e^2 / (\epsilon \sigma_0)$  es la longitud de Bjerrum adimensional y  $\Delta = 1 - \phi$ , con  $\phi$  la fracción de volumen total de iones. Además,  $p_n$  y  $\gamma$  satisfacen las siguientes ecuaciones,

$$p_n = \frac{1}{\Omega} \sum_i \rho_i^* \sigma_i z_i (1 + \gamma \sigma_i)^{-1} \quad (12)$$

$$\Omega = 1 + \frac{\pi}{2\Delta} \sum_i \rho_i^* \sigma_i (1 + \gamma \sigma_i)^{-1} \quad (13)$$

$$\gamma^2 = L_B \sum_i \rho_i^* \left[ \left( z_i - \frac{\pi}{2\Delta} p_n \sigma_i^2 \right) (1 + \gamma \sigma_i)^{-1} \right]^2 \quad (14)$$

De la ecuación (11) se puede obtener la compresibilidad isotérmica vía la energía del modelo PM.

Ahora, consideremos un electrolito de iones de igual tamaño  $\sigma_i = \sigma_0$ . En este caso, la interacción electrostática no contribuye a la compresibilidad isotérmica debido a la condición de electroneutralidad,

$$\left(\frac{\chi^{id}}{\chi}\right)^{ex} = (4\pi\beta A \rho^*) \frac{1}{\lambda^3} \{2 + 2\lambda + \lambda^2\} \exp\{-\lambda\} \quad (15)$$

La compresibilidad isotérmica vía la energía es [3],

$$\left(\frac{\chi^{id}}{\chi}\right)^{(E)} = \left(\frac{\chi^{id}}{\chi}\right)^{(cs)} - \frac{x}{48\phi} \left[ (1+2x)^{1/2} - x(1+2x)^{-1/2} - 1 \right] \quad (16)$$

Donde  $x$  está relacionado con la longitud de Debye,  $1/\kappa$ , a través de la ecuación,

$$x^2 = (\kappa \sigma_0)^2 = \frac{4\pi\beta}{\epsilon \sigma_0} \sum_i \rho_i^* q_i^2$$

Y la compresibilidad isotérmica del sistema de referencia es la que se obtiene de la ecuación de Carnahan-Starling,

$$\left(\frac{\chi^{id}}{\chi}\right)^{(cs)} = \frac{1}{\Delta^4} (1 + 4\phi + 4\phi^2 - 4\phi^3 + \phi^4) \quad (17)$$

### 3. CONCLUSIONES

Para el modelo RPM, de las ecuaciones (15) y (16) se obtiene el valor del parámetro  $\lambda$  que debe usarse para calcular la contribución de la interacción de Coulomb a  $c(q)$ . La parte de esfera dura se obtiene siguiendo la propuesta de Sharma-Sharma [1], con lo que se tiene un esquema completo para calcular la estructura estática promedio con consistencia termodinámica; L.E. Sánchez-Díaz y colaboradores [4] no contemplan la consistencia termodinámica de la contribución de la esfera dura a  $S(q)$ . Resta determinar si nuestra propuesta proporciona resultados comparables con este autor. Las ecuaciones (8) y (11) permiten determinar el parámetro  $\lambda$  para el modelo PM. En este caso no es evidente que pueda implementarse un procedimiento accesible para asegurar la consistencia termodinámica de la solución de Percus-Yevick de una mezcla de esferas duras. En principio podría intentarse un camino similar al de Sharma-Sharma [1]; la dificultad radica en que no se cuenta con una expresión sencilla tipo Carnahan-Starling para la presión. Es conveniente mencionar que es posible calcular una expresión explícita para la  $c(q)$  de Percus-Yevick y por lo tanto es posible calcular los  $S(q)$  del modelo primitivo con consistencia termodinámica. Le podemos proporcionar la expresión para  $c(q)$  de Percus-Yevick de mezclas de esferas duras.

### BIBLIOGRAFÍA

1. R.V. Sharma and K.C. Sharma, "The structure factor and the transport properties of dense fluids having molecules with square well potential, a possible generalization", *Physica* 89A, 1977, pp. 213-218.
2. L. Blum and J.S. Hoye, "Mean spherical model for asymmetric electrolyte. 2. Thermodynamic properties and the pair correlation function", *J. Chem. Phys.*, Vol. 81, 13, 1977, pp. 1311-1316.
3. L.E. Sánchez-Díaz, A. Vizcarra-Rendón and M. Medina-Noyola, "Generalized mean spherical approximation for the multicomponent restricted primitive model", *J. Chem. Phys.*, Vol. 132, 2010, pp. 234506 (1-8).
4. L. E. Sánchez-Díaz, A. Vizcarra-Rendón and R. Juárez-Maldonado, "Ionic and Wigner glasses, superionic conductors, and spinodal electrostatic gels: dynamically arrested phases of the primitive model", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 103, 2009, pp. 035701(1-4).

# SINCRONIZACIÓN DE OSCILADORES NO LINEALES

Ulises Uriostegui Legorreta<sup>1</sup>, Víctor Manuel Yépez García<sup>2</sup>, Julián López Tinoco<sup>3</sup>

<sup>1</sup> CINVESTAV Unidad Guadalajara. <sup>2</sup> Instituto Tecnológico de Morelia Departamento de Eléctrica. <sup>3</sup> Universidad Politécnica de Lázaro Cárdenas-Departamento de Tecnología Ambiental

## RESUMEN

En este trabajo se presentan dos osciladores no lineales de segundo orden con forzamiento periódico externo, susceptibles a presentar comportamiento caótico. Cada oscilador muestra un atractor extraño obtenido mediante simulaciones, se establece un modelo matemático y se dan algunos resultados de retrato de fase y diagrama de bifurcaciones. Se propone un modelo para sincronizar los osciladores en forma unidireccional y la relación que hay en el diagrama de bifurcación al lograr la sincronización entre los canales del sistema.

## 1. INTRODUCCIÓN

La sincronización de sistemas dinámicos acoplados se ha convertido recientemente en un gran tema de interés. Hasta el momento, los cuatro sistemas más ampliamente citados de baja dimensionalidad que exhiben un comportamiento caótico son las ecuaciones de Lorentz, ecuaciones de Rössler, osciladores de Duffing y osciladores de Van der Pol, se han estudiado ampliamente para entender el comportamiento caótico de forma sistemática. Un sistema acoplado de osciladores Van der Pol se ha estudiado ampliamente y muestra una rica estructura fractal cuando varios atractores conviven [1]. Un solo oscilador de Duffing forzado y osciladores acoplados de Duffing también se han estudiado ampliamente [2-4], así como sistemas acoplados de Lorentz o Rössler [5,6]. Además, la dinámica de los osciladores no lineales idénticos o no idénticos que tienen los mismos tipos de atractores ha sido estudiado mucho, pero la dinámica de los osciladores no lineales acoplados con diferentes atractores se ha estudiado menos en la medida que sabemos.

El sistema acoplado puede ser un modelo simbólico que representa la interacción entre dos atractores distintos. En el mundo real, hay muchos tipos de sistemas disipativos que requieren una fuerza externa para mantener sus movimientos. En general, descuidamos la influencia de un sistema disipativo en un sistema impulsado por una fuerza externa. Nuestro objetivo en este trabajo es estudiar la dinámica de los osciladores no lineales distintos proponiendo un acoplamiento que no se ha utilizado. Por lo tanto, tratamos de entender las funciones de los parámetros del sistema de cada oscilador en los estados dinámicos y analizaremos la relación que hay entre los diagramas de bifurcación al tener sincronización en los osciladores.

## 2. OSCILADOR NO LINEAL CON FORZAMIENTO

El oscilador propuesto por González [7], describe la dinámica de un oscilador no lineal con forzamiento periódico, que presenta un atractor extraño, el modelo de González es descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = y \quad (1)$$

$$\dot{y} = \alpha(f(x) - x - y - \gamma \sin(\omega_1 t)) \quad (2)$$

Donde  $f(x)$  es la función no lineal y es definida por:

$$f(x) = \frac{A_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|) \quad (3)$$

Un análisis de las Ecs. (1)-(3) considerado como un sistema autónomo, muestra que el sistema tiene tres puntos fijos, dos de los cuales son estables ( $\pm A_1, 0$ ) y existen si la ganancia  $A_1$  es mayor que la unidad y un tercero, en el origen  $(0, 0)$ , es un punto silla. Si dicha ganancia fuese menor que la unidad, el único punto fijo en el origen sería estable.

Para observar el comportamiento dinámico del oscilador de González, se realizaron simulaciones numéricas, utilizando el modelo de las Ecs. (1)-(3) con valores de los parámetros:

$$\alpha = 0.09, \quad \omega_1 = 0.254, \quad \gamma = 1.14, \quad A_1 = 3.25 \quad (4)$$

La Fig. 1 muestra el espacio fase obtenido por simulación a partir del modelo matemático, para lo cual se ha utilizado un método de integración por tramos lineales consistente en la determinación simbólica de la solución de las ecuaciones de estado para cada uno de dichos tramos de la función  $f(x)$ .

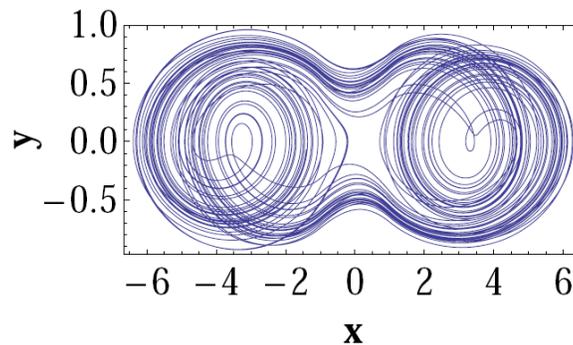


Figura 1. Atractor del oscilador de González.

### 3. OSCILADOR NO LINEAL PROPUESTO

Partiendo del oscilador de González, se propone un oscilador no lineal como puede apreciarse en el diagrama de bloques de la Fig. 2, tenemos un sistema no lineal susceptible de presentar comportamiento caótico. Este sistema puede describirse mediante las ecuaciones:

$$\dot{u} = v - \varepsilon_1 g(u) \quad (5)$$

$$\dot{v} = -\rho u + \varepsilon_2 g(u) + \beta \sin(\omega_2 t) \quad (6)$$

La función no lineal  $g(u)$ , se utiliza como base del oscilador de González, se puede modelar mediante tres tramos lineales de acuerdo con la expresión:

$$g(u) = \frac{A_2}{2} (|x + 1| - |x - 1|) \quad (7)$$

Calculando los puntos fijos de las Ecs. (5)-(7) considerado como un sistema autónomo, muestra que el sistema tiene tres puntos fijos, de los cuales dos son estables ( $\pm \varepsilon_2 A_2 / \rho, \pm \varepsilon_1 A_2$ ) y existen si la ganancia  $A_2$  es mayor que la unidad y un tercero, en el origen  $(0, 0)$ , es un punto silla. Si dicha ganancia fuese menor que la unidad, el único punto fijo en el origen sería estable.

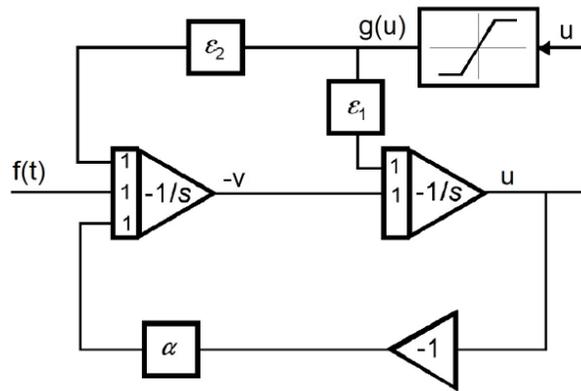


Figura 2. oscilador no lineal propuesto.

Se fijan los parámetros del sistema para ver el comportamiento dinámico del oscilar propuesto, se realizaron simulaciones numéricas, utilizando el modelo de las Ecs. (5)-(7) con valores de los parámetros:

$$\rho = 0.712, \quad \varepsilon_1 = 0.12, \quad \varepsilon_2 = 0.171, \quad \omega_2 = 0.113, \quad \beta = 0.769, \quad A_2 = 9.5 \quad (8)$$

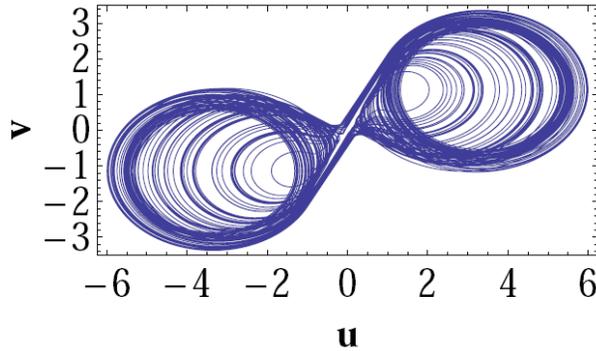


Figura 3. Atractor del oscilador no lineal propuesto.

#### 4. SINCRONIZACIÓN DE DOS OSCILADORES NO LINEALES

Esta sección se propone un acoplamiento para lograr la sincronización de manera unidireccional de los osciladores no lineales antes estudios. La dinámica del oscilador de González y el oscilador no lineal propuesto se describe mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\dot{x} = y + K(u - x) \quad (9)$$

$$\dot{y} = \alpha(f(x) - x - y - \gamma \sin(\omega_1 t)) + K(v - y) \quad (10)$$

$$\dot{u} = v - \varepsilon_1 g(u) + H(x - u) \quad (11)$$

$$\dot{v} = -\rho v + \varepsilon_2 g(u) + \beta \sin(\omega_2 t) + H(y - v) \quad (12)$$

Donde las funciones no lineales  $f(x)$  y  $g(u)$  son de las Ecs. (3) y (7) respectivamente. Para  $K = 0$  y  $H = 0$ , ambos osciladores están desacoplados. El acoplamiento empleado en el sistema es una retroalimentación lineal que puede ser visto como una perturbación de cada oscilador por una señal proporcional a la diferencia de su posición (elástico) y velocidad (disipativo).

Los parámetros de acoplamiento se fijan  $K = 0$  y  $H = 0$  para llevar a los osciladores por separado a sistemas caóticos iniciales. Posteriormente se fijan los parámetros de los osciladores no lineales forzados con los valores de las Ecs. (4) y (8). Llevando ambos osciladores a una región caótica, veremos su comportamiento haciendo  $H = 0$ , y tendremos como variable de acoplamiento  $K$  que será nuestro parámetro de control. Para este caso se tendrá un acoplamiento unidireccional por que el oscilador no lineal propuesto actuara como el sistema maestro y el oscilador de González como esclavo. Los diagramas de bifurcación teniendo como parámetro de control  $K$ , se obtienen mediante el trazo de los máximos de  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$  y  $v(t)$  en términos de  $K$  como parámetro de control se vario en pequeños pasos de 0-50.

Como se puede observar en la Fig. 4(a-b) los diagramas de bifurcación de  $x(t)$  y  $u(t)$  en términos de  $K$  son muy similares, al ir aumentando el valor de  $K$  los diagramas de  $x(t)$  y  $u(t)$  coinciden. En la Fig. 4(c-d) el diagrama de bifurcación de  $y(t)$  e  $v(t)$  coinciden de manera de el valor de  $K$  aumenta, esto significa que el sistema se acoplan de manera unidireccional, también se observa que la sincronización se realiza en los canales  $x - u$  como en los canales  $u - v$ . En ambos casos existen una sincronización completa, pero para cuestiones prácticas de envío de información el canal  $x - y$  es más amplio el rango del parámetro  $K$ .

Para demostrar esto en la Fig. 5 se toma el valor de  $K = 50$ , y se puede observar que se logra una sincronización en los canales  $x - u$  e  $y - v$  y la dinámica del oscilador de González es afectada por el oscilador propuesto.

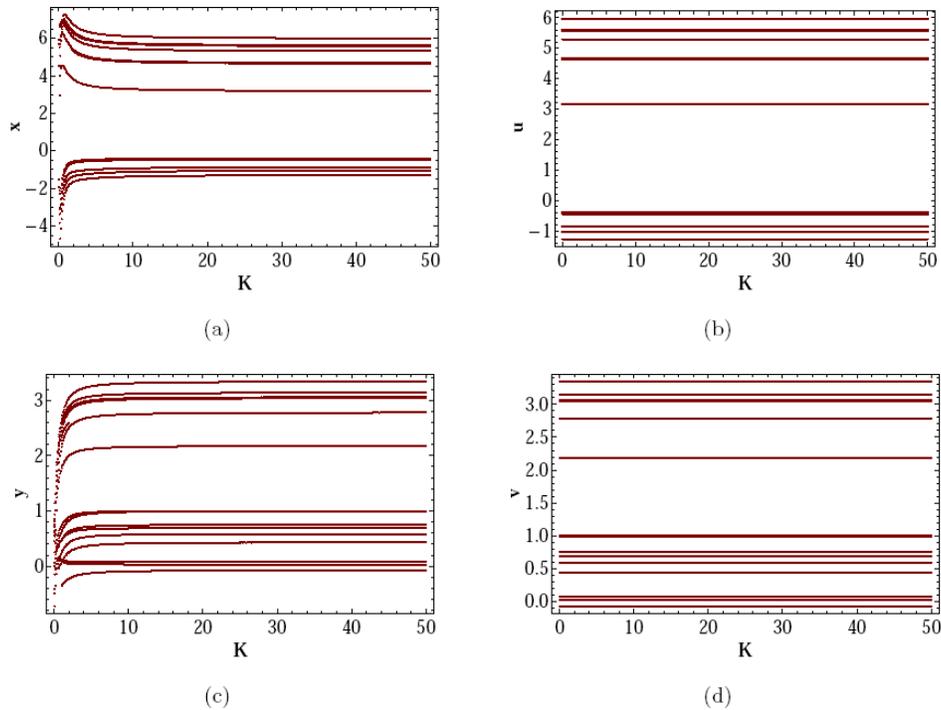


Figura 4. Diagrama de bifurcaciones teniendo como parámetro de control  $K$ .

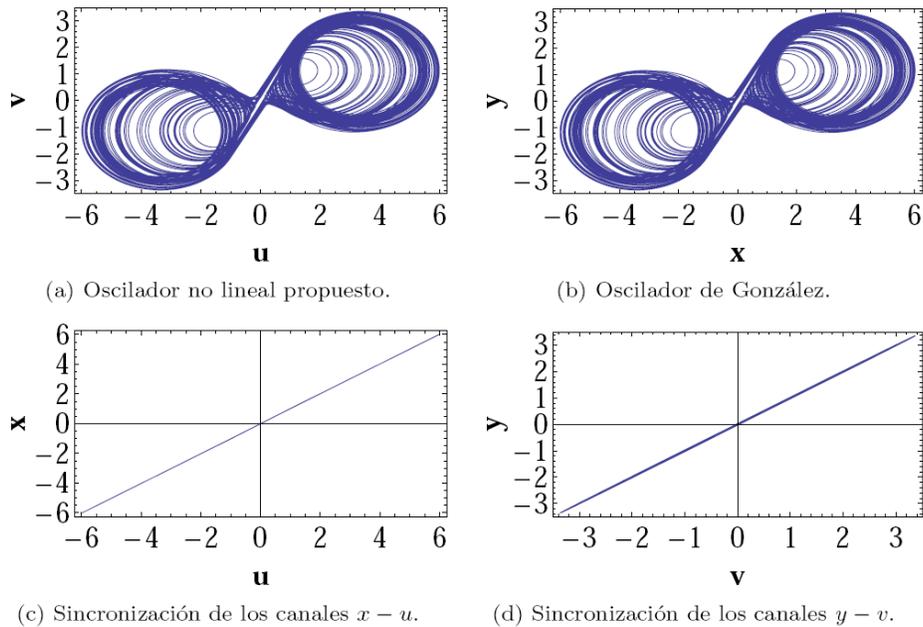


Figura 5. Sincronización de manera unidireccional con parámetro de control  $K = 50$ .

Ahora se tomara  $K = 0$ , y tendremos como variable de acoplamiento  $H$  que será nuestro control. En este caso se tendrá un acoplamiento unidireccional por lo que el oscilador de González actuara como el sistema maestro y el oscilador no lineal propuesto como esclavo. Los diagramas de bifurcación teniendo como parámetro de control  $H$ , se obtienen mediante el trazo de los máximos de  $x(t), y(t), u(t)$  y  $v(t)$  en términos de  $H$  como parámetro de control se vario en pequeños pasos de 0–50. Como se puede observar en la Fig. 6(a-b) los diagramas de bifurcación de  $x(t)$  y  $u(t)$  en términos de  $H$  son muy similares, al ir aumentando el valor de  $H$  los diagramas de  $x(t)$  y  $u(t)$  coinciden en el numero de líneas.

En la Fig. 6(c-d) el diagrama de bifurcación de  $y(t)$  e  $v(t)$  coincide parcialmente de manera que el valor de  $H$  aumenta, esto significa que el sistema se acoplara de manera unidireccional parcialmente, el numero de líneas debe ser iguales en ambos diagramas de bifurcación para que se obtenga una sincronización completa en ambos canales. En este caso existe una sincronización completa solo en el canal  $x - u$ .

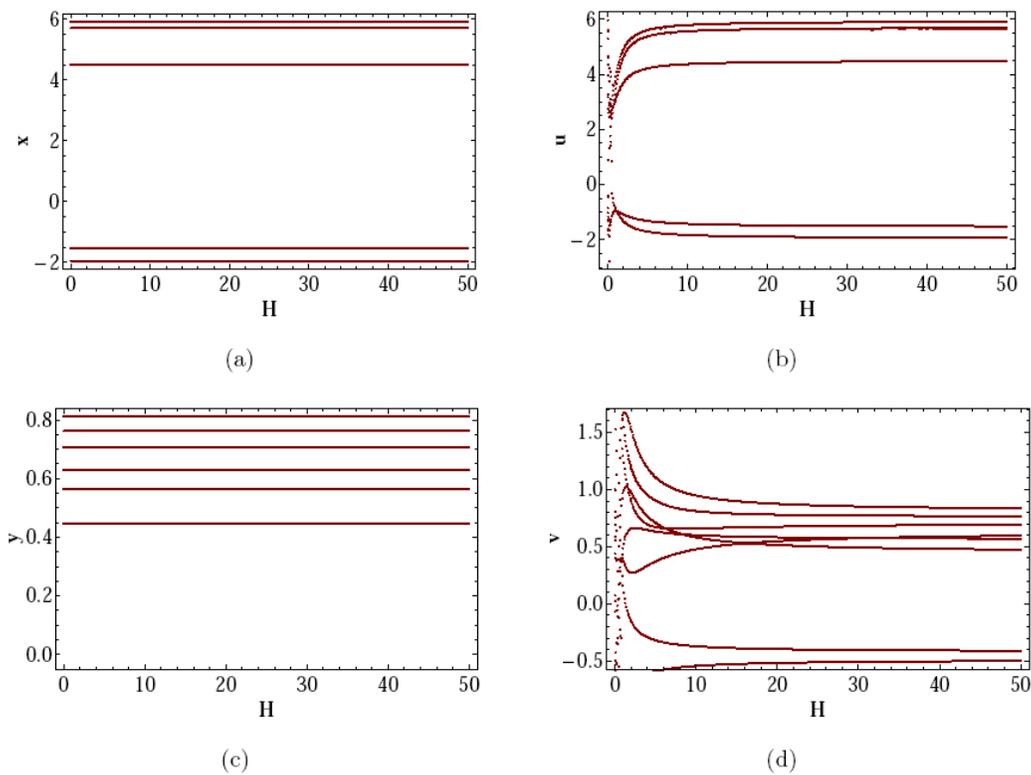
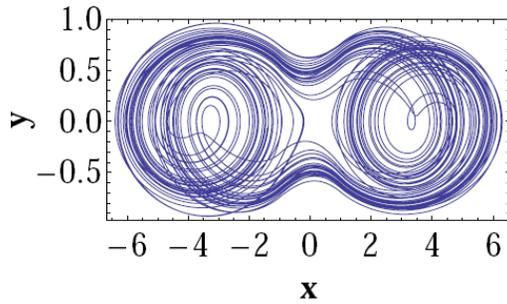
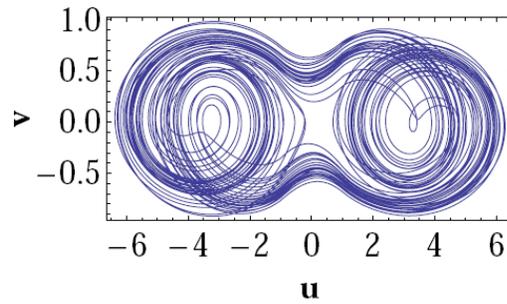


Figura 6. Diagrama de bifurcaciones teniendo como parámetro de control  $H$ .

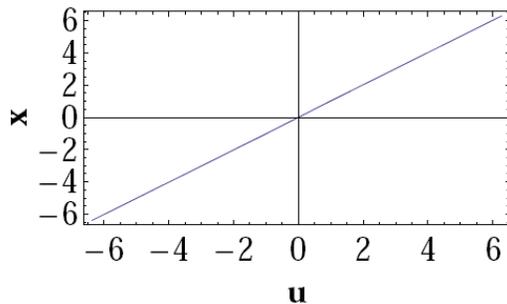
En la Fig. 7 se toma el valor de  $H = 50$ , y se puede observar que se logra una sincronización completa en los canales  $x - u$  y una sincronización parcial en los canales  $y - v$ , la dinámica del oscilador no lineal propuesto es afectada por el oscilador de González.



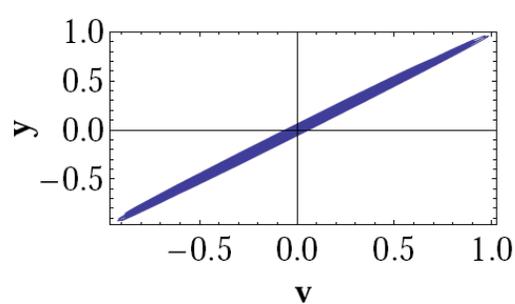
(a) Oscilador de González.



(b) Oscilador no lineal propuesto.



(c) Sincronización de los canales  $x - u$ .



(d) Sincronización de los canales  $y - v$ .

Figura 7. Sincronización de manera unidireccional con parámetro de control  $H = 50$ .

## 5. CONCLUSIONES

Se abordó el problema de sincronización de dos osciladores no lineales de manera unidireccional, identificando los canales donde se logra la sincronización completa, cuando el oscilador no lineal propuesto actúa como sistema maestro se tiene los canales  $x - u$  e  $y - v$  en sincronización, a diferencia que cuando el oscilador de González actúa como sistema maestro solo se logra la sincronización completa en los canales  $x - u$ . De acuerdo con los resultados obtenidos utilizar el diagrama de bifurcación es de gran ayuda para poder saber si se lograra una sincronización completa o parcial entre los distintos osciladores, hasta el momento no hay artículos publicados donde se estudie los diagramas de bifurcación, nosotros estamos estudiando este método con sistemas diferentes obteniendo grandes resultados, hasta la actualidad los artículos publicados utilizan el análisis del espacio fase en los canales a sincronizar y la diferencia entre los canales sea cero (señal de error). En trabajo futuro se tiene contemplado estudiar la sincronización bidireccional entre ambos osciladores.

## BIBLIOGRAFÍA

1. I. P. Diaz and A. L.-Fraguas, Phys. Rev. E52, 1480 (1995).
2. C. Reick and E. Mosekilde, Phys. Rev. E52, 1418 (1995).

3. M. Z. Ding and W. H. Yang, Phys. Rev. E54, 2489 (1995).
4. H-W. Yin and J-H. Dai, Phys. Rev. E58, 5683 (1998).
5. K-J. Lee, Y. Kwak and T-K. Lim, Phys. Rev. Lett. 81,321 (1998).
6. M. G. Rosenblum, A. Pikovsky and J. Kuths, Phys. Rev.Lett. 78, 4193 (1997).
7. R. González, M. Prian, M.A. Fernández, J.L. Rojas, E. Romero, Int. J. Bifurcation Chaos, 15, 1411, (2005)

## COLISIÓN DE VÓRTICES: ESTUDIO EXPERIMENTAL.

G. Del Valle D., G. Hernández M., R. Espíndola H., R. Rubio R., P. J. Díaz T., D. Muciño.

Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco

### RESUMEN

Un cañón de vórtices siempre llama la atención de todos. Preparamos dos dispositivos experimentales para obtener dos disparadores de vórtices. Analizamos la velocidad de salida del vórtice, así como la trayectoria que llevará el vórtice y la colisión que efectúe con un objeto de mayor cantidad de movimiento, con tal de observar el efecto de aniquilación del vórtice. Posteriormente colocamos los dos disparadores uno frente el otro, a fin de lanzarlos dos vórtices, con velocidad en sentidos contrarios y que se produzca una colisión en algún punto intermedio entre los disparadores, se estudia y analiza la colisión de los dos vórtices de manera experimental y presentamos una propuesta analítica de lo que puede ocurrir tras la colisión de los vórtices.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los anillos vorticosos son estructuras vorticiales en tres dimensiones con simetría toroidal, lo que les confiere sus características más importantes como son la circulación y velocidad autoinducida entre otras. Su aplicación abarca diversas áreas de la física y de la ingeniería como son: meteorología, aerodinámica, superfluidos y en flujos turbulentos industriales. Estas estructuras se encuentran presentes de diversas formas en la naturaleza: erupciones volcánicas [1]; durante el proceso de formación de penachos térmicos; como mecanismo de propulsión de algunos tipos de medusas [2]; incluso, los delfines generan anillos de vorticidad con aire en su interior (bubble rings) que utilizan como una herramienta de juego ya desde su primer mes de vida [3]. A pequeña escala podemos observar los anillos de vorticidad que se forman por la caída de gotas al interior de fluidos en reposo [4]. Tal vez una de las manifestaciones más directas y cotidianas de los anillos de vorticidad son aquellos generados por los fumadores al expulsar aire con humo a través de su boca.

La relativa facilidad para reproducir anillos vorticosos en el laboratorio, ha inducido a que existan diversos trabajos científicos dedicados al estudio de las propiedades del anillo en vuelo libre (evolución de su tamaño, velocidad, circulación). También se ha estudiado la interacción entre anillos de vorticidad o la interacción de estos con otras estructuras [5]. Por ejemplo se ha estudiado el impacto frontal entre dos anillos con características similares tanto en forma numérica [6] como experimental [7]. Otros autores han estudiado el impacto de anillos contra paredes planas [8]. Esta metodología ha sido utilizada como mecanismo generador de turbulencia a velocidad media nula, dejando de lado los casos donde la interacción no es turbulenta.

La capacidad de transporte de los anillos de vorticidad queda en evidencia mediante experiencias tan simples como inyectar humo en su fase de formación, el cual es trasladado por el anillo en su interior. Para entender el origen y la dinámica de los vórtices es necesario relacionarlos con los procesos que tienen lugar en los sistemas en los cuales se presentan. Estos flujos son descritos en general por ecuaciones no lineales muy complejas, pero también es posible estudiar el fenómeno

con base en sus propiedades globales, donde pueden utilizarse las ecuaciones de conservación de masa y momento lineal.

## 2. TEORÍA

### Aspectos teóricos

Previo al estudio de anillos de vorticidad, es necesario comprender algunos conceptos básicos, que serán presentados a continuación.

#### Vorticidad

La vorticidad es una cantidad vectorial que representa la rotación a nivel infinitesimal que posee un flujo y obedece a la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1)$$

corresponde al rotacional del campo de velocidad  $\mathbf{u}$  presente en el flujo analizado. Para un flujo en 2D con componentes de velocidad  $u, v$ , solo queda la componente de vorticidad normal al plano del flujo que viene dada por:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

Si bien la noción intuitiva de vorticidad está más asociada a “torbellinos” en un fluido, en rigor está asociado a gradientes de velocidad y que eventualmente pueden estar “ordenados” al interior de un fluido para así generar estructuras como vórtices o torbellinos.

La figura 2.1 muestra distintos tipos de flujos que poseen distribuciones de vorticidad con diferentes características.

En 2.1-(a) se presenta el problema típico de capa límite sobre una placa plana, donde los gradientes de velocidad en las cercanías de la placa producen alta vorticidad en esta zona. Este caso es un ejemplo de flujo con vorticidad, donde no se genera necesariamente rotación a gran escala.

En la figura 2.1-(b) se tiene en forma esquemática el problema de rotación bidimensional en un flujo potencial, donde sí existe rotación del fluido en todo el dominio (de hecho, la velocidad tangencial  $u_\theta$  decae según  $r^{-1}$ ) y sin embargo la vorticidad es cero en todo el dominio, salvo para  $r = 0$  donde diverge (Dirac de vorticidad en 2D). Existen otros tipos de flujo 2D donde la vorticidad ya no se encuentra concentrada como el ejemplo anterior. Por ejemplo, para un vórtice

de Lamb-Oseen, la vorticidad posee una distribución gaussiana en torno al centro de giro  $r = 0$ , vale decir  $\omega = \omega_{max} e^{-(r/a)^2}$ , con una amplitud  $\omega_{max}$  y ancho característico  $a$ . Este tipo de distribución presenta una característica muy importante: la zona en la cual  $r < a$  se asemeja a una zona de rotación sólida, esto es,  $u_\theta \sim r$ . Para  $r > a$ , el campo de velocidad se asemeja a un vórtice en rotación potencial. Debido a esta característica, este tipo de distribución de vorticidad es muy utilizado para modelar anillos de vorticidad.

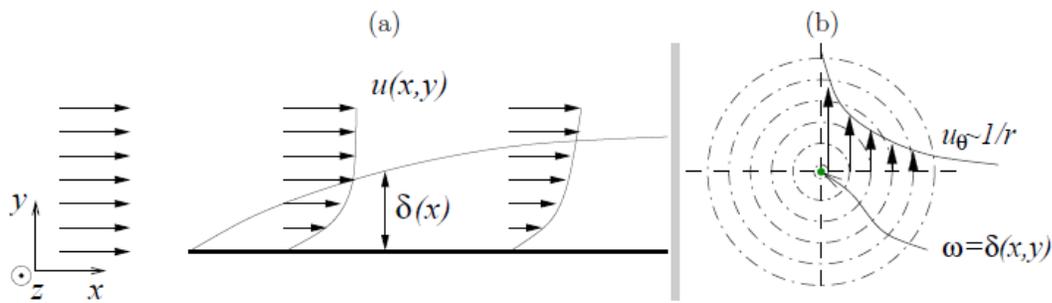


Figura 2.1 . Ejemplos de distintos flujos con vorticidad. (a) Capa límite dinámica sobre una placa plana con altos gradientes de velocidad en la cercanía con la placa, en consecuencia alta vorticidad, (b) Flujo potencial en rotación donde  $v_{\theta} \sim 1/r$  y la vorticidad está concentrada en  $r$ .

La dinámica de la vorticidad para este tipo de estructura viene dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \vartheta \nabla^2 \omega \quad (3)$$

### Líneas y tubos de vorticidad

Las líneas de vorticidad, son líneas imaginarias al interior de un fluido, que corresponden al lugar geométrico de todos los puntos donde el vector vorticidad es tangente a dicha línea (21). La figura 2.2 (a) muestra un ejemplo de este tipo de distribución de vorticidad. Uno de los ejemplos más directos de línea de vorticidad corresponde precisamente al flujo en rotación potencial en 2D de la figura 2.1 (b), que es generado a partir de una línea de vorticidad infinita, perpendicular al plano del flujo, como se muestra en la figura 2.2 (b).

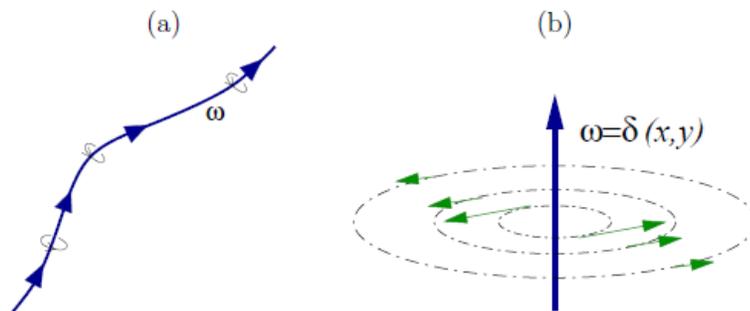


Figura 2.2: (a) línea de vorticidad. (b) Caso particular en el cual la línea de vorticidad genera el campo de rotación potencial de la Figura 2.1(b).

Cuando varias líneas se agrupan formando circuitos paralelos o conceéntricos, se denominan tubos de vorticidad. En base a estas definiciones, el término anillo de vorticidad normalmente se refiere a una región confinada de vorticidad al interior de un fluido, en donde las líneas de vorticidad forman circuitos cerrados (22). Para un fluido real, esta mas bien corresponde a un tubo de vorticidad. La región confinada se define como núcleo de vorticidad del anillo. Si bien los anillos de vorticidad no son siempre axisimétricos, una gran parte del análisis teórico en torno a estas estructuras parte de este supuesto para simplificar el análisis. Comunmente se utilizan el sistema de coordenadas cilíndrico para representar las variables y ecuaciones relacionadas con los anillos de vorticidad (Figura 2.3).

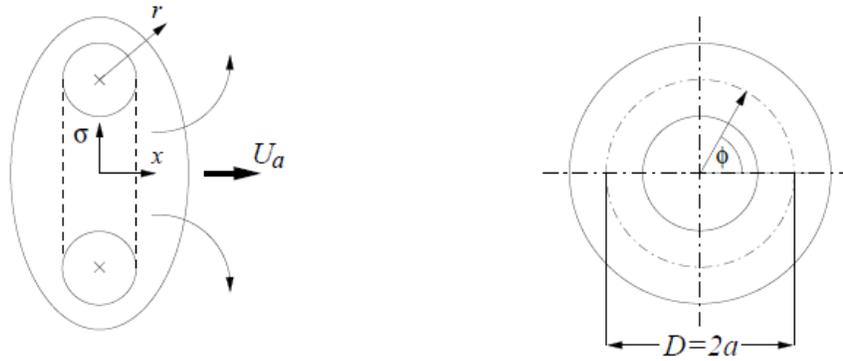


Figura 2.3: Esquema simplificado de un anillo de vorticidad.  $x$  es el eje de simetría de anillo,  $\sigma$  es la distancia radial al eje y  $\phi$  es el ángulo azimutal.  $D$  es el diámetro del anillo y se puede evaluar como la distancia entre los centros de rotación del anillo. Finalmente  $r$  es la distancia del centro de rotación para cualquier ángulo azimutal.

Para este tipo de flujo, el campo de velocidad por un plano que pase a través del eje de simetría del anillo se puede expresar en términos de la función corriente de Stokes, que se relaciona con el campo de velocidad de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$u_x = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}; \quad u_\theta = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

Por su parte, la componente azimutal de vorticidad viene dada por:

$$\omega_\phi = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) \quad (5)$$

#### Velocidad autoinducida $U_a$

Esta velocidad corresponde a la velocidad con que los anillos se desplazan con respecto a un marco de referencia fijo. Los modelos teóricos de anillos poseen velocidades autoinducidas que dependen del tipo de distribución de vorticidad considerada y de la magnitud máxima que alcanza la vorticidad. Para estudios numéricos o experimentales, es posible estimar la velocidad mediante la diferencia de posición de un anillo entre dos instantes diferentes.

$$U_a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (5)$$

Donde  $x_1$ ,  $x_2$  son las posiciones del anillo (a lo largo del eje de simetría), y los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  son los que demora el anillo en alcanzar dichas posiciones.

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

Se elaboraron dos diferentes arreglos, la colisión de un vórtice sobre una superficie rígida y la colisión entre ellos.

Cada arreglo experimental consta de uno o dos generadores de vórtices (Figura 1), cada uno de ellos compuestos por una cabina de almacenamiento de dimensiones ( $h = 0.19 \text{ m}$  y  $r = 0.075 \text{ m}$ ) ahora bien para crear los vórtices de gas fue necesario contar con un Generador de Frecuencias Pasco modelo WA-9867 implementando un botón con una frecuencia de impulso de  $f = 2 \text{ Hz}$ , para el gas se consideró una mezcla de Nitrato de Potasio con Azúcar donde la reacción química obtenida fue,  $48\text{KNO}_3 + 5\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11} = 36\text{CO}_2 + 55\text{H}_2\text{O} + 24\text{K}_2\text{CO}_3 + 24\text{N}_2$  generándose una mezcla de gases de Dióxido de Carbono, Vapor de Agua y Nitrógeno.

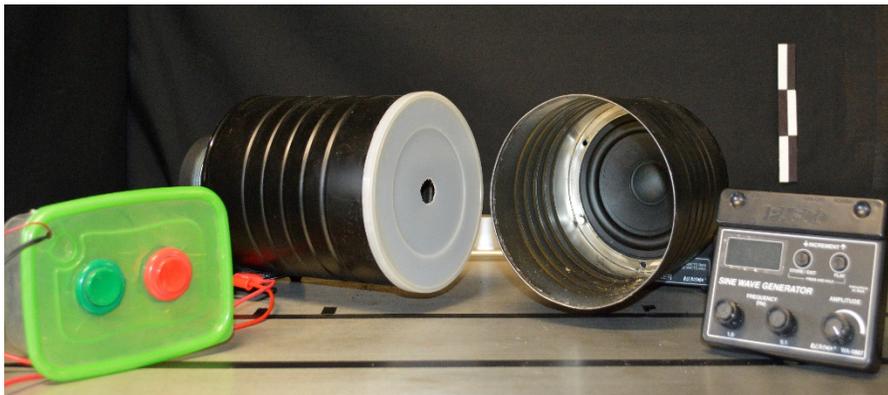


Figura 3.6. Arreglo Experimental

#### Colisión sobre una superficie rígida

En esta parte de la experimentación se consideró un generador de vórtices, el vórtice generado se impacta sobre una superficie rígida (Vidrio), dando como resultado la observación del aumento del diámetro del vórtice así como la velocidad con la que se está moviendo tal que se observara el efecto de aniquilación del vórtice, (Figura 2).

#### Colisión entre vórtices

En la segunda parte de la experimentación nos encontramos en el caso de la colisión de dos vórtices en cuyo caso se montaron dos Generadores de Vórtices alineados uno frente a otro, donde al colisionar se observe cómo estos se aniquilan entre ellos.



Figura 3.7. Aniquilación de un Vórtice en Movimiento



Figura 8.3 Aniquilación de la Colisión de dos Vórtices

#### 4. RESULTADOS

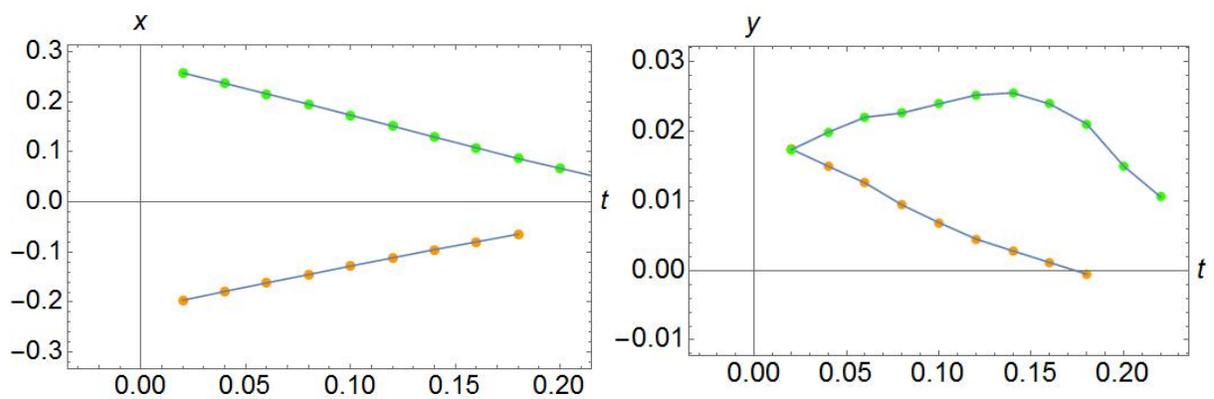


Figura 4. Resultados de la posición en x y en y de dos vórtices que colisionan.

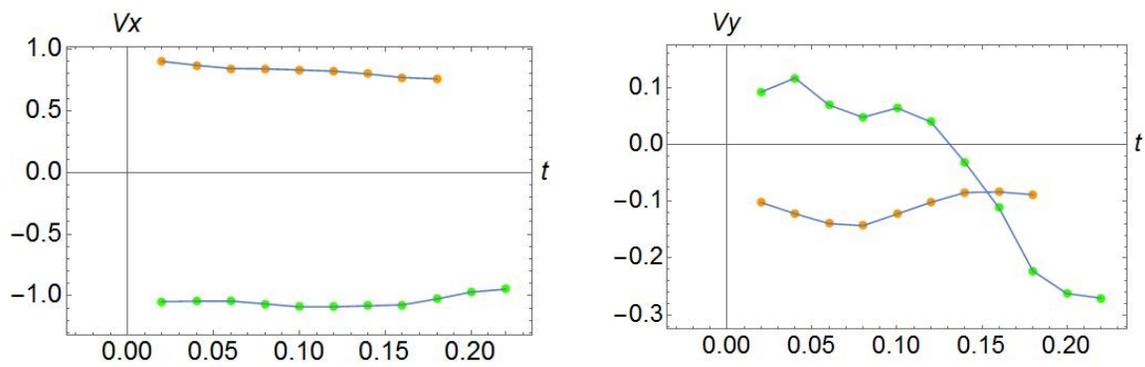


Figura 5. Resultados de la velocidad  $v_x$  y  $v_y$  de dos vórtices que colisionan.

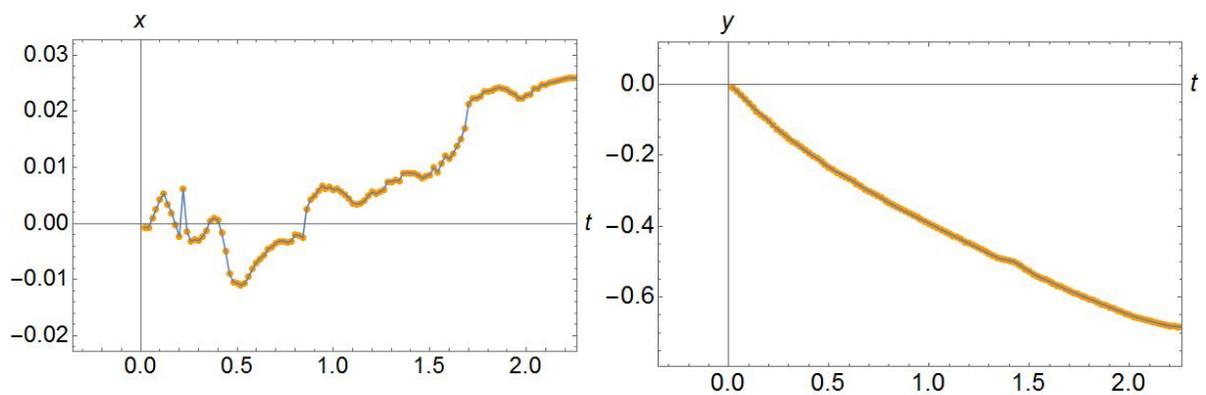


Figura 6. Resultados de la posición en  $x$  y en  $y$  de un vórtice que colisiona con un cristal

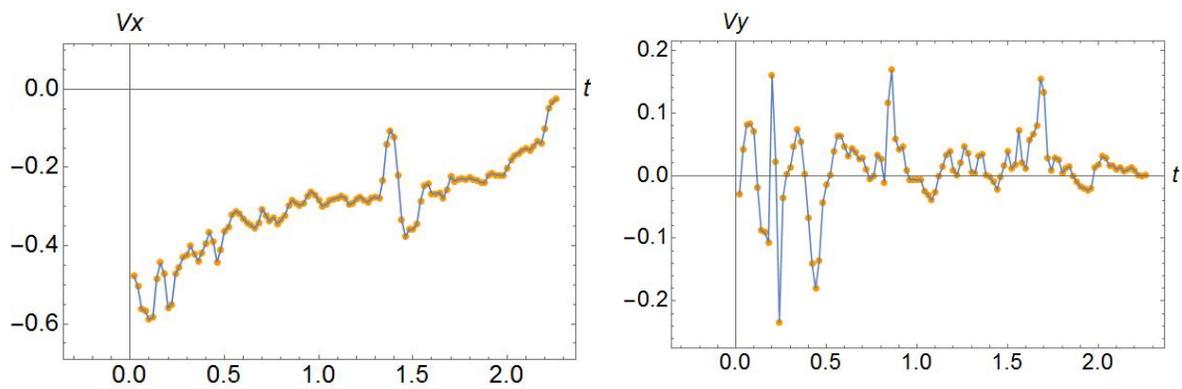


Figura 7. Resultados de la posición en  $v_x$  y en  $v_y$  de un vórtice que colisiona con un cristal.

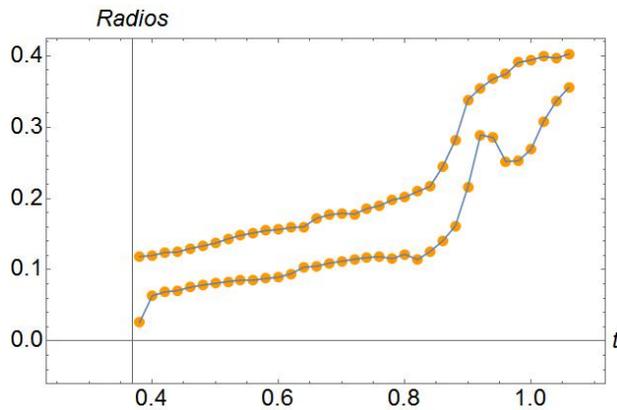


Figura 8. Resultados de la medida de los radios internos y externos de un vórtice, el punto de quiebre del radio interno en  $t= 0.92$ , representa la colisión del vórtice con el cristal y por ello hay un cambio en los radios.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos presentado algunos aspectos teóricos básicos referentes al estudio de los vórtices. Se ha construido un dispositivo experimental para el estudio de los vórtices producidos por un gas por medio de un generador de frecuencias. Se muestran algunos resultados experimentales principalmente relacionados con la velocidad autoinducida del vórtice, sus posiciones tanto en  $x$  como en  $y$  y  $z$ , su velocidades en ambas direcciones, para dos casos particulares, cuando dos vórtices colisionan, y cuando un vórtice colisiona con un objeto de mayor cantidad de movimiento. El análisis de cómo realizar una descripción cuantitativa queda como una perspectiva de este trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

1. A. Jacobi and R. Shah, "Heat transfer surfaces enhancement through the use of longitudinal vortices: A review of recent progress," *Exp. Therm. Fluid Sci.* 11, 295 (1995).
2. K. Shariff and A. Leonard "Vortex rings," *Annu. Rev. Fluid Mech.* 24, 235 (1992).
3. P. R. Voke and S. Gao, "Numerical study of heat transfer from an impinging jet," *Int. J. Heat Mass Transfer* 41, 671 (1998)
4. G. Charnay, J. Mathieu, and G. Comte-Bellot, "Response of a turbulent boundary layer to random fluctuations in the external stream," *Phys. Fluids* 19, 1261 (1976).
5. A. Kondjoyan, F. Péneau, and H. Boisson, "Effect of high free stream turbulence on heat transfer between plates and air flows: A review of existing experimental results," *Int. J. Therm. Sci.* 41, 1 (2002).
6. S. James and K. Madnia, "Direct numerical simulation of a laminar vortex ring," *Phys. Fluids* 8, 2400 (1996).
7. R. H. Hernández, B. Cibert, and C. Beché, "Experiments with vortex rings in air," *Europhys. Lett.* 75, 743 (2006).
8. C. Chu, C. Wang and C. Chang, "A vortex ring impinging on a solid plane surface—Vortex structure and surface force," *Phys. Fluids* 7, 1391 (1995).

## **EL MINI-LAB: UNA OPCIÓN PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE Y ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO**

María del Rayo Angeles Aparicio Fernández<sup>1</sup> y Evguenii Kourmychev<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad de Guadalajara / Centro Universitario de los Lagos / Departamento de Ciencias Exactas y Tecnología; Enrique Díaz De León 1144, CP 47460, Lagos de Moreno, Jalisco; México.

### **RESUMEN**

El equipo de mini laboratorio de física (MINI-LAB) fue diseñado y construido para la realización de prácticas de laboratorio con las cuales se demuestre y aprendan los conceptos fundamentales de la teoría de oscilaciones y ondas, a la vez que permita al estudiante de nivel medio superior y superior, introducirse en la búsqueda y descubrimiento de leyes del movimiento ondulatorio. En este trabajo exponemos la metodología y nuestra experiencia para el mejor aprovechamiento de dicho equipo. Las prácticas que se han logrado realizar con el MINI-LAB no sólo se utilizan para la demostración de los conceptos básicos de la teoría de ondas y oscilaciones, sino también para la comprobación de la existencia y estudio de resonancias no lineales en cuerdas bajo la acción de una fuerza externa, que es una de las características más importantes de sistemas dinámicos. Las oscilaciones y ondas en cuerdas metálicas, en conjunto con los dispositivos de control y observación de estas, constituyen la base de funcionamiento del MINI-LAB. La generación de oscilaciones en las cuerdas metálicas, bajo una tensión mecánica en un campo magnético constante, se logra gracias a la interacción de dicho campo con la corriente eléctrica alterna que fluye a través de las cuerdas.

### **1. INTRODUCCIÓN**

En la enseñanza pueden considerarse dos objetivos diferentes: el de informar y el de formar. Creemos que el experimento físico, satisfaciendo los dos objetivos, no debería utilizarse sólo como herramienta de comprobación de las leyes fundamentales, sino también debe utilizarse en la búsqueda de una respuesta a un problema surgido de la realidad. El planteamiento de un problema para una práctica de laboratorio depende mucho del profesor y, en nuestra opinión siempre debe llevar un elemento sustancial de búsqueda, de investigación para el descubrimiento de una ley fundamental, con el fin de motivar en un estudiante la creatividad y un fuerte deseo de aprender.

Uno de los fenómenos más frecuentados en ciencias exactas, naturales y en ingeniería son las ondas y oscilaciones de diferente naturaleza. Dada la gran importancia de los procesos ondulatorios y las oscilaciones, es indispensable tener los conceptos fundamentales de estos efectos incluidos en los programas de enseñanza en física. Se conocen varios sistemas que se emplean para demostrar algunos de los conceptos básicos de la teoría de ondas y oscilaciones: el tubo de gas para estudiar el sonido, diferentes tipos de péndulos, circuitos eléctricos, cubeta con agua, cuerda elástica con diferentes mecanismos de generación de oscilaciones; sin embargo, la mayoría de libros de texto presentan el material correspondiente en forma muy especializada conforme a la naturaleza de los procesos ondulatorios (óptica, sonido, vibraciones mecánicas, ondas en el agua, etc.), dejando un deseo natural de tener un sistema ondulatorio accesible pero de más amplia cobertura de los conceptos de la teoría de ondas y oscilaciones. Por otra parte, la

investigación de resonancias no lineales es otra área de importancia en la dinámica de sistemas que puede ser estudiada con el equipo en cuestión [1-19].

Las necesidades del proceso educativo y nuestra experiencia, mezclados con dicha filosofía de la enseñanza, nos motivaron a poner como objetivo el llevar a cabo el proyecto de un Mini Laboratorio de ondas y oscilaciones altamente interactivo. En [1,3,7,12], fue demostrado que una cuerda elástica, conductora con corriente eléctrica alterna en un campo magnético es un sistema dinámico que permite estudiar el movimiento ondulatorio y oscilaciones complejas, incluyendo efectos no lineales, con transcendencia de resultados a sistemas de alta tecnología. En este trabajo presentamos una parte de nuestra experiencia didáctica e ideas de uso del MINI-LAB.

## 2. DESCRIPCIÓN DE MINI-LAB

El equipo experimental del MINI-LAB emplea, como la base de su funcionamiento, el movimiento ondulatorio de un alambre delgado (cuerda elástica) con corriente eléctrica alterna, sometido a un campo magnético. Las oscilaciones del alambre, siendo muy variadas, dependen de los siguientes parámetros [3]: 1.-Campo magnético; 2.-Corriente eléctrica (frecuencia, magnitud y dirección); 3.- Tensión en la cuerda; 4.-Densidad de masa lineal y 5.-Módulo de Young del material de la cuerda, además de condiciones en la frontera e iniciales para las ondas en la cuerda. Cambiando los parámetros del sistema y observando las oscilaciones en la cuerda, se puede enseñar y explicar algunas de las leyes de electromagnetismo, y prácticamente todos los conceptos fundamentales de la teoría de ondas y oscilaciones. El equipo está compuesto principalmente de tres partes: eléctrica, magnética y mecánica.

La *Parte Eléctrica* consta de uno a tres alambres conductores eléctricos, por cada uno de estos fluye una corriente eléctrica directa o alterna (Figura 1a). Un oscilador de potencia (oscilador con amplificador de la corriente) permite variar la frecuencia en un rango de 0.5 a 1200 Hz y la intensidad de la corriente de hasta 1.5 amperios (Figura 1b).



Figura 1. a) Alambres conductores, b) oscilador con amplificador de corriente

*Parte Magnética.* El campo magnético está proporcionado por imanes permanentes (pueden usarse electroimanes) que se colocan en una vecindad de los alambres conductores. Los cambios de configuración del campo magnético que actúa sobre la corriente del conductor, se logran escogiendo imanes de diferente forma o por medio de un cambio de la posición de imanes respecto a la corriente (ver Figura 2).

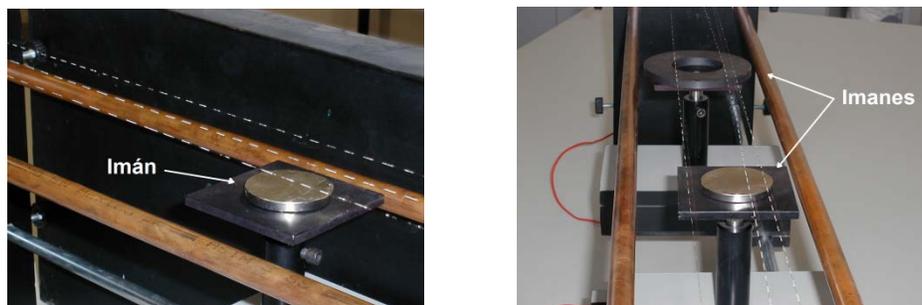


Figura 2. Parte magnética del equipo experimental

**Parte mecánica.** Está constituida por cuatro tubos-guías de material no magnético y dos costados de madera (Figura 3a); estos se encuentran ensamblados de tal manera, que constituyen un marco de rigidez necesaria y una estructura que permite un acceso fácil a las observaciones de ondas en los alambres, además permite cambios reproducibles en los parámetros del sistema.

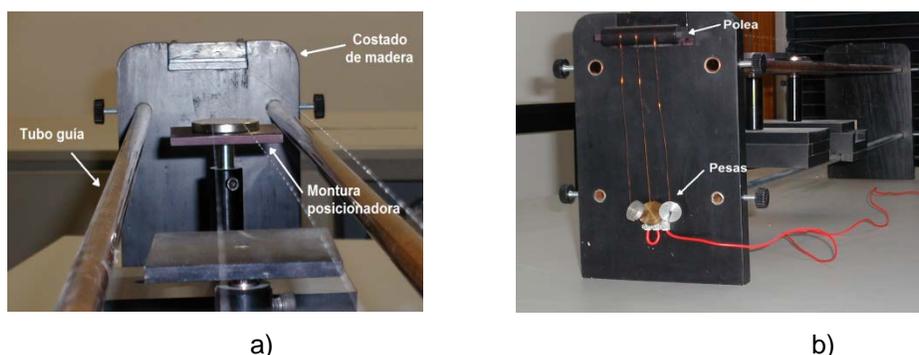


Figura 3. Parte mecánica del equipo experimental.

Los dos costados tienen dispositivos que proporcionan condiciones en la frontera básicamente de dos tipos: 1) los dos extremos Transversal- y Longitudinal-fijos; 2) un extremo Transversal- y Longitudinal-fijo y el otro extremo Transversal-fijo y Longitudinal-amortiguado. Mediante dispositivos adicionales se puede realizar otras condiciones en la frontera.

Cada alambre siempre se mantiene fijo en un extremo. En el otro extremo se tiene una polea sujeta al costado. La polea sirve para facilitar el deslizamiento del alambre en la ranura del costado para su tensión controlada. La tensión graduada (desde 5 gr hasta 100 gr, con escalamientos de 5 gramos), es proporcionada por las pesas sujetas al extremo de la cuerda que pasa por la polea (Figura 3b).

Puede ajustarse la longitud de la parte de alambre involucrada en el movimiento ondulatorio, deslizando los costados sobre los tubos-guías.

Se usan una o dos monturas-posicionadoras en tres dimensiones para colocar de manera controlable los imanes a una posición deseada con respecto al alambre.

Los accesorios como multímetro, juego de diferentes imanes permanentes, brújula, Gaussímetro, osciloscopio, cámara digital son de gran ayuda para facilitar la implementación de prácticas (la lista es abierta y depende de la complejidad de tareas planeadas).

### 3. MODELO MATEMÁTICO DE OSCILACIONES EN LA CUERDA

Consideremos una cuerda flexible, linealmente elástica y estirada en equilibrio a una longitud  $L_0$  a lo largo del eje  $z$ ;  $x$  y  $y$  son las coordenadas de movimiento transversal de la cuerda. En la derivación de la ecuación de onda en la cuerda, partimos de trabajos previos [3,9,10,11,12]. Los modos transversales resultan desacoplados de los longitudinales bajo la condición,  $C_l \gg C_t$ , que es válida para cuerdas metálicas bajo tensión moderada [10]. Aquí  $C_l$  y  $C_t$  son las velocidades de onda longitudinal y transversal. Despreciando un momento infinitesimal de inercia de la sección transversal de la cuerda, se puede desacoplar el movimiento transversal del torsional. En experimentos con oscilaciones de la cuerda se debe tener un cuidado especial para desacoplar los modos transversales mediante una forma particular de montar la cuerda, y en el modelo matemático se puede hacerlo suponiendo condiciones iniciales cero para uno de los modos y la componente de fuerza cero en esta dirección. Finalmente, se obtiene la ecuación no lineal de onda transversal plano polarizada en una cuerda delgada estirada hasta la longitud de equilibrio  $L_0$ ,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} - C_t^2 x'' - C_l^2 x'' \frac{1}{2L_0} \int_0^{L_0} (x')^2 dz = \tilde{f}(z) \cos(\Omega t) \quad (1)$$

donde  $x(t, z)$  es el desplazamiento transversal del segmento de cuerda en el punto  $z$ , en el instante  $t$ ;  $\Omega$  es la frecuencia angular de la fuerza externa  $\tilde{f}(z) \cos(\Omega t)$  la cual actúa en la dirección  $x$  del plano  $xz$ . Puntos y apóstrofes establecen las derivadas temporal y espacial en  $z$ ;  $\beta$  es el coeficiente de amortiguamiento. La interacción de la corriente eléctrica armónica en la cuerda con un campo magnético externo conduce a una fuerza externa espacialmente distribuida a lo largo de la cuerda y armónica en el tiempo,  $\tilde{f}(z) \cos(\Omega t)$  [3]. El término de la integral en la ecuación (1) representa la no linealidad geométrica que proviene del cambio en la tensión de la cuerda debido a la variación en su longitud cuando ésta oscila. Por otra parte, el calentamiento Joule por la corriente eléctrica causa la dilatación de la cuerda, y en consecuencia la disminución alternante de la tensión. Los dos efectos opuestos, siendo considerados en el modelo [12], transforman ecuación (1) en la ecuación integro-diferencial no lineal para el movimiento transversal  $x(t, z)$  de una cuerda delgada en el plano  $xz$ :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} - \left\{ \check{C}_t^2 - \frac{\lambda\alpha\delta}{\rho} \cos^2(\Omega t - \varphi) + C_l^2 \frac{1}{2L_0} \int_0^{L_0} (x')^2 dz \right\} x'' = \tilde{f}(z) \cos(\Omega t) \quad (2)$$

$$\check{C}_t^2 = (F_0 - \lambda\alpha\Delta T_0)/\rho = C_t^2 - \lambda\alpha\Delta T_0/\rho ; \quad C_l^2 = F_0/\rho \quad (3)$$

donde  $\Delta T_0$  es la parte estacionaria del aumento de temperatura en la cuerda con respecto a la del ambiente. De la ecuación (2) se observa que la variación de temperatura en la cuerda elástica (alambre delgado) se manifiesta linealmente a través de la variación de la velocidad de onda transversal; mientras que el estiramiento de la cuerda durante su oscilación se expresa no linealmente a través del término integral. Esto último es la no linealidad geométrica en las oscilaciones de la cuerda. La física de la ecuación (2) incluye la interacción de dos efectos opuestos, dilatación y no linealidad geométrica.

La fuerza de Lorentz distribuida a lo largo de alambre, presentada por una función armónica en tiempo,  $\tilde{f}(z) \cos(\Omega t)$ , puede ser hasta no lineal en caso de gradientes grandes del campo magnético. El último caso, siendo importante y difícil para estudios teórico-experimentales, de

preferencia se evita para las prácticas de laboratorio docente. Lo que es más difícil de controlar es el acoplamiento entre los modos transversales mediante el campo magnético no homogéneo. Sin embargo, este acoplamiento nos beneficia en los estudios de la composición de oscilaciones perpendiculares entre sí y en el fenómeno de polarización de ondas.

#### **4. PRACTICAS DE LABORATORIO CON MINI-LAB**

A la fecha se tienen diseñadas e implementadas once prácticas que utilizan el MINI-LAB para la demostración de los conceptos básicos de la teoría de ondas y oscilaciones, estas prácticas están clasificadas en dos grupos principales en área de física (en este trabajo se presentan las prácticas de estos dos primeros grupos), prácticas de electromagnetismo y prácticas de ondas y oscilaciones, y un grupo de prácticas de apoyo en el área de instrumentación del experimento. El primer grupo tiene como objetivo que los usuarios del MINI-LAB aprendan algunas leyes de electromagnetismo y entiendan el funcionamiento del equipo. El segundo grupo de prácticas está enfocado al aprendizaje de fundamentos de teoría de ondas y oscilaciones. A continuación se da una breve descripción de las cinco prácticas del bloque de electromagnetismo seguida por una selección de las prácticas del grupo de ondas y oscilaciones.

##### **ELECTROMAGNETISMO**

**PRACTICA # 1.** Circuitos eléctricos simples y la ley de Ohm. Como se mencionó anteriormente el MINI-LAB cuenta con alambres de cobre por los cuales circula corriente eléctrica. En la primera práctica el usuario adquiere los hábitos de la aplicación práctica de la ley de Ohm y conoce las propiedades eléctricas de los componentes de un circuito eléctrico simple; además se han definido como metas a lograr: aprender las funciones de un multímetro, usándolo para medir la resistencia de diferentes alambres, estimar teóricamente la resistencia de diferentes alambres, familiarizarse con elementos básicos de metodología de un experimento, analizar los resultados, clasificar errores de medición en sistemáticos y aleatorios, y estimarlos.

**PRACTICA # 2.** Campo magnético de una corriente eléctrica. El objetivo de la segunda práctica es aprender a detectar, observar y analizar el campo magnético producido por una corriente eléctrica, en la presencia del campo magnético terrestre. Las metas a alcanzar son: demostrar experimentalmente que la corriente en un alambre produce un campo magnético, que ese campo ejerce un momento de torsión sobre la aguja de una brújula y la alinea en la dirección del mismo, establecer la relación cualitativa de la orientación del campo magnético con respecto a la dirección de una corriente eléctrica rectilínea que genera este campo, caracterizar cualitativamente la relación entre la intensidad del campo magnético y la intensidad de la corriente rectilínea y establecer la relación cualitativa entre la intensidad del campo magnético y la distancia de un punto de observación.

**PRACTICA # 3.** Fuerza entre una corriente eléctrica y un campo magnético. En esta práctica se estudia y se muestra la naturaleza de la fuerza de Lorentz; para ello se trabaja con una cuerda conductora con corriente eléctrica directa, que está sometida a un campo magnético permanente y se muestra que la cuerda experimenta la fuerza de Lorentz. Se muestra cualitativamente la ley de Biot-Savart que establece que la fuerza magnética es proporcional al producto cruz de la corriente eléctrica y el campo magnético y además se produce la fuerza de Lorentz alterna, sustituyendo la corriente eléctrica directa por una corriente alterna.

**PRACTICA # 4.** Fuerza de interacción entre corrientes eléctricas. Se observa la interacción magnética entre dos conductores paralelos con corrientes eléctricas. Se verifica que dos conductores paralelos con corrientes eléctricas en sentidos opuestos se repelen y que dos conductores paralelos con corrientes eléctricas en el mismo sentido se atraen, con fuerzas iguales, como resultado de su interacción magnética. Se estudia la dependencia de las fuerzas como función de la distancia de separación entre los conductores.

PRACTICA # 5. Estado de equilibrio estable en un sistema de tres alambres paralelos tensados con corriente eléctrica directa. El objetivo de esta práctica es explicar el concepto de un estado de equilibrio estable en un sistema con interacción entre los alambres por medio de las fuerzas gravitatoria, elástica y magnética; para ello se encuentran y observan los estados de equilibrio estable en un sistema de tres alambres tensados bajo la acción de las fuerzas mencionadas. Se presenta una explicación cualitativa de los estados de equilibrio observados.

## OSCILACIONES Y ONDAS

PRACTICA # 6. Oscilaciones propias amortiguadas (puede realizarse con un péndulo físico simple o una cuerda tensada). Se caracterizan los parámetros de un sistema. Las metas a alcanzar en esta práctica son: medir la frecuencia de oscilación amortiguada (en dos primeros modos normales) de la cuerda elástica bajo diferentes tensiones, determinar la frecuencia propia del sistema vibratorio en estudio, determinar si el amortiguamiento depende de la frecuencia de oscilación y si la frecuencia de oscilación depende del amortiguamiento, medir el factor de calidad (factor  $Q$ ) de oscilaciones de una cuerda elástica bajo diferentes tensiones, evaluar errores de medición de coeficiente de amortiguamiento  $\beta$ , periodo de oscilaciones  $T$  y factor de calidad  $Q$ .

PRACTICA # 7. Fuerza alterna como la causa de oscilaciones forzadas. Fuerzas magnéticas alternas en un sistema de dos alambres tensados con corriente eléctrica. Se estudian los efectos de interacción por medio de las fuerzas electromagnéticas alternas, en sistemas de alambres tensados. Se muestran los principios de control de las fuerzas electromagnéticas y finalmente se establecen las causas de las oscilaciones en sistemas bajo la acción de fuerzas alternantes.

PRACTICA # 8 Parámetros principales de un sistema ondulatorio (alambre con corriente eléctrica en un campo magnético). En esta práctica se aprenden elementos de la metodología del análisis experimental y teórico cualitativo de un sistema físico, para determinar las variables y los parámetros principales del mismo. Mediante suposiciones y un razonamiento teórico cualitativo, se determinan el conjunto de parámetros principales que rigen las oscilaciones de un alambre delgado con corriente eléctrica en un campo magnético (tensión de la cuerda, densidad lineal de masa, configuración del campo magnético, condiciones en la frontera, frecuencia y la amplitud de la corriente eléctrica). Para el sistema estudiado, se evalúan y justifican por medio de los experimentos cualitativos y del análisis teórico, la importancia de los parámetros escogidos.

PRACTICA # 9. Fenómeno de resonancia en sistemas con oscilaciones forzadas. Los objetivos de esta práctica son: estudiar el fenómeno de resonancia en una cuerda con corriente eléctrica expuesta a un campo magnético y, además, comprobar que las oscilaciones forzadas ocurren con la frecuencia de la fuerza externa. Las metas que se plantean son: medir la frecuencia de oscilaciones amortiguadas en dos primeros modos normales, de una cuerda bajo diferentes tensiones, observando el crecimiento de amplitud de oscilaciones cerca de la frecuencia de resonancia; determinar la frecuencia propia del sistema vibratorio en estudio; averiguar si el amortiguamiento depende de la frecuencia de oscilación y si la frecuencia de oscilación depende del amortiguamiento; medir el factor de calidad (factor  $Q$ ) de oscilaciones de una cuerda elástica bajo diferente tensión.

PRACTICA # 10. Ondas estacionarias. El objetivo principal de esta práctica es enseñar las condiciones bajo las cuales surgen ondas estacionarias en una cuerda elástica (en particular, las condiciones en la frontera), aprender las características de estas ondas (modos normales, nodos y antinodos, amplitud y longitud de onda, frecuencia de oscilaciones) y con base en ellas, calcular la velocidad de la onda viajera.

PRACTICA # 11. Polarización de onda y figuras del tipo Lissajous. El concepto de polarización de una onda, en particular, de ondas electromagnéticas es algo difícil de visualizar para el estudiante. Por esta razón, el objetivo de esta práctica es mostrar los diferentes estados de polarización de

ondas en una cuerda (figuras de Lissajous), usando el principio de superposición de oscilaciones perpendiculares entre sí.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo expusimos principios de funcionamiento, la metodología y nuestra experiencia de uso del equipo de mini laboratorio de física (MINI-LAB) el cual fue diseñado y construido para la realización de prácticas de laboratorio con la finalidad de enseñar los conceptos fundamentales de la teoría de oscilaciones y ondas, incluyendo otros temas de física y los principios del método experimental de investigación. Actualmente el MINI-LAB se emplea en el campo de docencia para prácticas de laboratorio en temas: 1.- Electromagnetismo; 2.- Oscilaciones y Ondas; 3.- Instrumentación de Experimento. En "Electromagnetismo" se implementaron 5 prácticas; en "Ondas y Oscilaciones" – 6 prácticas, quedando abiertas unas prácticas más para el trabajo futuro. Una de las ventajas más notorias del MINI-LAB es su versatilidad en la exposición de temas y la combinación de éstas, llegando en algunos temas hasta niveles de investigación científica. Las prácticas que se han logrado realizar con el equipo en cuestión no sólo se utilizan para la demostración de los conceptos básicos de la teoría de ondas y oscilaciones, sino también para la comprobación de la existencia y estudio de resonancias tanto lineales como no lineales en cuerdas bajo la acción de una fuerza externa, que es una de las características más importantes de sistemas dinámicos. Por nuestra experiencia, no todos los temas se pueden tratar al mismo nivel de rigurosidad. Al contrario, se recomienda variarlo dependiendo de la preparación de estudiantes, empezando con prácticas demostrativas de un nivel cualitativo hasta las prácticas cuantitativas de medición con elementos de metodología de investigación científica. El equipo básico del MINI-LAB es bastante robusto y soporta los errores surgidos al implementar los experimentos.

## BIBLIOGRAFÍA

1. E.W. Lee, "Non-linear forced vibration of a stretched string", Brit. J. Appl. Phys., Vol. 8, 10, 1957, pp. 411-413.
2. T.C. Molteno, N.B. Tufillaro, "An experimental investigation into the dynamics of a string", Am. J. Phys., Vol. 72, 9, 2004, pp. 1157-1169.
3. E.V. Kourmychev, *Aspectos físicos y matemáticos del movimiento ondulatorio* (U. de Sonora, Hermosillo, 1997).
4. G.F. Carrier, "A note on the vibrating string", Quart. Appl. Math., Vol. 7, 1949, pp. 97-101.
5. D.W. Oplinger, "Frequency response of a nonlinear stretched string", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 32, 12, 1960, pp. 1529-1538.
6. R. Narasimha, "Nonlinear vibration of an elastic string", J. Sound Vib., Vol. 8, 1, 1968, pp. 134-146.
7. N.B. Tufillaro, "Nonlinear and chaotic string vibrations", Am. J. Phys., Vol. 57, 5, 1989, pp. 408-414.
8. L.Q. Chen, H. Ding, "Two nonlinear models of a transversely vibrating string", Arch. Appl. Mech., Vol. 78, 5, 2008, pp. 321-328.
9. A. Watzky, "Non-linear three-dimensional large-amplitude damped free vibration of a stiff elastic stretched string", J. Sound Vib., Vol. 153, 1, 1992, pp. 125-142.
10. E.V. Kurmyshev, "Transverse and longitudinal mode coupling in a free vibrating soft string", Phys. Lett. A, Vol. 310, 2-3, 2003, pp. 148-160.
11. D.R. Rowland, "Parametric resonance and nonlinear string vibrations", Am. J. Phys., Vol. 72, 6, 2004, pp. 758-766.
12. E.V. Kurmyshev, L.J. Lopez-reyes, "Resonance instability of nonlinear vibrations of a string under harmonic heating", Cybernetics and Physics, Vol. 2, 3, 2013, pp. 165-168.

13. R.J. Hanson, *et al.*, Primarily nonlinear effects observed in a driven asymmetrical vibrating wire, *J. Acoust. Soc. Am.* 117 (1) (2005) 400-412.
14. B. Bank, L. Sujbert, Generation of longitudinal vibrations in piano strings: from physics to sound synthesis, *J. Acoust. Soc. Am.* 117 (4) (2005) 2268-2278.
15. J.F. Rhoads, S.W. Shaw, The impact of nonlinearity on degenerate parametric amplifiers, *Appl. Phys. Lett.* 96 (23) (2010) 234101.
16. V. Ramakrishnan, B.F. Feeny, Resonances of a forced Mathieu equation with reference to wind turbine blades, *J. Vib. Acoust.* 134, 6, 2012, 064501.
17. D.W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equations*, Oxford, New York, 2007.
18. D. Younesian, *et al.*, Existence of periodic solutions for the generalized form of Mathieu equation, *Nonlinear Dynam.* 39, 4, 2005, pp. 335-348.
19. J.M.T. Thompson and H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, N.Y., 1986, 376 pp.

# INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN EN PARALELO USANDO LOS PROTOCOLOS DE CUDA FORTRAN Y MPI

E. Lozano Trejo<sup>a</sup>, H. Pérez Aguilar<sup>a</sup>, A. Mendoza Suárez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas “Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez” de la UMSNH, Morelia, Mich.

## RESUMEN

El estudio de sistemas complejos en 3D o a gran escala demanda grandes recursos computacionales que hasta hace poco tiempo sólo era posible realizar con grandes y costosas computadoras (clústers). Esta situación está cambiando con la creación de las tarjetas de procesamiento gráfico (GPUs) que se pueden integrar a una computadora de escritorio e incluso a una portátil, para lograr un gran poder de cómputo a bajo costo. Las tarjetas con el protocolo CUDA (Computer Unified Device Architecture) FORTRAN permiten la programación en paralelo lo cual implica un gran ahorro de tiempo de cómputo para estudiar las diferentes propiedades y características de los sistemas complejos en diversas situaciones a gran escala. En este trabajo se presentan los conceptos básicos, el potencial y las restricciones de la programación en paralelo usando CUDA FORTRAN en combinación con la Interfaz de Paso de Mensajes (MPI) en la CPU. Estas librerías son una gran herramienta numérica que permitirá modelar sistemas complejos en diferentes líneas de investigación.

## 1. INTRODUCCIÓN

Con el surgimiento de las computadoras, se comenzó una era de progresos significativos en todas las áreas sociales, desde entonces la computadora ha sido una herramienta indispensable por su fiabilidad y rapidez operativa de datos. Una persona que tardaría horas en realizar cálculos, ahora son resueltos por una computadora en segundos. Sin embargo, actualmente existen problemas que demandan todavía mucho más tiempo de procesamiento en la computadora; por ejemplo la simulación del clima, la simulación de mecánica de fluidos, entre otros. Solucionar estos problemas puede tardar desde minutos hasta días o meses, y es debido a este tipo de problemas que se produjo un cambio de paradigma en la forma en la que se puede resolver los problemas y este nuevo tipo de paradigma fue la paralelización.

La paralelización consiste en la subdivisión de un problema, en subproblemas, cada uno de los cuales es resuelto de forma simultánea y por separado, ofreciendo reducciones importantes en cuanto al tiempo de ejecución [1]. Sin embargo, no todos los problemas son aptos para el empleo de la paralelización, y los que sí lo son, no tienen porqué responder de forma positiva a su resolución paralela.

La computación en paralelo se puede definir como el uso simultáneo de múltiples recursos de computación (núcleos o procesadores) para realizar los cálculos simultáneos. De hecho, la computación en paralelo por lo general implica dos áreas distintas de la tecnología computacional que son la arquitectura de la computadora (hardware) y la programación en paralelo (software). Hoy en día, el paralelismo está en todas partes, y la programación en paralelo se está convirtiendo en la corriente principal en el mundo de la programación. Hay dos tipos fundamentales de

paralelismo en aplicaciones: el paralelismo de tareas y el paralelismo de datos. El paralelismo de tareas consiste en aplicar simultáneamente diferentes operaciones a distintos elementos de datos y el paralelismo de datos se caracteriza por la ejecución paralela de la misma operación sobre distintos datos.

Actualmente existen diferentes herramientas para el desarrollo de la programación en paralelo que hace que esta actividad se vuelva sencilla bajo los protocolos de MPI (Message Passing Interface), OpenMP (Open Multi-Processing) y CUDA (Computer Unified Device Architecture) reduciendo el tiempo de cómputo considerablemente.

## 2. PROGRAMACIÓN EN PARALELO

La computación en paralelo es una técnica de programación en la que muchas instrucciones se ejecutan simultáneamente. Se basa en el principio de que los problemas grandes se pueden dividir en partes más pequeñas que se pueden resolverse de forma concurrente.

Para poder paralelizar un problema y mejorar el rendimiento, es necesario conocer algunos conceptos fundamentales sobre paralelización y conocer el ambiente de trabajo tales como: el tipo de hardware, el soporte del sistema operativo y las herramientas de software para la implementación.

### 2.1 Arquitectura de memoria de ordenadores paralelos

Existen diferentes arquitecturas de memoria en los ordenadores utilizados para la programación en paralelo y que a continuación se describen:

**Memoria compartida.** En una máquina paralela con memoria compartida (computadora con muchos CPUs o núcleos que acceden al mismo espacio de memoria), los mensajes pueden ser enviados depositando sus contenidos sobre un área de memoria compartida (ver Fig. 1). Ésta es a menudo la forma más eficiente para programar la memoria compartida en una computadora con un gran número de procesadores, especialmente sobre la máquina NUMA<sup>10</sup>, donde la memoria es local para los procesadores y el acceso a la memoria de otro procesador es costoso.

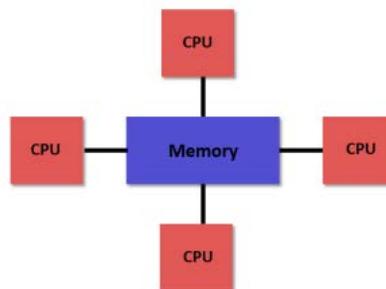


Figura 1. Memoria compartida por un conjunto de procesadores.

Una de las ventajas del método de memoria compartida es que el espacio de direccionamiento global presenta un fácil manejo desde el punto de vista del programador a la hora de acceder a la memoria. Por el contrario, una gran desventaja que representa este sistema es la falta de

---

<sup>10</sup> NUMA (Non-uniform memory Access, Acceso a memoria no uniforme). Bajo NUMA, un procesador puede acceder a su propia memoria local de forma más rápida que a la memoria no local.

escalabilidad, ya que añadir más CPUs (Unidades de Procesamiento Central) incrementa de forma geométrica el tráfico asociado con la gestión a la memoria.

**Memoria distribuida.** Al igual que los sistemas de memoria compartida, los sistemas de memoria distribuida son muy variados, pero comparten características comunes. Los sistemas de memoria distribuida requieren una red de comunicación para conectar las memorias de cada procesador. Esta configuración se muestra en la Fig. 2. Cada procesador tiene su propia memoria local. Los procesadores pueden compartir información solamente enviando mensajes; es decir, si un procesador requiere los datos contenidos en la memoria de otro procesador, deberá enviar un mensaje solicitándolos. Esta comunicación se le conoce como Paso de Mensajes.

Este sistema, a diferencia del anterior (sistema de memoria compartida), sí es escalable en cuanto a lo que a memoria se refiere a la hora de aumentar el número de procesadores; sin embargo, tiene la desventaja que el acceso remoto a la memoria es lenta.

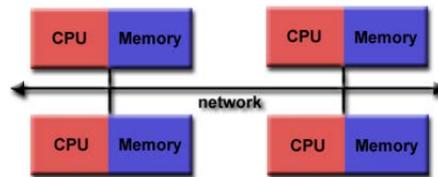


Figura 2. Sistema de memoria distribuida.

### Híbrido memoria compartida-distribuida.

La configuración de la memoria compartida-distribuida (MCD) se muestra en la Fig. 3. Es reconocida como uno de los enfoques más llamativos para la creación de sistemas escalables de alto rendimiento de sistemas multiprocesador. Los sistemas de memoria compartida-distribuida, realizan una semántica de memoria compartida sobre hardware de intercambio de mensajes, ya que representan la creación híbrida de dos tipos de computación paralelos: la memoria distribuida en sistemas multiprocesador y los sistemas distribuidos. Estos proporcionan la abstracción de memoria compartida en sistemas con memorias distribuidas físicamente y combinan las mejores características de ambos enfoques. Este sistema de memoria compartida posee su propia memoria local y se interconecta con otros procesadores por medio de un dispositivo de alta velocidad.

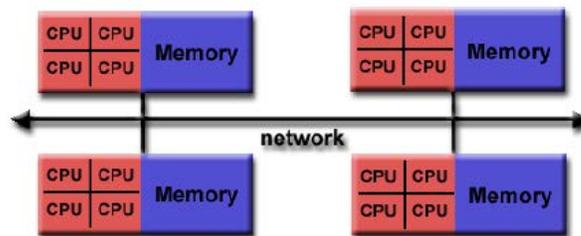


Figura 3. Sistema híbrido memoria compartida-distribuida.

## 2.2 Modelos de programación basados en arquitectura

**SISD (Single Instruction Single Data).** Este es el modelo tradicional de computación secuencial, donde una unidad de procesamiento recibe sólo una secuencia de instrucciones que opera en una secuencia de datos.

**SIM (Single Instruction Multiple Data).** En este modelo a diferencia del SISD, aquí existen múltiples procesadores que sincronizadamente ejecutan la misma secuencia de instrucciones, pero en diferentes datos.

**MIMD (Multiple Instruction Multiple Data).** Esta computadora también es paralela como la SIMD, pero MIMD es asíncrono. No tiene un reloj central. Cada procesador en un sistema MIMD puede ejecutar su propia secuencia de instrucciones y tener sus propios datos. Esta característica es la más general y poderoso de esta clasificación.

## 2.3 Plataformas de programación en paralelo

Los lenguajes de programación en paralelo, las bibliotecas, las API<sup>11</sup> y los modelos de programación en paralelo, han sido creados para la programación de computadoras con arquitectura en paralelo.

Hay muchos lenguajes y modelos de programación en paralelo propuestos en las últimas décadas. Los que son más utilizados son la Interfaz de Paso de Mensajes (MPI) para sistemas con memoria distribuida y OpenMP para sistemas con memoria compartida. Ambos se han convertido en las interfaces de programación estandarizadas y apoyadas por los principales vendedores de ordenadores. Sin embargo, hoy en día el protocolo CUDA, es una nueva plataforma de programación en paralelo que ofrece la memoria compartida para la ejecución en paralelo en la GPU. Ha demostrado ser muy exitoso en la programación de multihilo con cientos de núcleos. Por ejemplo, los científicos en toda la industria y el mundo académico ya están usando CUDA para alcanzar aceleraciones espectaculares sobre los códigos de producción y de investigación.

## 2.4 Programación MPI

MPI es una especificación para las operaciones de paso de mensajes diseñadas para ser usada en programas que exploten la existencia de múltiples procesadores (para más detalles ver [2]. Define cada trabajador como un proceso y proporciona enlaces de lenguaje para C, C ++ y FORTRAN. MPI ofrece un importante conjunto de bibliotecas para escribir, depurar y probar el rendimiento en programas distribuidos.

La ventaja para el usuario es que, MPI ha sido estandarizada en muchos niveles. Por ejemplo, ya que la sintaxis es estándar, se puede estar seguro de que el código MPI se ejecutará bajo cualquier aplicación de MPI. Dado el comportamiento funcional de MPI, “las llamadas” también están estandarizadas. Además las llamadas de MPI deben comportarse de la misma forma, lo que garantiza la portabilidad de sus programas paralelos. Sin embargo, los resultados pueden variar de una implementación a otra.

## 2.5 Programación OpenMP

OpenMP es una API, cuyas características pretenden facilitar el desarrollo de programas paralelos [3]. Consta de directivas de compilador, librerías en tiempo de ejecución y variables de entorno que facilitan la descripción de una o más porciones de un programa que deben ser ejecutadas por varias unidades de procesamiento de manera simultánea. Asimismo permiten especificar los

---

<sup>11</sup> Por sus siglas en inglés, *Application Programming Interface*

recursos a utilizar (tamaño de memoria compartida, cantidad de hilos o threads de ejecución) en cada una de estas unidades y determinar de qué manera se dividirá la carga de trabajo entre las mismas. Lejos de ser un lenguaje de programación provee a los desarrolladores de una notación especial que puede ser utilizada en programas escritos en C, C++ o FORTRAN. Una desventaja de OpenMP es el alto costo computacional (overhead) “inaceptable” presente al paralelizar aplicaciones con cantidades “relativamente grandes” de threads.

## 2.6 Programación CUDA

Una GPU (conocido comúnmente como tarjeta gráfica), es un dispositivo de hardware que por sus características, se encarga de procesamiento gráfico en una computadora, logrando aligerar en este aspecto la carga de trabajo en la CPU en aplicaciones como los video juegos o aplicaciones 3D interactivas.

Una tarjeta GPU es altamente especializada, ya que está pensada para realizar una sola tarea. Por ejemplo, el procesamiento gráfico, que realiza una gran cantidad de cálculos aritméticos sobre números reales (representados en una computadora mediante la representación de coma flotante). Esto permite aprovechar la gran potencia de cálculo de las GPUs para aplicaciones no relacionadas con los gráficos.

La GPU está especializada en cómputo intensivo y en computación altamente paralela. Por lo tanto, la GPU está diseñada de manera que más transistores se dedican al procesamiento de datos a diferencia de los procesadores. Una forma sencilla de comprobar rápidamente esta discrepancia es viendo la diferencia entre la arquitectura de una CPU y una GPU moderna, como se ilustra en la Fig. 4.

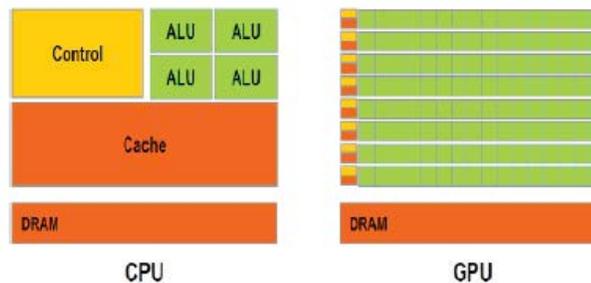


Figura 4. CPU y GPU tienen básicamente diferente filosofía de diseño.

En la Fig. 4, se muestra el esquema de un procesador multicore que cuenta con 4 núcleos (cores). En cambio la GPU cuenta con 8 multiprocesadores con 16 núcleos cada uno, con un total de 128 núcleos. Tanto la CPU como la GPU tienen una memoria global DRAM que es de mayor tamaño con una latencia mayor que cualquiera de las cachés y además es compartida entre todos los cores.

**CUDA** (Arquitectura Unificada de Dispositivos de Cómputo). Este protocolo es una plataforma de computación en paralelo que presenta un nuevo modelo de programación y un conjunto de instrucciones, que combinados permiten utilizar la unidad de procesamiento gráfico (GPU) de

NVIDIA<sup>12</sup>; para resolver grandes problemas complejos de forma más eficiente que si se utilizase una CPU. De esta forma un nuevo nombre ha surgido para referirse a las GPUs (General-Purpose computing Graphic Processing Units) también llamadas GPGPU, y la idea consiste en utilizar las altas concurrencias y el paralelismo de las tarjetas gráficas para aplicaciones de cómputo general.

Para programar en la arquitectura de CUDA, actualmente los desarrolladores pueden usar C para CUDA, el cual es el lenguaje de programación con extensiones provistas por NVIDIA. También es compatible con múltiples lenguajes de programación de uso generalizado como C++, Python, FORTRAN o Java (NVIDIA, 2015). Entre las ventajas de CUDA encontramos principalmente la capacidad de acceder a la memoria compartida de las tarjetas gráficas, la cual alcanza velocidades mucho mayores que la memoria (global) del dispositivo. Sin embargo, la desventaja más notoria es que sólo se puede utilizar en GPUs de la marca NVIDIA, por lo que la portabilidad de las aplicaciones desarrolladas para esta arquitectura está claramente limitada a las tarjetas gráficas de este vendedor.

CUDA es una plataforma para la *programación heterogénea*<sup>13</sup>. Se trata de sistemas multi-core que obtienen un rendimiento no sólo mediante la adición de núcleos (cores), sino también mediante la incorporación de capacidades de procesamiento especializados para manejar tareas particulares. La arquitectura de sistemas heterogéneos utiliza varios tipos de procesadores (normalmente CPU y GPU), por lo general en el mismo chip. El procesamiento en la GPU, aparte de sus conocidas capacidades de procesamiento gráfico en 3D, también puede realizar cálculos matemáticos intensivos en conjuntos de datos muy grandes, mientras que las CPU ejecutan el sistema operativo y realizan tareas de serie tradicionales.

Una GPU actualmente no es una plataforma independiente sino un coprocesador de la CPU, que posee su propia memoria. La comunicación de la GPU con la CPU se realiza a través de un bus llamado PCI-Express. Dicho bus consta de dos vías (una de envío y otra de recepción), como se muestra en la Fig. 5. Es por ello que, en términos de programación en CUDA, la CPU se llama "Host" (anfitrión) y la GPU de NVIDIA se llama "Device" (dispositivo).

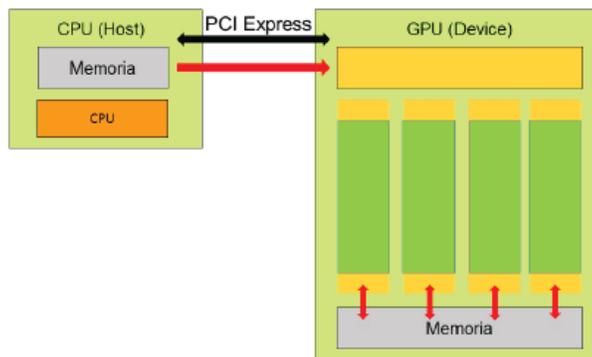


Figura 5. GPU como coprocesador.

<sup>12</sup> NVIDIA es una empresa multinacional especializada en el desarrollo de unidades de procesamiento gráfico y de tecnologías de circuitos integrados para estaciones de trabajo, ordenadores personales y dispositivos móviles.

<sup>13</sup> La computación heterogénea se refiere a los sistemas que utilizan más de un tipo de procesador.

El código Host se ejecuta en la CPU y el código Device se ejecuta en la GPU. Una aplicación que se ejecuta en una plataforma heterogénea normalmente es inicializado por la CPU. El código de CPU es responsable de manejar el entorno, el código y los datos para el dispositivo antes de que la carga calcule las tareas intensivas sobre el dispositivo.

### 3. COMPARACIÓN DE TIEMPO DE EJECUCIÓN DE PROGRAMAS SECUENCIALES Y PARALELOS EN LA INVERSIÓN DE UNA MATRIZ

La capacidad de invertir grandes matrices con rapidez y precisión es un paso esencial en una amplia gama de problemas numéricos; por ejemplo, la solución de sistema de ecuaciones lineales, la representación en 3D, filtrado de imágenes, entre otros.

Para hacer la comparación de tiempo de ejecución entre programas secuenciales y paralelos en la inversión de una matriz usaremos: LAPACK (Linear Algebra PACKage) [5] que es un conjunto de rutinas computaciones escritas en Fortran, es capaz de resolver problemas básicos de Álgebra Lineal numérica de forma secuencial, ScaLAPACK es una biblioteca de alto rendimiento que es capas de resolver problemas de Álgebra Lineal para máquinas paralelas de memoria distribuida y CULA [6] es una implementación de LAPACK para funcionar en la plataforma de NVidia CUDA masivamente en paralelo sobre GPUs.

#### Tiempo de cómputo para programación secuencial y en paralelo

A continuación se muestra los resultados obtenidos para el cálculo de la matriz inversa usando Gauss-Jordan y usando la subrutina GESV (LU). En la tabla 1, se muestran los resultados del tiempo de cómputo en segundos para una matriz cuadrada de  $N \times N$  en forma secuencial: Gauss-Jordan, LAPACK (procesados en CPU) y en paralelo: ScaLAPACK (procesados en CPU), CULA (procesados en GPU).

**Tabla 1.** Tiempos de cómputo para la inversión de matrices.

Entrada	Secuencial (G.J)	Secuencial LAPACK (LU)	Paralelo ScaLAPACK (LU) (4X8=32)	Paralelo ScaLAPACK (LU) (5X5=25)	Paralelo CULA
1024X1024	7.76 s	0.26 s	0.43 s	0.33 s	0.028 s
1600X1600	26.97 s	0.84 s	0.61 s	0.52 s	0.058 s
2240X2240	76.28 s	1.92 s	1.30 s	0.77 s	0.093 s
3200X3200	300.05 s	6.37 s	1.99 s	1.14 s	0.208 s
4160X4160	728.96 s	14.85 s	2.91 s	2.1 s	0.358 s
5120X5120	1467.91 s	28.81 s	4.29 s	2.91 s	0.588 s
6400X6400	3371.54 s	64.74 s	6.62 s	4.44 s	1.02 s
7040X7040	4586.96 s	80.13 s	7.52 s	5.57 s	1.15 s
8000X8000	6231.66 s	116.66 s	10.40 s	7.40 s	1.68 s
9280X9280	9425.09 s	165.96 s	15.57 s	12.54 s	2.13 s
10240X10240	11347.98 s	227.28 s	20.00 s	15.76 s	2.63 s
11200X11200	15678.81 s	310.64 s	25.40 s	19.02 s	3.37 s
12480X12480	21677.66 s	442.84 s	31.02 s	23.70 s	4.62 s
13760X13760	30445.70 s	557.66 s	41.64 s	30.14 s	5.67 s

En las versiones de ScaLAPACK se usaron bloques de 64 X 64. Como se esperaba, en la tabla 1 podemos notar que los tiempos de cómputo llevados a cabo por la versión secuencial son mucho más grandes que las versiones en paralelo; además, en las versiones de ScaLAPACK un mayor número de procesadores no nos garantiza que los tiempos de cómputo sean menores. Para reducir el tiempo de cómputo se tiene que hacer un mallado de la matriz de forma cuadrada para que los procesadores tengan una carga similar de trabajo.

De igual manera vamos a hacer una comparación con todas las versiones respecto a la versión secuencial tomando en consideración la matriz más grande de 13760 X 13760. Primero, con la versión secuencial de LAPACK se obtuvo una rapidez de casi 55 veces con respecto a la versión secuencial con el algoritmo de G.J. Ahora comparando los casos paralelos del algoritmo LU con la versión secuencial de este mismo. La versión de ScaLAPACK con 32 (mallado no cuadrado) y con 25 (mallado cuadrado) se obtuvo una rapidez de 13 y 18.5 veces más rápido y finalmente para el caso paralelo con CULA se obtuvo una rapidez de más de 98 veces. Estos resultados también se muestran en la Fig. 6.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos dado una introducción del tipo de mejora del rendimiento que se puede alcanzar usando la programación en paralelo para procesadores y las tarjetas de procesamiento gráfico (GPUs) en comparación de la arquitectura CPU. En particular, la programación en paralelo la aplicamos a un problema de álgebra lineal que es la inversión de una matriz. Para ello usamos las librerías de ScaLAPACK y CULA, con las cuales se obtuvo una mejora de rapidez de 18.5 y 98 veces respectivamente. Por tanto, para resolver problemas de complejos de álgebra lineal, la forma más óptima para reducir el tiempo de cómputo considerablemente es por medio de la GPU, específicamente usando las librerías internas de CUBLAS y CULA.

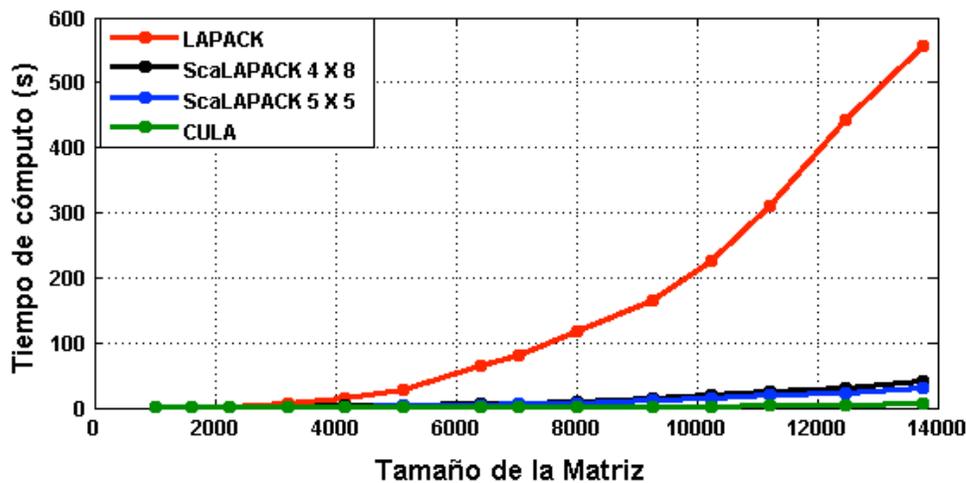


Figura 6. Tiempo de cómputo en segundos para la matriz inversa.

## REFERENCIAS

1. Aguilar, J. y Leiss, E. (2004). "Introducción a la Computación Paralela". Universidad de Los Andes, Merida, Venezuela, primera edición. 246pp.
2. Pacheco, P. (2011). An Introduction to Parallel Programming. Elsevier, Inc., Burlington, MA. 83-94.
3. Quinn, M. J. (2004). Parallel Programming, in C with MPI and OpenMP. McGraw-Hill, Inc., New York. 516 pp.
4. NVIDIA (2015). CUDA C programming guide. NVIDIA Corporation, Santa Clara, California. 261 pp.
6. Dongarra, J. (2003). Blas Lapack Users Guide. FUJITSU, Tennessee, USA, second edition, 23 pp.
7. EM (2009). CULA tools, CULA Reference Manual . EM Photonics, Inc., East MainStreet, first edition, 61 pp.

# ESPECTROSCOPIA EN REFLECTANCIA: DETERMINACION DE ANOMALIAS Y DEL ESTADO DE MADUREZ DE FRUTOS DE LA ESPECIE *Capsicum annum*

Karla Larissa Villarreal Iturriaga<sup>1</sup>, Darla Isabel Marrero Garza<sup>1</sup>, Isis Osiris De la Rosa Hernández<sup>1</sup>, Luis David Espinosa Cuellar<sup>1</sup>, Gustavo Ramírez Flores<sup>1</sup>, Amparo Rodríguez Cobos<sup>1</sup> y Karla Rangel Martínez

<sup>1</sup>Instituto de Investigación en Comunicación Óptica, IICO-UASLP.

## RESUMEN

En este trabajo reportamos la aplicación de técnicas espectroscópicas en la determinación del estado de madurez de frutos de la especie *Capsicum annum*. Se implementó un espectrómetro y se optimizó el software involucrado en la adquisición de los datos experimentales. Los resultados obtenidos son espectros en reflexión de las muestras orgánicas de la especie que se analizan con el fin de determinar tanto anomalías en los frutos (morfología, plagas, etc.) como su estado de madurez. Este tipo de técnicas no invasivas tiene aplicaciones en la industria agrícola, al ayudar a caracterizar los frutos recolectados con el fin de mejorar la calidad del producto y aminorar las pérdidas. El mismo método también es utilizado sobre hojas de árboles comunes tales como *Ficus Berjamina* y *Bauhinia forficata*.

## 1. INTRODUCCIÓN

Muchos de los alimentos que llegan a las manos del consumidor ya no son alimentos óptimamente consumibles y esto se debe a que la clasificación de los mismos es complicada si se realiza solo con la observación de los mismos, sin embargo al poder saber el tiempo de vida y el grado de descomposición, sería mucho más fácil saber el orden en el que se debe dar salida a cada alimento, directamente de la industria, incluso se podría implementar en un pequeño artefacto portátil y sería tan simple como medir el tiempo de vida de la fruta que se compra en un supermercado.

De lo anterior viene la curiosidad de encontrar una manera de poder medir el grado de descomposición y así poder implementarlo en algo que ahorraría mucho dinero y aumentaría la calidad.

## 2. TEORIA

### 2.1 Reflectancia

La reflectancia se refiere a la relación entre la potencia electromagnética incidente con respecto a la potencia que es reflejada en una interface ( $E_c$  1). La reflectancia es siempre un número real positivo. Cuando la reflexión se produce por la intervención de finas capas de material, los efectos de reflexiones internas pueden ocasionar que la reflectancia varíe con el espesor de la superficie. El espectro de reflectancia o curva de reflectancia espectral es el gráfico de la reflectividad en función de la longitud de onda.

$$R = \frac{\Phi_r}{\Phi_i}$$

*Ec 1. Relación entre potencia electromagnética y reflejada*

## 2.2 Reflectancia vegetal

La reflectancia de los vegetales es usualmente relativamente baja en la región visible, con un máximo a aproximadamente 0.53  $\mu\text{m}$ , es decir en el verde. Aumenta bruscamente en el infrarrojo (IR) para luego caer a valores muy bajos a 2.5  $\mu\text{m}$ . La baja reflectancia en el visible se atribuye a la elevada absorción de los pigmentos vegetales, principalmente clorofila. Estos pigmentos, sin embargo, son altamente transparentes a la radiación IR, y la elevada reflectancia en dicha región estaría determinada por la estructura interna de la hoja.

Las propiedades reflectivas de la vegetación dependen de tres tipos de variables:

Estructura de la cubierta vegetal, principalmente caracterizada por su índice foliar, por la orientación de las hojas y por su distribución y tamaño.

Propiedades ópticas de los elementos reflectantes (tallos, hojas, flores y frutos).

Geometría de la observación, determinada por la orientación relativa entre el sol y la superficie y por la situación del sensor con respecto a esta última

La vegetación tiene una firma espectral única que le permite distinguirse fácilmente de otros tipos de cobertura de la tierra en una imagen óptica / infrarrojo cercano. La reflectancia es baja tanto en la región azul y roja del espectro, debido a la absorción de la clorofila para la fotosíntesis. Tiene un pico en la región verde. En la región de infrarrojo cercano (NIR), la reflectancia es mucho más alta que en el visible, debido a la estructura celular en las hojas. Esta propiedad ha sido utilizada en misiones de reconocimiento durante los tiempos de guerra para "la detección de camuflaje".

## 2.3 Las características espectrales de la vegetación

La reflectancia espectral de la vegetación se puede detectar en tres grandes regiones de EMS:

Región visible (400-700 nm) - baja reflectancia, alta absorción y transmitancia mínima. El control fundamental de las interacciones de energía-materia con la vegetación en esta parte del espectro se encuentra la pigmentación de la planta.

NIR (700-1350 nm) - alta reflectancia y transmitancia, muy baja absorción.

MIR (1350-2500 nm) - A medida que aumenta la longitud de onda, tanto la reflectancia y la transmitancia disminuyen generalmente de media a baja, mientras que aumenta la absorción de baja a alta.

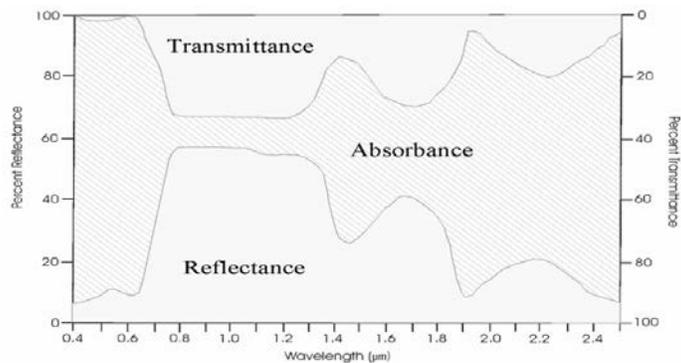


Fig. 2.3.1, La partición del espectro de reflectancia de la vegetación en las regiones VIS, NIR y MIR del espectro electromagnético.

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

#### 3.1 Montaje

La especie utilizada como ya fue mencionado es capsicum annum comúnmente conocido como pimiento, para fines de obtener la mayor información posible se tomaron 3 muestras diferentes, pimiento verde, amarillo y rojo.

Se cortaron muestras de 5cm X 2cm y el espesor era el de un pimiento promedio alrededor de 0.5cm

Se desarrolló un montaje en el laboratorio de óptica aplicada del Instituto de Investigación en Comunicación Óptica IICO, se utilizó una lámpara de tuxteno la cual fue focalizada con una lente convergente de diámetro 6.3cm ,posteriormente entro a un juego de lentes para finalmente hacer pasar el haz de luz por un monocromador.

Nuevamente pasa por una lente convergente de 5 cm de diámetro y se hace incidir sobre la parte externa de la muestra, para así por medio de un detector mandar la información a labview con una aplicación diseñada para tomar el espectro de cada muestra. Fig 3.1.1.



Fig 3.1.1, Imágenes del montaje

Se realizaron 3 mediciones por muestra cada tercer día, esto durante 4 días ya que en este último las verduras ya mostraban descomposición.

### 3.2 Condiciones

Las condiciones son las mostradas en la tabla 1.

Tabla 1. Condiciones del experimento

Día	Hora	Temperatura (°C)
1	13:57	27
3	14:05	23
5	12:45	25

Después de utilizar las muestras se dejaron bajo una temperatura de alrededor de 23°C, ya que para mantenerlas bajo conservación se ponen dependiendo la especie en alrededor de los 16-18°C, lo que intentamos reproducir fue una temperatura a la cual están normalmente en el tiempo que se transportan o en lugares donde el almacenaje está sin clima controlado para así poder predecir el estado actual de la verdura.

## 4. RESULTADOS

Con las 3 mediciones tomadas por día de cada muestra, se realizaron promedios que fueron tomados como la medición de cada día, para después hacer una comparación por cada muestra a través de los días mediante los diferentes espectros.

Se analizó la descomposición de la muestra conforme pasaban los días a través de sus espectros de reflectancia obtenidos.

### 4.1 Muestra color amarillo

En la primera muestra a analizar, de la especie *Capsicum Annum*, de color amarillo, se observa la variación de los espectros conforme avanza el tiempo, tal gráfica se muestra en la Fig. 4.1.1, Mientras avanzaba el tiempo la reflectancia en la banda más cercana al rojo tiende a aumentar, mientras que la banda perteneciente a las tonalidades amarillas y verdes desciende.

En el último día se podían observar notables signos de descomposición, que fueron útiles para determinar la terminación de las mediciones, puesto que la muestra ya no era viable.

### 4.2 Muestra color verde

La siguiente muestra sometida a análisis es el pimiento de tonalidad verde, y sus espectros de reflectancia tomados a través de los días, se observan en la Fig. 4.2.1.

En los espectros obtenidos se observan cambios similares a los que se tuvieron en la muestra anterior, es decir, aumentos de la banda de los tonos rojizos, pero además se observaron aumentos significativos en las franjas azules y verdes cercanos al amarillo, y un aumento menor en la banda amarilla.

Los resultados obtenidos concordaban en análisis a la apariencia de la muestra conforme el tiempo avanzaba.

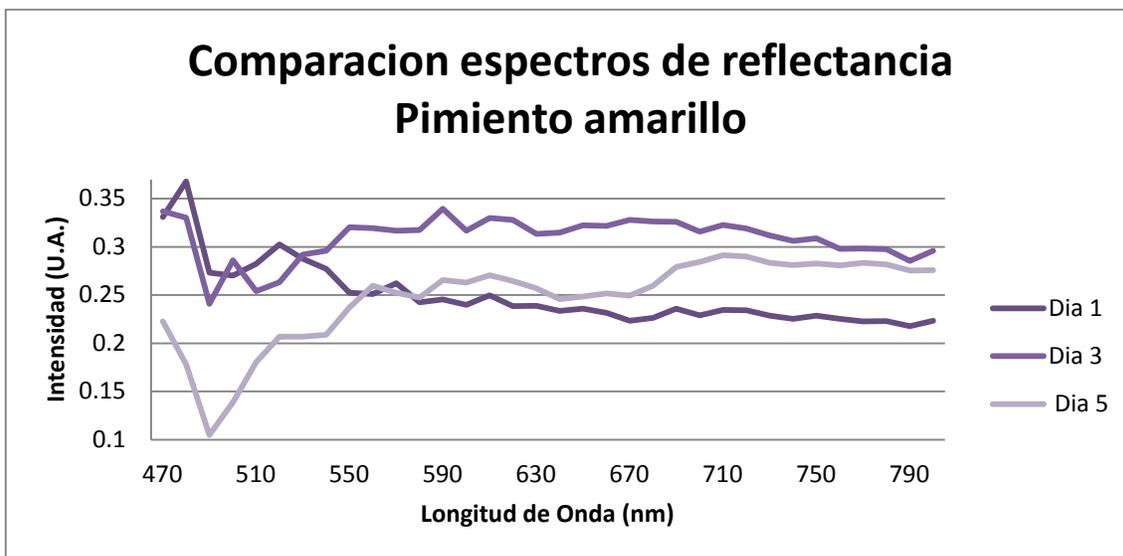
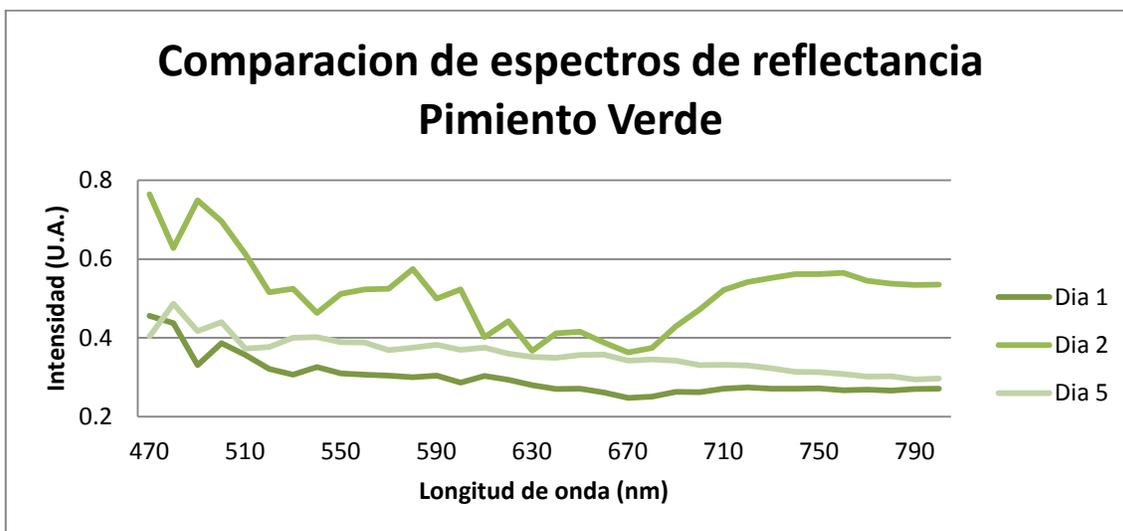


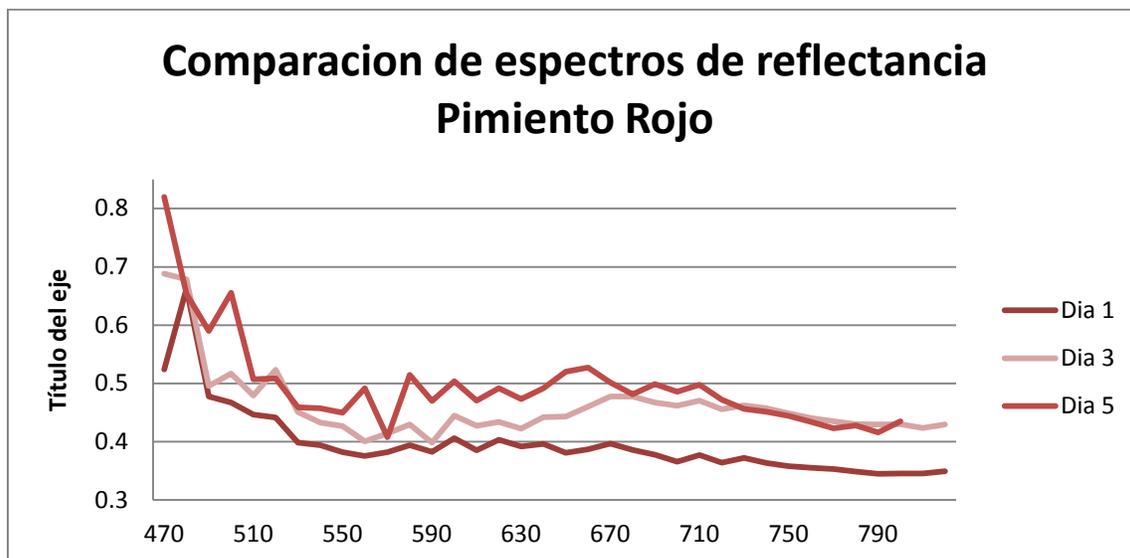
Fig. 4.1.1, Espectros de reflectancia del pimiento amarillo a través de los días



4.2.1, Espectros de reflectancia del pimiento verde a través de los días

### 4.3 Muestra color rojo

En la última muestra a analizar las diferencias entre los espectros fueron mucho menores, se muestran en la Fig 4.3.1 , y un tanto mas difíciles de observar. Se nota igualmente como en las mediciones anteriores un aumento en la banda de los tonos rojizos, pero en cantidad menor a lo observado anteriormente. Se observa de igual manera un aumento en las bandas de color amarillo y naranja.



4.3.1, Espectros de reflectancia del pimiento rojo a través de los días

## 5. CONCLUSIONES

En los espectros obtenidos se pudieron observar los cambios físicos que experimentaban los materiales orgánicos en el transcurso del tiempo, hasta llegar a la descomposición. Esto nos ayuda a establecer parámetros de calidad según la especie y su color, ya que los espectros de reflectancia se pueden tomar como una media para futuras pruebas. El objetivo de esto, es lograr una base de datos tal que se puedan definir espectros de reflectancia de los productos para estandarizar la calidad de los mismos.

Las muestras sometidas a análisis en este trabajo se tomaron solamente de un espécimen de cada color de la misma especie como un comienzo en este proyecto, para continuar, se propone tomar muestras de especímenes diferentes de un mismo tono y poner a prueba los espectros obtenidos en esta primera etapa del proyecto, que representan los cambios en la materia orgánica con respecto al tiempo, y observar su concordancia con los espectros que se planean conseguir.

## BIBLIOGRAFIA

1. <http://www.teledet.com.uy/tutorial-imagenes-satelitales/reflectancia-en-vegetales.htm>
2. [http://www.ujaen.es/huesped/pidoceps/telav/fundespec/caracteristicas\\_vegetacion.htm](http://www.ujaen.es/huesped/pidoceps/telav/fundespec/caracteristicas_vegetacion.htm)
3. <http://www.geol-amu.org/notes/m1r-1-8.htm>
4. [http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material121/unidad1/firma\\_es.htm](http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material121/unidad1/firma_es.htm)

# VENTAJAS DE UN MODELO MATRICIAL LINEAL SOBRE EL VALOR ESPERADO EN LA FUNCIÓN DE PÉRDIDA BAJO LA ÓPTICA DE TAGUCHI Y EL CONCEPTO DE CALIDAD MODERNO

Joaquín Estevez Delgado<sup>1</sup>, Gabino Estevez Delgado<sup>2</sup>, Itzia Alejandra Bonilla Paz<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,

<sup>2</sup>Facultad de Químico Farmacobiología. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

<sup>3</sup>PIMCB. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

## RESUMEN

La incorporación del análisis de una función de pérdida propuesta por Genichi Taguchi, incorpora un análisis de las pérdidas monetarias que se generan cuando un valor llamado nominal u observado ( $O_i$ ) es diferente de un valor de especificación o esperado ( $E_i$ ), cuya relación es descrita por  $L=K(O_i-E_i)^2$ , con  $K$  una constante ligada al costo ideal de obtener el valor nominal. Sin embargo, en la actualidad las condiciones de repetibilidad o reproducibilidad requerida para garantizar la calidad generan deterioro de la materia, lo que a lo largo de estos procesos implica una variabilidad del parámetro  $O_i$ . Si bien es cierto que no podemos garantizar evitar la variabilidad, si es factible realizar un análisis de los parámetros del valor esperado bajo un modelo del deterioro de los materiales a lo largo de su uso. En el presente trabajo presentamos un análisis de los valores óptimos que permiten tener pérdidas mínimas cuando los valores observados son lineales, lo que además proyecta la posibilidad de poner énfasis en los procesos de repetibilidad pedidos en los procesos de validación de los métodos de medición utilizados en las mediciones y con ello la posibilidad de un modelo que permita reducir costos en el proceso de medición.

## 1. INTRODUCCIÓN

Una creciente industria a nivel nacional, en distintos ramos, demanda el cumplimiento de regulaciones y normatividad que como consecuencia debe ponderar un estricto control de la calidad de los servicios y de cada uno de los procesos en que se desarrollan sus actividades. El control de la calidad en cada actividad ha ido más allá de la concepción de la calidad clásica por un concepto moderno en el que se concibe la calidad como el inverso de la variabilidad de lo que observa o se mide. Las llamadas técnicas de control de la calidad parten del hecho fundamental de buscar medir la variabilidad a través de las diversas herramientas que comúnmente son llamadas técnicas de Ishikawa. El enfoque de cada una de las técnicas permite o planificar cómo reducir los riesgos de una pérdida de la variabilidad o encontrar que pudo generar errores en el servicio o producto, según sea el caso [1, 2]. De forma particular, una de las técnicas de control de calidad que permite analizar las pérdidas, no solo de la calidad sino además de las monetarias, llamada función pérdida de Taguchi [3]. Esta función de pérdida fue planteada por Genichi Taguchi a mediados del siglo pasado [4,5], convirtiéndose popular en los desarrollos de ingeniería, pero que poco a poco se ha extendido su aplicación a otras ramas del conocimiento [6]. Taguchi argumentó que la pérdida de la calidad no se daba de manera casual, sino que para que ocurriera una pérdida de la calidad esta debería darse de manera gradual, considerando que la pérdida de la calidad debería darse mediante una ecuación de segundo grado.

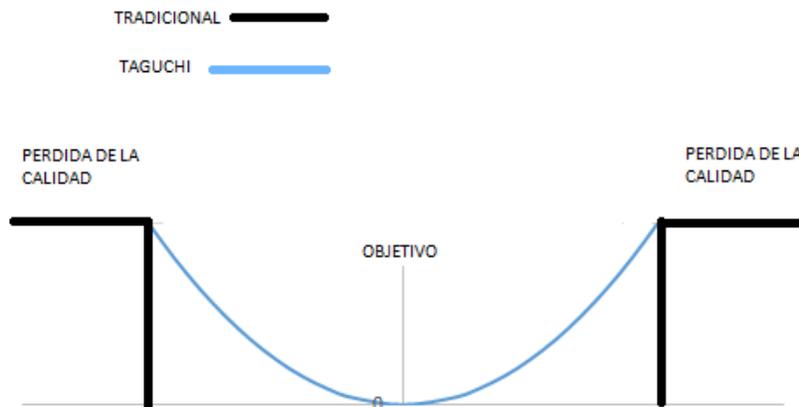
Para que la formulación sea dada de manera correcta se requiere que se realice una consideración sobre la formulación de los valores esperados con respecto a los valores medidos, lo que conlleva consideraciones de funciones de densidad de probabilidad, generalmente sobre la función normal o Gaussiana, cuyo objetivo de calidad estará determinado cuando las pérdidas no se presenten. Son precisamente los sesgos generados en las mediciones lo que generan variaciones en la calidad y que se empatan con las pérdidas de calidad, que generalmente se asocia a pérdidas monetarias [8].

## 2. DESARROLLO

La función presentada por Genichi Taguchi, es dada como:

$$L = k(E - O)^2 \quad (1)$$

Donde  $E$  es el valor ideal o esperado, en tanto que  $O$  es el valor medido, con  $k$  una constante de proporcionalidad que permite generar las unidades monetarias o cualquiera que se requiera en función de las unidades de pérdida. Como se puede apreciar en el siguiente gráfico la pérdida de la calidad, para el modelo clásico, implicaba solo límites de pérdida de la calidad sin que se generaran causas aparentes, sin embargo en el modelo de Taguchi, podemos observar que la calidad se pierde en los límites clásicos, sin embargo estos no dan manera espontánea. En este mismo sentido, observamos que el valor descrito como objetivo se da cuando el valor de  $E=O$ , es decir, el valor esperado o ideal es igual al valor medido, congruente con la normalidad en las distribuciones analizadas por alguna técnica como la prueba de Kolmogorov Smirnov.



Gráfica 1. Comparación del método de Taguchi con respecto al método clásico de la pérdida de la calidad.

Por otro lado, consideremos la definición de valor esperado, sabemos que para una distribución normal este es dado como el promedio. En este mismo sentido la esperanza matemática para tal valor es una constante. Determinemos ahora que el valor observado a lo largo de un periodo de tiempo es una función lineal dado como:

$$O(t) = mt + b \quad (2)$$

Sustituyendo en la ecuación (1) tenemos:

$$L(t) = k(E - (mt + b))^2 \quad (3)$$

Si calculamos la velocidad con que se dará la pérdida a lo largo del tiempo tendremos:

$$\frac{dL(t)}{dt} = -2mk(E - (mt + b)) \quad (4)$$

Considerando el valor dado en la ecuación (3) tenemos:

$$\frac{dL(t)}{dt} = -2\sqrt{L(t)} \quad (5)$$

Finalmente si despejamos:

$$\frac{dL}{\sqrt{L}} = -2mdt \quad (6)$$

Considerando que la pérdida  $L_0$  a un tiempo inicial  $t_0$  y  $L_1$  a un tiempo  $t_1$ , posterior, integrando y despejando tendremos:

$$L_1 = (m(t_0 - t_1) + \sqrt{L_0})^2 \quad (7)$$

Lo que implica tener consideraciones de cambio ante el incremento de pérdida de la calidad. Si se considera que la pérdida se mantiene constante es decir la pendiente de la linealidad es igual a cero, tenemos que la pérdida  $L_0$  igual  $L_1$ . Un aspecto interesante del resultado encontrado es el hecho que independiente del término de ordenada al origen la pérdida final, para este modelo lineal, no interviene en la relación.

Haciendo  $\Delta t_{0,1} = t_0 - t_1$  en la ecuación (7) la expresión la podríamos expresar como:

$$L_1 = (m\Delta t_{0,1} + \sqrt{L_0})^2 \quad (8)$$

Considerando un segundo evento y considerando la ecuación (8) tendríamos:

$$L_2 = \left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{(m\Delta t_{1,2} + \sqrt{L_1})^2} \right)^2 \quad (9)$$

con  $\Delta t_{1,2} = t_1 - t_2$ .

Para un tercer evento y considerando la ecuación (9) tendríamos:

$$L_3 = \left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{\left( m\Delta t_{1,2} + \sqrt{\left( m\Delta t_{2,3} + \sqrt{L_2} \right)^2} \right)^2} \right)^2 \quad (10)$$

con  $\Delta t_{2,3} = t_2 - t_3$ .

En condiciones de repetibilidad, los incrementos de tiempo deberían de ser iguales y pequeños, es decir:

$$\Delta t_{(n-2),(n-1)} = \Delta t_{(n-1),n} \quad (9)$$

Para el caso de tres repeticiones, la ecuación (10) se transforma en:

$$L_3 = \left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{\left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{\left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{L_2} \right)^2} \right)^2} \right)^2 \quad (10)$$

Al aplicar el límite para una tercera repetibilidad en el proceso tendríamos:

$$L_3 = \lim_{\Delta t_{0,1} \rightarrow 0} \left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{\left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{\left( m\Delta t_{0,1} + \sqrt{L_2} \right)^2} \right)^2} \right)^2 \quad (11)$$

$$= L_2$$

De tal manera que la pérdida en condiciones de repetibilidad nos lleva concluir que

$$L_1 = L_2 = \dots = L_n \quad (12)$$

Es decir, que mientras se mantenga intervalos de tiempo pequeño para la repetibilidad, para el evento modelo lineal de los valores observados, la función de pérdida se mantendrá en las mismas condiciones.

### 3. CONCLUSIONES

En el caso de valores medibles que presentan condiciones de un posible deterioro lineal la velocidad con que se da la función de pérdida encontramos que las relaciones entre un tiempo inicial y otro final, estas no dependen del valor de partida en un tiempo cero sino solo de la pendiente del modelo lineal. En tanto que en condiciones de repetibilidad, al realizar repeticiones

en condiciones de isotropía, con tiempos pequeños que no modifican el sistema, podemos concluir que las funciones de pérdida se mantienen y serán las mismas a lo largo de todo el proceso.

Las aplicaciones de las funciones de pérdida en las distintas áreas requieren condiciones de normalidad, por las consideraciones de homogeneidad requerida sobre los resultados presentados en las ecuaciones (12) y (13) podrán acompañar otros métodos en la búsqueda de mínimas pérdidas [9].

## BIBLIOGRAFÍA

1. Montgomery, D.C., 2005. Design and Analysis of Experiments, 6nd ed. John Wiley and Sons, New York.
2. Zadakbar O, Khan F, Imtiaz S., Development of economic consequence methodology for process risk analysis. Risk Anal. 2015 Apr;35(4):713-31
3. Nelder, J.A., Lee, Y. 1991. Generalized linear models for the analysis of Taguchi-type experiments. Applied Stochastic Models and Data Analysis, 7:107-120.
4. Taguchi, G. 1986. Introduction to Quality Engineering, Unipub/Kraus International Publications, White Plains, New York.
5. Pinto, E.R., Ponce de Leon, A. 2006. The joint modeling of mean and dispersion proposed by Nelder and Lee as an alternative to the Taguchi's methods (in Portuguese). Pesquisa Operacional, 26(2):203-224.
6. Kusuma S, Urquhart AG, Hughes RE., Taguchi loss function for varus/valgus alignment in total knee arthroplasty. Open Biomed Eng J. 2009 Sep 7;3:39-42
7. G. Taguchi, Taguchi Methods, Research and Development, Vol. 1, American Suppliers Institute, Dearborn, MI, 1991.
8. Suraj M. Alexander, Matthew A. Dillman, John S. Usher, Biju Damodaran., Economic design of control charts using the Taguchi loss function. Computers & Industrial Engineering .1995. 28 (3): 671–679
9. Magdalena, R. Supplier Seletion for Food Industry: A combination of Taguchi Loss Funtion and Fuzzy Analytical Hierarchy Process. The Asian Journal of Technology Management. 2012., 5(1)

## ANÁLISIS DE SIMETRÍA EN PATRONES DE INTERFERENCIA.

María Isabel Pérez Martínez<sup>1</sup>, Erika B. Roldán Roa<sup>2</sup>, Sergio Valles Quintanilla<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Zacatecas. <sup>2</sup>CIMAT. <sup>3</sup>Universidad Juárez del Estado de Durango

### RESUMEN

Interferencia es la superposición de diferentes perturbaciones, ya sean mecánicas o electromagnéticas. En el presente trabajo se realizó una breve semblanza bibliográfica sobre los estudios que se han hecho a lo largo de la historia de la simetría que se observa en dichos patrones de interferencia en diferentes condiciones. Por ejemplo, las ondas mecánicas generadas a través de vibraciones sobre una superficie, así como el patrón de interferencia generado por la luz, fenómeno que ha ganado gran popularidad para la descripción de estructuras cristalinas y cuasicristalinas. La definición de dichas estructuras tiene un fuerte fundamento geométrico. Además, se presentan los resultados, que hasta el momento se han generado, por medio de simulaciones de modelos de patrones de interferencia tanto para perturbaciones mecánicas como electromagnéticas.

### 1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a su naturaleza se puede clasificar el movimiento ondulatorio como transversal o longitudinal, dependiendo de si la dirección del movimiento del medio de propagación es perpendicular o paralelo a la dirección de propagación de la onda, respectivamente. Además, se clasifican a partir del medio en el que se propagan, es decir, una onda mecánica es aquella que necesita de un medio para propagarse, mientras que una onda electromagnética es aquella que se puede propagar en el vacío.

En lo que a ondas mecánicas se refiere, si se propagan dos o más ondas en el mismo medio, ocurre el fenómeno de interferencia, donde la perturbación resultante es la suma algebraica de cada una de las perturbaciones. Si dichas perturbaciones se encuentran sobre un plano, en el cual se van a propagar, colocadas equidistantes sobre una circunferencia, se puede observar en el patrón de interferencia simetrías muy específicas.

En el presente trabajo, se presentan las simulaciones de dicha configuración, en la cual se toman en cuenta solamente ondas mecánicas, es decir, perturbaciones que se propagan en un mismo plano que interfieren entre sí para formar un patrón de interferencia. El trabajo está estructurado de la siguiente forma, en la sección 2 se presenta la descripción matemática de una onda y su generalización a un plano, en la sección 3 se encuentran los resultados obtenidos, mientras que en la sección 4 se describen, de forma cualitativa, las posibles teselas encontradas en dichos patrones de interferencia.

#### 2. Fenómeno ondulatorio

La descripción matemática de una onda es a través de un perfil sinusoidal, de la siguiente forma:

$$y(x, t) = A \cos(kx - wt).$$

En donde  $A$  representa a la amplitud de la onda, que es simplemente el valor máximo de la posición de la partícula en la dirección  $y$  positiva o negativa.

La cantidad  $k$  es llamada número de onda y está dada por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Se le conoce como longitud de onda a la distancia que existe entre una cresta y la siguiente o la distancia que hay de un valle al siguiente; a la longitud de onda la denotaremos por  $\lambda$ , ver Figura 3.

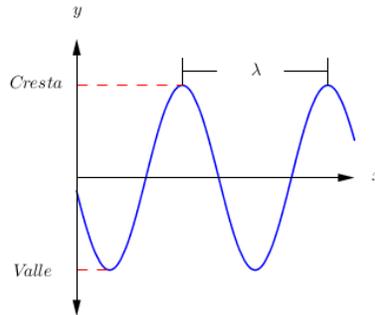


Figura 3: Crestas. Valles y longitud de onda.

La constante  $\omega$  es llamada frecuencia angular y tiene por unidades  $rad/s$  y es una medida de qué tan rápido se presentan las oscilaciones.

La velocidad de una onda está dada por la siguiente ecuación.

$$v = \lambda f.$$

En donde  $f$  es la frecuencia de la onda.

La frecuencia asociada a una onda, representa el número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de tiempo. La frecuencia está dada por el inverso del periodo.

El periodo del movimiento está dado por  $T$  y corresponde al intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento, ver Figura 4. El periodo está dado por la siguiente relación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

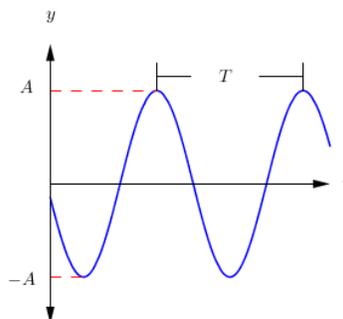
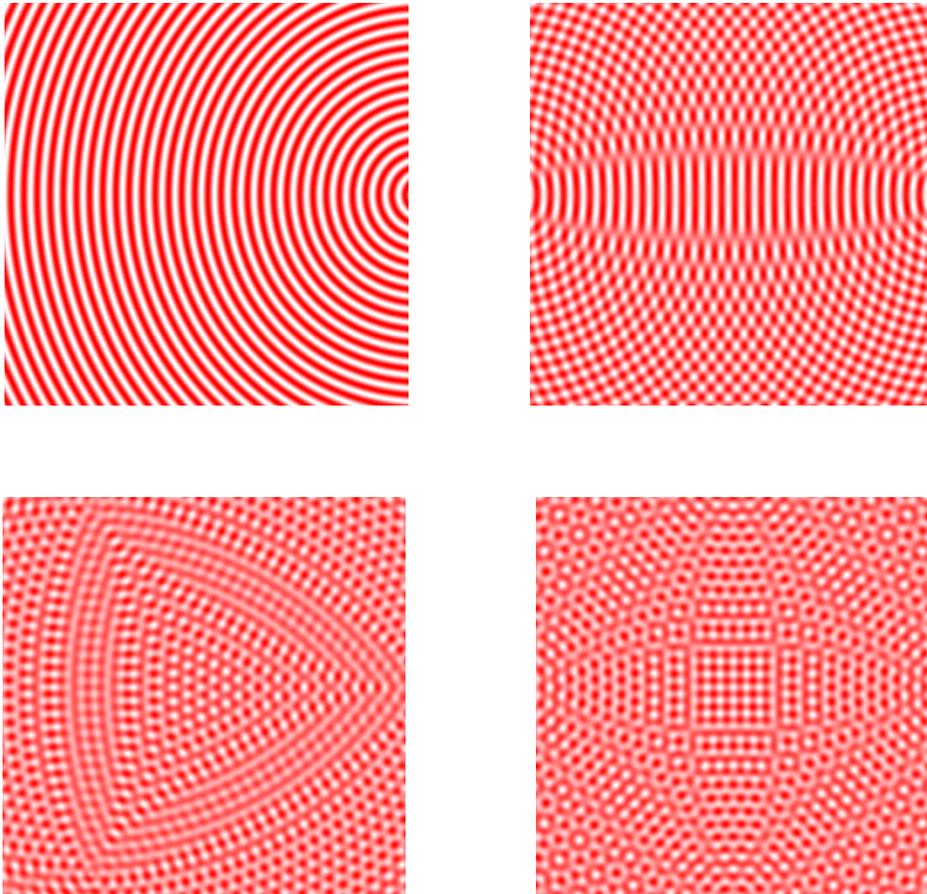


Figura 4: Muestra el periodo de la onda.

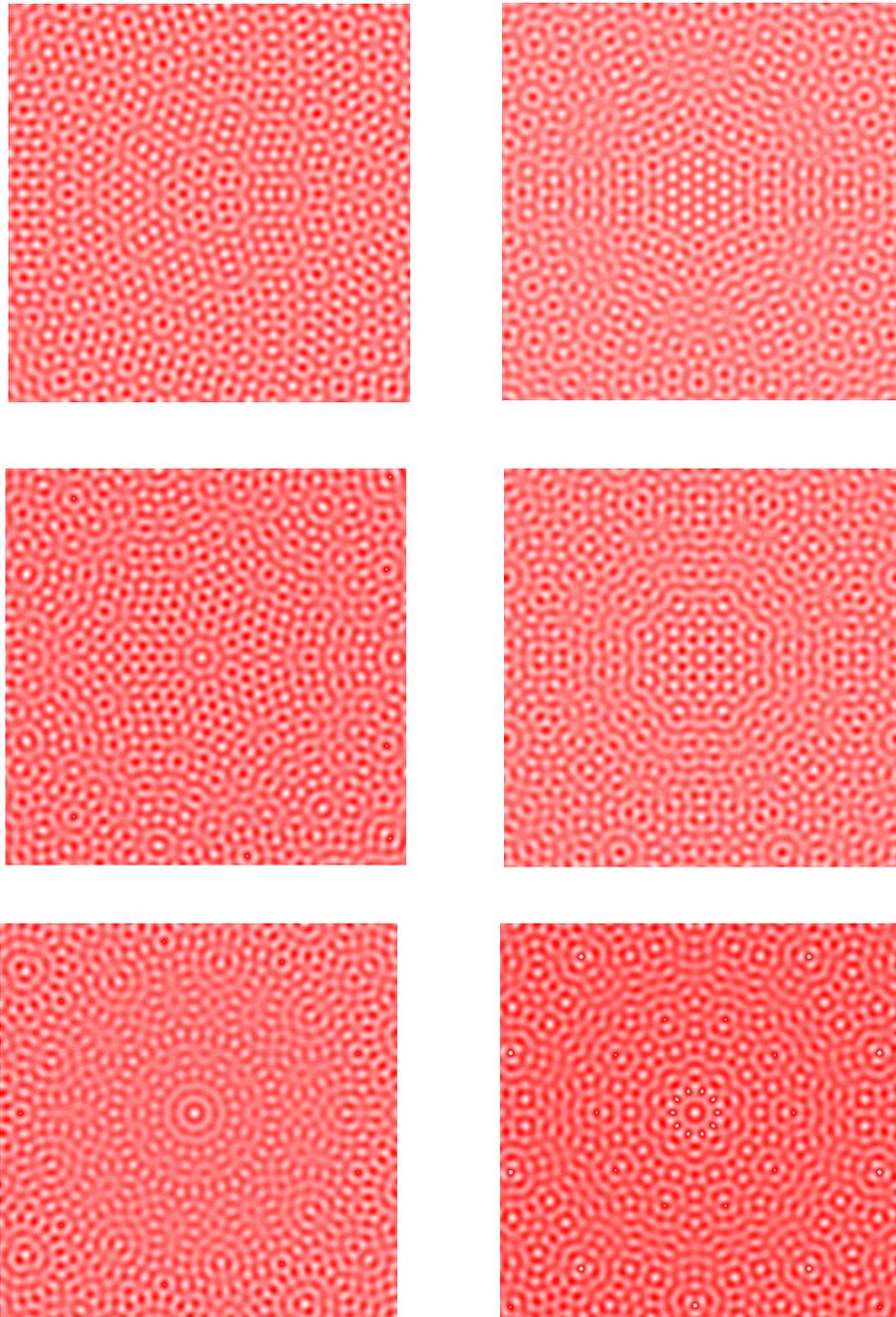
Para conocer más acerca del movimiento oscilatorio, movimiento ondulatorio, sobre posición y ondas estacionarias se puede consultar [2].

La descripción antes mencionada, toma en cuenta una onda que se desplaza sobre una línea, es decir, es la descripción del movimiento que seguiría una cuerda al ser perturbada por un movimiento oscilatorio en uno de sus extremos. Sin embargo, si se quiere modelar una onda que se propague sobre un plano, se generaliza la distancia definida en el conjunto de los números reales (es decir el valor absoluto) a una distancia en el plano. Para las simulaciones se utilizó la distancia usual euclidiana en dos dimensiones  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . En el modelo, que usamos para generar las simulaciones, se ha colocado cada una de las perturbaciones a lo largo de una circunferencia, de manera que se localicen sobre los vértices de un polígono, inscrito en la circunferencia unitaria, regular de  $N$  lados. En los resultados se encuentran las imágenes creadas con las simulaciones del modelo que acabamos de describir, tomando  $N=1, 2, \dots, 10$ .

### 3. Resultados



*Figura 5: Gráficas de densidad que representan el patrón de interferencia generado en las simulaciones. De, izquierda a derecha y de arriba a abajo, imágenes generadas con una y hasta 4 fuentes de perturbación*



*Figura 6: Gráficas de densidad que representan el patrón de interferencia generado en las simulaciones. De, izquierda a derecha y de arriba a abajo, imágenes generadas con 5 y hasta 10 fuentes de perturbación.*

#### 4. CONCLUSIONES

Al modelar y simular la interferencia que generan una cantidad finita de ondas mecánicas, distribuidas de manera uniforme en una circunferencia unitaria en el plano, nos encontramos con patrones de interferencia que tienen una simetría que es visualmente detectable. Esto nos invita a modelar matemáticamente y analizar mediante este modelo estos patrones generados en modelos de interacciones entre ondas mecánicas.

Una manera de modelar matemáticamente estos patrones creados en el plano es por medio de teselaciones. Por ejemplo, la parte central del patrón que se generó con la simulación de cuatro fuentes de ondas mecánicas colocadas en los vértices de un cuadrado inscrito en una circunferencia unitaria (ver Figura 5), puede ser teselada con cuadrados y esto dota a esa sección de la imagen de una simetría que hereda de estas teselas (en este caso los cuadrados que lo componen).

Como consecuencia de esta exploración de la interacción de ondas mecánicas en el plano, como trabajo posterior se realizarán simulaciones que involucren ondas electromagnéticas y se buscará hacer el análisis matemático por medio de teselaciones para tener una forma rigurosa de determinar el tipo de simetrías que se encuentran en estos patrones de interferencia.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. A. G. Evans, "Perspective on the development of high-toughness ceramics", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 73, 2, 1990, pp. 187-206.
2. T. Kreis, "Speckle Metrology," in *Holographic Interferometry* (Akademie Verlag Inc., New York, NY, 1996), Chapter 4, pp. 125-149.

## GRAFOS EN EL CORAZÓN.

Natalia González Cervantes<sup>1</sup>, Aurora Espinoza-Valdez<sup>1</sup>, Ricardo A. Salido-Ruiz<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías CUCEI

### RESUMEN

Las enfermedades cardiovasculares son un conjunto de trastornos del corazón y de los vasos sanguíneos. De acuerdo a la OMS, son la principal causa de muerte en todo el mundo, por lo cual constituyen un problema de salud pública por su alta frecuencia, es por este motivo, que es importante conocer a detalle el funcionamiento del corazón con el fin de explorar mediante un modelo matemático el cómo funciona y analizar los principales problemas que se derivan en el mismo. La utilidad del modelo radica en que ayuda a estudiar cómo se comportan las estructuras complejas frente a aquellas situaciones que no pueden verse con facilidad en el ámbito real. En este trabajo se analiza el ciclo cardíaco modelando las estructuras cardíacas involucradas y sus conexiones por medio de nodos y aristas utilizando herramientas matemáticas de teoría de grafos. Los resultados muestran que es posible estudiar el ciclo cardíaco incorporando información fisiológica en las aristas del digrafo. También nos dan la pauta para la creación de otros modelos más complejos utilizando elementos de la teoría de sistemas.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las enfermedades cardiovasculares (ECV) son un conjunto de trastornos del corazón y de los vasos sanguíneos. Son la principal causa de defunción en todo el mundo. Las enfermedades cardiovasculares afectan en mucha mayor medida a los países de ingresos bajos y medianos: más del 80% de las defunciones por esta causa se producen en esos países. Además el 80% de los infartos de miocardio y de los AVC prematuros pueden ser prevenibles (OMS) [4].

Por tal motivo, es de interés realizar un estudio del ciclo cardíaco utilizando teoría de grafos con el fin de conocer y proponer soluciones. Para lo cual primero tenemos que comprender la anatomía y el funcionamiento del corazón y con base a eso realizar un estudio matemático.

El corazón tiene el tamaño de dos puños cerrados, pesa menos de medio kg, late aproximadamente 100,000 veces al día, su lado derecho se conecta con los pulmones y ejerce una presión baja, por el contrario, la presión que ejerce el lado izquierdo es cinco veces mayor y este lado se conecta con el cuerpo. La anatomía del corazón consta de 4 cavidades: 2 aurículas y 2 ventrículos, la sangre entra por las aurículas al corazón y de las aurículas la sangre es enviada a los ventrículos desde donde será expulsada la sangre para enviarla al resto del cuerpo y a los pulmones para ser oxigenada (véase Fig.1). El músculo cardíaco (miocardio) es el encargado de hacer latir al corazón, tiene la capacidad de originar y transmitir sus propios impulsos eléctricos a través de células especializadas [5].

### 2. TEORÍA

#### 2.1 FUNCIONAMIENTO DEL CORAZÓN

El impulso eléctrico se origina en la parte superior derecha del corazón, en este punto se encuentra una mayor concentración de células automáticas que generan el impulso y lo envían por todo el corazón. Esta concentración de células es conocida popularmente como el marcapasos natural del corazón, pero el término médico es Nódulo Sinusal o Nódulo Sino-Auricular. Una vez generado el impulso eléctrico este viaja a través de las fibras internodales por la aurícula derecha e izquierda, las cuales se unen nuevamente en un punto: el Nódulo Aurículo-Ventricular (NAV) aquí la señal se detiene por un instante para permitirle a las aurículas terminar de llenar los ventrículos y permitir a los ventrículos terminar de expulsar la sangre hacia las arterias. Desde el NAV la señal continua su camino por el tronco del Has de His, el cual se divide en dos ramas: la derecha y la izquierda, la rama izquierda cuenta con otras dos ramificaciones la rama posterior y la anterior, esto debido a que el tejido del ventrículo izquierdo es mayor que el del derecho. El impulso sigue su camino por medio de las fibras de Purkinje las cuales se encuentran distribuidas en las paredes libres y basales del corazón, al terminar el recorrido de las fibras, el proceso vuelve a iniciarse (véase Fig.2). Esto le permite al corazón contraerse y bombear la sangre necesaria para oxigenar el cuerpo humano [1,3].

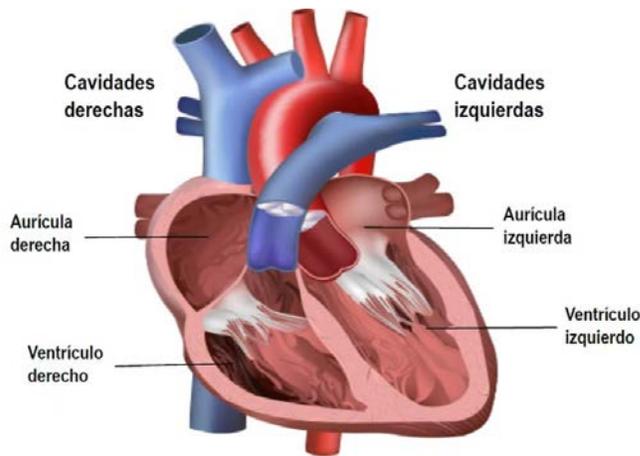


Figura 1: Anatomía del corazón (imagen modificada de bioedonline.org).

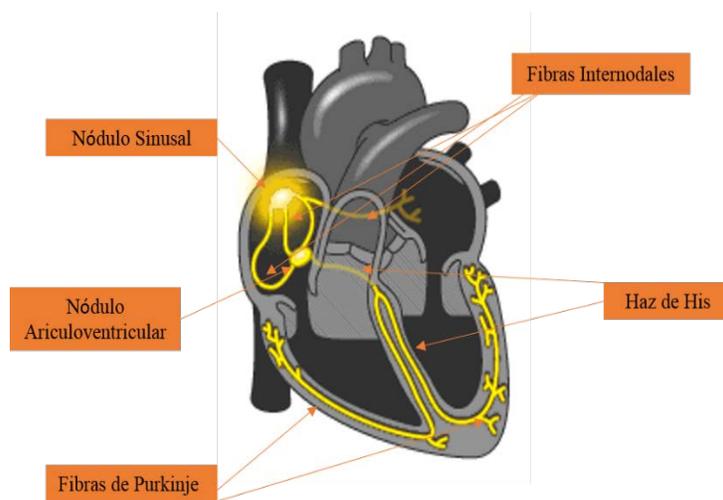


Figura 2: Potencial eléctrico del corazón (imagen modificada de <http://www.juntadeandalucia.es>).

Hoy en día podemos observar el potencial eléctrico mediante el registro llamado electrocardiograma (ECG), el cual representa mediante señales el recorrido eléctrico que se realizó desde el inicio del impulso en el Nodo Sinusal hasta el final del ciclo cardiaco (véase Fig 3).

Los electrodos del ECG son los dispositivos que ponen en contacto al paciente con el electrocardiógrafo, en total se colocan 10 electrodos en el cuerpo del paciente. Hay 12 derivaciones en el registro del ECG: 6 derivaciones precordiales (v1, v2, v3, v4, v5 y v6), 3 derivaciones unipolares (aVR, aVL, aVF) y 3 derivaciones bipolares, éstas últimas se obtienen de las diferencias de potencial que existen entre aVL y aVR (DI), aVF y aVR (DII) y aVF y aVL (DIII). Existe un electrodo más que se coloca en el pie derecho y este no registra potencial eléctrico, es decir es neutro [2].

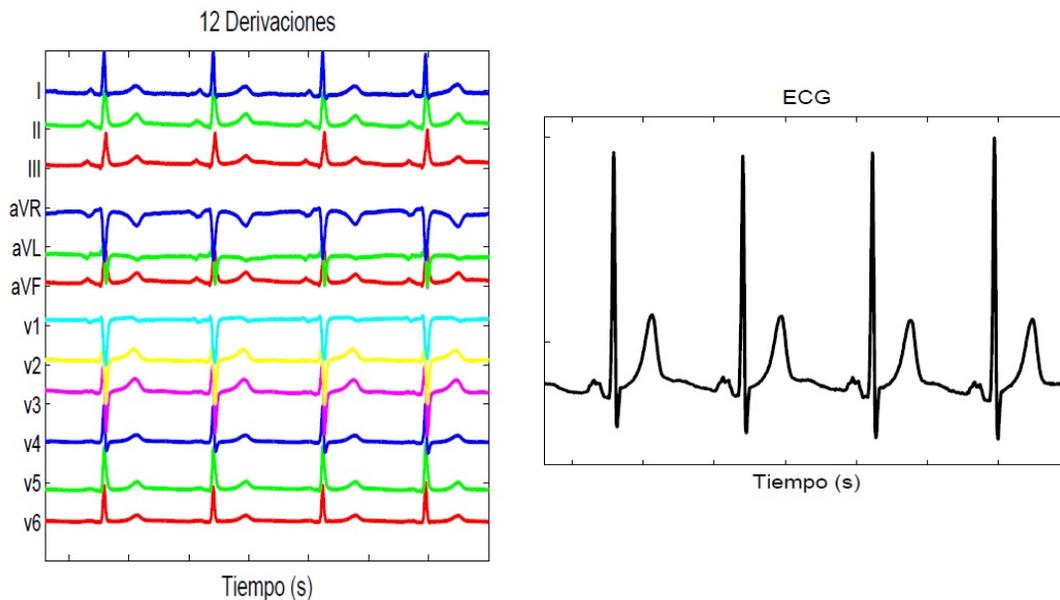


Figura 3. Registro de un electrocardiograma.

## 2.2 GRAFO

Es posible representar el ciclo cardiaco a través de grafos donde: cada nodo representa los puntos principales que generan los impulsos eléctricos que llevan la electricidad a cada parte del corazón (V), y donde cada arista (E) describirá la información fisiológica.

Definición 1: Un grafo  $G$  es una tripla ordenada  $(V(G), E(G), \Psi_G)$  que consiste de un conjunto no vacío  $V(G)$  de nodos, de un conjunto  $E(G)$  de aristas y de una función de incidencia  $\Psi_G$  que asocia a cada arista un par ordenado (no necesariamente distintos) de nodos de  $G$ .  $\Psi_G: E(G) \rightarrow W(G)$  donde  $W(G)$  es el conjunto de par de nodos definido como  $W(G) = \{u, v\} \text{ tal que } u, v \in V(G)\}$  de manera que si que  $e \in E(G)$ ,  $\Psi_G(e) = \{u, v\}$ , entonces  $e \in E(G)$ , une a  $u$  y  $v$ .

$G$  representa el grafo del ciclo cardiaco del corazón. Los vértices de  $G$  tienen todas sus aristas orientadas en tal forma que simboliza la dirección de la circulación del potencial eléctrico en el corazón.

### 3. RESULTADOS

Para la obtención del grafo se realizó el análisis de los tiempos de despolarización y repolarización de cada una de las ondas del ECG. Aunque a simple vista solo podemos ver trazos irregulares en el papel del ECG, cada onda representa una etapa del recorrido (ver Fig. 4):

Despolarización Auricular (Sístole auricular):

-Onda P

La onda eléctrica se genera y comienza desde el Nodo Sinusal, representado en el grafo (véase Fig. 4) como el  $v_1$ , bajando la señal al mismo tiempo por las fibras internodales, ( $v_2, v_3$  y  $v_4$ ) hasta el NAV. A los 0.020s que se generó la corriente eléctrica, la señal toca el septum interauricular provocando que la corriente eléctrica continúe hasta la aurícula izquierda por medio del haz de Bachman, pero el recorrido eléctrico sigue bajando hasta el NAV, transcurridos los 0.070s se ha despolarizado toda la aurícula derecha y una buena parte de la izquierda, 0.040s más se despolarizaron por completo las aurículas.

-Segmento P-R ó P-Q:

Una vez que la corriente eléctrica llega al NAV ( $v_7$ ) se retiene la señal por unos 0.9s, esto con el fin de permitir a las aurículas y ventrículos terminar su proceso de llenado y vacío.

Despolarización Ventricular (Sístole ventricular):

-Complejo QRS

Desde el NAV baja la corriente hacia los ventrículos a través del tronco del haz de His ( $v_8$ ), comenzando de esta manera la despolarización ventricular, donde la corriente eléctrica se divide entre las dos ramas del Has de His (la izquierda:  $v_9, v_{11}$  y la derecha:  $v_{10}, v_{12}$ ), el recorrido por estas ramas genera la onda R de nuestro electrocardiograma, teniendo en cuenta que en la rama izquierda predomina el potencial eléctrico debido a dos ramas más que se encuentran en este lado llamadas: división posterior y división anterior. Una vez terminado el recorrido por las ramas la corriente continúa hacia las fibras de Purkinje ( $v_{13}$  y  $v_{14}$ ) las cuales generan la onda S, terminando de esta manera la despolarización ventricular y el complejo QRS, que no debe medir más de 0.10s de segundo.

-Segmento S-T

Una vez que se propagó la señal eléctrica por todos los ventrículos, se mantiene el potencial de la zona ventricular (meseta del Potencial de Acción Ventricular) y esto dura aproximadamente 0.10s antes de que comience la repolarización ventricular.

-Onda T (Diástole)

Pertenece a la repolarización ventricular. La repolarización ventricular comienza al terminar el complejo QRS generando de esta manera la onda T de nuestro ECG y propicia el término de un ciclo eléctrico para prepararse para el siguiente. Esto lo podemos observar en nuestro grafo (con los nodos  $v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}$  y  $v_{16}$  en donde cada nodo representa los puntos antes ya señalados pero indicando que el proceso de repolarización sigue el mismo curso que el de la despolarización.

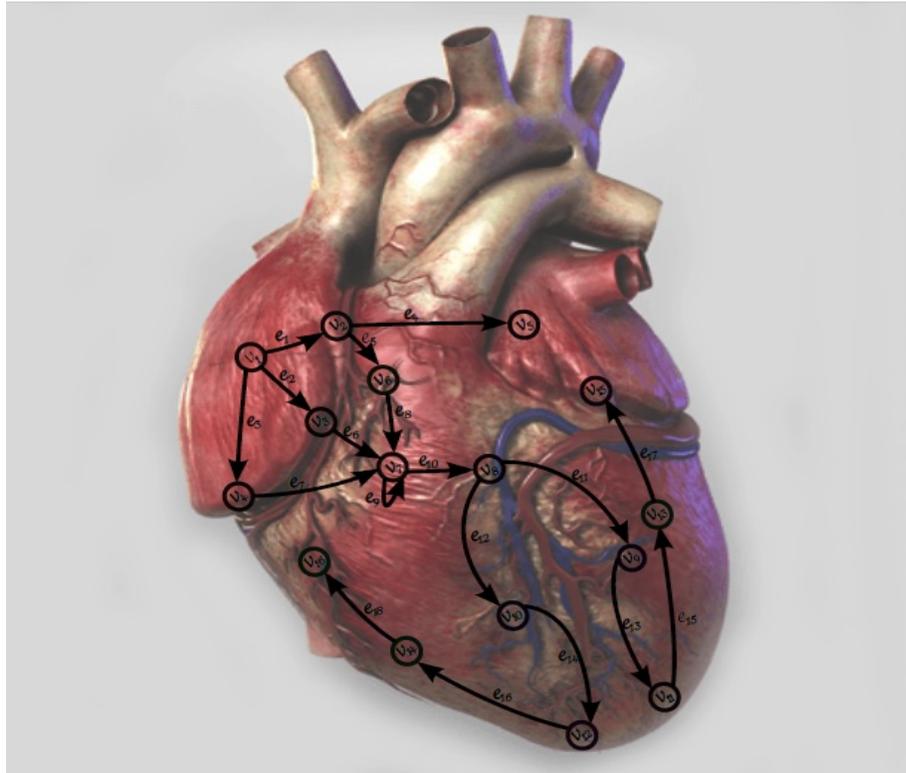


Figura 4: Grafo en el corazón.

#### 4. CONCLUSIONES

Con base a los resultados obtenidos, se pudo determinar con un grafo el ciclo cardiaco, lo cual nos da posibilidades de poder generar y proponer soluciones alternas a las que se tienen actualmente de diferentes cardiopatías relacionadas con el trastorno del ciclo cardiaco (arritmias). Esto es, se puede manipular el grafo obtenido de acuerdo a cada una de las patologías del corazón. Creemos que con el análisis de los tiempos de despolarización y repolarización de cada una de las ondas del ECG es posible la construcción de un nuevo grafo, el cual será sujeto de estudio en un siguiente trabajo.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. Shapiro Martínez Sánchez J. *Arritmias Cardiacas*. México, D.F.: F. Méndez Oteo; 1975:27-31.
2. Shapiro Martínez Sánchez J. *Arritmias Cardiacas*. México, D.F.: F. Méndez Oteo; 1975:12.
3. William Uribe. *Electrocardiografía Clínica. De Lo Básico A Lo Complejo*. Bogotá. 2014:113-128.

4. Anatomía del corazón - Instituto del Corazón de Texas (Texas Heart Institute). *Texasheartorg*. 2015. Available at: [http://www.texasheart.org/HIC/Anatomy\\_Esp/anato\\_sp.cfm](http://www.texasheart.org/HIC/Anatomy_Esp/anato_sp.cfm). Accessed June 1, 2016.
5. OMS | Enfermedades cardiovasculares. *Who.int*. 2015. Available at: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/es/>. Accessed May 31, 2016.
6. Cano A. Electrocardiografía (ECG) - dalcame. *Dalcamecom*. Available at: <http://www.dalcame.com/ecg.html#.V08SqvnhBdg>. Accessed June 1, 2016.

# IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA, EN MATEMÁTICAS, DE LAS ECUACIONES E INECUACIONES

María Guadalupe Raggi Cárdenas<sup>1</sup> Olga Leticia Fuchs Gómez<sup>1</sup> Juan Alberto Escamilla Reyna<sup>1</sup>

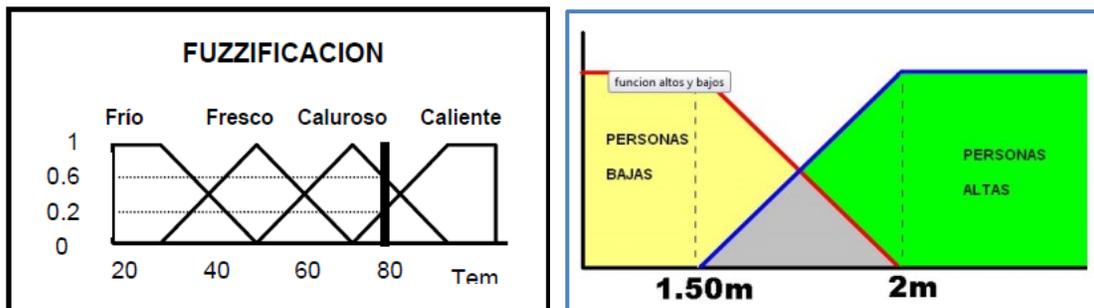
<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.

## RESUMEN

Desde los babilonios, luego egipcios y griegos, hasta nuestra época, las ecuaciones e inecuaciones han sido importantes para resolver problemas, tanto teóricos, como prácticos en diversas áreas de las ciencias, como en la vida cotidiana, de ahí que, es necesario que el estudiante conozca el manejo y resolución de éstas. Veremos donde aparecen, como se aplican y algunos elementos teóricos de estos conceptos, que tipo de ecuaciones e inecuaciones se espera que el alumno aprenda a resolver en un curso de Matemáticas Básicas. Finalmente mostramos los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes al trabajar con éstas, algunos de estos errores son, por ejemplo, la falta de análisis crítico elemental en los problemas propuestos, de donde se concluye que básicamente los cursos de matemáticas que llevan los estudiantes en el nivel medio y medio superior no proporcionan las habilidades de razonamiento adecuadas, su aprendizaje es memorístico y sólo han mecanizado el uso de algunos algoritmos.

## 1. INTRODUCCIÓN

La palabra ecuación viene del latín *aequatio*, *aequationis*, que significa nivelación, igualación o repartición igual de algo. Aunque en el latín clásico todavía no se refiere a las igualdades algebraicas desarrolladas después, ya hay indicios de un cierto uso matemático en Cicerón, que la usa para referirse a la nivelación numérica o situación de igualdad entre lo saldado y lo adeudado de un crédito, así como a la situación de empate en el sufragio electoral y a la equitativa distribución de bienes tasados en el reparto de una herencia entre dos, por lo que después pasa a denominar a las igualdades matemáticas en que puede despejarse cualquier incógnita e virtud de la relación de igualdad. Las ecuaciones, aparecen en nuestra vida cotidiana (hacer cuentas, contar vueltos, considerar número y precios de artículos en tiendas, etc.), así como en el ámbito científico: en economía para el uso de la oferta y la demanda; en medicina para el entendimiento de ciertos fenómenos; en casi todas las ramas de las matemáticas, en física, en ingeniería informática, etc. Las ecuaciones, en general, nos sirven para resolver problemas. En cuanto a las inecuaciones, podemos encontrarlas en los mismos contextos que ya hemos mencionado, por ejemplo, son utilizadas en casos tan cotidianos como en los tamaños, proporciones, temperaturas, tiempo, distancia, para saber cuál es mayor y cuál es menor. Incluso en las decisiones que tomamos cuando estamos en riesgo y tenemos que determinar cuál es el mayor riesgo y cuál es el menor, dado el salario de un trabajador, distribuirlo adecuadamente para no gastar más de lo que gana, para hallar el número máximo de ganancias en una empresa con un cierto número de productos vendidos, en general, las inecuaciones sirven para optimizar los recursos y utilizarlos de manera eficiente, para eso se crean modelos que pueden ir desde simples ecuaciones e inecuaciones hasta cuestiones complejas con ecuaciones diferenciales, probabilidad y estadística. Veamos un ejemplo del uso de las inecuaciones en Lógica Difusa. En el primer ejemplo tenemos una clasificación para la temperatura según su intensidad. En el segundo ejemplo, una clasificación para la estatura de personas.



## 2. TEORÍA

Trabajamos en el campo de los números reales, aquí, informalmente, una ecuación es una igualdad en la que aparecen números y letras ligadas mediante operaciones algebraicas. Las letras, cuyos valores son desconocidos, se llaman incógnitas. Resolver una ecuación consiste en encontrar los números que al sustituirlos en el lugar de la incógnita satisfacen la igualdad, a los números que la satisfacen se les llama soluciones. La estrategia básica en los cursos elementales es transformar la ecuación en otra equivalente y así sucesivamente hasta llegar a una ecuación más sencilla fácil de resolver hasta obtener la o las soluciones buscadas, que es el valor o valores de la incógnita que hace cierta la igualdad inicial. Para resolver una ecuación se utiliza las propiedades de la relación de igualdad y las propiedades de los números reales. En las ecuaciones generalmente se utiliza el símbolo “=” y cuando se trata de una identidad matemática, se suele utilizar el símbolo “≡”.

En cambio, las inecuaciones son desigualdades que relacionan también dos expresiones matemáticas, generalmente se utilizan los símbolos “<” (menor), “>” (mayor), “≤” (menor o igual), “≥” (mayor o igual): Resolver una inecuación, como en el caso de las ecuaciones, es, finalmente encontrar el o los valores de la incógnita para la que es verdadera la inecuación. En estas expresiones están involucradas operaciones matemáticas, como son la suma y el producto de reales, operaciones que junto con las propiedades llamadas los Axiomas de Campo y los Axiomas de Orden, y las consecuencias que de estos axiomas se derivan le dan al conjunto de reales el nombre de Campo Ordenado. Los datos que pueden incluir una ecuación y una inecuación son: números constantes (coeficientes) y variables (incógnitas).

En la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (FCFM- BUAP), se ofrece el curso de “*Matemáticas Básicas*” (que incluye estos dos temas) a estudiantes del primer semestre de las cinco licenciaturas existentes: Matemáticas, Matemáticas Aplicadas, Física, Física Aplicada y Actuaría, los temas se estudian después de visto Lógica, Conjuntos y los Sistemas Numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ . Los autores de este trabajo hemos impartido este curso para varias generaciones y detectamos una serie de problemas que describiremos más adelante.

En este curso, uno de los temas que incluye el programa es el de Ecuaciones e Inecuaciones. Básicamente tratamos ecuaciones e inecuaciones de primer grado, segundo grado, ecuaciones e inecuaciones que involucran raíces, también que involucran valores absolutos, cocientes de este tipo de ecuaciones e inecuaciones. Este tema se estudia después de haber visto los capítulos de Lógica, Conjuntos y haber trabajado en el conjunto de números reales ( $\mathbb{R}$ ), los temas que tratan los axiomas de campo, los axiomas de orden y las propiedades que derivan de éstos.

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

A un grupo de 27 estudiantes, después de haber estudiado el tema y resuelto varios ejemplos similares por parte del maestro y de los propios alumnos en clase (esta experiencia, permitió que el estudiante pudiera corregir sus dudas y sus errores más comunes), se les dieron a resolver en el primer examen parcial, dos ecuaciones y dos inecuaciones:

$$(a) \quad |3x^2 + x| = -4 \qquad (b) \quad \sqrt{2x - 3} = x - 3$$

$$(c) \quad |7x - 2| > 3x - 5 \qquad (d) \quad \sqrt{2x + 1} < x + 5$$

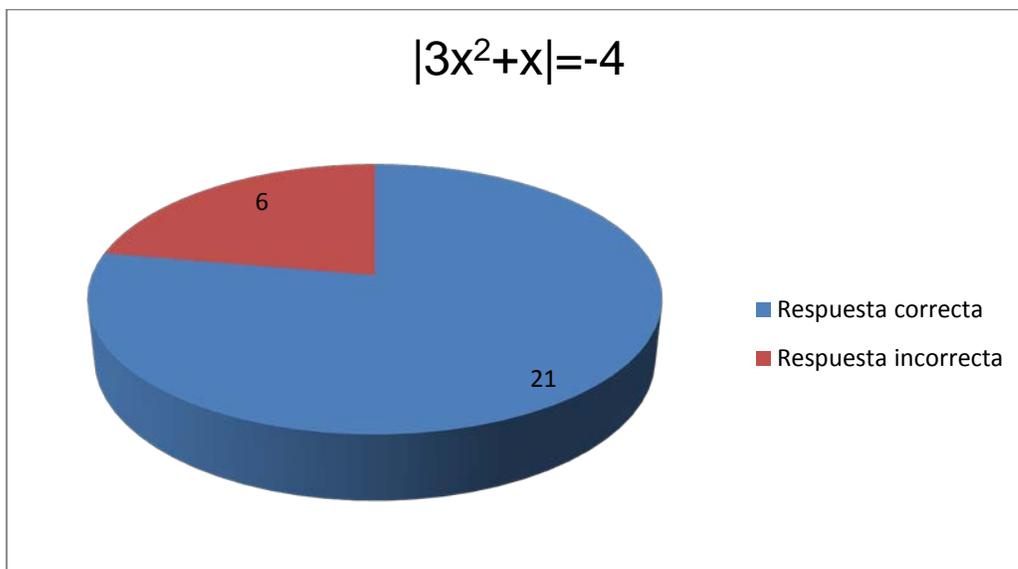
Con los Axiomas de Campo, de Orden y las propiedades que de éstos se derivan, tenemos que, las proposiciones utilizadas en las ecuaciones e inecuaciones propuestas, son:

- $|a| \geq 0$ .
- Sólo calculamos  $\sqrt{a}$ , para  $a \geq 0$  y tenemos que  $\sqrt{a} \geq 0$ .
- $|z| > a \Leftrightarrow z < -a \text{ ó } a < z$ .
- Si  $0 < a < b$ , entonces  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ .

Podemos calificar y clasificar las respuestas dadas por los estudiantes de la siguiente manera:

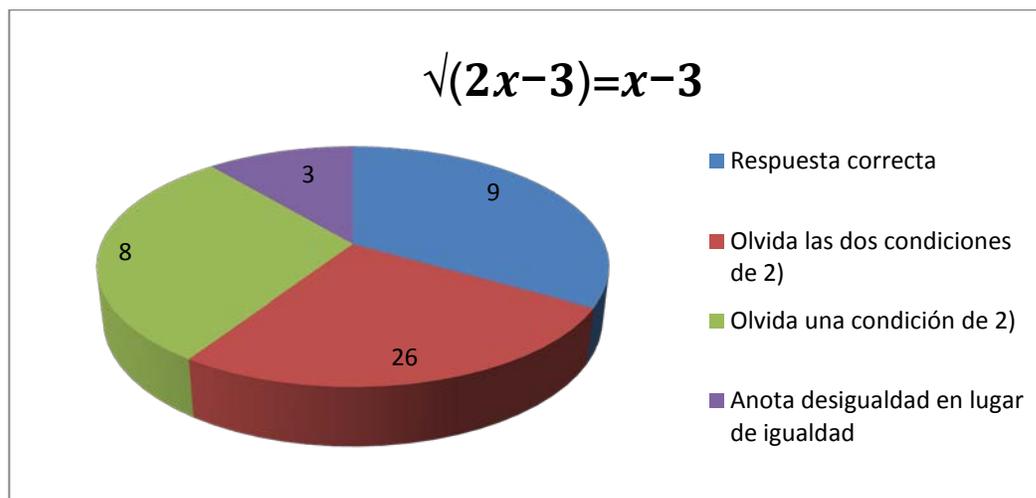
### 4. RESULTADOS

Respecto a la igualdad (a)



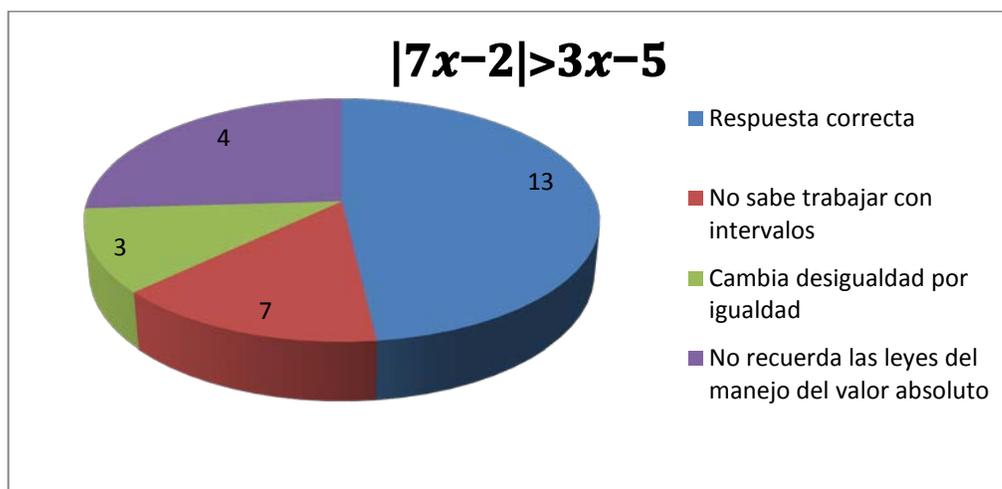
El 22% (6 estudiantes) no tomaron en cuenta la proposición 1) todos manejaron la igualdad con el resultado: para  $a \geq 0$ ,  $|x| = a \Leftrightarrow x = a$  ó  $x = -a$ . Uno de ellos, además, consideró una desigualdad en lugar de una igualdad.

Respecto a la igualdad (b)



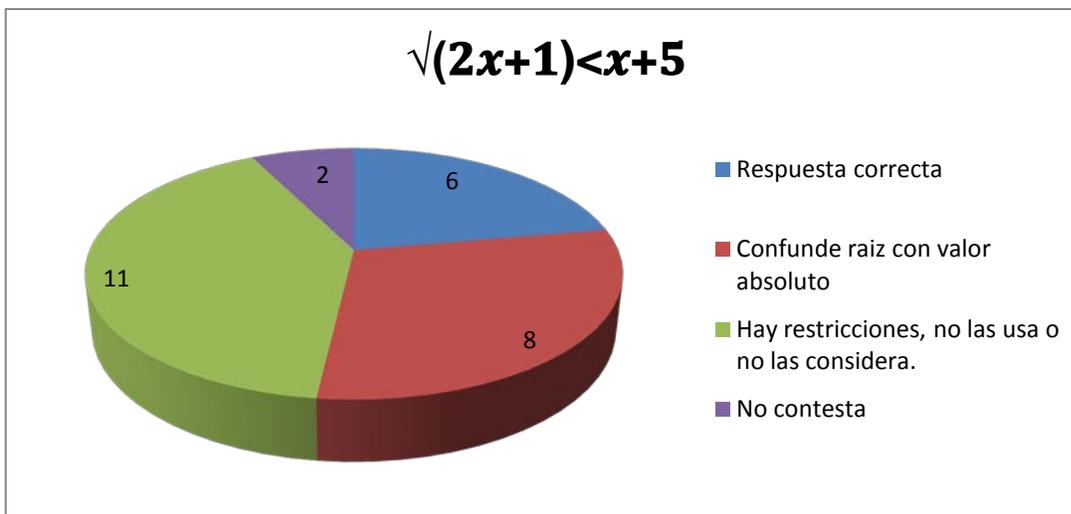
En esta igualdad el estudiante debió tomar en cuenta que  $2x - 3 \geq 0$  (\*) para poder obtener la raíz cuadrada; esta condición nos lleva a resolver esta inecuación (\*), además  $x - 3 \geq 0$ , pues se trata de una raíz no negativa; tenemos, entonces, tenemos otra inecuación que resolver. Éstas son las dos condiciones de las que hablamos en el gráfico. Creo que no leen bien la ecuación (por querer terminar rápido) y la manejan como inecuación.

Respecto de la inecuación (c)



Para resolver esta inecuación sólo necesitamos aplicar la proposición 3), el problema con el 26% de los estudiantes es que, aunque se ven muchos ejemplos en clase, algunos resueltos por ellos mismos en el pizarrón, a la hora de contestar el ejercicio, no recuerdan esta proposición, ni la que involucra la desigualdad inversa ( $<$ ). Por otra parte, el 15% confunde las operaciones de conjuntos, como son la unión y la intersección de ellos.

Respecto a la inecuación (d)

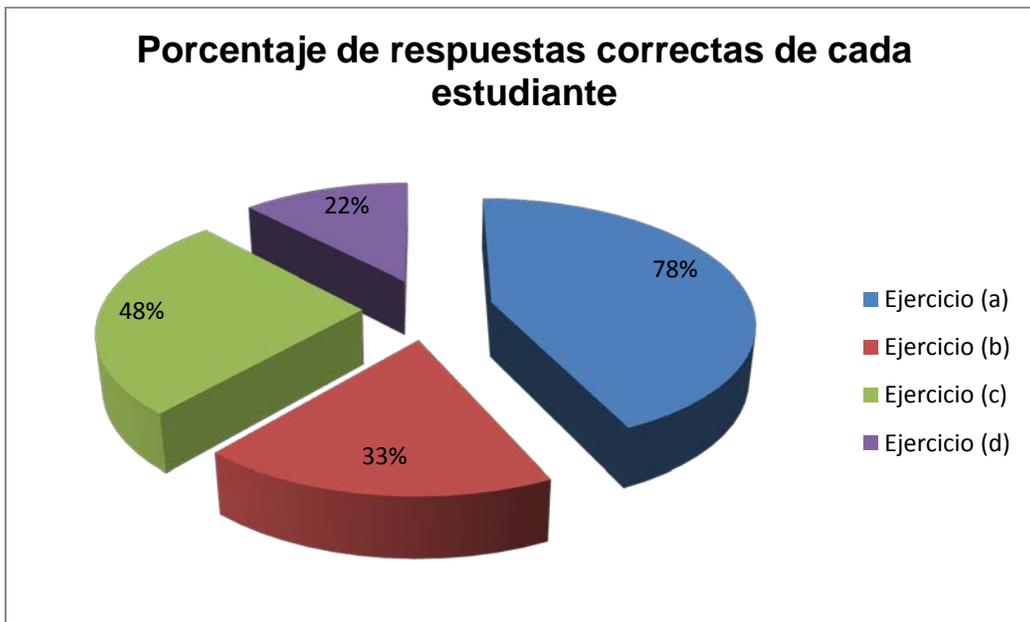


Este ejercicio es el mejor para mostrarnos al estudiante resolviendo mecánicamente este tipo de ejercicios: eleva al cuadrado sin importar que el interior de la raíz ( $2x + 1 \geq 0$ ) debe ser no negativo y que la misma raíz es no negativa ( $\sqrt{a} \geq 0$ ), es también común que maneje la raíz como si fuera valor absoluto.

## 5. CONCLUSIONES

Se puede decir, en términos generales, que los estudiantes manejan mejor el valor absoluto que las ecuaciones e inecuaciones que involucran radicales, ya que en los ejercicios (a) y (c) obtuvimos un 78% y un 48% respectivamente de respuestas correctas, en cambio, en los ejercicios (b) y (d) obtuvimos sólo un 33% y un 22% de respuestas correctas, como muestra el gráfico:

Porcentaje en las respuestas correctas a las cuatro preguntas:



De los 27 estudiantes que presentaron este examen, podemos decir, que sólo el 11% contestó los cuatro ejercicios correctamente, el 26% contestó correctamente 7 ejercicios, el 18.5% contestó correctamente 2 ejercicios, el 41% contestó únicamente 1 ejercicio y el 11% no contestó ningún ejercicio. Los ejercicios donde aparecen radicales les causan problemas, aun cuando son ecuaciones y las inecuaciones siguen siendo difíciles para ellos, ya que la mayoría pretende resolverlas con los mismos criterios que las ecuaciones. El siguiente gráfico nos muestra cuantos de los cuatro problemas resolvió cada estudiante.



## BIBLIOGRAFÍA

1. De Oteyza de Oteyza Elena et al. *Temas Selectos de Matemáticas*. Prentice Hall, Hispanoamericana. 1998.
2. Diccionario Etimológico. *etimologíasdechile.net*.
3. Miller Charles D. et al. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Pearson, Addison Wesley. 2004.
4. Raggi Cárdenas Ma. Guadalupe et al. *Conceptos Fundamentales y Problemas de Matemáticas Básicas*. Dirección de Fomento Editorial. 2013.
5. Robledo Rella Víctor et al. *Introducción a las Matemáticas. Ejercicios y Problemas*. Grupo Editorial Patria. 2012.

# ANÁLISIS DE TABLAS DE CONTINGENCIA DE DOS ASIGNATURAS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS DE LA BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Areli Karina Martínez Tapia<sup>1</sup>, Gabriela López Villanueva<sup>1</sup>, Sinaí Hernández González<sup>1</sup>, Fernando Velasco Luna<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

## RESUMEN

En la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (FCFM-BUAP) una de las materias de mayor importancia es la de Matemáticas Básicas, la cual los alumnos la tienen que cursar el primer semestre, es decir, al inicio de la licenciatura. En ésta se abordan temas relacionados a la lógica, teoría de conjuntos, teoría de los números reales y finalmente una introducción a la teoría de funciones. Por los conceptos tratados en esta asignatura es una materia de suma importancia para el desempeño del alumno a través de la licenciatura. Se tiene la idea de que la asignatura de Matemáticas Básicas es una asignatura que permite ver cómo será el aprovechamiento del alumno con materias subsecuentes y para evitar la reprobación en materias como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Álgebra Lineal, entre otras. En esta investigación se llevó a cabo un análisis estadístico consistente en tablas de contingencia con el fin de determinar la posible relación entre la calificación obtenida por el alumno en asignatura de matemáticas Básicas y la calificación obtenida en la asignatura de Cálculo Diferencial. Como análisis preliminar se llevó a cabo un análisis exploratorio, univariado y bivariado, el cual consistió de gráficos de sectores y de gráficos de barras con el fin de observar el comportamiento y relación de las variables bajo estudio. Mientras que como análisis definitivo se llevó a cabo un análisis de tablas de contingencia con el objetivo de conocer si existe dependencia entre la calificación en la asignatura de Matemáticas Básicas y la calificación obtenida en la asignatura de Cálculo Diferencial por el estudiante. De los resultados obtenidos se tiene que existe dependencia entre la calificación obtenida por el alumno en asignatura de Matemáticas Básicas y la calificación obtenida en la asignatura de Cálculo Diferencial.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (FCFM-BUAP) una de las materias de mayor importancia es la de Matemáticas Básicas, la cual los alumnos la tienen que cursar el primer semestre, es decir, al inicio de la licenciatura. En ésta se abordan temas relacionados a la lógica, teoría de conjuntos, teoría de los números reales y finalmente una introducción a la teoría de funciones. Por los conceptos tratados en esta asignatura es una materia de suma importancia para el desempeño del alumno a través de la licenciatura. Se tiene la idea de que la asignatura de Matemáticas Básicas es una asignatura que permite ver cómo será el aprovechamiento del alumno con materias subsecuentes y para evitar la reprobación en materias como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Álgebra Lineal, entre otras. Como se mencionó anteriormente una de las materias con mayor índice de reprobación en la FCFM e la BUAP, es la de Matemáticas Básicas. Díaz et al. (2012) y Díaz et al. (2013) han llevado a cabo análisis de los alumnos egresados y titulados de las Licenciaturas en Matemáticas y Matemáticas Aplicadas de la FCFM-BUAP en las Generaciones 2000 a 2004. Los resultados de mostraron que se inscribieron

un total de 588 alumnos, de los cuales solamente el 18% del total de los alumnos que ingreso logró egresar. Arenas (2011), lleva a cabo un análisis de regresión con el objetivo de determinar el aprovechamiento de los alumnos de nuevo ingreso en la FCFM-BUAP se encontró que los alumnos no tienen buenos hábitos de estudio y esto influye en las calificaciones que obtienen. Hernández (2013) realizó un análisis de regresión logística para estudiar la aprobación en la materia, se observó que la mayoría de estudiantes le dedican mínimo 2 horas de estudio a la materia.

Velasco et al. (2014) llevaron a cabo un análisis estadístico de aspectos relacionados a los alumnos de nuevo ingreso 2013 que cursan la materia de Matemáticas Básicas de las licenciaturas de Matemáticas, Matemáticas Aplicadas, Física, Física Aplicada y Actuaría de la FCFM-BUAP. Algunas de las variables que se analizaron fueron: si el alumno trabaja además de estudiar, hábit

os de estudio, ambiente de estudio, conocimientos previos, horas de estudio, confianza en el profesor entre otras. Se llevó a cabo un análisis exploratorio, univariado y bivariado, el cual consistió de gráficos con el fin de observar el comportamiento y relación de las variables bajo estudio. Los resultados del análisis muestran que sólo alrededor de un 22% los alumnos encuestados consideran que los conceptos adquiridos en el nivel de bachillerato si le ayudan a comprender los conceptos de la materia de Matemáticas Básicas. También se observa que un 63% de los alumnos que cursan la materia no trabajan y sólo un 20% lo hace por más de 4 horas a la semana.

Además alrededor del 50% de los alumnos encuestados mencionan que los problemas a que se enfrentan cuando estudian la materia son necesidad de ayuda, distracción, falta de concentración. Esta información es importante para toma de decisiones y encontrar factores que ayuden a tener mejoras en los índices de aprobación en dicha materia en la FCFM-BUAP. En este trabajo se llevó a cabo un análisis estadístico consistente en tablas de contingencia con el fin de determinar la posible relación entre la calificación obtenida por el alumno en asignatura de matemáticas Básicas y la calificación obtenida en la asignatura de Cálculo Diferencial.

## **2. METODOLOGÍA**

Para llevar a cabo el presente estudio se les pregunto a los alumnos de las 5 licenciaturas de la FCFM-BUAP, que hubieran cursado las asignaturas de Matemáticas Básicas y Cálculo Diferencial. Las variables analizadas son la calificación obtenida en cada una de las asignaturas antes mencionadas.

Como análisis preliminar se llevó a cabo un análisis exploratorio, univariado y bivariado, el cual consistió de gráficos de sectores y de gráficos de barras con el fin de observar el comportamiento y relación de las variables bajo estudio en forma marginal y en forma conjunta. Mientras que como análisis definitivo se llevó a cabo un análisis de tablas de contingencia con el objetivo de conocer si existe dependencia entre la calificación en la asignatura de Matemáticas Básicas y la calificación obtenida en la asignatura de Cálculo Diferencial por el estudiante en tales asignaturas. Para llevar a cabo el análisis estadístico se usó el software estadístico SPSS.

### 3. RESULTADOS

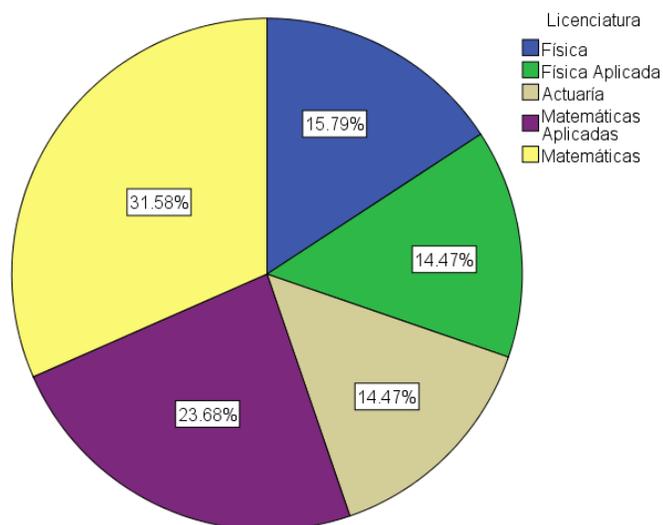


Figura 1. Distribución de alumnos por licenciatura.

En la Figura 1 se observa que de los alumnos considerados en el estudio aproximadamente el 32% fueron de la licenciatura en Matemáticas, en segundo lugar fueron los alumnos de la licenciatura en matemáticas Aplicadas con aproximadamente un 24%, mientras que los alumnos de las otras licenciaturas se presentan con un porcentaje similar.

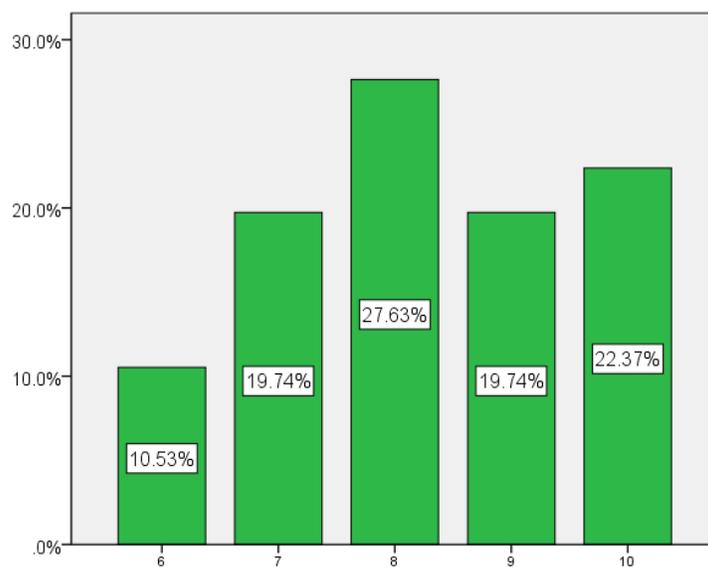


Figura 2. Distribución de calificaciones Matemáticas Básicas.

Respecto a la distribución de las calificaciones obtenidas por los alumnos en la asignatura de Matemáticas Básicas, de la Figura 2 se observa que alrededor del 28% obtuvieron una calificación

de 8, mientras que aproximadamente una quinta parte de los alumnos obtuvieron una calificación de 10. Destaca el hecho de que solo un 10% obtuvo una calificación de seis.

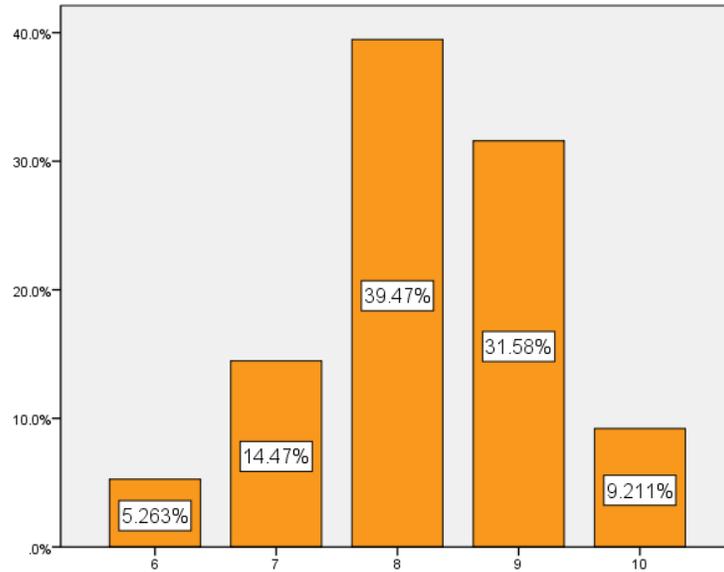


Figura 3. Distribución de calificaciones Cálculo Diferencial.

En la Figura 3 se observa la distribución de las calificaciones de los alumnos en la asignatura de Cálculo Diferencial. Se tiene que el mayor porcentaje de alumnos obtuvieron una calificación de 8, mientras que aproximadamente un 32% obtuvieron una calificación de 9. Y solo un 5% una calificación de seis.

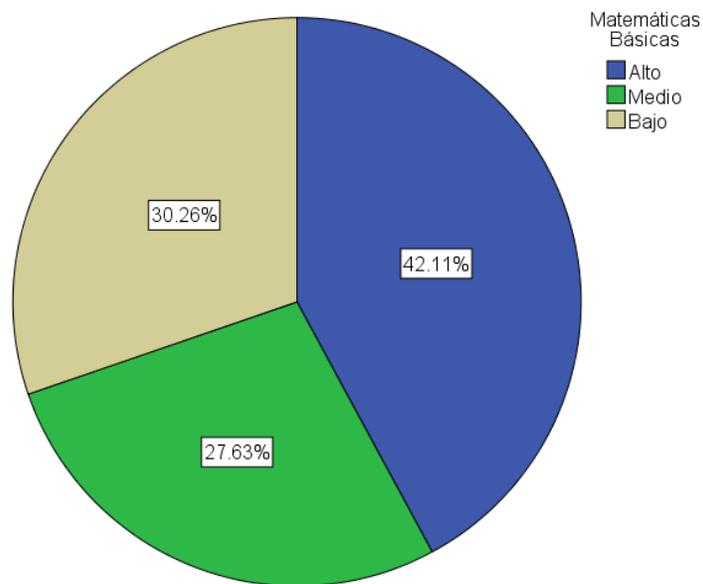


Figura 4. Distribución Matemáticas Básicas.

De la Figura 4 se observa que alrededor del 42% de los alumnos obtuvieron una calificación alta en la asignatura de Matemáticas Básicas, Y solo un 30% una calificación de nivel Bajo.

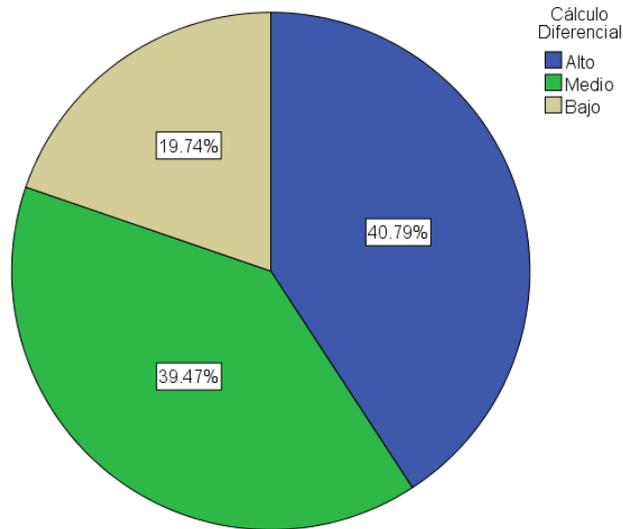


Figura 5. Distribución Cálculo Diferencial.

En la Figura 5 se observa que alrededor del 40% de los alumnos obtuvieron un nivel medio en la calificación obtenida en la asignatura de Cálculo Diferencial, mientras que aproximadamente un 40% obtuvieron una calificación en el nivel medio.

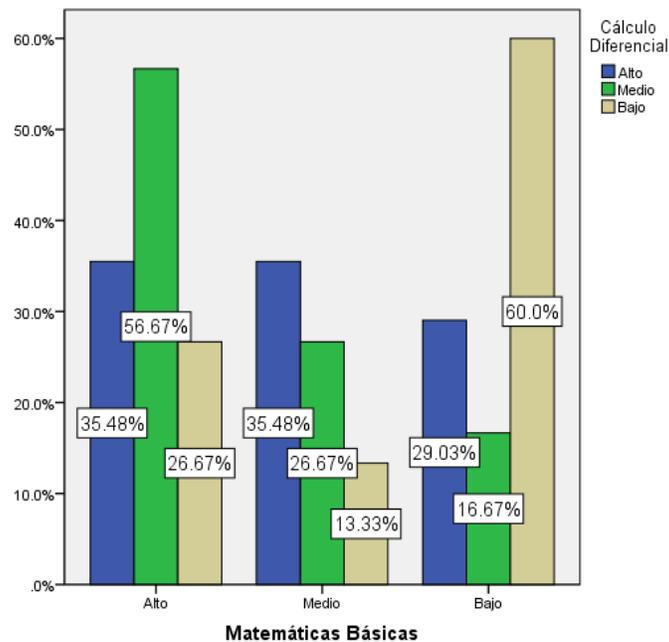


Figura 6. Matemáticas Básicas y Cálculo Diferencial.

En la Figura 6 se observa que de los alumnos que obtuvieron una calificación alta en la asignatura de Matemáticas Básicas aproximadamente un 57% obtuvieron un nivel medio en la asignatura de Cálculo Diferencial. Se tiene que de los alumnos que obtuvieron una calificación baja en la asignatura de Matemáticas Básicas aproximadamente un 60% obtuvieron un nivel bajo en la asignatura de Cálculo Diferencial. Por lo anterior se tiene que la distribución de los niveles de calificaciones en la asignatura de Cálculo Diferencial no es la misma para cada categoría de la calificación en Matemáticas Básicas, por lo que podría pensarse que existe dependencia entre las categorías de las calificaciones de ambas asignaturas.

En la siguiente tabla se presenta la distribución conjunta de las calificaciones en categorías de los alumnos en las asignaturas de Matemáticas Básicas y Cálculo Diferencial.

**Tabla 1.** Tabla de contingencia de Matemáticas Básicas y Cálculo Diferencial.

		Matemáticas Básicas		
		Alto	Medio	Bajo
Cálculo Diferencial	Alto	11	11	9
	Medio	17	8	5
	Bajo	4	2	9

De la Tabla 1 se tiene que 11 de los 76 alumnos se encuentran en la categoría de alto en ambas asignaturas. Aunque aproximadamente el mismo porcentaje de alumnos se encuentran en el nivel Bajo en ambas asignaturas respecto a su calificación obtenida. Ahora respecto a dependencia o independencia, se tiene de la Tabla1 que la categoría media es la de mayor porcentaje en la asignatura de Cálculo Diferencial en alumnos que se encuentran en el nivel alto en la asignatura de Matemáticas Básicas. Mientras que si el alumno se encuentra en la categoría Medio de la asignatura de Matemáticas Básicas el mayor porcentaje de alumnos se encuentra en el nivel Alto en la asignatura de Cálculo Diferencial. Por lo anterior se tiene que la distribución de los niveles de calificaciones en la asignatura de Cálculo Diferencial no es la misma para cada categoría de la calificación en Matemáticas Básicas, por lo que podría pensarse que existe dependencia entre las categorías de las calificaciones de ambas asignaturas.

Se llevó a cabo una prueba Ji-Cuadrada para ver dependencia o independencia de las calificaciones de las asignaturas. El valor p obtenido fue de 0.030, por lo que se rechazó la hipótesis nula de independencia, por lo que se tiene que existe relación entre los niveles de las calificaciones en ambas asignaturas.

#### 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió la relación existente entre los niveles de aprovechamiento de alumnos en base a la calificación obtenida en dichas asignaturas. De los resultados obtenidos se tiene que existe dependencia entre la calificación obtenida por el alumno en la asignatura de Matemáticas Básicas y la calificación obtenida en la asignatura de Cálculo Diferencial.

## BIBLIOGRAFÍA

1. M. G. Y., Arenas, Una Aplicación de Regresión Lineal en el Aprovechamiento de los Alumnos de Nuevo Ingreso en el Área de Matemáticas de la FCFM. 2011.
2. R.J., Díaz, C.H. Reyes, S.H, Cruz, y J.F., Godínez, Descripción sobre el número de egresados de las Generaciones 2000 a 2004 en dos carreras de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla: Licenciaturas en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, IX Encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, CIO, 2012.
3. R.J. Díaz, C.H. Reyes, L.F., L.F., Velasco, y G.V. Vázquez, Análisis Estadístico de las Generaciones 2000-2004 de egresados de las Licenciaturas en Matemáticas y Matemáticas Aplicadas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, X Encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, CIO, 2013.
4. G.S., Hernández, Uso del modelo de Regresión Logística para estudiar la aprobación de la materia de Matemáticas Básicas de la FCFM en las generaciones 2010 y 2011. 2013.
5. L.F. Velasco, C.H. Reyes, G.V. Vázquez, M.A. González, Análisis Estadístico de aspectos relacionados con la materia de Matemáticas Básicas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, XI Encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, CIO, 2014.

# EFFECTO DE UNA DOBLE PERTURBACIÓN MAGNÉTICA ESTÁTICA EN LA SINCRONIZACIÓN DE UNA CADENA DE CINCO CIRCUITOS DE CHUA

Gabriel Arroyo Correa<sup>1</sup>, Carlos Heriberto Mendoza Pérez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH.

## RESUMEN

En un trabajo previo [Arroyo Correa et. al, 2015], se mostró el efecto de una perturbación magnética estática sobre el estado de sincronización de una cadena de cinco circuitos de Chua. En este trabajo se extiende este análisis al estudiar el efecto de una doble perturbación magnética estática sobre la sincronización de una cadena de cinco circuitos de Chua acoplados, tanto en configuración unidireccional como bidireccional. La topología de las cadenas consideradas son del tipo cerrada. Se supone que el estado dinámico inicial de los cinco circuitos corresponde al del doble atractor y que los cinco circuitos están completamente sincronizados. Se estudia numéricamente el comportamiento de la entropía de Shannon en la dinámica no lineal de las diferentes configuraciones, en función de la magnitud y la localización de las perturbaciones magnéticas. Los resultados del análisis entrópico muestran claras diferencias entre las configuraciones consideradas y la localización de las perturbaciones. Se agradece el apoyo a través del programa CIC-UMSNH 2016.

## 1. INTRODUCCIÓN

En un trabajo previo (Arroyo et al., 2011) demostramos numéricamente y experimentalmente la forma en que el circuito de Chua modifica su estado dinámico por la perturbación de un campo magnético estático. En ese mismo trabajo mostramos el efecto de esta perturbación en el estado de sincronización entre dos circuitos de Chua idénticos. Cuando se acoplan más de dos circuitos caóticos la dinámica resulta ser más compleja, ya que el comportamiento depende de la forma en que se acoplan los circuitos como del número de circuitos involucrados.

En la Fig. 1 se muestra un diagrama simplificado del sistema estudiado, que consiste de cinco circuitos de Chua idénticos conectados en modo de una cadena lineal cerrada. Se supondrá que los circuitos están conectados a través de los canales asociados a los capacitores  $C_i$ , que están en paralelo con los resistores no lineales  $N_R$ . La perturbación magnética se hace acercando un imán permanente al inductor  $L$ . Se entenderá que cuando  $K_{ij}=K_{ji}\neq 0$  se habla de acoplamiento bidireccional y que cuando  $K_{ij}\neq 0$  y  $K_{ji}=0$  se habla de acoplamiento unidireccional. En estas condiciones, las ecuaciones normalizadas de este sistema se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - f(x_1)) + K_{12}(x_2 - x_1) + K_{15}(x_5 - x_1) \\
\dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1 \\
\dot{z}_1 &= -\beta y_1 + \gamma_1 \\
\dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - f(x_2)) + K_{21}(x_1 - x_2) + K_{23}(x_3 - x_2) \\
\dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2 \\
\dot{z}_2 &= -\beta y_2 + \gamma_2 \\
&\vdots \\
\dot{x}_5 &= \alpha(y_5 - f(x_5)) + K_{54}(x_4 - x_5) + K_{51}(x_1 - x_5) \\
\dot{y}_5 &= x_5 - y_5 + z_5 \\
\dot{z}_5 &= -\beta y_5 + \gamma_5 \\
f(x) &= m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)
\end{aligned} \tag{1}$$

Las  $x_i$ 's están relacionadas con los voltajes en los capacitores  $C_i$ ; las  $y_i$ 's están relacionadas con los voltajes en los capacitores  $C_2$ ; las  $z_i$ 's están relacionadas con las corrientes en las bobinas  $L$ ;  $\gamma_i$  representa la perturbación magnética en el  $i$ -ésimo circuito y  $f(x)$  es la función de respuesta no lineal del resistor NR. Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m_0$  y  $m_1$  dependen de los elementos electrónicos utilizados para construir los circuitos.

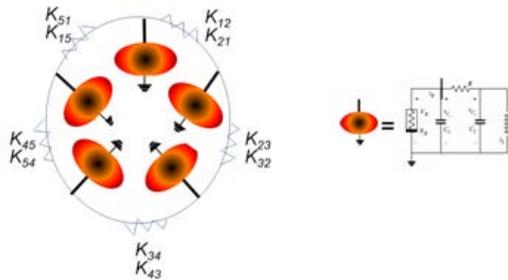


Figura 1. La cadena cerrada analizada. El circuito elemental de Chua se muestra a la derecha.

Shannon en su trabajo clásico acerca de la teoría de la comunicación (Shannon, 1948), estableció resultados generales tanto para la información transmitida en sistemas discretos como continuos. En este esquema planteado por Shannon resulta interesante rescatar el concepto de entropía asociada con una señal. La idea básica de este concepto se puede describir en los siguientes términos. Supóngase que se tiene un conjunto de puntos definidos en un plano. Se define una malla (cuadrícula) la cual se divide en  $N$  celdas rectangulares idénticas. El número de puntos contenidos en una celda dividido entre el número total de puntos del mapa da la probabilidad de ocupación  $p_i$  de la  $i$ -ésima celda. La entropía de Shannon  $E_S$  se define como:

$$E_S = -\sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i), \tag{2}$$

En donde  $\ln$  denota el logaritmo natural.

## 2. TEORÍA

Primeramente se supone que todos los circuitos se encuentran sincronizados en el estado caótico del doble atractor, como se muestra en la Fig. 2. En esta figura se muestra la proyección del atractor sobre el plano  $XY$  de cada oscilador (gráfica izquierda) y la señal de sincronización en el plano  $X_i X_j$  (gráfica derecha). Una sincronización completa está demostrada por una línea recta en el plano  $X_i X_j$ . Numéricamente, estas condiciones se tienen tomando los siguientes valores para los parámetros de las Ecs. (1):  $\alpha=7$ ,  $\beta=10$ ,  $m_0=-0.28$ ,  $m_1=10$ ,  $K_{ij}=K_{ji}=50$  (sincronización bidireccional),  $K_{ij}=50$  y  $K_{ji}=0$  (sincronización unidireccional). La aplicación de la doble perturbación se hace tomando en cuenta que una de ellas se mantiene fija en un circuito y la otra perturbación magnética se aplica secuencialmente el resto de los circuitos. En cada caso la entropía de Shannon se calcula de acuerdo a la Ec. (2).

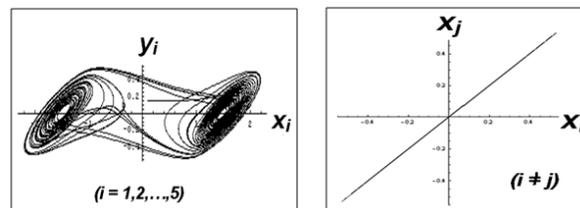


Figura 2. Estado inicial de los cinco circuitos caóticos que definen la cadena lineal cerrada descrita por las Ecs. (1). La relación lineal en el plano  $X_i X_j$  es evidencia de la sincronización entre los circuitos de la cadena.

En este trabajo se analiza cómo se modifica el estado de sincronización de la cadena cuando se aplican simultáneamente dos perturbaciones idénticas (mismo valor de  $\gamma$ ) en diferentes circuitos de la cadena. Este efecto se cuantificará calculando la entropía de Shannon dado por la Ec. (2) en el plano  $X_1 X_5$ . Si la sincronización es robusta se espera una entropía baja, en tanto que una desincronización de la cadena llevará a un valor mayor de la entropía de Shannon.

## 3. RESULTADOS

En la Fig. 3(a) se muestran los resultados de la variación de entropía para el caso de sincronización bidireccional en donde una de las perturbaciones se mantiene fija en el circuito 1 de la cadena, y la otra perturbación se aplica secuencialmente en los circuitos del 2 al 5. La Fig. 3(b) presenta los resultados cuando una perturbación se mantiene fija en el circuito 3 y la otra perturbación se aplica secuencialmente en los circuitos 1, 2, 4 y 5. Se puede notar de estas figuras cómo cambia la entropía de Shannon del sistema en relación a la posición relativa de las perturbaciones magnéticas. También se puede inferir de la Fig. 3(a) que cuando una de las perturbaciones se mantiene fija en el circuito 1, la variación de la entropía depende de la posición relativa entre las perturbaciones. Se puede notar que para valores pequeños de  $\gamma$  (entre 0 y 0.5), la sincronización de la cadena se preserva más óptimamente cuando las perturbaciones se aplican simultáneamente en los circuitos 1 y 3 (trazo  $C_{13}$  en la Fig. 3(a)). Para valores mayores de  $\gamma$  (entre 1.5 y 2.4), la aplicación simultánea de las perturbaciones en los circuitos 1 y 4 (trazo  $C_{14}$  en la Fig. 3(a)), en promedio, tiende a preservar la sincronización de la cadena. Se puede observar que hay algunos rangos de  $\gamma$ , alrededor de 0.3 y 0.9, en donde la aplicación de las perturbaciones en los circuitos 1 y 3 favorece una entropía menor que la del estado inicial de la cadena, lo que indicaría una mayor estabilidad de la misma. En el caso en que la perturbación fija esté en el circuito 3, Fig.

3(b), se pueden notar similitudes y diferencias. Por ejemplo, para valores pequeños de  $\gamma$  (entre 0 y 0.4), la sincronización de la cadena se preserva más óptimamente cuando las perturbaciones se aplican simultáneamente en los circuitos 3 y 1 (trazo  $C_{31}$  en la Fig. 3(b)), que es la misma posición relativa 1 y 3 de la Fig. 3(a). Sin embargo, se puede notar una diferencia notable para valores de  $\gamma$  alrededor de 0.7, en donde la aplicación de las perturbaciones en los circuitos 3 y 4 (trazo  $C_{34}$  en la Fig. 3(b)) favorece una entropía mucho menor que la que se presentó en la Fig. 3(a).

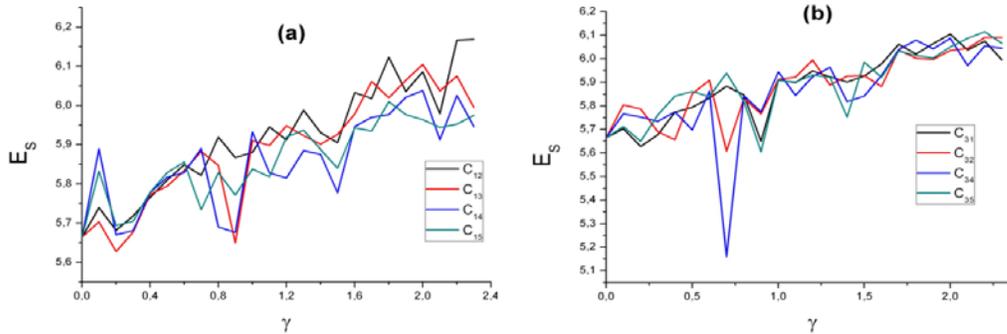


Figura 3. Variación de la entropía de la cadena, en conexión bidireccional, asociada a la señal de sincronización  $X_1X_5$ : (a), una perturbación fija en el circuito 1; (b), una perturbación fija en el circuito 3.  $C_{1j}$  ( $j=2, 3, 4, 5$ ) corresponde a la aplicación de la perturbación fija en el circuito 1 y la otra perturbación se aplica, secuencialmente, en el circuito 2, 3, 4 y 5.  $C_{3j}$  ( $j=1, 2, 4, 5$ ) corresponde a la aplicación de la perturbación fija en el circuito 3 y la otra perturbación se aplica, secuencialmente, en el circuito 1, 2, 4 y 5.

De manera similar, en la Figs. 4(a) y 4(b) se presentan los resultados para el caso de la conexión unidireccional. Sin embargo, en este caso y a diferencia de la conexión bidireccional, la variación de la entropía es suave e independiente de donde se sitúe la perturbación magnética fija (nótese la similitud de los gráficos de la Fig. 4). Se puede notar que en ambos casos una sola forma de aplicación simultánea de los campos magnéticos, trazo  $C_{12}$  en la Fig, 4(a) y trazo  $C_{31}$  en la Fig. 4(b), favorecen predominantemente la menor entropía en el rango completo de valores de  $\gamma$ . También es notarse que sólo en el caso de la Fig. 4(b), existe un pequeño rango de valores de  $\gamma$ , alrededor de 0.1, que favorece una entropía menor que la del estado inicial de la cadena.

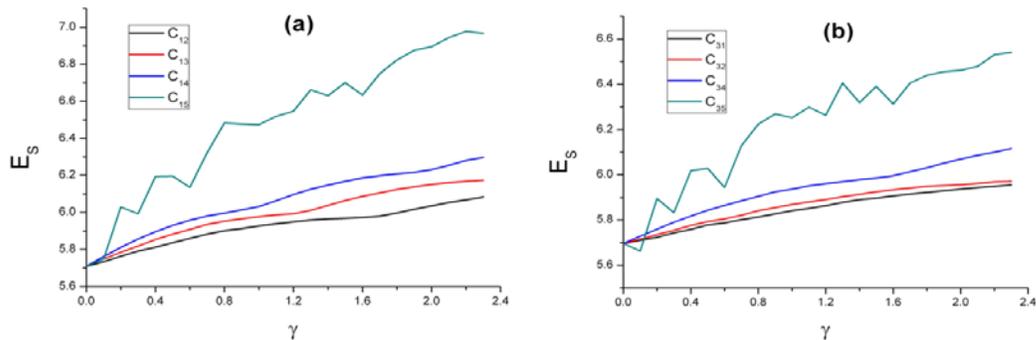


Figura 4. Variación de la entropía de la cadena, en conexión unidireccional, asociada a la señal de sincronización  $X_1X_5$ : (a), una perturbación fija en el circuito 1; (b), una perturbación fija en el circuito 3.  $C_{1j}$  ( $j=2, 3, 4, 5$ ) corresponde a la aplicación de la perturbación fija en el circuito 1 y la otra perturbación se aplica, secuencialmente, en el circuito 2, 3, 4 y 5.  $C_{3j}$  ( $j=1, 2, 4, 5$ ) corresponde a la aplicación de la perturbación fija en el circuito 3 y la otra perturbación se aplica, secuencialmente, en el circuito 1, 2, 4 y 5.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el efecto que tiene una doble perturbación magnética estática en la sincronización en una cadena cerrada constituida por cinco circuitos de Chua. Se demostró numéricamente que la conexión bidireccional es más sensible a la posición relativa de las dos perturbaciones magnéticas en relación a la conexión unidireccional. En el caso de conexión bidireccional, la sincronización es mantenida si aumenta la posición relativa entre las dos perturbaciones magnéticas, contrario a lo que ocurre en el caso de conexión unidireccional en donde la sincronización tiende a disminuir si la posición relativa entre las perturbaciones magnéticas es menor. Estos resultados pueden ser de utilidad en el diseño de geometrías para la encriptación de información y vienen a complementar los resultados que se han obtenido recientemente (Arroyo Correa et al., 2015).

#### BIBLIOGRAFÍA

1. G. Arroyo Correa, C. H. Mendoza Pérez, J. Vega Cabrera, "Efecto de una perturbación magnética estática en la sincronización de una cadena de cinco circuitos de Chua", XII encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, 2015, trabajo S2-FMCT06.
2. G. Arroyo Correa et al., "Control y sincronización de circuitos de Chua mediante perturbaciones magnéticas" VIII Encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, 2011, Artículo S2-FMCT15.
3. C.E. Shannon, "A mathematical theory of communication", The Bell System Technical Journal, Vol. 27, 1948, pp. 379-423, 623-656.

## PÉNDULO DE TORSIÓN: MODOS NORMALES II

Gabriela Del Valle<sup>1</sup>, Guadalupe Hernández Morales<sup>1</sup>, Rodolfo Espíndola Heredia<sup>1</sup>, Ariadna Gutiérrez Rosales<sup>1</sup>, Pedro Jesús Díaz Tecanhuey<sup>1</sup>, Genaro Gallardo<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco

### RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un Péndulo de Torsión, unido a un resorte en uno de sus extremos, el cual se utiliza para estudiar sus modos normales de vibración, mientras la oscilación horizontal del péndulo torsional se va amortiguando, la oscilación vertical tiene lugar, luego la oscilación vertical desaparece transfiriendo toda su energía a la oscilación torsional. Se mide la amplitud de ambas oscilación y buscamos las frecuencias de los modos normales, los resultados experimentales se comparan con resultados analíticos en las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana, así como con resultados de simulación, al resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento que dan lugar a los modos normales de vibración, resultados que pueden ser extendido a sistemas de masa variable.

### 1. INTRODUCCIÓN

El péndulo de Wilberforce, nombrado así en honor de su inventor, es un dispositivo que consta de un resorte vertical, el cual posee constantes elásticas tanto longitudinal ( $\kappa$ ) como torsional ( $\delta$ ), al cual se le coloca una masa ( $m$ ) la que posee también un momento de Inercia ( $I$ ). Cuando la masa  $m$  es sacada de su punto de equilibrio longitudinalmente, y se suelta para que oscile, la oscilación comienza a amortiguarse, se va transfiriendo energía cinética a la parte torsional, con lo que la masa va dejando de oscilar y comienza rotar alrededor del eje de suspensión, desde luego esto lleva a suponer que existe un término de acoplamiento ( $\varepsilon$ ) entre los dos tipos de movimientos que experimenta la a masa: el longitudinal y el torsional.

El trabajo de Wilberforce, fue en su momento un trabajo académico, ya que él mismo estaba interesado en obtener experimentalmente la rigidez y el módulo de Young de distintos resortes de varios materiales, a raíz de este trabajo se desarrollan diferentes estudios enfocados principalmente en el estudio en la transferencia de energía, nosotros desarrollamos el experimento y seguimos la resolución teórica en diferentes formulaciones (Lagrangiana y Hamiltoniana), presentamos las soluciones para los modos normales de oscilación, contrastamos los resultados experimentales, con resultados tanto teóricos y como numéricos que obtenemos al desarrollar un código para resolver las ecuaciones de movimiento acopladas por medio del Runge-Kutta de orden 4.

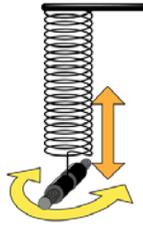


Figura 9. Esquema que presenta el sistema del péndulo de Wilberforce, el resorte oscila de manera longitudinal y posteriormente transfiere su energía al movimiento transversal.

## 2. TEORÍA

Se construye el Lagrangiano del sistema considerando lo siguiente: la energía cinética translacional del sistema, la energía rotacional del sistema, la energía elástica longitudinal, del sistema, la energía elástica torsional del sistema y un factor de energía de acoplamiento, por lo que podemos escribir lo siguiente:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kz^2 - \frac{1}{2}\delta\theta^2 + \frac{1}{2}\epsilon\theta z \quad (1)$$

De acuerdo con la teoría de Euler Lagrange, es necesario realizar las derivadas parciales con respecto a  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $z$  y  $\dot{z}$ , así como dos derivadas totales, esto es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2)$$

Por lo que del cálculo anterior se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento siguientes:

$$\dot{z} = -\frac{k}{m}z + \frac{\epsilon}{2m}\theta \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\delta}{I}\theta + \frac{\epsilon}{2I}z \quad (4)$$

Ecuaciones de movimiento que se resuelven de manera analítica y también de manera numérica.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA

Para resolver las ecuaciones de manera numérica se separan las ecuaciones (3) y (4) en dos conjuntos de ecuaciones diferenciales de primer orden, con lo que tenemos 4 ecuaciones diferenciales de primer orden de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{z} \\ f_2 &= -\frac{k}{m}z + \frac{\epsilon}{2m}\theta \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \dot{\theta} \\ g_2 &= -\frac{\delta}{I}\theta + \frac{\epsilon}{2I}z \end{aligned} \quad (6)$$

Aplicamos el método numérico Runge-Kutta, Que establece que debemos tener una Ecuación Diferencial Ordinaria con valores iniciales, para nuestro caso tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_0(z_0, \theta_0, t_0) &= a_0 \\ \dot{f}_0(z_0, \theta_0, t_0) &= a_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Se calculan para este caso los valores de  $z$  y  $\dot{z}$  en el tiempo, el cual se va corriendo  $t = t + \delta h$ ,

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \\ \dot{z}_{i+1} &= \dot{z}_i + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{1}{6}(M_{11} + 2M_{21} + 2M_{31} + M_{41}) \\ \dot{\theta}_{i+1} &= \dot{\theta}_i + \frac{1}{6}(M_{12} + 2M_{22} + 2M_{32} + M_{42}) \end{aligned} \quad (11)$$

Con las funciones siguientes que nos indican sobre el acoplamiento de las variables en este caso  $z$  y  $\theta$

$$\begin{aligned} k_{11} &= \delta h f_1(t, z_i, \theta_i, \dot{z}) \\ k_{21} &= \delta h f_2(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{11}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{12}}{2}) \\ k_{22} &= \delta h f_1(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{11}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{12}}{2}) \\ k_{31} &= \delta h f_1(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{21}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{22}}{2}) \\ k_{41} &= \delta h f_2(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{k_{21}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{k_{22}}{2}) \end{aligned} \quad (12)$$

Sin embargo también se tiene que resolver de manera simultánea otro conjunto de ecuaciones, a saber:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \delta h g_1(t, z_i, \theta_i, \dot{z}) \\
 M_{21} &= \delta h g_2\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{M_{11}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{M_{12}}{2}\right) \\
 M_{22} &= \delta h g_1\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{M_{11}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{M_{12}}{2}\right) \\
 M_{31} &= \delta h g_1\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{M_{21}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{M_{22}}{2}\right) \\
 M_{41} &= \delta h g_2\left(t + \frac{\delta h}{2}, z_i + \frac{M_{21}}{2}, \theta_i, \dot{z} + \frac{M_{22}}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

### 3. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Se describen a continuación los materiales utilizados para la realización de la parte experimental del péndulo de torsión, llamado también péndulo de Wilberforce. Se utilizaron una barra de aluminio de 0.0745m, tubo de hierro de 0.10 m de longitud con una masa total para el sistema de 0.2862 kg, un tornillo en forma triangular, un acoplador metálico, dos coples de plástico, un resorte de constante K (10±0.1) N/m, dos soportes de Pasco (modelo ME-8951), un sensor de rotación de Pasco (modelo PS-2120) y un poco de pegamento.

Con el pegamento e une la barra de aluminio, la barra de hierro y un cople de plástico mismo con el que se sujeta el resorte(Figura 3), a continuación se coloca el tornillo de forma triangular el cual se acopla al sensor de rotación para poder medir las posiciones  $\theta[^\circ]$ (Figura 2), al mismo tiempo se gravó un video a 60fps en 1080HD que se analiza en el programa "Tracker: video analysis and modeling tool for Physics education" de donde se obtienen datos que nos ayudan a obtener los periodos de oscilación del sistema, se acopló este sistema como ya se había mencionado a dos soportes de Pasco los cuales se alinearon de tal forma que el sistema tuviera las menores perturbaciones externas posibles. El arreglo se muestra en la Figura 4.

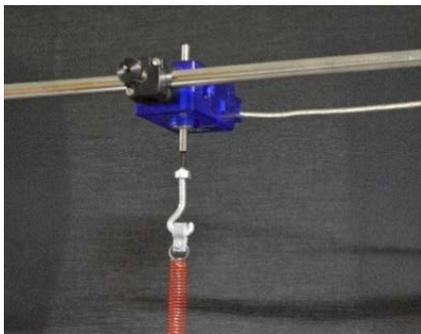


Figura 10. Arreglo para sujetar el péndulo de Wilberforce al sensor de rotación



Figura 11. Arreglo para sujetar el péndulo de Wilberforce al cuerpo rígido

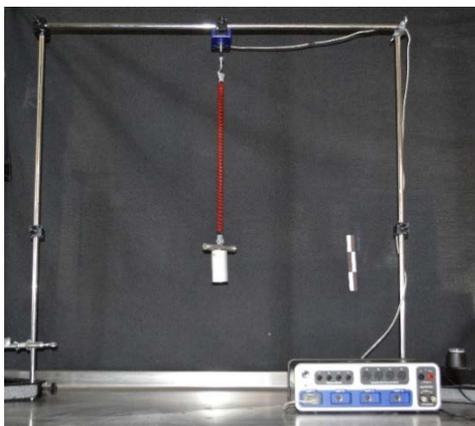


Figura 12. Arreglo Experimental del péndulo de torsión o péndulo de Wilberforce.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 NUMÉRICOS

Se resolvieron las dos ecuaciones de manera numérica, con los datos que muestran en la Tabla 1, factores que provienen de la ecuación de movimiento, la simulación se realizó con un valor de  $h=0.0314$ , para 20 condiciones iniciales distintas, por cada simulación se obtienen 800 datos, entre  $a=0$  y  $b=8$  ejecutadas, mostrando el comportamiento con el tiempo y entre las dos variables  $z$  y  $\theta$  para distintos acoplamientos  $\delta = 1, 2, 2.5$ .

$h=$

Las figuras

, con tres

Tabla 1. Factores necesarios para evaluar la ecuación de movimiento.

masa	M. Inercia	Constante L.	Constante T.	Condición inicial	Condición inicial	Condición inicial	Condición inicial
$m$	$I$	$\kappa$	$\delta$	$z_0$	$\dot{z}$	$\theta_0$	$\dot{\theta}_0$
3.263	1.657	10	1.5	0.15	0	$-\pi/12$	0

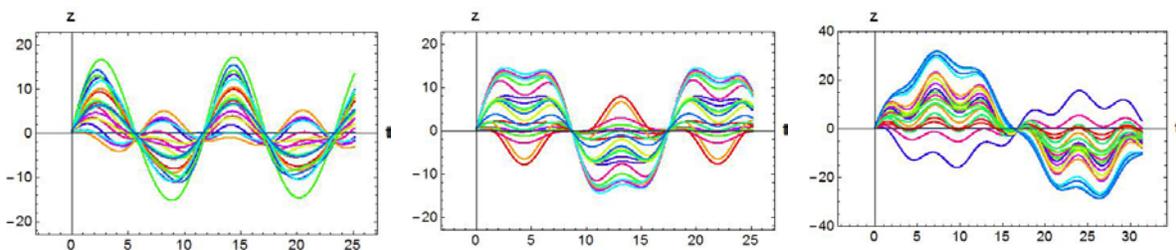


Figura 13 Comportamiento con el tiempo de la variable  $z$ , elongación, a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5

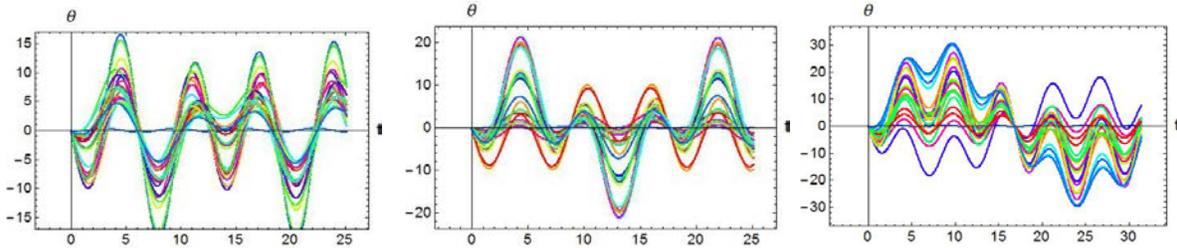


Figura 14. Comportamiento con el tiempo de la variable  $\theta$ , transversal, a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5

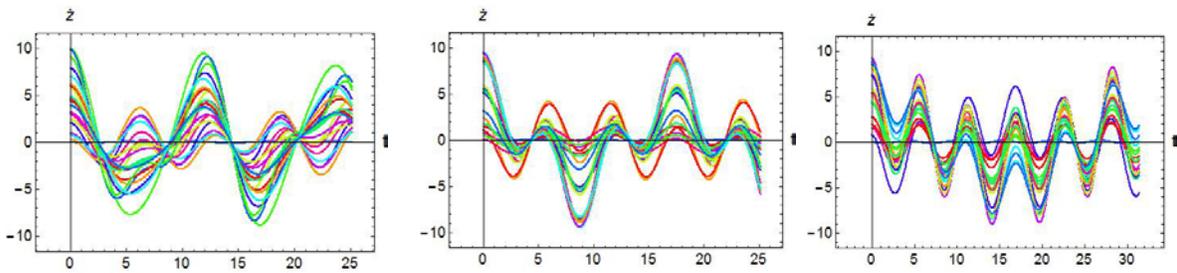


Figura 15. Comportamiento con el tiempo de la derivada de variable  $z$ , rapidez, a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5

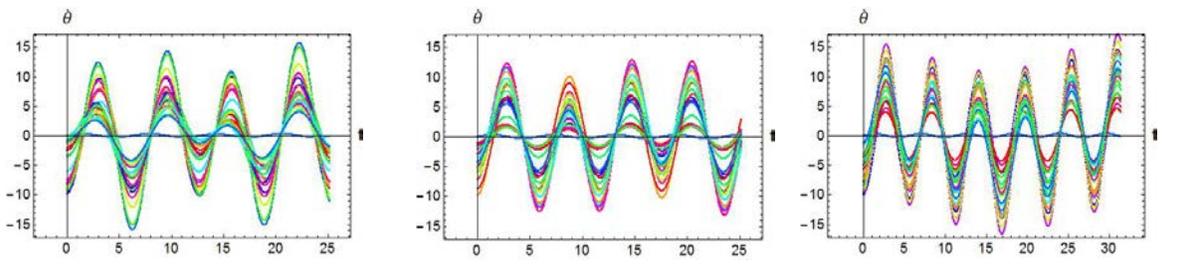


Figura 16. Comportamiento con el tiempo de la variable  $\dot{\theta}$ , rapidez angular, a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5.

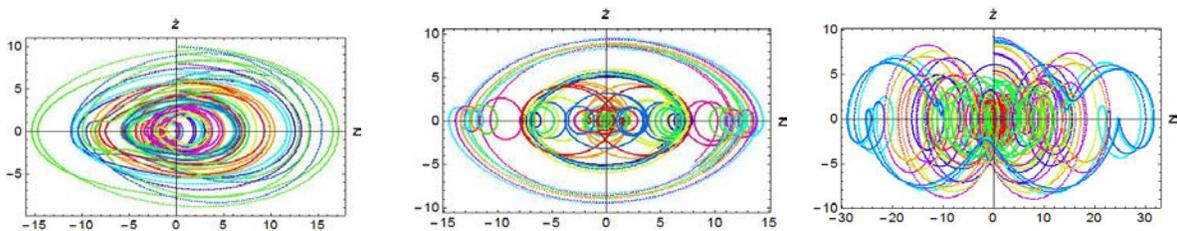


Figura 17. Plano fase de la variable  $z$ , a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5

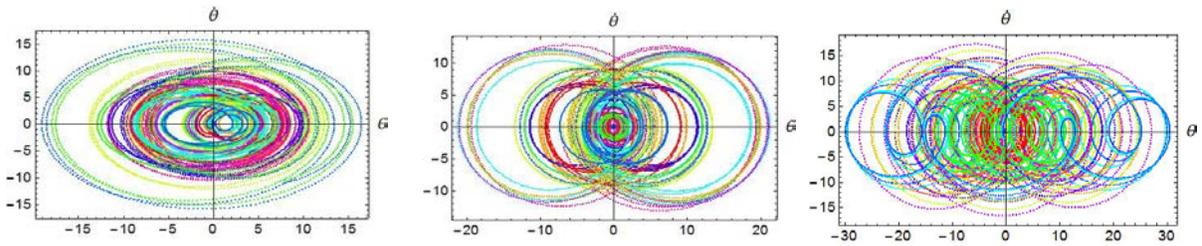


Figura 18. Plano fase de la variable  $\epsilon$ , a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5

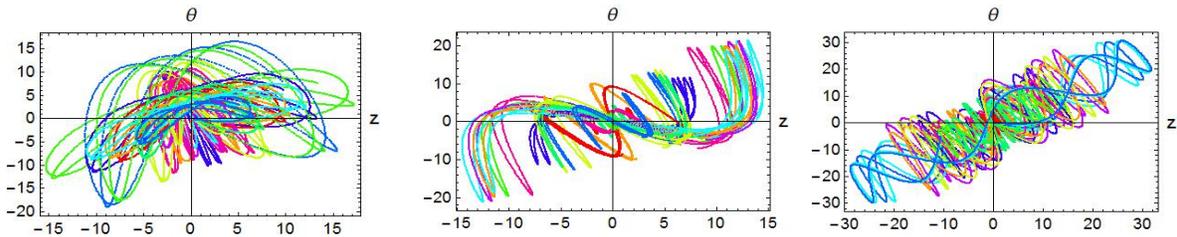


Figura 19. Relación entre la variable  $z$ , elongación y la variable angular  $\theta$  a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5

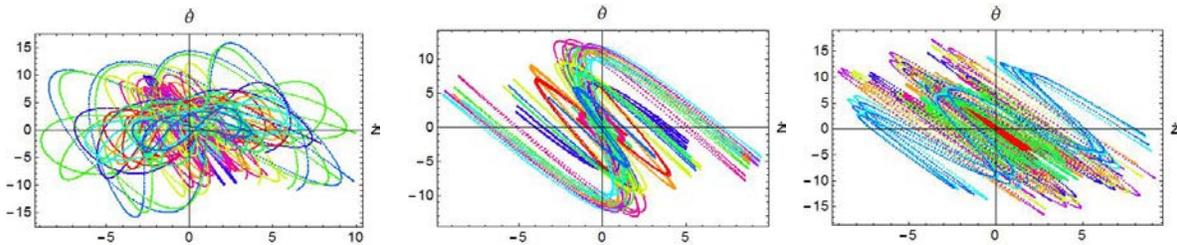


Figura 20. Relación entre la variable  $z$ , elongación y la variable angular  $\theta$  a) acoplamiento 1, b) acoplamiento 2, c) acoplamiento 2.5.

#### 4.2 EXPERIMENTALES

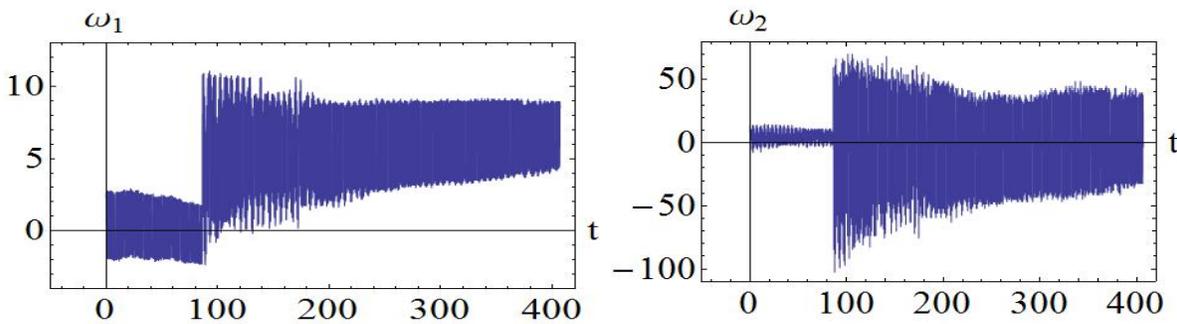


Figura 21. Relación entre la variable a)  $\omega_1$ , y el tiempo, b)  $\omega_2$ , y el tiempo; con los datos siguientes:  $m=0.2862 \text{ kg}$   $I=0.00007 \text{ kgm}^2$ ,  $\delta=0.0006$ ,  $\kappa=10$  y  $\epsilon=0.00927$

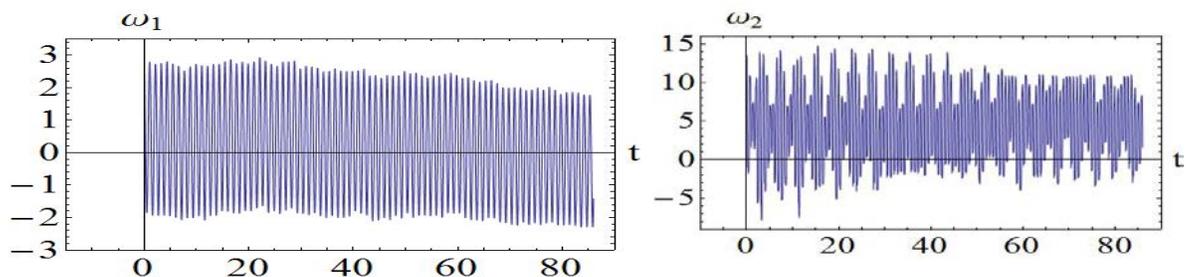


Figura 22. Relación entre la variable a)  $\omega_1$ , y el tiempo, b)  $\omega_2$ , y el tiempo; con los datos siguientes:  $m= 0.2862 \text{ kg}$   $I=0.00007 \text{ kgm}^2$ ,  $\delta= 0.0006$ ,  $\kappa = 10$  y  $\varepsilon= 0.00927$ , para un intervalo mas corto.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo, se muestra la implementación teórica, numérica y experimental del péndulo de Wilberforce, se muestran resultados numéricos para una gran variedad de sistemas trabajados dentro de la simulación que se desarrolla con el método Runge-Kutta de orden 4, las gráficas presentadas muestran la riqueza del sistema y la sensibilidad al cambio en las condiciones de acoplamiento, nuestro programa nos servirá para analizar la sensibilidad del sistema a otros parámetros como la constante de torsión, de elongación, y a las condiciones iniciales. El contraste con el experimento solo se hace de manera cualitativa, por los resultados experimentales mostrados, parece ser necesario mantener un mayor control experimental de los parámetros.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Sears, Zemansky, Young, Fredmman *Física Universitaria* Vol. I, 12a Ed Pearson, 2009,
2. Tipler, Mosca, *Física 1. Para La Ciencia y la Tecnología* Vol. 1
3. C.Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mecánica, Berkeley Physics Course Volumen 1*, segunda edición, ED Reverté
4. A. P. French, *Vibraciones y Ondas*, 2000, Editorial Reverté, pp139-150

# DIAGNÓSTICO DE HABILIDADES Y CONTENIDOS DE MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS DE NUEVO INGRESO EN EL INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE PÁTZCUARO

Alicia Campos Hernández<sup>1</sup>, Hermelinda Servín Campuzano<sup>2</sup>, Alicia Monserrat Campos Hernández<sup>3</sup> y Gabriel Arroyo Correa<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro. <sup>2</sup> Universidad Intercultural Indígena de Michoacán. <sup>3</sup> Universidad Contemporánea de las Américas. <sup>4</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH.

## RESUMEN:

Los altos índices de reprobación de los alumnos en materias que requieren de matemáticas en el Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro (ITSPA), impulsó a realizar un estudio de las causas o deficiencias en matemáticas que lo originan. Por lo que se realizó un diagnóstico de habilidades y contenidos de matemáticas, que los alumnos de nuevo ingreso deberían de conocer de acuerdo a su nivel académico, considerando temas del examen de selección de ingreso al Instituto. Los reactivos aplicados en este diagnóstico fueron seleccionados del trabajo realizado por Rivera Figueroa et al. (Rivera Figueroa et al., 2006). Se consideraron los grupos que cursaban las materias de Cálculo Diferencial, Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial para aplicarles el “test” que consistía de 50 reactivos; resaltando que el grupo de Cálculo Vectorial de semestre mayor se integró a este estudio para verificar si se habían corregido las deficiencias que presentan la mayoría de los grupos al ingresar.

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los alumnos. Los resultados mostraron que los reactivos relacionados con *el lenguaje algebraico* fueron los menos contestados, y que con respecto a los reactivos contestados, los problemas aplicados tuvieron la mínima calificación y fue reprobatoria. Sorpresivamente a lo que se pudiera esperar, se encontró que el grupo de semestre mayor obtuvo un desempeño deficiente. Una posible explicación es que los alumnos solo se preparan para aprobar la materia y no para adquirir un aprendizaje significativo.

## 1. INTRODUCCIÓN

El Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro (ITSPA) se encuentra ubicado en la localidad de Tzurumutaro municipio de Pátzcuaro, este lugar es el entronque de dos carreteras que conectan a muchas comunidades de la zona. Actualmente se presenta un problema de reprobación; la cantidad de alumnos que presentan bajas calificaciones en las materias relacionadas con las Matemáticas es preocupante y hace necesario un análisis de lo que está sucediendo.

El presente trabajo es el análisis de los resultados del examen de diagnóstico de habilidades y conocimientos de matemáticas, aplicadas a cuatro grupos de esta institución. Los reactivos son de nivel medio superior. Consideramos realizar un diagnóstico y no una Evaluación, ya que no se persigue asignar una calificación sino encontrar las deficiencias en temas, la falta de práctica de los alumnos o el desconocimiento total del tema. Existen muchos factores que pueden afectar el desempeño de los alumnos, como pueden ser factores familiares, sociales, etc. Para estudiar sus efectos existe cierto tipo de encuestas, pero nuestro estudio se basará exclusivamente en un modelo diagnóstico tradicional, en donde la evaluación y el diagnóstico se entienden como la

aplicación de “tests” e instrumentos estandarizados para la medida de ciertos rasgos (diagnóstico como testación).

Los grupos encuestados tenían las siguientes características: tomaban clase con el mismo profesor, y estaban en los primeros semestres de las carreras donde las materias relacionadas con matemáticas son comunes. Los semestres fueron:

- 2º semestre: Alumnos regulares de Cálculo Diferencial (CD).
- 2º semestre: Alumnos de repetición por primera vez de Álgebra Lineal (AL).
- 4º semestre: Alumnos de repetición por segunda vez de Álgebra Lineal (ALr).
- 4º semestre: Alumnos regulares de Calculo Vectorial (CV).

## 2. TEORÍA

El término Diagnóstico proviene de las palabras griegas *dia* (a través) y *gignosco* (conocer), su significado etimológico viene a expresar una forma de conocimiento obtenida a través de indicios. En medicina un diagnóstico es aquel que a partir de una serie de síntomas se deduce una anomalía o enfermedad. En la educación se enfoca en detectar “anomalías” en el proceso escolar y se aplica únicamente a los alumnos con problema o dificultad de aprendizaje.

“El *diagnóstico* se concentra en descubrir e interpretar signos, la *evaluación* lo hace en valorar, estimar, tasar que se traduce en los marcos académicos en términos de la calificación” (Pérez Juste, 1994). Siguiendo a Martínez González (Martínez González, 1994) el diagnóstico como la evaluación hacen referencia a la recogida sistemática de la información a través de técnicas que garanticen cierta objetividad y precisión de la misma. La interpretación y valoración de la información recogida con la finalidad de facilitar la toma de decisiones son actividades de ambos conceptos. El diagnóstico trata de describir, clasificar, predecir y en su caso explicar el comportamiento del sujeto dentro del marco escolar; con la función de ser preventivo, correctivo y de generar un mejor desarrollo. Varios autores (Álvarez Rojo, 1984; Buisán y Marín, 1987; Granados, 1997; Buisán y Marín, 1984; Martínez González, 1993; Pérez Juste, 1989) señalan estos fines y propósitos.

La consideración de variables que utilizamos dependerá del enfoque del diagnóstico. En este trabajo nos interesará ciertas variables referidas al sujeto y nos las que refieran sobre el entorno educativo y social en el que éste se ubica. Este trabajo se basa en la categoría de perspectiva tradicional y el modelo de atributo; donde es considerado el “test” la forma de hacer diagnóstico. Cada técnica aporta unas ventajas y limitaciones al proceso de diagnóstico, donde tenemos las siguientes tareas y momentos generales:

*a.- Planificación y delimitación inicial.* Definir el o los objetivos del diagnóstico, quien o quienes o que va hacer evaluado, áreas a explorar, técnicas y las personas implicadas en la evaluación.

*b.- Recogida de la información.* Existen diferentes técnicas para lograrlo (observación, entrevista, cuestionario, producción del sujeto, “tests” y pruebas, etc.) es conveniente combinar estrategias cualitativas y cuantitativas.

*c.- Interpretación y valoración de la información.* Analiza los resultados obtenidos dependiendo de las estrategias de recogida y los fines del diagnóstico por medio de síntesis, resumen y condensación de información recabada.

d.- *Toma de decisiones y propuesta de intervención.* El resumen del punto anterior, nos permite delimitar un conjunto de necesidades priorizadas sobre las que hay que intervenir, podemos decidir los objetivos sobre cuales trabajar, actividades, recursos, material didáctico entre otros.

e.- *Seguimiento/evaluación.* Iniciado el programa tiene que ser objeto de revisión continua, una evaluación de su desarrollo (proceso) y sus resultados (producto). Así podemos comprobar la eficiencia o la inadecuación de la propuesta de intervención e indirectamente del proceso de diagnóstico que la causa.

El informe diagnóstico es dar respuestas a las interrogantes que fueron planteadas, el cual puede ser oral o escrito.

### 3. PARTE EXPERIMENTAL

La ubicación geográfica del ITSPA permite que se tengan alumnos provenientes de diferentes subsistemas del nivel Medio Superior. Como se mencionó al final de la introducción se formaron 4 grupos de alumnos: CD, AL, ALr y CV.

A estos alumnos se les aplicó un “*test*” o examen diagnóstico, dividido en dos partes la primera consideró Habilidades Matemáticas con 19 reactivos y la segunda parte Contenidos de Matemáticas con 31 reactivos, haciendo un total de 50; se consideraron 60 minutos en cada parte para contestar y una parte por día.

El formato del “*test*” es con respuesta de opción múltiple (con óvalos a rellenar) en una hoja adicional al cuadernillo de problemas. Estos problemas fueron seleccionados del trabajo de investigación que realizaron la Dra. Lourdes Guerrero Magaña y el Dr. Armando Sepúlveda López (Rivera Figueroa et al., 2006), miembros del Cuerpo Académico: Enseñanza de las Matemáticas, quienes analizaron la guía de estudios para presentar el examen único de ingreso al bachillerato (EXANI-I) del año 2004. Dicha guía está a disposición del público en la página del internet del CENEVAL. El análisis que realizaron estos investigadores está descrito en la ref. 1.

El examen hizo énfasis en que si desconocían un tema o no lo recordaban, no trataran de adivinar porque afectaría los resultados; de esta forma se consideran los problemas no contestados como temas desconocidos. Cada grupo presentó el examen de forma independiente.

En la aplicación del examen de diagnóstico se hicieron las siguientes observaciones:

- i) Considerando el avance de los grupos de acuerdo a la materia que cursaban, se esperaba que el grupo de Cálculo Vectorial fuera el de mejor promedio por ser de cuarto semestre y regular; pero esto no fue el caso.
- ii) La parte de Habilidades Matemáticas fue contestada en su mayoría antes de la hora; los grupos que necesitaron todo el tiempo fueron CV y ALr.
- iii) En la parte de Contenidos Matemáticos los cuatro grupos necesitaron todo el tiempo y lo consideraron insuficiente; no terminaron todos los reactivos.
- iv) Los alumnos de CV y ALr tardaron más tiempo en pasar de un reactivo a otro y en muchas ocasiones regresaban a modificar su resultado, sobre todo en Contenidos Matemáticos.
- v) Los comentarios sobre el tipo de reactivos fue de agrado y aceptación, proponiendo que se pudiera hacer un examen de este tipo, esto es con reactivos con estos temas.

Los datos fueron concentrados en tablas de Excel de acuerdo a lo que contestó cada uno de los alumnos en cada reactivo, haciendo la notación con la letra seleccionada y de color. La clave que se siguió se muestra en la Fig. 1. Las letras A a la E corresponden a las diferentes opciones múltiples de los diferentes reactivos. Los colores utilizados son únicamente para resaltar la literal correspondiente.



*Figura 1. Clave utilizada para el análisis de los datos.*

El uso de la clave permitió una forma más rápida y práctica de analizar las respuestas. Por ejemplo los concentrados del grupo ALr se muestran en la Fig. 2. La tabla superior corresponde a Habilidad Matemática con 19 reactivos. La tabla inferior corresponde a Contenidos Matemáticos con 31 reactivos. En ambas tablas, el primer renglón indica el número de reactivo; el segundo renglón (R) es la clave de respuesta correcta de cada reactivo. Después de este renglón están las respuestas de los alumnos para cada reactivo. La primera columna indica el número de cada alumno del grupo. Si la columna es de color uniforme e igual al color solución entonces el grupo contestó correctamente y los que contestaron mal se destacan con otro color. Así en el caso específico de las tablas que aparecen en la Fig. 2, en el reactivo 1 de Habilidad Matemática (tabla superior) la respuesta correcta aparece con letra B en amarillo. En esta columna de los 16 estudiantes, se cuentan 10 que contestaron correctamente, 5 que contestaron incorrectamente y 1 que no contestó el reactivo (celda blanca en la tabla). De manera similar, en el reactivo 31 de Contenidos Matemáticos (tabla inferior) la respuesta correcta aparece con letra D en morado. En esa columna se pueden contar que ningún alumno contestó correctamente, 3 contestaron incorrectamente, y 13 no contestaron el reactivo. Tablas similares se obtuvieron para los otros grupos.

En cada una de las partes del examen se tienen reactivos específicos para identificar las habilidades o deficiencias del alumno, se clasificaron como de:

- a) Orientación espacial.
- b) Visualización (tablas).
- c) Traducción del lenguaje verbal a lenguaje matemático.
- d) Sucesiones.
- e) Razón y proporción (problemas geométricos).
- f) Operatoria (básicas).

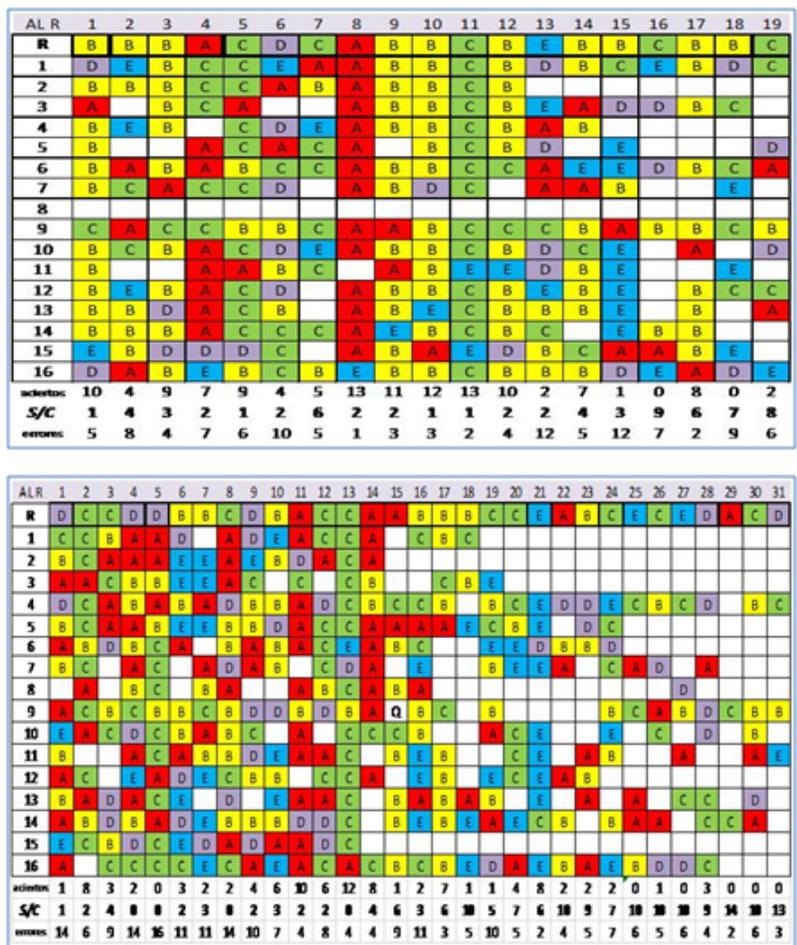


Figura 2. Concentrados de los resultados para el grupo ALr.

#### 4. RESULTADOS

El total de alumnos a los que se les aplico el examen diagnóstico fue de 53, consideramos las respuestas de todos los alumnos en cada uno de los reactivos, de esta forma conocimos cuantos alumnos contestaron de forma correcta el reactivo, y cuantos no contestaron. La presentación de esta información se hace por medio de graficas de barras considerando el resultado en forma porcentual, respecto al total de alumnos. Estas graficas se realizaron para las dos partes del examen, Figs. 3(a) y 3(b). De estas figuras, de forma inmediata se aprecia la deficiencia de los alumnos en ciertos temas, por ejemplo en Habilidad Matemática todos los grupos terminaron antes de tiempo pero en las graficas se aprecian los reactivos 15, 16, 18 y 19 con porcentajes bajos e indican que menos de 15 alumnos contestaron correctamente y los restantes lo hicieron incorrectamente. Regresando a los concentrados de las respuestas se observan las casillas sin color y se puede trabajar ahora haciendo el análisis de quienes contestaron mal estos reactivos y cuantos desconocían el tema o no lo recordaban. Debemos considerar que estos temas y los reactivos son del nivel del examen de admisión al nivel medio superior y lo tendrían que saber. Por ejemplo, para el grupo CD en la Fig. 4 se presentan los resultados. Se aprecia que solo algunos de los reactivos tienen casillas sin contestar; se pueden identificar los temas de mayor problemática para estos alumnos.

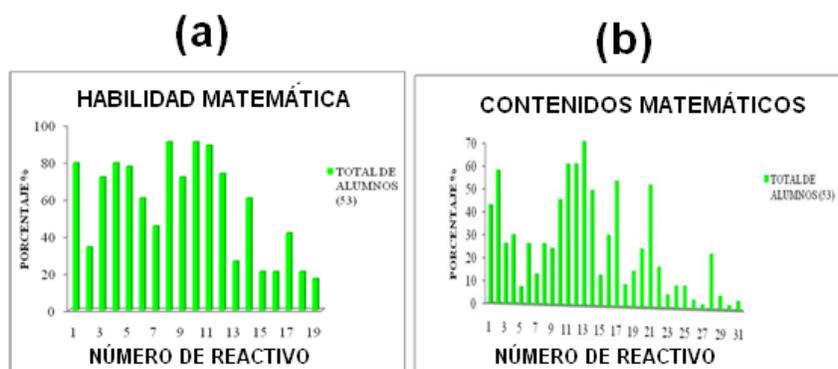


Figura 3. Gráfica porcentual de aciertos por reactivo, correspondientes de todos los alumnos para: (a) Habilidad Matemática, (b) Contenidos Matemáticos.

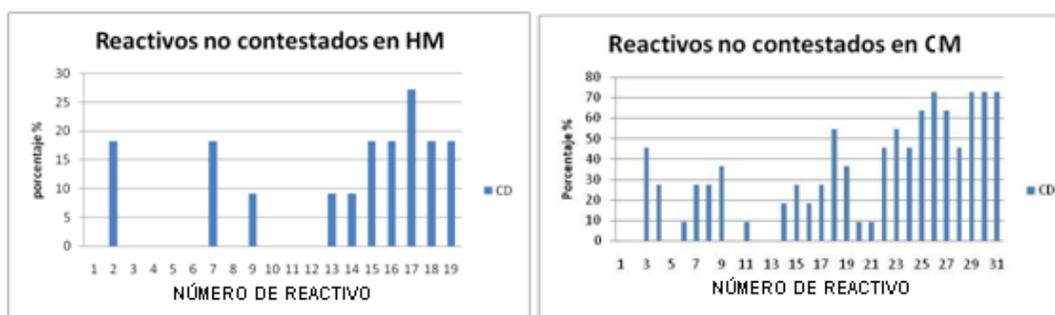


Figura 4. Se aprecia de forma exacta los reactivos donde los alumnos del grupo CD no contestaron; se pueden identificar los temas de conflicto.

El conjunto de datos mostrados en las Figs. 3 y 4, permite llegar a las siguientes observaciones. En la sección de Habilidades Matemáticas se detectó que el problema principal de los grupos CD y AL es el lenguaje matemático, pero para los grupos CV y ALr son los ejercicios de sucesiones. El segundo problema detectado en los cuatro grupos fueron los reactivos de razones y proporciones. En la sección de Contenidos Matemáticos los cuatro grupos presentan el mismo problema en la traducción de lenguaje verbal a lenguaje algebraico. Debemos enfatizar que esta sección tiene problemas aplicados y no pueden realizarlos por la deficiencia del lenguaje matemático. El grupo de ALr es quien tiene el mayor número de reactivos no contestados; es preocupante porque este grupo ya cursó cálculo diferencial e integral y no pueden pasar álgebra lineal. El grupo de CV (regular) presenta problemas en el manejo de operaciones básicas; sobresale que ningún alumno contestó el problema 18 de Contenidos Matemáticos. Este grupo también ya cursó álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, física y no recuerdan cómo resolver un ejercicio básico. Los grupos de CV y ALr que son de semestres mayores, su desempeño no fue el esperado; ya habrán olvidado tal vez los temas del Examen Diagnóstico y/o de formación básica, pero entonces uno se podría preguntar qué bases tienen en las materias que están cursando o de qué forma están

acreditándolas. Todos los grupos dejaron de contestar la sección de Contenidos Matemáticos a partir del reactivo 13, se desconoce la razón, pudiera ser por falta de tiempo, pero no lo podemos afirmar. Se tendría que plantear este examen con un nuevo orden a otros grupos y analizarlo. Este análisis muestra la diferencia entre los grupos y por lo tanto tenemos que considerar un correctivo o acción a realizar para ayudarlos de acuerdo a sus características y deficiencias.

El fin de este diagnóstico no es tener un valor para asignarla como calificación, pero considerando los porcentajes de los aciertos, se puede tener una calificación promedio por grupo en cada parte del examen. El promedio de cada grupo se aprecia en la tabla 1. De los resultados se puede notar que solo hay una calificación aprobatoria en la parte de Habilidades Matemáticas (HM) del grupo CD, respecto al grupo CV que se esperaba un desempeño con las mejores calificaciones, y no lo consiguió. Considerando las respuestas acertadas el grupo con mejor promedio con 44 fue CD, el segundo lugar AL con un promedio de 38, ambos de segundo semestre, mientras CV esta en el tercer lugar con promedio de 34 y el grupo de ALr tiene un promedio de 27, estos dos últimos de cuarto semestre.

**Tabla 1.** Calificación promedio correspondiente al desempeño de los grupos en la evaluación.

GRUPO	PROMEDIO HM	PROMEDIO CM
CD	73	27
AL	58	25
CV	58	19
ALr	42	18

## 5. CONCLUSIONES

El Examen Diagnóstico presentado en este trabajo nos permitió detectar las deficiencias de los cuatro grupos analizados. Basándonos en los temas considerados en el diagnóstico, podemos sugerir el diseño de otro instrumento diagnóstico más fino que permita identificar la causa raíz del problema de cada grupo. Trabajar en la planeación de las clases que incluyan problemas reales, de forma que el conocimiento sea significativo. Implementar de forma consciente los exámenes diagnósticos y aplicar las acciones pertinentes correctivas.

## BIBLIOGRAFÍA

1. A. Rivera Figueroa, M. L. Guerrero Magaña, A. Sepúlveda López, I. de Alaizola Arizmendi, "La pertinencia del examen único de ingreso al bachillerato", Perfiles educativos, Vol. 28, 111, 2006, pp. 187-206.
2. R. Pérez Juste, "¿Por qué diferenciar los términos evaluación y diagnóstico?", Revista de investigación Educativa, 23, 1994, pp. 588-591
3. V. Álvarez Rojo, "Diagnóstico pedagógico en orientación", Bases conceptuales y metodológicas. Madrid: Sanz y Torres, 1984.
4. C. Buisán y M. A. Marín, "Como realizar un diagnóstico pedagógico", Barcelona: Oikos-tau, 1987.
5. P. Granados, "Diagnostico pedagógico", Addenda. Madrid: UNED, 1997.

6. C. Buisán y M. A. Marín, "Bases Teóricas y prácticas para el diagnóstico pedagógico", Barcelona: PPU,1984
7. R. A. Martínez González, "Diagnóstico pedagógico", Oviedo: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo,1993.
8. R. Pérez Juste, Fundamentos, en R. Pérez Juste y J.L. García Ramos, "Diagnóstico, evaluación y toma de decisiones", Madrid: Rialp,1989, pp.17-70.

# ESTRUCTURAS DE BANDAS DE CRISTALES FONÓNICOS INMERSOS EN GUÍAS DE ONDAS EN 3D

Claudia Guillén Gallegos<sup>a</sup>, Alberto Mendoza Suárez<sup>a</sup>, Héctor Pérez Aguilar<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" de la UMSNH, Morelia, Mich.,

## RESUMEN:

Existen métodos numéricos para el cálculo de estructuras de bandas en cristales fonónicos en 2D y 3D; sin embargo, cuando se tienen sistemas híbridos tal como una guía de ondas que contiene a un cristal fonónico, no es claro qué métodos numéricos podemos aplicar para resolver este tipo de problemas. Presentamos un método integral del tipo del conocido "Boundary Element Method", que permite realizar cálculos de estructuras de bandas en ese tipo de sistemas en 3D; en particular en una guía de ondas rectangular que contiene en su interior un arreglo periódico de inclusiones esféricas. Se analizan los resultados encontrando condiciones para la obtención de gaps de frecuencias.

## 1. INTRODUCCIÓN

La propagación y el esparcimiento de ondas que interaccionan con objetos compuestos de materiales que tienen ciertas propiedades físicas engloban a una gran cantidad de fenómenos en electromagnetismo, óptica, acústica, etc.

Una propiedad general de todos los sistemas físicos, radica en el hecho de que poseen frecuencias de vibración bien definidas. En función de su forma y dimensión, al ser excitado por una onda sonora, provocan una vibración del cuerpo. Un modo normal de vibración de cualquier sistema vibratorio es una frecuencia con la cual el sistema puede oscilar durante algún tiempo después de interrumpida toda excitación. El cálculo de los modos normales de vibración de una estructura mecánica es de gran interés en aplicaciones de ingeniería. El conocimiento de las frecuencias de resonancia de una estructura permite, por ejemplo, evitar cargas con frecuencias que lleven a la resonancia de esta y su posible destrucción. La obtención de las formas modales da a los diseñadores de componentes mecánicos claves para reforzar o debilitar zonas del componente, con el fin de ajustar las frecuencias de resonancia de acuerdo a los requerimientos de este. Guías de onda de cristal fotónico, así como de cristales fonónicos y sónicos, han generado un creciente interés científico como medio para controlar la dispersión de ondas en aplicaciones tecnológicas diversas. Estos cristales están compuestos de distribuciones periódicas de dispersores inmersos en un medio de propagación. Bajo ciertas condiciones, se pueden formar bandas prohibidas acústicas completas.

Una técnica rigurosa para calcular la estructura de bandas de cristales fonónicos en 3D es un procedimiento del tipo conocido como "Boundary Element Method". El Método de la Ecuación Integral es un método numérico para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales que han sido formuladas como ecuaciones en forma integral sobre la frontera. Dicha metodología ha sido aplicada en estudios recientes para guías de onda de cristal fotónico en 2D, pero considerando como dispersores, inclusiones circulares de materiales zurdos [1], donde se conoce la función de

Green. Más aún, dicha formulación ha sido aplicable en el análisis del esparcimiento acústico en 3D, para sistemas que poseen superficies rugosas arbitrarias [2].

En el presente trabajo, se toma como referencia un sistema representado a través de una cavidad rectangular infinita, el cual contiene en su interior un arreglo periódico de inclusiones esféricas. Tomando la idealización de una celda base, se calculan los modos normales de vibración en las distintas cavidades cúbica y esférica que la conforman. Finalmente, se establece un comparativo entre los resultados obtenidos y los datos analíticos correspondientes.

## 2. TEORÍA

El análisis de estructuras que contienen inclusiones de un cristal fonónico, consiste en el estudio de guías de ondas bidimensionales y tridimensionales, (en este caso, con extremos, también llamadas cavidades) empleando para ello métodos integrales aplicables a sistemas con geometrías y propiedades físicas particulares.

Considérese la generalización del sistema representado por una guía de ondas bidimensional que contiene inclusiones de tipo cilíndricas, en analogía al caso de una cavidad rectangular en 3D que incluye un arreglo periódico de dispersores con forma esférica. Por simplicidad, supondremos que éstas se encuentran inmersas en un medio de propagación, elegido convenientemente para su estudio (ver Fig.1.).

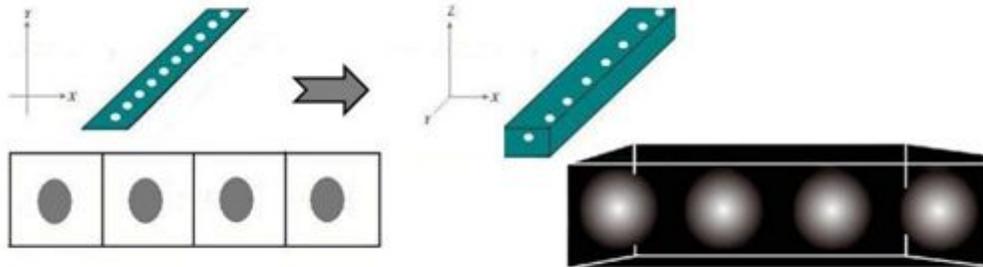


Figura 1. Descripción esquemática de las guías de onda bidimensional y tridimensional, respectivamente.

A continuación, presentamos una descripción breve del método numérico riguroso aplicable al caso de sistemas en 3D de dimensión finita, fundamentado en el Método de la Ecuación Integral.

Consideremos la ecuación de Navier-Stokes para la propagación de ondas acústicas

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + k^2 \mathbf{u} = -\mathbf{f}, \quad (1)$$

Donde  $u$  representa el vector de posición de un punto en el interior del medio continuo, el cual oscila a una frecuencia  $\omega$ ,  $k=(\omega/c)$  es la magnitud del vector de onda y  $c$  es la velocidad longitudinal de la onda en el medio acústico. La fuerza externa,  $f$  actúa como una fuente para la

perturbación. Por ende, para desarrollar el formalismo integral correspondiente, asumimos el caso  $f = 0$ .

De ahí que, tomando el rotacional de la Ec. (1)

$$k^2 \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla \times [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})] = 0. \quad (2)$$

Lo anterior implica que

$$\mathbf{u} = \nabla \psi. \quad (3)$$

Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes será satisfecha, si el potencial  $\psi$  cumple con la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (4)$$

Luego, al considerar una fuente puntual, situada en  $\mathbf{r}'$

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5)$$

una solución para esta ecuación, corresponde a la expresión

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad (6)$$

la cual se conoce como la función de Green para la ecuación de Helmholtz en 3D.

Entonces, mediante el uso de la segunda identidad de Green, mediante las Ecs. (4) y (5), nos permite obtener

$$\int_{S'} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS' = \psi(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}) - \psi^{inc}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

Donde  $\theta(r) = 1$  si  $\mathbf{r}'$  está dentro de la superficie  $S'$  y  $\theta(r) = 0$  en el caso contrario.

Además,  $\psi^{inc}(r)$  representa el campo incidente en el medio exterior, siendo  $r$  la posición del observador,  $r'$  el vector de integración que se extiende a lo largo de  $S'$  y  $n$  es la normal exterior a la superficie en  $r'$ . En esta ecuación, la función de Green y su derivada normal son conocidas y el potencial  $\psi(r')$  y su derivada normal  $\partial\psi(r')/\partial n'$  constituyen las funciones a ser determinadas a partir del sistema de ecuaciones integrales a resolver.

Empleando un criterio para la discretización de la superficie, se consideran elementos suficientemente pequeños para garantizar que el potencial  $\psi$  y su derivada normal  $\partial\psi(r')/\partial n'$  son constantes a lo largo de  $S_n$ , por lo que

$$\sum_{n=1}^N \Phi_n^{(1)} \int_{S_n} G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \sum_{n=1}^N \psi_n^{(1)} \int_{S_n} \frac{\partial G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \approx 0, \quad (8)$$

Donde se ha considerado

$$\psi_n^{(j)} = \psi^{(j)}(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}, \quad (9)$$

$$\Phi_n^{(j)} = \frac{\partial \psi^{(j)}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}, \quad (10)$$

Siendo  $r_n$  un vector sobre  $S_n$ .

Tomando en consideración la geometría propuesta para el desarrollo de este trabajo, debemos considerar la dispersión por una esfera acústica rígida cuando un campo escalar incidente excita el sistema.

En este caso, la Ec. (8) puede expresarse como

$$\sum_{n=1}^N L_{mn}^{(1)} \Phi_n^{(1)} - \sum_{n=1}^N N_{mn}^{(1)} \psi_n^{(1)} = 0. \quad (11)$$

Finalmente, la condición de frontera Dirichlet  $\psi(r')|_{r \in S'} = 0$  cancela el segundo término de la Ec. (11), lo cual permite establecer los elementos de matriz asociados a la resolución del sistema lineal homogéneo

$$\sum_{n=1}^N L_{mn}^{(1)} \Phi_n^{(1)} = 0. \quad (12)$$

Mediante el cálculo de los valores mínimos del determinante

$$\Delta(\bar{\omega}) = \ln \left( \left| \det \left( L_{mn}^{(1)} \right) \right| \right), \quad (13)$$

Donde  $\Delta(\bar{\omega})$  es una función de la frecuencia reducida,  $\bar{\omega}$ .

Por un razonamiento análogo, puede derivarse a través de la condición de frontera Neumann  $\Phi(r')|_{r \in S'} = 0$ , los valores mínimos del determinante en función de  $N_{mn}^{(1)}$  de manera independiente, para ambos sistemas de ecuaciones.

### 3. RESULTADOS

A manera de validar la metodología propuesta, se realizaron algunos estudios preliminares en superficies bidimensionales. Como ejemplo de dicho esquema particular, se han diseñado dos sistemas independientes (ver Fig. 2).

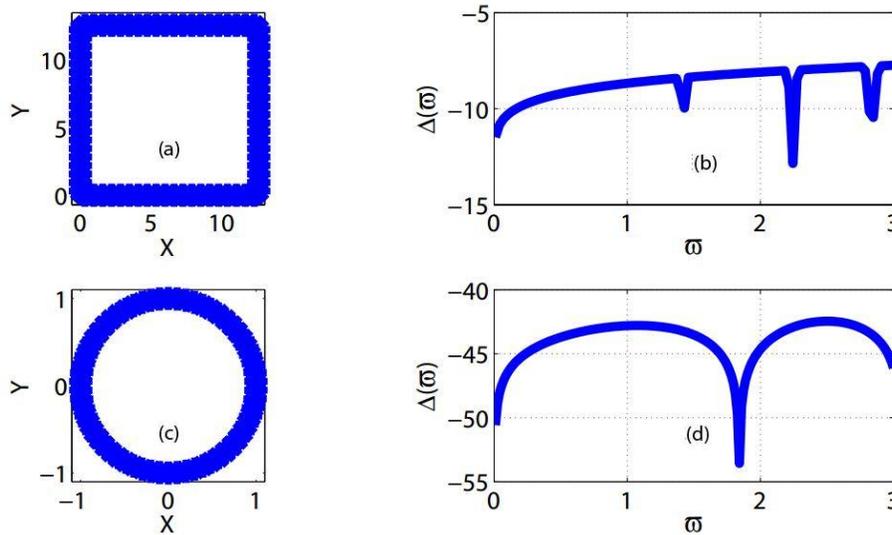


Fig. 2. (a) Perfil representativo para el caso de una cavidad cuadrada bidimensional, cuya dimensión es  $l = 4\pi$ . (b) Modos normales presentes en el rango  $[0,3]$ . Asimismo, (c) representa la geometría de cavidad circular unitaria en 2D y (d) el gráfico de las frecuencias de vibración mínima  $\bar{\omega} = 0.01$  y máxima  $\bar{\omega} = 3.0$  correspondientes.

En este punto pudimos validar la certeza de nuestros resultados, a través de los datos analíticos que reporta la literatura [3], en torno a uno de estos tipos de cavidades propuestas.

En la Tabla 1 se muestra un comparativo de las eigenfrecuencias obtenidas, para una cavidad cuadrada, determinadas analítica ( $\bar{\omega}_a$ ) y numéricamente ( $\bar{\omega}_{Lmn}$  y  $\bar{\omega}_{Nmn}$ ), expresadas en unidades reducidas de la frecuencia normalizada  $\bar{\omega}$ .

**Tabla 1.** Resultados analíticos ( $\bar{\omega}_a$ ) y numéricos ( $\bar{\omega}_{Lmn}$  y  $\bar{\omega}_{Nmn}$ ) para los modos normales en una cavidad cuadrada.

Cavidad cuadrada			
$\psi(r') _{r \in S'} = 0$			
$\omega_a$	1.414		2.214
$\omega_{Lmn}$	1.429		2.236
$\Phi(r') _{r \in S'} = 0$			
$\omega_a$	2.214		2.818
$\omega_{Nmn}$	2.236		2.828

En analogía a la geometría bidimensional propuesta en la Fig. 1, se diseñó también la celda correspondiente, determinándose a su vez, los modos normales de vibración asociados. Tales resultados, se muestran a continuación en la Fig. 3.

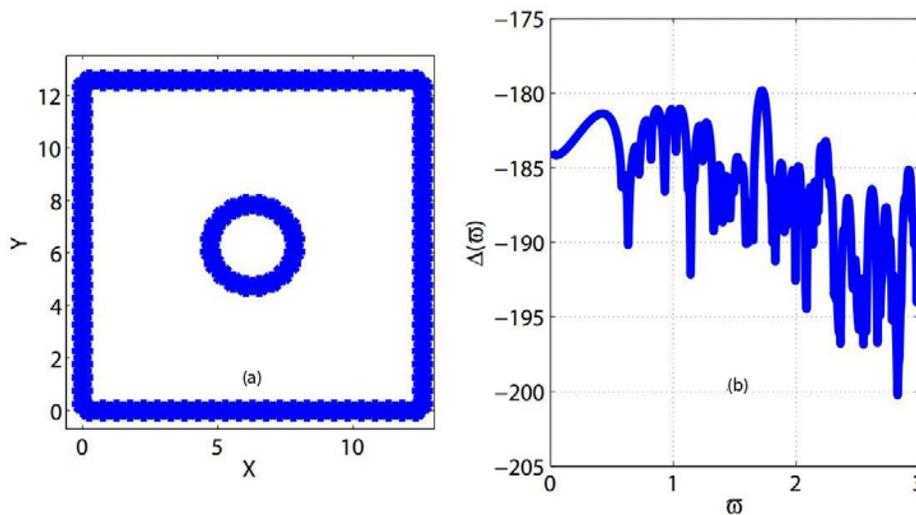


Fig. 3. (a) Perfil representativo para el caso en 2D de una cavidad cuadrada con inclusión circular, cuya dimensión es  $l = 4\pi$  y diámetro  $r = 1$ . (b) Modos normales asociados a esta geometría particular en el rango  $[0,3]$ .

En la búsqueda para establecer una generalización de los resultados previos, presentamos en la Fig. 4, el perfil representativo para el caso en 3D de la cavidad propuesta en la Fig. 1.

Las dimensiones de la celda cúbica corresponden a  $l = 4\pi$ . En su interior contiene un dispersor de forma esférica con radio unitario. Se consideró un muestreo de 5400 puntos para el mallado, con un espaciamiento de  $\Delta s = l/30$  y una densidad de 624 puntos para la inclusión.

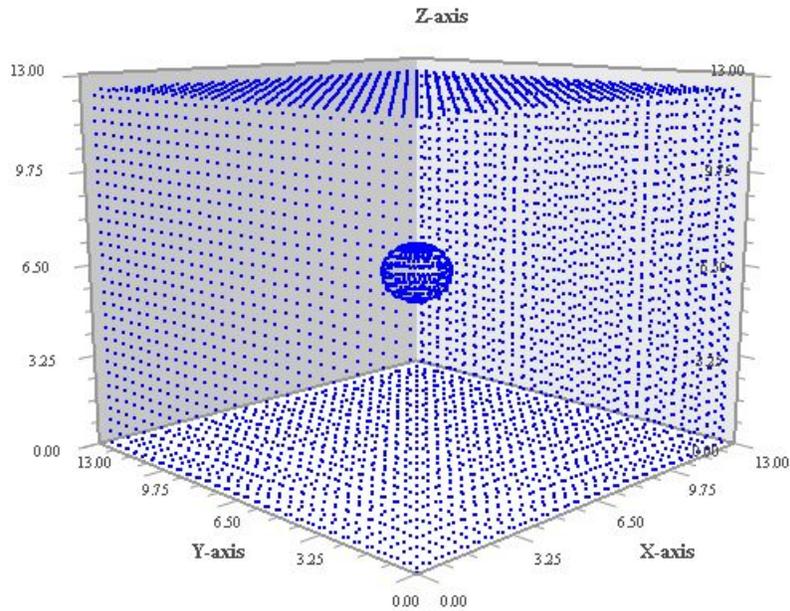
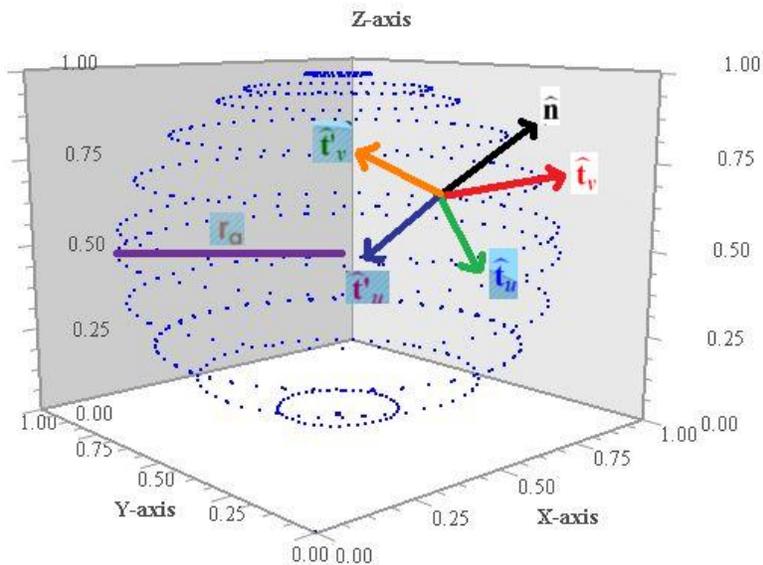


Figura 4. Representación gráfica de una celda cúbica con inclusión esférica unitaria. Las longitudes de cada uno de los lados del cubo equivalen a  $l_x = l_y = l_z = 4\pi$ .

En el análisis de una superficie esférica se hace necesario referir una base de vectores curvilíneos, parametrizando el perfil deseado en función de sus primeras derivadas, obteniéndose así factores que se asocian a cada punto de la discretización en el contorno.



En la Tabla 2 se muestra un comparativo de las eigenfrecuencias obtenidas, tanto para la cavidad cúbica como para la esférica, determinadas analítica ( $\omega_a$ ) y numéricamente ( $\omega_{Lmn}$  y  $\omega_{Nmn}$ ) expresadas en unidades reducidas de la frecuencia normalizada  $\omega$ .

**Tabla 2.** Modos normales de vibración para las cavidades propuestas en 3D.

Cavidad cúbica			
$\psi(r') _{r \in S'} = 0$			
$\omega_a$	1.225	1.500	1.871
$\omega_{Lmn}$	1.230	1.507	1.881
$\Phi(r') _{r \in S'} = 0$			
$\omega_a$	0.000	0.500	1.118
$\omega_{Nmn}$	0.027	0.505	1.123
Cavidad esférica			
$\psi(r') _{r \in S'} = 0$			
$\omega_a$	0.715	0.917	1.230
$\omega_{Lmn}$	0.719	0.921	1.234
$\Phi(r') _{r \in S'} = 0$			
$\omega_a$	0.331	0.532	0.945
$\omega_{Nmn}$	0.333	0.532	0.943

#### 4. CONCLUSIONES

Hemos aplicado un método numérico riguroso para calcular los modos normales de vibración de un cristal fonónico en 2D y 3D. La técnica numérica es el Método Integral del tipo BEM, el cual constituye una enorme ventaja al considerar sólo puntos limitados de muestreo para reducir eficientemente los tiempos computacionales empleados. Basándonos en los resultados preliminares, es posible tratar de establecer una similitud entre los resultados analíticos y numéricos, los cuales se hacen presentes en los casos de guías de onda bidimensional y cavidades en 3D, respectivamente. Como trabajo futuro, este método nos permitirá calcular las estructuras de bandas de cristales fonónicos inmersos en guías de ondas en 3D.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. H. Pérez-Aguilar, A. Mendoza-Suárez, "A plasmonic mode in a photonic crystal waveguide that involve a dispersive left handed material." Latin America Optics and Photonics Conference (LAOP). LM4A.43. (2014).
2. J. A. Guel-Tapia, F. Villa-Villa, A. Mendoza-Suárez, H. Pérez-Aguilar, "Acoustic scattering of 3D complex systems having random rough surfaces by scalar integral equations". (2016).
3. G. Arken, "Mathematical Methods for Physicists". Third Edition. Miami University Oxford, Ohio. Academic Press, Inc. (1985).

## FABRICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE HETEROESTRUCTURAS DE FIBRA ÓPTICA MONOMODO CON LUZ BLANCA.

Ruth I. Mata-Chávez<sup>1</sup>, E. Huerta-Mascotte<sup>1</sup>, Juan M. Sierra-Hernández<sup>2</sup>, Julián M. Estudillo-Ayala<sup>2</sup>, Arturo A. Castillo-Guzman<sup>3</sup>, Rocío A. Lizarraga-Morales<sup>1</sup>, Igor Guryev<sup>1</sup>, R. Rojas-Laguna<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Universidad de Guanajuato, División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Departamento de Estudios Multidisciplinarios. <sup>2</sup>Universidad de Guanajuato, División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca, Departamento de Electrónica. <sup>3</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

### RESUMEN

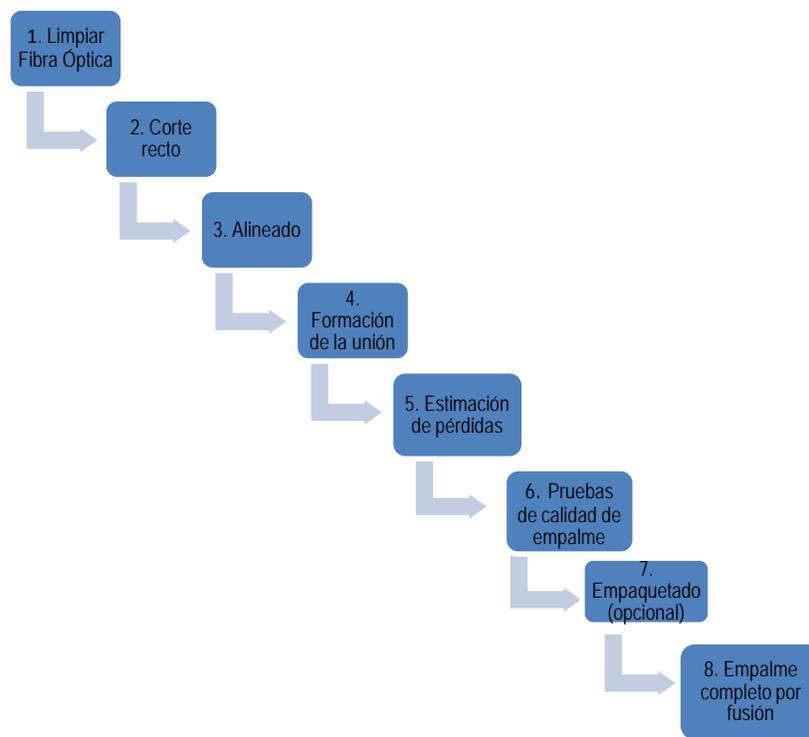
En este trabajo se presenta el trabajo preliminar realizado para fabricar un dispositivo de fibra de vidrio para aplicaciones de sensado en base a heteroestructuras. El dispositivo se fabricó en base a fibras monomodo estándar SMF-28 y la de dispersión desplazada cercana a cero (NZ-DSF) con diámetros de núcleo de 8.2  $\mu\text{m}$  y 4.5  $\mu\text{m}$  respectivamente. Las heteroestructuras SM-NZDS-SM se fabrican con una máquina de empalme comercial usando diferentes longitudes de fibra NZ-DSF y se caracterizan con un analizador de espectros ópticos y una fuente de luz blanca marca. El espectro resultante muestra diversos patrones de interferencia cuya visibilidad va a depender del tamaño de las fibras de DSF. Los mejores resultados se obtuvieron empalmando las diferentes fibras con un desplazamiento lateral de hasta 45 micras cuya caracterización a la curvatura mostró un corrimiento del espectro de hasta 100nm, lo que hace posible aplicar estos dispositivos como sensores usando luz blanca.

### 1. INTRODUCCIÓN

La fibra óptica ha revolucionado considerablemente desde su invención, gracias también al desarrollo de fuentes de luz, como la luz láser desde los años sesentas. En nuestros tiempos, las comunicaciones, la industria, la medicina, entre otras, incorporan dispositivos ópticos tanto en aparatos de medición, máquinas, redes, etc; para diversas aplicaciones lo cual depende de su tecnología. Esta tecnología se ve influenciada por el desarrollo continuo, que en nuestro caso, tiene que ver con los diferentes tipos de fibra óptica que siguen surgiendo en la actualidad, así como su costo y alcance en cuanto a las características de los sistemas y sus aplicaciones. El sensado óptico, es sin duda, una de las aplicaciones más importantes de la fibra óptica, y es por lo cual, diversos grupos de investigación en el mundo, siguen metidos en el tema. Para esto, se fabrican con diferentes fibras ópticas diversos dispositivos, algunos ya muy conocidos, como rejillas de periodo largo en base a microcurvaturas[1], rejillas de periodo largo engrosadas [2], interferómetros [3], etc; que se utilizan como la parte sensible de la fibra óptica a perturbaciones externas como temperatura, presión, curvaturas, torsión, índice de refracción, pH, etc. Algunas perturbaciones producen cambios en la forma de la fibra, el tamaño, producen conversión de modos. Diversas propuestas han demostrado que empalmando diferentes fibras, es viable para la fabricación de sensores [4]. En este trabajo el sensor propuesto mide simultáneamente la curvatura y la temperatura y su fabricación consiste en un desplazamiento lateral y un taper ultra-abrupto. Shuo Yuan, et. al; demostraron un sensor con micro desplazamientos basado en un interferómetro Mach-Zhender [5].

## 2. TEORÍA

Los dispositivos fabricados para este trabajo se basan en un empalme por fusión usando una máquina comercial de marca registrada. El empalme por fusión, de una fibra óptica, es el proceso de suavizado del vidrio, por el cual se forma una unión fuerte, permanente y preferentemente de bajas pérdidas. El objetivo principal de un empalme es crear la unión del vidrio sin pérdidas ópticas, que tenga alta resistencia y una aceptable fuerza mecánica. Para poder hacer el empalme de una fibra óptica, en la actualidad existen máquinas comerciales, que trabajan por medio de una fuente de calor como filamentos de tungsteno, electrodos metálicos para producir un arco eléctrico, lo cual funde el vidrio a temperaturas hasta por encima de los 1000°C. El proceso de empalme es simple y estandarizado para este tipo de máquinas, es decir, normalmente se hace el siguiente proceso, una vez que se seleccionan las fibras ópticas [6]:



*Figura 1. Diagrama de proceso de empalme por fusión de fibras ópticas.*

La experiencia nos muestra que el empalme de fibras ópticas, normalmente se hace, con fibras de las mismas características físicas y ópticas. Sin embargo, es posible que alguna aplicación requiera el empalme de diferentes tipos de fibras, básicamente con diferentes diámetros de núcleos o inclusive, diferentes perfiles de índice de refracción. En la actualidad, comercialmente ya existen máquinas de empalme que realizan este trabajo, sin problema alguno. El problema salta a la luz, cuando no se tiene el recurso para la compra del equipo. Sin embargo, es posible realizar este tipo de empalmes con máquinas simples con el resultado de que se producen pérdidas de luz debido a que se crea una región de transición longitudinal en la unión del empalme, la cual se considera variable. Contribuyen a las pérdidas el desajuste del campo modal y la transición del estrechamiento de la fibra óptica.

Resulta, de acuerdo a la aplicación, conveniente estimar la pérdida por empalme basándose en los diámetros del campo modal de las dos fibras unidas por fusión. Si el campo modal en la unión del empalme se aproxima a una función Gaussiana, la pérdida en la unión del empalme puede calcularse por la siguiente ecuación en donde se considera el efecto del desplazamiento radial de la fibra y el desalineado angular de la misma [7]

$$Pérdida(dB) = -10\log_{10} \left[ \frac{2w_1w_2}{w_1^2+w_2^2} \right]^2 + 4.343 \frac{2\delta^2}{w_1^2+w_2^2} + 4.343 \left( \frac{2\pi n}{\lambda} \right)^2 \frac{(w_1w_2)^2}{2(w_1^2+w_2^2)} \text{sen}^2\theta, (1)$$

En donde  $w_1$  y  $w_2$  son los radios de la mancha Gaussiana de las dos fibras,  $\delta$  es el desplazamiento radial de los núcleos de las fibras y  $\theta$  es el desalineado angular de las dos fibras. La ecuación (1) incluye las pérdidas del empalme del desajuste de campo modal (MF) (primer término), el desplazamiento radial del núcleo de la fibra (segundo término) y el desalineado angular de la fibra (tercer término). El desplazamiento radial se asocia con la excentricidad del núcleo de la fibra y el desalineado angular se atribuye al ángulo de corte de la fibra. Además, la exactitud del alineado de la fibra de la empalmadora podría contribuir al offset radial y error por desalineado. Estos últimos defectos o desajustes modales podrían contribuir a que en la transmisión se observen además de pérdidas, el filtrado de ciertas longitudes de onda o interferencia, lo que dependería de qué tipos de fibra se empalmen y cómo quede la estructura final del empalme entre fibras de diferentes tipos que es lo que se pretende estudiar en este trabajo.

### 3. ESQUEMA EXPERIMENTAL Y DESARROLLO.

Para realizar este trabajo, se utilizó el esquema experimental de la figura 2.

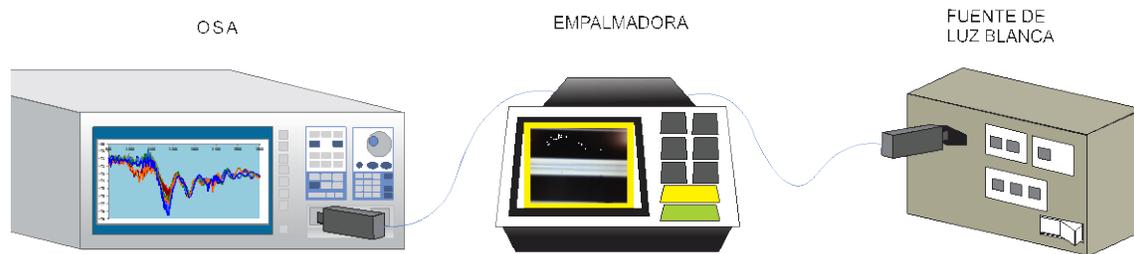


Figura 2. Esquema experimental

Este consta de un analizador de espectros ópticos YOCOGAWA modelo AQ6370C, una máquina de empalme FITEL S175 y una fuente de luz blanca marca ANDO. El proceso de fabricación comienza seleccionando distintas fibras ópticas con diámetros de núcleo diferente y/o diferente perfil de índice. Se inició con la fabricación de una estructura SMF-DSF-SMF en donde la fibra del centro tiene un núcleo de diámetro  $\sim 5.8\mu\text{m}$ , el cual es más pequeño que la fibra que se empalmó en los extremos  $\sim 5.8\mu\text{m}$

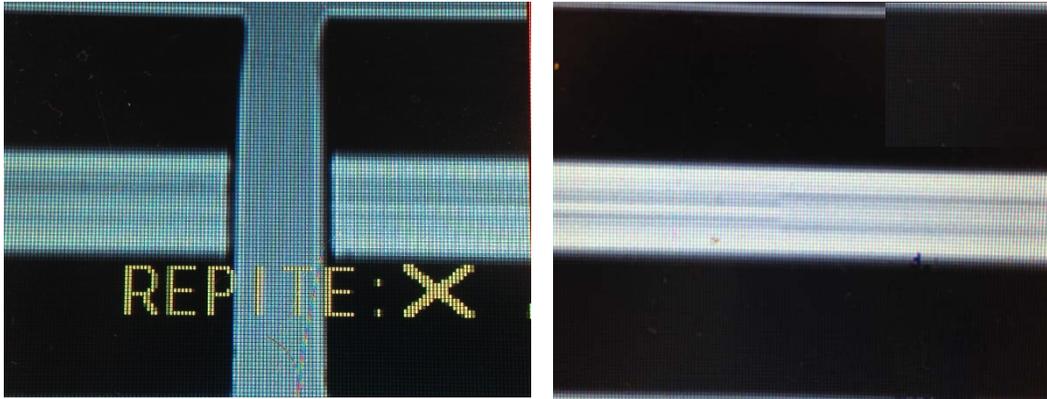


Figura 3. Empalme alineado de dos fibras ópticas de  $\sim 5.8\mu\text{m}$  y  $\sim 5.8\mu\text{m}$  de diámetro de núcleo.

Básicamente se buscaba que parte de la luz viajara por el recubrimiento, generando de esta manera, pérdidas en el espectro observado. Al no ver los resultados buscados se propuso variar la longitud del tramo de fibra óptica en el centro de la estructura. Se probaron longitudes de 0.5, 4.5 y 6 cm con los cuales tampoco se encontró cambio alguno en el espectro de salida.

El siguiente paso fue invertir la posición de las fibras ópticas y durante el proceso, al observar cambios, se agregaron más estructuras SMF-DSF con diferentes longitudes hasta observar que el cambio espectral se mantenía. La heteroestructura más grande fue la siguiente:

DSF (46cm) - SMF (1cm) - DSF (20cm) - SMF (1cm) - DSF (46cm). Buscando un acoplamiento más fuerte se fabricaron estructuras desplazando lateralmente, el centro de una de las fibras ópticas, con respecto a su fibra vecina distancias de  $15\mu\text{m}$ ,  $30\mu\text{m}$  y  $45\mu\text{m}$ .



Figura 4. Empalme desalineado hasta 45 micras de dos fibras ópticas diferentes.

#### 4. RESULTADOS

El comportamiento del espectro que resultó de la fabricación de las estructuras DSF-SMF-DSF-SMF-DSF con desplazamiento lateral de hasta 45 micras se observa en la figura 5. En este caso, la fibra se coloca lo más recta posible y se realiza el barrido con el analizador de espectros con una resolución de 2nm a una sensibilidad de HIGH2.

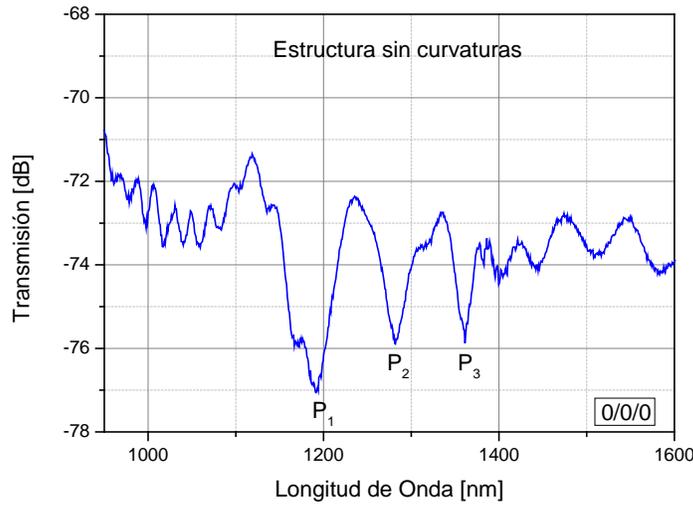


Figura 5. Interferencia de luz blanca observada con una heteroestructura SMF-DSF con desplazamiento lateral.

Al aplicar curvatura sobre la estructura se observa un corrimiento de las franjas principales de casi 100nm y el desacoplo modal en el proceso del tercer pico alrededor de 1360nm. La atenuación que se observa se deriva básicamente de los cortes de la fibra en los extremos, lo cual tiene que cuidarse en trabajos futuros además de que la curvatura también introduce pérdidas.

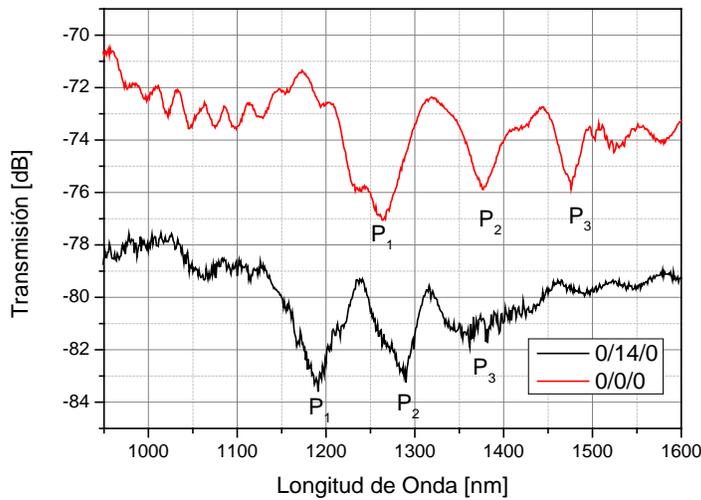


Figura 6. Espectro de la estructura recta ( roja) y con 14 cm de curvatura central (negra).

## 5. CONCLUSIONES

El trabajo preliminar demostró que se puede obtener interferencia con una fuente de luz blanca, utilizando empalmes con diferentes tipos de fibra óptica, en este caso, SMF28 y NZ-DSF. La heteroestructura funciona como un interferómetro Mach-Zehnder en una amplia región de longitud de onda, que va de los 900-1600nm. La interferencia se logra, en este caso, aplicando un desplazamiento lateral de hasta 45 micras. La estructura resulta más económica por el costo de las fibras ópticas, además de que son solamente del tipo monomodal.

## BIBLIOGRAFÍA

1. In Kan Hwang, S Hyun and B. Y. Kim. "Long-period gratings based on periodic microbends" *opt. Lett.* Vol. 24, 32, 1999, pp. 1263-1265.
2. R.I. Mata-Chavez, A. Martinez-Rios, J.M. Estudillo-Ayala, E. Vargas-Rodriguez, R. Rojas-Laguna, J.C. Hernandez-Garcia, A.D. Guzman-Chavez, D. Claudio-Gonzalez, E. Huerta-Mascotte. "High temperature optical fiber sensor based on compact fattened long-period gratings". *Sensors*. 2013, pp. 3028-3028
3. B.H. Lee, Y.H. Kim, K.S. Park, J.B. Eom, M.J. Kim, B.S. Rho, H. Y. Choi, "Interferometric Fiber Optic Sensors", *Sensors*, Vol. 12, 3, 2012, pp. 2467-2486.
4. Joel Villatoro y David Monzon-Hernandez. "Low-Cost optical Fiber Refractive-Index sensor Based on Core Diameter Mismatch". *Journal of Lightwave technology*. Vol. 24, 3, pp. 1409-1413, 2006.
5. L. Mao, P. Lu, Z. Lao, D. Liu, "Simultaneous Measurement of Curvature and Temperature based on Mach-Zehnder Interferometer with Lateral Offset and Ultra abrupt Taper, Conference on Lasers and Electro-optics Pacific Rim, OSA Publishing, pp. ThF2\_4, 2013.
6. Andrew D. Yablon. "Optical Fiber Splicing". Ed. Springer, 2004, chapter 1, pp 2-10.
7. B.S. Wang., E. W. Mies. "Advanced Topics on Fusion Splicing of Specialty Fibers and Devices". SPIE APOC '07. Passive Components and Fiber-based Devices (Proc. 6871), 2007, pp. 1-14.

# MODELO DE UN SENSOR DE ÍNDICE DE REFRACCIÓN BASADO EN UN INTERFERÓMETRO FABRY-PEROT INTRÍNSECO

Ana Dinora Guzmán Chávez<sup>1</sup>, Everardo Vargas Rodríguez<sup>2</sup>, Martín Cano Contreras<sup>2</sup>, Ruth Ivonne Mata Chávez<sup>2</sup> y Carlos Rodríguez Doñate<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Estudios Multidisciplinarios, División de Ingenierías, Universidad de Guanajuato, Av. Universidad s/n, Col. Yacatitas, Yuriria, Gto., C.P. 38940, México <sup>2</sup>Universidad Tecnológica del Suroeste de Guanajuato, Carr. Valle-Huanímaro Km. 1.2, Valle de Santiago, Gto., C.P. 38940, México

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis de un arreglo sensor de índice de refracción basado en un micro interferómetro Fabry-Perot intrínseco. El patrón de interferencia del IFP es sensible a cambios del índice de refracción del medio externo. Debido a los cambios en el índice de refracción, el contraste y la finesa del patrón de interferencia son afectados. Dichos cambios son modelados con el método de la matriz característica. Los resultados simulados son sustentados con los resultados obtenidos experimentalmente. Finalmente se muestra que un simple sensor de índice de refracción con una resolución del orden de  $2.15 \times 10^{-4}$  RIU puede ser implementado usando un par de fotodetectores estándar y de bajo costo.

## 1. INTRODUCCIÓN

En años recientes los sensores de índice de refracción (IR) de fibra óptica han ganado atención desde que estos tienen características interesantes las cuales les permiten ser usados en un amplio rango de aplicaciones como sensores químicos y biológicos [1]. Sin embargo, los sensores de IR pueden ser implementados de diferentes maneras, como por ejemplo usando rejillas [2], interferómetros [3], resonadores [4] y fibras adelgazadas [5]. De éstos, los interferómetros Fabry-Perot (IFP) son una opción muy popular desde que pueden ser fabricados de diferentes maneras [6,7]. Una de éstas, es formando un IFP en la punta de la fibra, fabricando una micro burbuja. La cavidad se forma empalmado un segmento de fibra de cristal fotónico (FCF) de núcleo hueco a un segmento de fibra monomodo. La burbuja de aire es atrapada dentro de la FCF formando la micro cavidad de aire, IFP, y el material de la misma que se funde cuando se le aplican descargas eléctricas formará el espejo de salida. Este tipo de IFP's en la punta de las fibras pueden ser usados como sensores de índice de refracción debido a que dentro del espejo de salida del IFP ocurrirán múltiples reflexiones internas. Estas reflexiones generan un espectro bien definido, del cual el contraste de las franjas depende del índice de refracción del medio que rodea la punta sensora. Usualmente los modelos analíticos de este tipo de sensores se han basado en calcular los coeficientes de reflexión de las tres superficies reflectoras [8]. En este trabajo se presenta un análisis basado en el método de la matriz característica para modelar un sensor de índice de refracción basado en una micro cavidad Fabry-Perot en la punta de una fibra óptica monomodo. Este modelo matemático nos permite caracterizar un sensor de índice de refracción.

## 2. ARREGLO DEL SENSOR DE ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Se implementó el arreglo que se muestra en la figura 1a con la finalidad de caracterizar la respuesta espectral del IFP en función del índice de refracción del medio externo. La luz de un

diodo láser que emite a 980 nm, que entrega una potencia máxima de 200 mW, fue acoplado a un multiplexor por división de longitud de onda para bombear una fibra dopada con erbio de 3.4 m de longitud. La luminiscencia de ésta viaja a través del circulador del puerto 1 al 2. Finalmente, el espectro de interferencia reflejado del IFP fue monitoreado en el puerto 3 del circulador utilizando un analizador de espectros ópticos con una resolución de 0.02 nm. Para medir el IR, el IFP se puso dentro de un frasco que contenía los índices de refracción calibrados. El sensor fue fabricado empalmando un segmento de FCF a una fibra monomodo. En este proceso, después de que las fibras se empalmaron se aplicaron múltiples descargas eléctricas para cortar la FCF. Después de este paso, se obtuvo una micro cavidad aire, IFP, en la punta de la fibra monomodo, ver figura 1b.

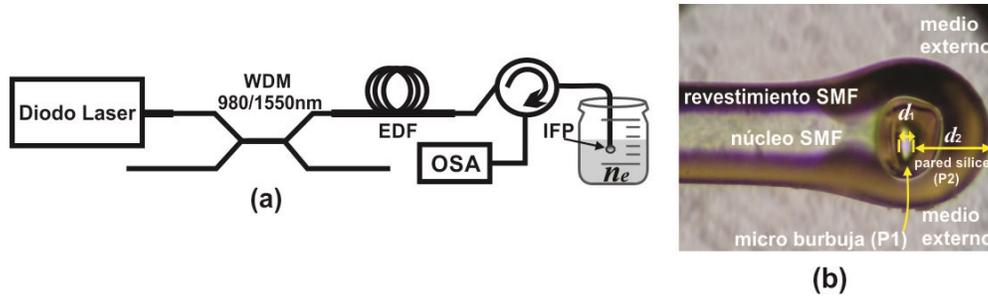


Fig.1 (a) Arreglo experimental para caracterizar la respuesta del micro IFP en función del índice de refracción del medio externo; (b) Fotografía del IFP fabricado.

### 3. PRINCIPIO DE OPERACIÓN DEL IFP

La cabeza sensor es básicamente un simple IFP con la estructura mostrada en la figura 2. Los espejos del IFP están formados por el núcleo de la fibra monomodo y la delgada pared de silicio en la punta de la fibra, las cuales están separadas por una micro cavidad de aire. Para determinar el espectro de reflectividad de la estructura del IFP, la consideramos como una pila de dos placas planas y paralelas. La primera placa (P1) es la micro cavidad de aire con longitud  $d_1$ , mientras que la segunda placa (P2) es la delgada pared de silicio en la punta del IFP con grosor  $d_2$ . Finalmente el medio incidente de la pila de placas es el núcleo de la fibra monomodo, con un índice de refracción  $n_0$ , y el medio externo, el cual rodea la punta del IFP, tiene un índice de refracción  $n_e$ . Para ésta estructura, como ambas placas tienen baja reflectividad, por lo tanto solo 2 principales espectros de interferencia ocurrirán. El primero se generará dentro de la micro cavidad de aire (P1) mientras que el segundo ocurrirá dentro de P2.

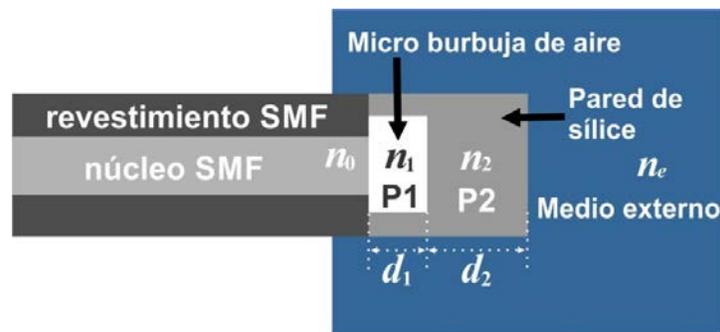


Fig. 2. Estructura del IFP

La matriz característica de todo el medio puede ser expresada como:

$$\mathbf{M} = \prod_{j=1}^N \mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} a & ib \\ ic & d \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Donde  $\mathbf{M}_j$  es la matriz característica de la  $j$ -ésima placa, la cual es para haces no polarizados y está dada por:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi n_j d_j \cos\theta_j}{\lambda}\right) & -\frac{i}{n_j} \sin\left(\frac{2\pi n_j d_j \cos\theta_j}{\lambda}\right) \\ -in_j \sin\left(\frac{2\pi n_j d_j \cos\theta_j}{\lambda}\right) & \cos\left(\frac{2\pi n_j d_j \cos\theta_j}{\lambda}\right) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Donde  $n_j$ ,  $d_j$ ,  $\theta_j$  son los índices de refracción y el ángulo incidente de la  $j$ -ésima placa respectivamente y  $\lambda$  es la longitud de onda. La reflectancia de éste ensamble de placas puede ser obtenida usando la siguiente definición:

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ib \\ ic & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n_e \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Así, el coeficiente de reflexión es:

$$r = \frac{n_0 B - C}{n_0 B + C}, \quad (4)$$

Y finalmente la reflectividad de todo el ensamble está dado por:

$$R_{FP}(\lambda, n_e) = \left( \frac{n_0 B - C}{n_0 B + C} \right) \left( \frac{n_0 B - C}{n_0 B + C} \right)^*. \quad (5)$$

Además en nuestro sistema el índice de refracción  $n_0 = 1.44$ , P1 tiene un  $n_1 = 1$  and P2 tiene un  $n_2 = 1.44$ . Finalmente el medio externo  $n_e$  dependerá del material que rodea a la estructura del micro IFP (ver figura 2). Los espectros de reflectividad simulados para diferentes  $n_e$  se muestran en la figura 3a. Para estas simulaciones consideramos  $d_1 = 12.7 \mu\text{m}$  y  $d_2 = 110.9 \mu\text{m}$ . Como se puede apreciar solamente cambia el contraste y la finesa de las franjas, que ocurre debido a múltiples reflexiones internas dentro de P2 (ver figura 4b).

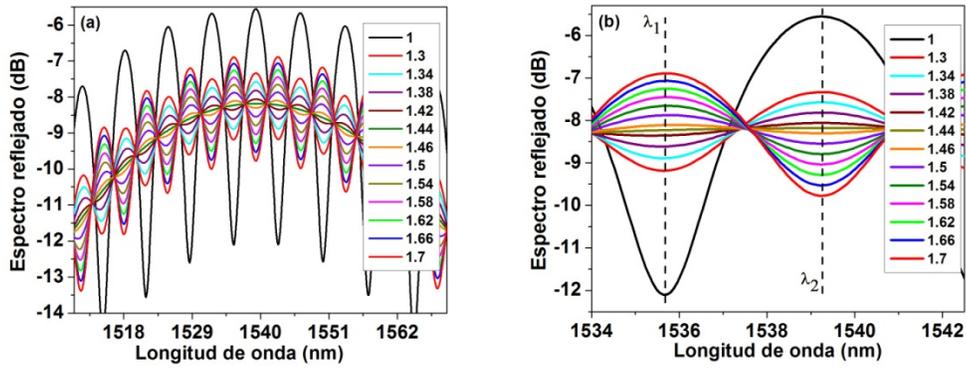


Fig. 3. (a) Espectros de reflectividad del IFP simulados considerando un medio de salida con diferentes índices de refracción; (b) Detalle de los espectros de reflectividad del IFP.

En la figura 4a se muestran los perfiles espectrales medidos del IFP para diferentes medios externos  $n_e$ . En la figura 4b se presenta en detalle los perfiles espectrales medidos.

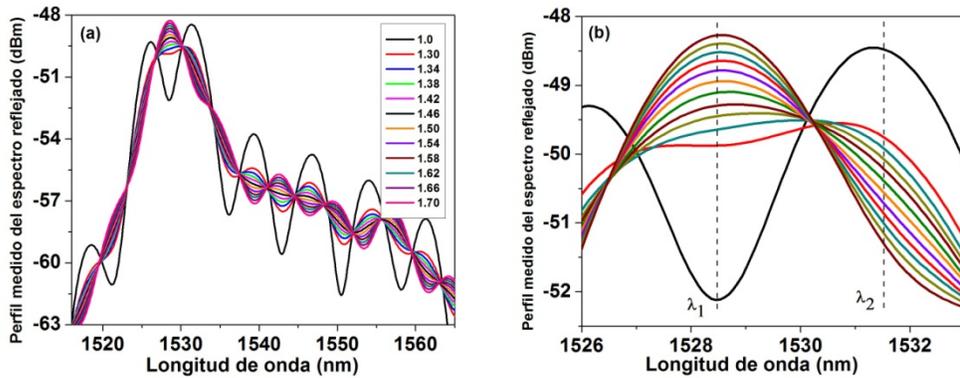


Fig. 4. (a) Medición de la potencia de los espectros reflejados para diferentes valores de índice de refracción del medio externo; (b) detalle de los espectros, mostrando solamente una franja espectral del IFP.

El contraste de las franjas del IFP, depende del índice de refracción del medio externo y está definido como:

$$C_S(n_e) = \frac{T_{max}(n_e)}{T_{min}(n_e)}, \quad (6)$$

Donde  $T_{max}(n_e)$  and  $T_{min}(n_e)$  son los máximos y mínimos de la franja de transmisión en unidades lineales. Aquí, como nuestro IFP tiene una baja reflectividad, el contraste puede calcularse de la siguiente manera:

$$C_S(n_e) = \frac{T_{max}(n_e)}{T_{min}(n_e)} = \frac{[1 + R_t(n_e)]^2}{[1 - R_t(n_e)]^2} \quad (7)$$

$$R_t(n_e) = \sqrt{R_{t1}R_{t2}(n_e)} = \left[ \left( \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2 \left( \frac{n_1 - n_e}{n_1 + n_e} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8)$$

Donde  $R_{t1}$  y  $R_{t2}$  son la reflectividad para la primera interface formada entre P1 y P2 y la reflectividad para la segunda interface formada entre P2 y el medio externo respectivamente.

En la figura 5 (línea sólida) se muestra el contraste simulado de las franjas para diferentes valores de índice de refracción (RIU) de  $n_e$ .

De los cálculos de contraste  $C_S(n_e)$  es posible observar que el mismo valor de contraste se puede obtener para dos diferentes valores de  $n_e$ . Sin embargo, para una longitud de onda dada, la reflectividad será diferente para cada valor de  $n_e$  (ver figura 4b). Esto es porque el patrón de franjas presentará un cambio de fase dependiendo del valor de  $n_e$ .

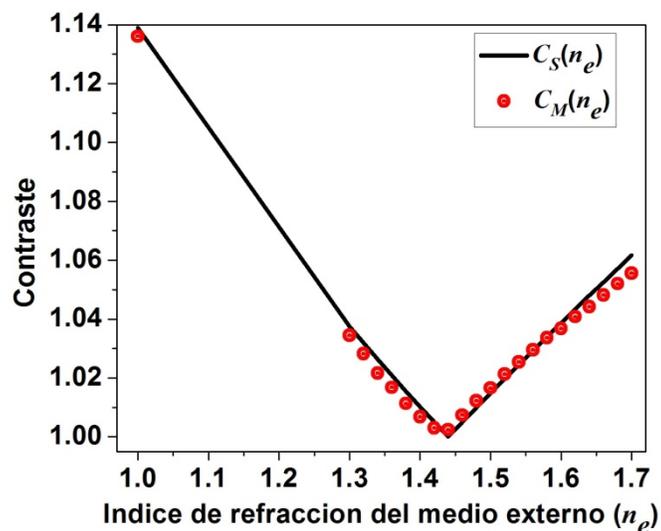


Fig. 5. Contraste simulado (líneas sólidas) y medido (puntos sólidos) de las franjas del IFP en función del índice de refracción del medio de salida.

El contraste calculado usando los datos medidos experimentalmente  $C_M(n_e)$  se presentan en la figura 5 (puntos sólidos). Se puede observar que el contraste calculado con los datos experimentales es muy similar al simulado, lo que es muy conveniente desde que puede ser determinado usando una simple fórmula.

## 5. ANÁLISIS DEL SENSOR NO DISPERSIVO DE ÍNDICE DE REFRACCIÓN.

En nuestro caso proponemos un sensor de índice de refracción basado en el principio de sensado no dispersivo. Como se muestra en la figura 6, solamente una fuente laser fue usada la cual fue dividida en dos caminos por el acoplador de fibra 50/50. Uno de estos caminos será el canal de referencia y el segundo el canal de medición. El detector que va en el canal de medición observará cambios dependiendo del índice de refracción del medio de salida  $n_e$  mientras que el detector que va en el canal de referencia observará idealmente una señal constante. Estas señales monitoreadas pueden ser correlacionadas para obtener la profundidad de modulación, la cual puede ser útil para reducir errores debido a variaciones en la fuente laser.

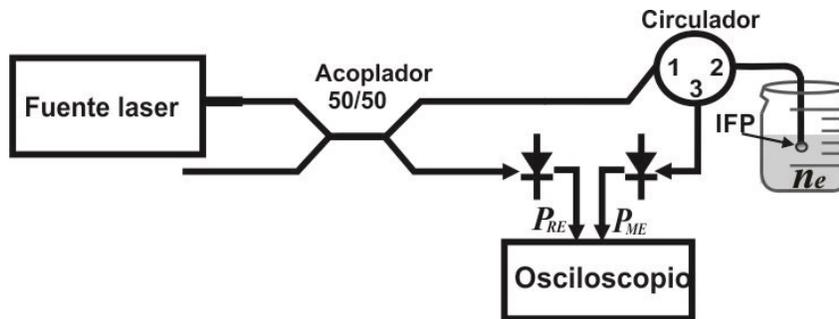


Fig. 6. Arreglo experimental de sensor de índice de refracción

Las lecturas de voltaje medidas experimentalmente para cada canal a diferentes índices de refracción se muestran en la figura 7. De éstas mediciones es posible determinar que el sensor tiene una sensibilidad de 3.25 V/RIU. Sin embargo, considerando que la mayor fuente de ruido es debido a la corriente oscura, por lo que para tener una razón de señal a ruido de 1, la diferencia de voltaje mínimo que puede ser monitoreada en el canal de medición será de orden de  $2.15 \times 10^{-4}$  V en  $1.3 \leq n_e \leq 1.7$ . En consecuencia, la resolución del sensor será del orden de  $2.15 \times 10^{-4}$  RIU.

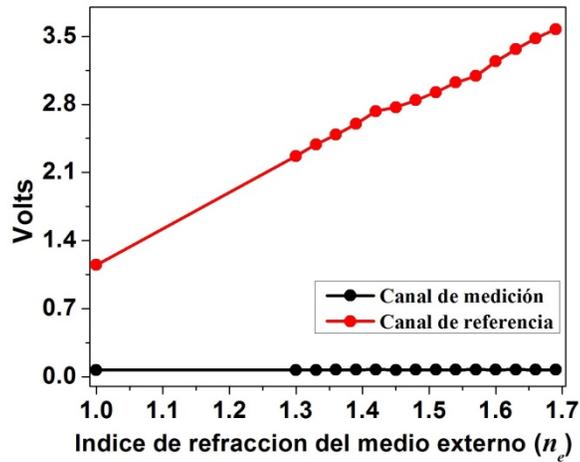


Fig. 7. Mediciones experimentales de las salidas de los detectores en

Función del índice de refracción del medio externo

En lugar de medir la respuesta del sensor directamente de la medición del detector, preferimos calcular la profundidad de modulación ( $DM$ ), la cual está definida como la diferencia entre las señales detectadas de los canales, dividida por el promedio de ambas señales [9]. En la figura 8 se muestra la profundidad de modulación calculada de las mediciones simuladas y experimentales.

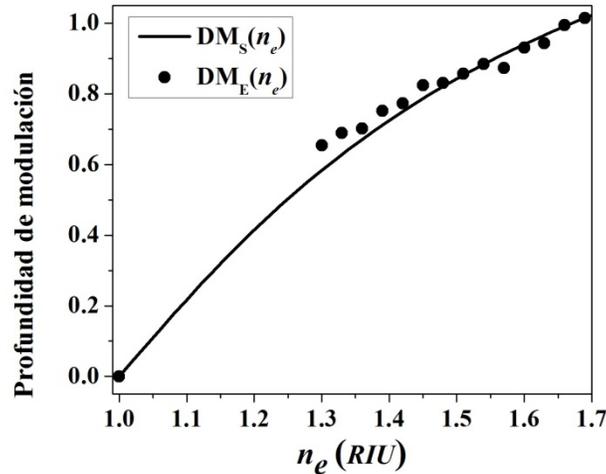


Fig. 8. Profundidad de modulación calculada de señales simuladas y medidas.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un análisis comprensivo de un sensor de índice de refracción basado en un IFP intrínseco. Aquí la caracterización del IFP se hizo considerándolo como una pila de placas y por tanto su respuesta espectral fue modelada utilizando el método de la matriz característica. Se mostró que en este IFP, múltiples reflexiones internas ocurren dentro de la última placa (P2). Este efecto permite la generación de un patrón de franjas del IFP, el cual es sensible a los cambios en el índice de refracción del medio externo. Por lo que para calcular el contraste de las franjas del espectro generado en la placa de salida (P2) se consideró como un solo IFP. Usando el modelo propuesto, el contraste y el espectro de reflexión puede ser fácilmente calculado. El sensor está basado en el principio no dispersivo. Aquí usando detectores estándar y de bajo costo se alcanza una resolución del orden de  $2.15 \times 10^{-4}$  RIU. Los resultados simulados concuerdan muy bien con los resultados obtenidos experimentalmente.

## BIBLIOGRAFÍA

1. P.A.S. Jorge, S.O. Silva, C. Gouveia, P. Tafulo, L. Coelho, P. Caldas, et al. "Fiber optic-based refractive index sensing". inesc porto. *Sensors* 2012, 12, 8371-8389.
2. W. Liang, Y. Huang, Y. Xu, R.K. Lee, A. Yariv. "Highly sensitive fiber bragg grating refractive index sensors", *Applied Physics Letters* 2005, 86, 151122.
3. E.M. Dianov, S.A. Vasiliev, A.S. Kurkov, O.I. Medvedkov, V.N. Protopopov. "In-fiber mach-zehnder interferometer based on a pair of long-period gratings", *Optical Communication, 1996. ECOC '96. 22nd European Conference on*. 1996;1:65-68 vol.61
4. L. Shi, Y. Xu, W. Tan, X. Chen. "Simulation of optical microfiber loop resonators for ambient refractive index sensing", *Sensors* 2007, 7, 689-696.
5. A. Kumar, T.V.B. Subrahmanyam, A.D. Sharma, K. Thyagarajan, B.P. Pal, I.C. Goyal. "Novel refractometer using a tapered optical fibre", *Electronics Letters* 1984, 20, 534-535.
6. Z.L. Ran, Y.J. Rao, W.J. Liu, X. Liao, K.S. Chiang. "Laser-micromachined fabry-perot optical fiber tip sensor for high-resolution temperature-independent measurement of refractive index", *Optics Express* 2008, 16, 2252-2263.
7. C.R. Liao, T.Y. Hu, D.N. Wang. "Optical fiber fabry-perot interferometer cavity fabricated by femtosecond laser micromachining and fusion splicing for refractive index sensing", *Optics Express* 2012, 20, 22813-22818.
8. T. Wang, M. Wang, "Fabry-Pérot fiber sensor for simultaneous measurement of refractive index and temperature based on an in-fiber ellipsoidal cavity", *Photonics Technology Letters, IEEE* 2012, 24, 1733-1736.
9. J.P., Dakin M.J. Gunning, P. Chambers, Z.J. Xin. "Detection of gases by correlation spectroscopy", *Sensor Actuat B-Chem* 2003, 90, 124-131.

# REDUCCIÓN DE PÉRDIDAS EN PROCESOS DE REPETIBILIDAD EN MEDICIÓN A TRAVÉS DEL USO DE LA DISTRIBUCIÓN CHI CUADRADA

Gabino Estevez Delgado<sup>1</sup>, Héctor Eduardo Martínez Flores<sup>2</sup>, Itzia Alejandra Bonilla Paz<sup>3</sup>

Facultad de Químico Farmacobiología. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

<sup>3</sup>PIMCB. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.+

## RESUMEN

En los procesos de medición en los que se permite la homogeneidad de los valores de medición y cuyas condiciones de los parámetros medibles garantizan la isotropía, se demanda además que la homocedasticidad genere condiciones que permitan errores mínimos de medición. Es precisamente estas condiciones lo que permite que se mantenga confianza en los parámetros de referencia certificados (MR), de forma particular todas las empresas y laboratorios que hacemos uso de este tipo de materiales realizamos verificaciones periódicas a fin de garantizar condiciones metrológicas aceptables. Este tipo de verificaciones comúnmente solo cubren aspectos que garantizan el uso de los materiales pero rara vez miden el deterioro de los propios materiales o de la competencia técnica del laboratorios. En este trabajo se realiza un análisis, que de manera alternativa a modelos de generación de funciones de pérdida o funciones de cálculo de la deriva, incorporando el uso de la distribución chi cuadrada, con  $p=0.05$  en el que podemos planificar la reducción de costos, pérdidas, planificación de caracterizaciones o calibraciones de materiales y reprogramación de los calendarios de mantenimiento o calibración. Concluimos que de manera paralela al uso de herramientas de control de calidad, como lo son las herramientas de Ishikawa, el uso de la distribución chi cuadrada ofrece ventajas que permiten paralelamente ofrecer un método de reducción de la variabilidad y como consecuencia menores pérdidas en los procesos.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los materiales de referencia certificados en el esquema metrológico permiten garantizar la trazabilidad al Sistema Internacional de Unidades (SI), lo que conduce a una serie de consecuencias entre lo primordial se garantiza que podemos rastrear cual es la variabilidad que presenta ante la cadena de mediciones ininterrumpidas. Para garantizar la trazabilidad se ha construido un esquema metrológico que parte de los laboratorios primarios en cada país, quien a su vez tendrá que compararse entre sí y con quienes mantienen el material de referencia en custodia bajo un reconocimiento mutuo de los países. Posteriormente, es a partir de los laboratorios primarios donde se diseminara la trazabilidad al resto de los laboratorios y empresas; de manera particular, los laboratorios secundarios juegan un papel importante en esta cadena, pues son precisamente estos últimos sobre los que recae buena parte del trabajo en las comparaciones y quienes están ligados a las empresas, laboratorios de medición, industrias y usuarios comerciales. Es de esta manera en la que llegamos al consumo de una serie de servicios ligados a la trazabilidad, destacándose a esta estructura las comparaciones inter laboratorio e intra laboratorios y de manera particular el cuidado que cada quien pone a la pérdida inevitable del deterioro de los materiales e instrumentos.[1]

El aspecto del cuidado de la competencia metrológica al interior de las empresas genera una dinámica que no solo se refleja en poderse comparar con otros laboratorios, en las llamadas

comparaciones inter laboratorios, sino que además requiere que se realicen verificaciones de la competencia técnica y del análisis de la variabilidad de los materiales. Un laboratorio o empresa responsable no solo dejara el mantenimiento del sistema de la calidad a la periodicidad declarada para llevar a cabo las calibraciones o caracterizaciones de los instrumentos o materiales, sino que además deberá de estar pendiente que su sistema se mantiene en las mejores condiciones [3]. Uno de los aspectos a destacar en las verificaciones se encuentra el poder realizar el cálculo de la deriva y posteriormente la fiabilidad, dos conceptos que permiten garantizar que más allá de lo declarado en nuestro sistema de calidad, podemos marcar la exigencia de verificar que podamos garantizar que nuestros errores siguen estando dentro de la competencia técnica marcada. Un elemento adicional que conlleva el cálculo de la deriva, siendo además atractivo dentro del aspecto económico, es que en ocasiones el uso del cálculo de la deriva nos lleva a determinar que si no existe un aspecto de restricción bajo una norma a la que estamos sujetos, podemos extender los periodos de calibración o caracterización [2]. Para las empresas que hacen poco uso de algunos materiales o instrumentos de medición durante el periodo declarado que ampara el uso de un certificado o informe de calibración resulta inclusive frustrante el tener que volver a contratar un servicio de calibración, que además representa un gasto económico. Es así que el poder abordar una herramienta como el cálculo de la deriva expone una posibilidad de reducir costos, pero además, en el caso de un uso excesivo de los materiales e instrumentos de medición ofrece la posibilidad de detectar que la competencia metrológica se ha deteriorado y que el mantenimiento y la calibración se harán necesarios. Es común encontrar leyendas en los informes o certificados e inclusive en las políticas de los servicios que de manera explícita exponen la posibilidad, que debido al uso, se requiera contratar un servicio de calibración previo al amparo temporal del servicio.

Pese a los programas de difusión que ha realizado la Entidad Mexicana de Acreditación (ema), aun es poca la actividad que se realiza en el cumplimiento de la normalización y más aún en la formación metrológica, por lo que los esfuerzos de muchas empresas, de distinto giro económico, se ven soslayados por el cumplimiento mínimo, sin que se cuente con una iniciativa que vaya más allá de las verificaciones mínimas requeridas. Es así como en el presente documento exponemos una alternativa al cálculo de la deriva, que permita poder hacer uso de un sistema de verificación que complemente las condiciones de control de la calidad declarada, pero que desde luego no suple al conjunto de herramientas de control de la calidad. A continuación expondremos el uso de la difundida distribución chi cuadrada [4], para poder verificar un material de pH, pero cuyo uso puede expandirse a otras mediciones tanto físicas como químicas e inclusive biológicas, con otro tipo de mensurando [5].

## **2. DESARROLLO**

Consideraremos un material de referencia de pH, que corresponde a un buffer en distintos niveles, tomaremos los datos obtenidos con el material de pH=7, por ser este el que presenta mayores variaciones del conjunto de 4, 5, 7 y 10 de pH. Considerando que se realizaron cuatro verificaciones con 10 repeticiones en cada periodo considerado a intervalos regulados de tiempo, como la que se muestra en la Tabla1:

**Tabla 1.** Datos de mediciones, con repeticiones de 10 mediciones en cada periodo además de la primera secuencia de mediciones.

DATOS INICIALES	PRIMER PERIODO	SEGUNDO PERIODO	TERCER PERIODO	CUARTO PERIODO
6.97	6.97	6.98	6.98	6.98
6.97	6.97	6.98	6.97	6.98
6.96	6.96	6.97	6.96	6.97
6.95	6.95	6.94	6.95	6.94
6.95	6.95	6.94	6.96	6.94
6.95	6.95	6.94	6.96	6.94
6.95	6.95	6.96	6.96	6.95
6.95	6.95	6.96	6.96	6.96
6.95	6.95	6.96	6.95	6.96
6.95	6.95	6.96	6.96	6.96

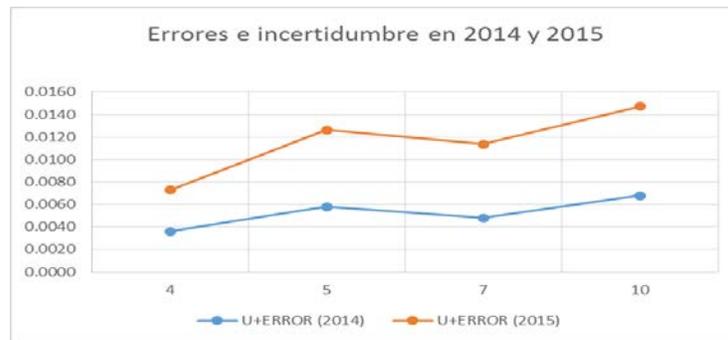
Una vez que calculamos los valores esperados, a partir de las repeticiones de datos en cada periodo, encontramos:

**Tabla 2.** Valores esperados de las repeticiones en los cuatro periodos de verificación del material.

PRIMER PERIODO	SEGUNDO PERIODO	TERCER PERIODO	CUARTO PERIODO
6.97	6.98	6.98	6.98
6.97	6.98	6.98	6.97
6.96	6.97	6.97	6.96
6.94	6.95	6.95	6.94
6.94	6.95	6.95	6.95
6.94	6.95	6.95	6.95
6.95	6.96	6.96	6.95
6.95	6.96	6.96	6.96
6.95	6.96	6.96	6.95
6.95	6.96	6.96	6.96

Calculando la variable  $X^2$  (variable chi cuadrada) con 27 de grados de libertad, tenemos  $X^2_{\text{experimental}}=0.002$  que contrastada con la variable teórica chi cuadrada  $X^2_{\text{teórica}}=40.11$  lo que implica que los materiales aún siguen manteniendo las condiciones de homogeneidad requeridos y de repetibilidad de las mediciones, lo cual acompañado de una prueba de variación de un factor la  $F_{\text{experimental}}=0.4343$  obtenida a partir de los datos de la primera tabla, contrastada con  $F_{\text{teórica}}=2.8663$  con 3 grados de libertad entre grupos y 36 dentro de los grupos sustenta que la homocedasticidad de las mediciones se mantienen.

Por otro lado, utilizando los datos de incertidumbre y error obtenidos de los informes para pH 4, 5, 7, 10, en las en los años 2014 y 2015 tenemos el siguiente gráfico:



Grafica 1. Errores e incertidumbres en 2014 y 2015

Para el cálculo del intervalo de calibraciones se procede a calcular la deriva de acuerdo a los datos en el que la deriva se calcula como [6]:

$$Deriva = \frac{Dif\ máx}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

Con  $(t_2 - t_1)$  es el periodo entre la primera calibración y la última a considerar, en tanto que la diferencia máxima considerada en la fórmula para el cálculo de la deriva es la diferencia máxima entre la suma del error más incertidumbre en cada punto.

Así mismo, el periodo de calibración, definido a partir de la deriva y de la tolerancia de los valores es dado como [6]:

$$\text{Periodo de calibración} \leq \frac{\text{Tolerancia}}{\text{Deriva}} \quad (2)$$

Observando las condiciones de tolerancia son de  $\pm 0.0043$  y una deriva de  $0.001/\text{mes}$ , de acuerdo a los datos dados para los dos años, tenemos que el periodo de calibración menor de 29 meses. Aun cuando este valor obtenido es más grande que los periodos de calibración que se presenta en el calendario para el ejemplo presentado, sin embargo, es útil considerar que si se mantiene la verificación mediante el cálculo de la prueba Chi cuadrada es bastante el costo que a la larga podría evitarse y si al año el material mantiene condiciones de estabilidad, homogeneidad e isotropía el material o instrumento, podrían tener un periodo más largo en este tipo de servicios metrológicos. Sin embargo, es de destacar que en ocasiones existen normas que pueden regular o limitar este tipo de decisiones y que deberemos de ponderar por encima de este instrumento de control [7]. Otro elemento que podría servir de apoyo es el cálculo de la función de fiabilidad e inclusive un modelado de predicción de las calibraciones, sin embargo, la experiencia nos dará la pauta para cada instrumento de medición.

### 3. CONCLUSIONES

Podemos concluir, que de manera alternativa al uso del cálculo de la deriva, realizado con por lo menos dos periodos de calibraciones o caracterizaciones, se puede hacer uso de las verificaciones y considerar en cada periodo el uso del cálculo de los valores de la distribución chi cuadrada. En particular, se expuso el ejemplo con valores de pH en el que se calculó el periodo de calibración en

cuatro niveles. Sin embargo, en este cálculo se observó que el nivel de pH=7 es el nivel que presentó mayor diferencia entre los dos periodos de calibración, siendo esta razón en la que se hace el análisis de la chi cuadrada, en el entendido que en este nivel las variaciones se presentan con un nivel de riesgo mayor. Es decir, si el análisis de la prueba chi cuadrada es aceptable en estas condiciones de variabilidad el resto de los materiales podrán tener un análisis con mejores resultados. Es importante señalar que dado que el modelo físico [8], para el cálculo de la incertidumbre es una función logarítmica, una elección incorrecta en el modelado podría conducirnos a elegir un nivel inadecuado y un crecimiento mayor en los errores. Debido a la sencillez con que se puede calcular el valor de chi cuadrada, es recomendable el cálculo de la todos los niveles, si es que los hay, a menos que se considere acertadamente el valor del modelo físico a utilizar en el cálculo de la incertidumbre.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Metrología, Centro Nacional de. <http://www.cenam.mx/>. *Sitio oficial del CENAM*. [En línea] 29 de 05 de 2016. <http://www.cenam.mx/>.
2. López, Javier Cedillo. Día internacional de la Metrología. Entidad Mexicana de Acreditación. *Cómo establecer periodos de Calibración*. [En línea] 09 de Junio de 2015. [http://www.ema.org.mx/descargas\\_evento\\_dma/uv/PeriodosDeCalibracion.pdf](http://www.ema.org.mx/descargas_evento_dma/uv/PeriodosDeCalibracion.pdf).
3. *Techniques for Optimizing Calibration Intervals*. Castrup, H. Arlington : s.n., 1994. ASNE Test & Calibration Symposium.
4. Montgomery, Douglas. *Control Estadístico de la Calidad*. México : Limusa-Wiley, 2004.
5. *Point of view regarding traceability and measurement uncertainty in medical laboratory accreditation*. Kubono, K. June de 2009, Rinsho Byori, págs. 584-92.
6. Benjamín Soriano, Víctor Aranda y Noel Gutiérrez. DETERMINACIÓN DE INTERVALOS DE CALIBRACIÓN. *SIMPOSIO DE METROLOGÍA 2004*. [En línea] 2004. [www.cenam.mx/simposio2004/memorias/TA-011.pdf](http://www.cenam.mx/simposio2004/memorias/TA-011.pdf).
7. Diario Oficial de la Federación. *Lista de instrumentos de medición cuya verificación inicial, periódica o extraordinaria es obligatoria, así como las reglas para efectuarla. Lunes 21 de octubre del 2002*. México : Gobierno Federal, 2002.
8. Haustein, Michell. Measurement Uncertainty–Principles and Implementation in QC. CURRENTA GmbH & Co. OHG. [En línea] 03 de Marzo de 2014. [www.analytik.currenta.de](http://www.analytik.currenta.de)

## ANÁLISIS DE ESPECTROS DE RESONANCIA DE FANTOMAS DE HUESO POR INTERPOLACIÓN DE CURVAS

Paulina Alicia Irais Hernández Becerra<sup>1</sup>, Diana Guadalupe Ramírez Infante<sup>1</sup>, Marco Balleza Ordaz<sup>1</sup>, Raquel Huerta Franco<sup>2</sup>, Miguel Vargas Luna<sup>1</sup>, Lourdes Sandoval Solis<sup>3</sup> e Isabel Delgadillo-Holtfort<sup>1</sup>

<sup>1</sup>División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato. <sup>2</sup>Departamento de Ciencias Aplicadas al Trabajo, División de Ciencias de la Salud, Universidad de Guanajuato. <sup>3</sup>Facultad de Ciencias de la Comunicación, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

### RESUMEN

En este trabajo se emplea el método de interpolación de curvas por medio de *splines* para hacer un análisis de espectros de resonancia, los cuales fueron medidos con la técnica de espectroscopía de resonancia ultrasónica -*RUS* por sus siglas en inglés- sobre un conjunto de fantomas geométricos de hueso. El método de *splines* permite modelar adecuadamente los puntos de cambio de curvatura, por lo que podemos emplearlo para interpolar el corrimiento en los picos de resonancia de los espectros obtenidos experimentalmente. Este corrimiento de los picos en el espectro se presenta cuando las condiciones de medición son modificadas; en específico se varió la presión ejercida por los transductores sobre la muestra en el montaje experimental. Además, los fantomas se eligieron como una primera aproximación para representar la geometría tubular de la diáfisis un hueso largo y el decremento en el espesor de pared que se presenta con la osteoporosis. Los fantomas consisten en un conjunto de 10 muestras tubulares de acrílico, de dos alturas distintas, 1.492 y  $1.984 \pm 0.001$  cm, con diámetro fijo de  $1.270 \pm 0.001$  cm, y cuyos espesores de pared van desde cero (muestra cilíndrica sólida) hasta  $0.423 \pm 0.001$  cm. Fueron medidos con un par de piezoeléctricos Panametrics V150, empleando un generador de funciones Tektronix AFG3021 y un osciloscopio digital Tektronix TDS5104B.

### 1. INTRODUCCIÓN

La osteoporosis es una enfermedad progresiva y metabólica del sistema músculo-esquelético que afecta a una gran parte de la población mundial. Consiste en la pérdida de componentes orgánicos y componentes minerales, tales como el colágeno y la hidroxiapatita de calcio respectivamente. Debido a la pérdida de estos componentes, el hueso se vuelve menos denso, la porosidad aumenta y el tamaño de las paredes del hueso disminuye, por lo que se vuelve más susceptible al daño como fracturas o fisuras [1].

El estudio llevado a cabo en este trabajo consiste en la exploración, por el método de interpolación, de las resonancias de un conjunto de fantomas de hueso, los cuales fueron seleccionados para analizar la dependencia con la geometría y el decremento del espesor de pared que se presenta con la osteoporosis.

El método de espectroscopía de resonancia ultrasónica, *RUS* por sus siglas en inglés, se basa en la obtención de las constantes elásticas de los materiales. Esto involucra dos pasos: (1) La medición del espectro de frecuencia de vibración de la muestra, que se considera estar montada en el experimento en condiciones de cuerpo libre y (2) la determinación del tensor elástico a partir de las frecuencias de resonancia medidas [2].

La medición con la técnica RUS se lleva a cabo con dos transductores (emisor y receptor), entre los cuales se coloca la muestra procurando que ésta haga el menor contacto posible con ellos para poder considerarla como cuerpo libre y así se pueda obtener el espectro de resonancia del objeto [2,3].

Comúnmente, esta técnica se aplica a muestras sólidas con geometría simple, como esferas, prismas rectangulares o cilindros [3]. En este trabajo se emplean como fantasmas de la diáfnisis de un hueso largo, un conjunto de muestras tubulares de acrílico, con distintos espesores de pared que servirán para modelar, como una primera aproximación, el proceso de decremento de espesor de pared que se presenta con la osteoporosis.

## 2. INTERPOLACIÓN

La interpolación es un método que permite estimar y construir nuevos datos a partir de un conjunto discreto de datos conocidos. Al ajustar una curva, los denominados *splines* se pueden emplear para aproximar formas complicadas, suavizar una curva e interpolar datos, por lo que se les considera útiles para minimizar asperezas al cumplir una serie de restricciones [4].

De manera general, la interpolación por *splines* consiste en, dada una tabla de datos conocidos, emplear polinomios de grado reducido para interpolar a trozos, imponiendo condiciones sobre las derivadas en los nodos de la curva [5].

En este trabajo se emplearon *splines* cúbicos, por lo que se busca determinar polinomios de grado tres que interpolen entre dos puntos de la tabla de datos conocidos. A fin de especificar el polinomio que pase por dichos puntos, se imponen condiciones de continuidad para la primera y la segunda derivada. Estas condiciones se traducen en un sistema de ecuaciones lineales compatible y determinado, por lo que la solución es única, y así también el polinomio obtenido.

Considerando los pares de datos conocidos  $(x_i)$ , que son los puntos de la gráfica para una función  $y=(x)$  que en principio es desconocida, un *spline* cúbico para los datos conocidos será aquella función  $S(x)$  definida en el intervalo  $S:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $a=x_0$  y  $b=x_n$ , que satisface las condiciones siguientes [5]:

- a.  $(x)$  es un polinomio cúbico o de grado tres definido en el subintervalo  $[x_{i,i+1}]$ .
- b. La función de *spline* cúbico se ajusta a todos los puntos de la gráfica de valores conocidos, es decir, pasa por todos los pares de puntos, de modo que se cumple que  $(x_i)=y_i, \forall i=0,1,\dots$ .
- c. La función es continua, es decir  $S_{i+1}(x_{i+1})=y_{i+1}, \forall i=0,1,\dots,n-2$ .
- d. Es continua en pendiente y curvatura. Así, para la primera derivada se tiene  $S'(x_{i+1})=S'_{i+1}(x_{i+1}), \forall i=0,1,\dots,n-2$ .
- e. Es continua a lo largo de toda la pendiente generada por el conjunto de pares conocidos, de manera que para la segunda derivada  $S''(x_{i+1})=S''_{i+1}(x_{i+1}), \forall i=0,1,\dots,n-2$ .
- f. Para los puntos inicial y final, como condición frontera se impone  $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ , frontera libre, lo que se conoce como *spline natural*.

Considerando la secuencia de pares de datos conocidos  $(x_i)$  donde  $i=1,2,\dots,n-1$ , la función interpolada y será [4]

$$y=Ay_i+By_{i+1}+Cy_i''+Dy_{i+1}'' [1]$$

Donde

$$A \equiv \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, B \equiv 1 - A, C \equiv \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{i+1} - x_i)^2, D \equiv \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{i+1} - x_i)^2 \quad [2]$$

Y  $y_i''$  puede ser generado a partir de

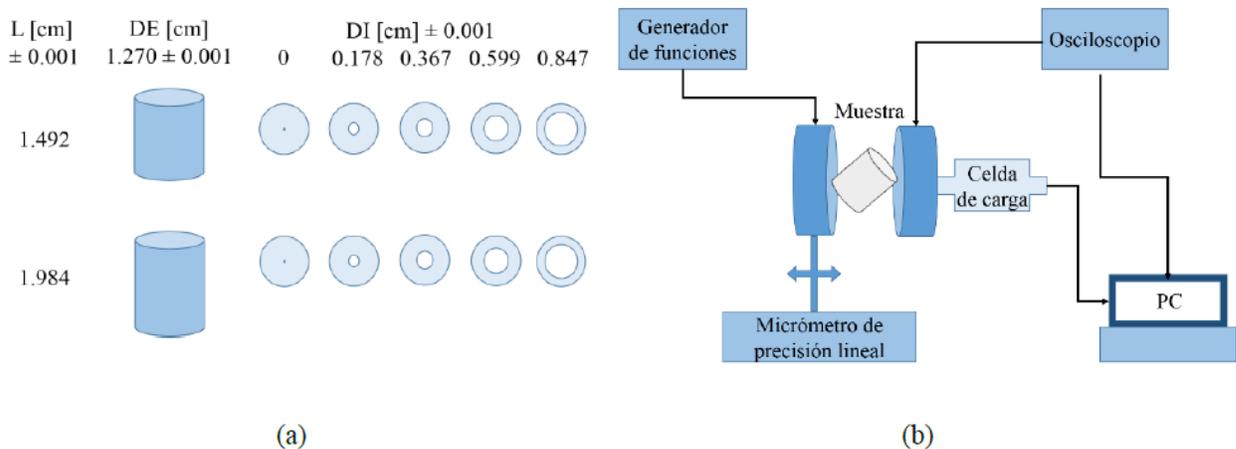
$$\frac{x_i - x_{i-1}}{6} y_{i-1}'' + \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3} y_i'' + \frac{x_{i+1} - x_i}{6} y_{i+1}'' = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad [3]$$

Como condiciones a la frontera, se imponen  $y_0''$  y  $y_{n-1}''$  igual a cero.

### 3. METODOLOGÍA

Las muestras y el diseño del montaje experimental se muestran en la Figura 1. Los fantasmas, Figura 1 (a), consisten en 10 muestras tubulares de acrílico, de dos alturas distintas,  $1.492 \pm 0.001$  cm, con diámetro externo D. E. fijo de  $1.270 \pm 0.001$  cm, y cuyos espesores de pared son cero (muestra cilíndrica sólida), 1.092, 0.903, 0.671 y 0.423 cm, obtenidos al restar el diámetro externo D. E. menos el diámetro interno D. I.

La muestra a medir es colocada entre un par de piezoeléctricos Panametrics V150, usando un micrómetro de precisión lineal para desplazar el primer piezoeléctrico y ajustar la presión que se ejerce sobre la muestra, Figura 1 (b). Esta presión fue monitoreada usando una celda de carga Futek LRM200, de tal forma que todas las mediciones se llevaron a cabo con el mismo valor de presión sobre la muestra.



**Figura 1.** (a) Características geométricas de las muestras:  $L$  representa la longitud de los tubos,  $DE$  el diámetro externo, que es fijo, y  $DI$  los valores de diámetros internos con los cuales se determina el espesor de pared que tiene valores cero (muestra cilíndrica sólida), 1.092, 0.903, 0.671 y 0.423 cm. (b) Esquema del montaje experimental para la técnica de espectroscopía de resonancia ultrasónica.

El primer piezoeléctrico excita la muestra con una señal que se transmite al programarla en un generador de funciones Tektronix AFG3021. La señal de excitación empleada consistió en un pulso cuadrado con una frecuencia de repetición de 50 Hz y un ancho de pulso de  $20\mu\text{s}$ , con un

una amplitud de 10 Vpp. Luego de que la muestra es excitada, un segundo piezoeléctrico recibe la señal y la transmite a un osciloscopio digital Tektronix TDS5104B, para posteriormente obtener el espectro de resonancia al determinar la transformada rápida de Fourier FFT de la señal de respuesta.

El paso final es analizar los espectros de resonancia con respecto a los cambios que se presentan conforme cambia el espesor de pared de las muestras tubulares. Esto se lleva a cabo con el método de interpolación por *splines* cúbicos considerando las frecuencias de resonancia y los espesores de pared de las muestras.

#### 4. RESULTADOS

El análisis de interpolación de curvas se lleva a cabo sobre las variaciones que presentan los espectros de resonancia medidos para cada muestra. La interpolación es empleada como una técnica de predicción de la posición de los picos de resonancia. En particular, se empleó como una predicción del comportamiento resonante respecto al espesor de pared conforme éste variaba en cada muestra.

Se consideran las alturas de las muestras por separado, por lo que se tienen 2 grupos con una longitud particular, como se observa en la Figura 1 (a). Para cada uno de los grupos se tendrán entonces 5 valores de diámetro interno DI diferentes, etiquetados con la notación S1, para el cilindro sólido, S2 para la muestra tubular con  $DI=0.178 \pm 0.001$  cm, y así sucesivamente hasta que se tiene S5 para  $DI=0.847 \pm 0.001$  cm.

Los espectros de resonancia para las muestras con longitud  $L= 1.492 \pm 0.001$  cm, se muestran en la Figura 2 (a). En esta gráfica cada curva corresponde al espectro de resonancia para una muestra de espesor determinado. Se identifican dos picos de resonancia para cada una de las curvas, etiquetados como Pico 1 y Pico 2, de izquierda a derecha. Se observa que a medida que el espesor de pared aumenta, los picos de resonancia se corren hacia la derecha, a frecuencias más altas.

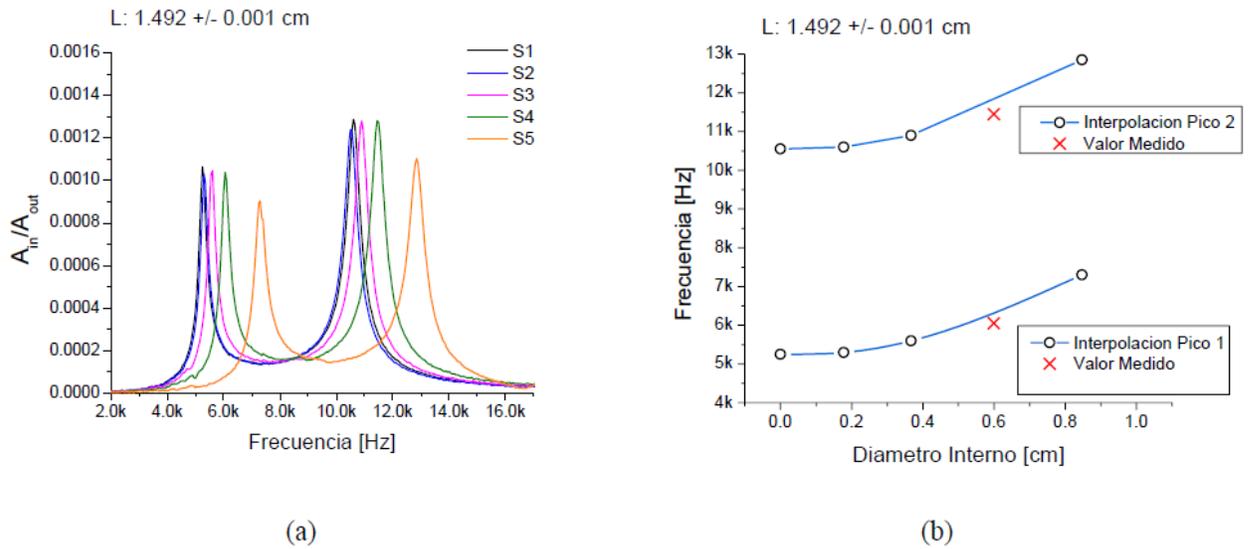
La variación en la posición de los picos es analizada mediante la técnica de interpolación. Se tienen, para cada pico de resonancia, cinco pares de puntos ( $S_i$ , Frecuencia), donde  $i=1,2,\dots,5$ . La interpolación se realiza usando sólo cuatro de estos cinco pares, dejando de lado la información del par ( $S_4$ , Frecuencia), ya que es el valor que se quiere predecir mediante esta técnica. Esto se muestra en la Figura 2 (b), en donde los círculos abiertos corresponden a los datos obtenidos al medir las muestras, la curva es la interpolación por *spline cúbico natural*, considerando cuatro de cinco pares de puntos. Las cruces son los valores medidos, y que se espera predecir.

Para los dos picos de resonancia se observa que la curva de interpolación predice un valor de frecuencia mayor que el que se obtiene al medir las muestras, pero en general los valores son muy cercanos, siendo mayor la correspondencia entre el Pico 1 de la muestra S4 y su interpolación.

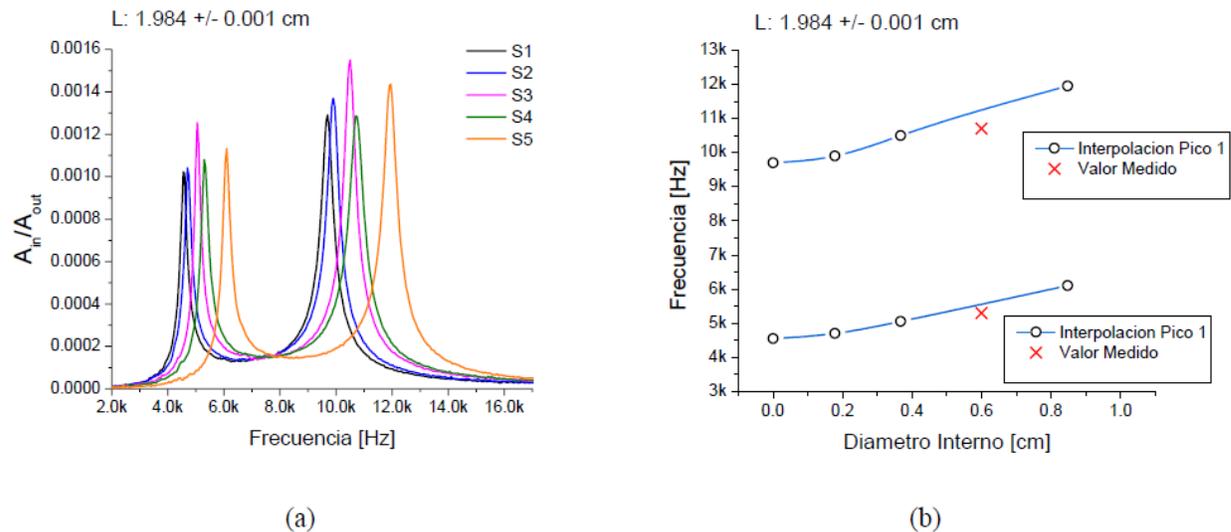
Los espectros de resonancia del segundo grupo con longitud  $L= 1.984 \pm 0.001$  cm, se muestran en la Figura 3 (a). Se observa el mismo comportamiento que en grupo anterior, a medida que el espesor de pared de las muestras disminuye, los picos de resonancia presentan corrimientos hacia la derecha, a frecuencias más altas.

El análisis por interpolación del comportamiento de los pares de datos medidos ( $S_i$ , Frecuencia) se lleva a cabo como en el caso anterior, sin tomar en cuenta la información de la muestra S4, que es la que se quiere predecir. Los símbolos para la gráfica se eligieron como en el caso anterior, círculos abiertos para las mediciones que se emplean en la interpolación, ésta corresponde a la línea curva, y las cruces como símbolos de los valores obtenidos en la medición.

Este análisis se muestra en la Figura 3 (b), al igual que para las muestras del grupo anterior, se observa una buena correspondencia entre los valores predichos y los valores medidos, aunque las frecuencias predichas son más grandes que las obtenidas en el experimento.



**Figura 2.** (a) Espectros de resonancia de las muestras con longitud  $L=1.492 \pm 0.001$  cm, cada curva corresponde a un diámetro interno  $DI$  distinto. (b) Interpolación para cada pico de resonancia.



**Figura 3.** (a) Espectros de resonancia de las muestras con longitud  $L=1.984 \pm 0.001$  cm, cada curva corresponde a un diámetro interno  $DI$  distinto. (b) Interpolación para cada pico de resonancia.

## 5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se midieron los espectros de resonancia con la técnica RUS de 10 fantasmas de hueso con geometría tubular, los cuales presentaban cambios en espesor de pared, que es una primera aproximación como un estudio geométrico de huesos con osteoporosis.

Se analizaron los fantasmas en dos grupos, considerando las dos diferentes longitudes de las muestras.

Los espectros obtenidos presentan corrimientos de los picos a frecuencias más altas a medida que el espesor de pared disminuye.

Las variaciones en los espectros que se presentan en cada grupo, debido al cambio en el espesor de pared, fueron analizadas en términos de interpolación de curvas por medio de *splines cúbicos naturales*.

Las interpolaciones mostraron una buena correspondencia entre los valores predichos y los valores medidos para las muestras S4, aunque los valores predichos sobreestiman a las frecuencias realmente medidas, la interpolación modela de manera adecuada el comportamiento del corrimiento de picos que se presenta con las variaciones en el espesor de pared de las muestras.

El análisis de interpolación permite hacer predicciones de manera inversa, es decir, conociendo la frecuencia del pico de resonancia, se puede predecir el diámetro interno de las muestras, y así el espesor de pared, con lo que se puede identificar esta característica de una muestra.

La identificación del espesor de pared puede presentar una gran ventaja cuando se requiere conocer si una muestra tiene un espesor de pared crítico que involucre una mayor fragilidad y susceptibilidad a dañarse. Por esto, se propone el método de medición de muestras con RUS y análisis de datos por interpolación con *splines cúbicos naturales*, como un método para analizar otro tipo de muestras, que contengan materiales que presenten características más cercanas al hueso, como hidroxapatita de calcio, de tal manera que se diseñe una técnica enfocada al diagnóstico de osteoporosis.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Noman-ul-Haq, MariaThair, QasierIqbal and AqeelNaseem, J. Osteopor. Phys. Act. 3:3 (2015).
2. Brian J. Zadler, Jérôme H. L. Rosseau, John A. Scales and Martin L. Smith, Geophys. J. Int. 156, 154-169 (2004).
3. Y. C. Wang and R. S. Lakes, Resonant ultrasound spectroscopy in shear, Review of scientific instruments, Volume 74, Number 3, 2003.
4. Michelle Schatzman, Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Chapters 4 and 6, Clarendon Press, Oxford (2002).
5. Adriana M. Apaza, Interpolación segmentaria o splines, Cálculo numérico, programación aplicada. JTP Cálculo Numérico

# REFLECTOMETRÍA ESPECTROSCÓPICA CERCA DEL ÁNGULO CRÍTICO PARA EL SENSADO DE LA CONCENTRACIÓN DE GLUCOSA Y ETANOL EN EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

Peña-Gomar, M.C.<sup>1</sup>, Sobral, H.<sup>2</sup>, Ramírez-García, J.A.<sup>1</sup>, Peña-Gomar, G.<sup>3</sup>, Campos-García, J.<sup>4</sup>, Viramontes-Gamboa, G.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Michoacán, México. <sup>2</sup>Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Universidad Nacional Autónoma de México. <sup>3</sup>Instituto de Investigaciones Químico-Biológicas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. <sup>4</sup>Departamento de Agroindustrial, Universidad Politécnica de Chiapas, Tuxtla Gtz. Chiapas, México.

## RESUMEN

En los procesos industriales de producción de etanol mediante fermentación usualmente se utilizan levaduras, las cuales metabólicamente consumen la glucosa para generar etanol. El control de la concentración de los diferentes elementos, permite optimizar la producción final. La forma convencional para la determinación de etanol es realizada con métodos relativamente complejos en su operación y de alto costo. En este trabajo se propone el uso de la técnica de Reflectometría

Espectroscópica cerca del Ángulo Crítico para la determinación de glucosa y etanol en un proceso de fermentación controlada. Utilizando una fuente de luz blanca (320 a 1000 nm), es posible obtener las curvas de la reflectancia y determinar el índice de refracción procedentes de medios de fermentación libres de levadura. Se implementó un sistema de fermentación controlado con caldo de cultivo PDB (Potato Dextrose Broth) y levadura comercial de *Saccharomyces cerevisiae* durante 20 hrs a 30°C. Se recolectaron muestras a diferentes tiempos durante todo el proceso de fermentación, y una vez eliminada la levadura por centrifugación, el medio de fermentación se utilizó para obtener las curvas de la reflectancia. Previamente, se analizaron soluciones binarias de etanol-agua y glucosa-agua para obtener las curvas de calibración. Con una expresión simple que relaciona el índice de refracción de la muestra fermentada con el índice de refracción diferencial de los elementos individuales. Los resultados demostraron que es posible determinar glucosa y etanol mediante el método de reflectometría espectroscópica de ángulo crítico (REAC), cuyos resultados fueron en total concordancia con la determinación mediante cromatografía de alta resolución (HPLC). La concentración de etanol se estableció a partir del consumo de glucosa para los diferentes tiempos analizados. Lo anterior sugiere que el método de REAC posee potencial para ser utilizado en el seguimiento de procesos de fermentación a nivel industrial.

## 1. INTRODUCCIÓN

La fermentación es un proceso metabólico donde carbohidratos como la glucosa o compuestos relacionados son oxidados para producir compuestos más simples como etanol, ácido láctico, ácido butílico y ácido acético, y en menor medida otro tipo de alcoholes [1,2]. Algunos microorganismos pueden producir cambios en la materia prima por la acción de enzimas microbianas en el substrato orgánico (alimento). Los microorganismos que predominan en la fermentación son levaduras y bacterias ácido lácticas, principalmente miembros del género *Saccharomyces*, *Lactobacillus*, *Leuconostoc*, *Streptococcus* y *Pediococcus*. El control del proceso

de fermentación es de primordial importancia para la optimización en la producción de los compuestos sintetizados [3,4]. Parámetros como la biomasa (levaduras y bacterias), nutrientes y la concentración de los elementos sintetizados son determinantes para monitorear la cinética de un proceso fermentativo. Mejorar la eficiencia de las técnicas de medición y monitoreo permite optimizar el proceso de producción. El rendimiento teórico estequiométrico para la transformación de glucosa en etanol es de 0.511 g de etanol por 1 g de glucosa estimada por Gay Lussac. Para un sistema de fermentación industrial, donde se cuenta con sistemas de control de todos los parámetros, esta estimación se reduce.

Uno de los métodos de análisis más utilizado por su alto desempeño, es Cromatografía Líquida de Alto Rendimiento (HPLC), que generalmente involucra una adecuada preparación de la muestra, tiempo de análisis grandes y protocolos específicos para la medición de especies químicas individuales. Otros métodos que se basan en la medición de parámetros ópticos, han sido implementadas permitiendo reducir tiempos de análisis. Algunos ejemplos de estos métodos son los métodos espectroscópicos, sensores por fibra óptica y métodos refractométricos, por mencionar solo algunos. Estos métodos en general, son no invasivos y no requieren de una preparación compleja de la muestra. Las técnicas de espectroscopía más utilizadas son UV-Vis, IR, FT-Raman, las que han sido reportadas para la medición de parámetros fermentativos con adecuado desempeño [5-7]. Los métodos refractométricos son métodos sencillos de implementar y de bajo costo. Se han realizado diferentes diseños basados en refractometría usando fuentes de luz blanca, dando la posibilidad de medir el índice de refracción a diferentes longitudes de onda para medios líquidos transparentes y absorbentes [8]. En un trabajo previo se implementó un refractómetro espectroscópico para el análisis de soluciones ternarias midiendo las curvas de dispersión en un rango de 300-1000 nm, con una resolución en el índice de refracción de  $1 \times 10^{-11}$  [9]. Se propuso un sencillo modelo para obtener la concentración de los elementos en las soluciones analizadas. En este trabajo, se propone la implementación de la técnica REAC para estudiar la cinética de la concentración de glucosa en el proceso fermentativo. Para la determinación de etanol, sólo se toma el rendimiento teórico propuesto por Gay Lussac y se compara por el método convencional de HPLC.

## 2. DESARROLLO EXPERIMENTAL

### 2.1 ARREGLO EXPERIMENTAL REAC

El esquema del arreglo experimental para medir la concentración del etanol por la técnica de REAC se muestra en la figura 1. Se utilizó una fuente de luz de Deuterio Halógeno (DH200-DUV, Ocean Optics), con un rango espectral de 190-2500 nm. La luz de la fuente es dirigida por medio de una fibra óptica UV-VIS de 400 mm de diámetro, y la salida de la luz se colima para enviarla a una lente BK7 semicilíndrica de 2 cm de radio. El haz de luz es reflejado cerca del ángulo crítico en la interfase de la cara plana de la lente semi-cilíndrica y la muestra. Se utiliza un goniómetro de alta resolución para seleccionar el ángulo crítico. La luz reflejada de la interfase se refracta al pasar de nuevo por la superficie esférica de la lente y es capturada por una fibra óptica de salida UV-VIS con diámetro de 50 mm. La fibra de salida está montada sobre una platina motorizada con una resolución de 0.005 mm para escanear la reflectancia en función del ángulo de incidencia. La fibra óptica de salida está acoplada a un mini espectrómetro (USB4000-XR1-ES, Ocean Optics) que detecta un rango en longitud de onda de 200-1025 nm y 1.5 nm de resolución, pero sólo se analizó a partir de 320 nm debido a que la lente semicilíndrica absorbe el UV. Se ajustó el tiempo de adquisición para maximizar la razón de señal a ruido y se realizaron cinco promedios para cada punto de adquisición. Los experimentos se realizaron a temperatura ambiente de  $20 \pm 0.5$  °C, el cual corresponde a una variación de  $5 \times 10^{-11}$  en el índice de refracción.

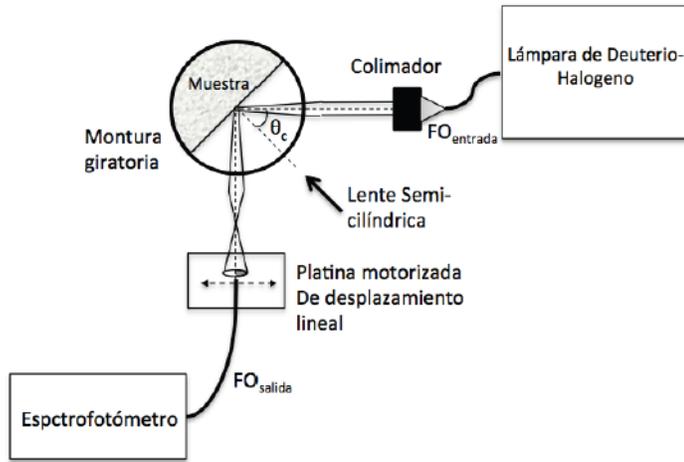


Fig. 1. Esquema experimental de la técnica REAC.

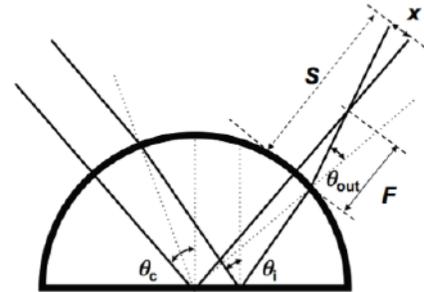


Fig. 2. Esquema de trazo de rayos.

## 2.2 PRINCIPIOS DE MEDICIÓN

La técnica REAC mide las curvas de la reflectancia de una interfase vidrio-muestra. La reflectancia la podemos definir como la relación de la luz reflejada en comparación con la luz incidente en una interfase. Para una onda plana en un medio dieléctrico, la reflectancia en función del ángulo de incidencia para las dos componentes del campo, transversal eléctrico (TE) y trasversal magnético (TM), se expresa como

$$R^{TE} = \left[ \frac{n_L \cos \theta_i - n_m \left( 1 - \left( \frac{n_L}{n_m} \right)^2 \sin^2(\theta_i) \right)^{1/2}}{n_L \cos \theta_i + n_m \left( 1 - \left( \frac{n_L}{n_m} \right)^2 \sin^2(\theta_i) \right)^{1/2}} \right]^2 \quad (1)$$

y

$$R^{TM} = \left[ \frac{n_m \cos \theta_i - n_L \left( 1 - \left( \frac{n_L}{n_m} \right)^2 \sin^2(\theta_i) \right)^{1/2}}{n_m \cos \theta_i + n_L \left( 1 - \left( \frac{n_L}{n_m} \right)^2 \sin^2(\theta_i) \right)^{1/2}} \right]^2 \quad (2)$$

Donde  $n_L$  es el índice de la lente,  $n_m$  es el índice de refracción de la muestra y  $\theta_i$  el ángulo de incidencia. En nuestro caso, se utiliza un haz de luz no polarizado por lo que la reflectancia es

$$R(\theta_i) = \frac{1}{2} R^{TE} + \frac{1}{2} R^{TM}. \quad (3)$$

En general, la reflectancia de un haz de luz estrecho depende del ángulo de incidencia. En el esquema experimental (Fig.1) propuesto en este trabajo, el haz de salida presenta una divergencia angular que proviene de la reflexión de la interfase lente-muestra. Haciendo un análisis geométrico, descrito en la figura 2, se puede determinar el ángulo de incidencia en función de el desplazamiento en  $x$  por medio de

$$\theta_i(x) = \theta_c + \sin^{-1}\left(\frac{xF}{R(S-F)}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(\theta_{out})}{n_L}\right), \quad (4)$$

donde  $\theta_c$  es el ángulo crítico de la interfase lente-muestra,  $R$  es el radio de la lente,  $F$  es la distancia focal de la lente,  $S$  es la distancia de la lente al plano de observación y  $\theta_{out}$  es el ángulo de salida definido por [9].

$$\theta_{out} = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{x}{S-F}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{xF}{(S-F)R}\right). \quad (5)$$

Para variaciones pequeñas del ángulo de incidencia se puede escribir como

$$\theta_i(x) = \theta_c + \frac{d\theta_i}{dx}x. \quad (6)$$

Cuando  $x = 0$ , el  $\theta_i$  corresponde al  $\theta_c$  de la muestra de referencia. En este trabajo usamos el ángulo crítico de agua a 589 nm a 20°C para calcular todos los ángulos de incidencia en los experimentos reportados. El valor numérico de  $\left(\frac{d\theta_i}{dx}\right)$  reportado es de  $0.66^\circ \text{ mm}^{-1}$  con un error estimado para un incremento de  $1^\circ$  en  $\theta_c$  fue de  $10^{-5}$ , lo que corresponde a  $10^{-8}$  en el valor del índice de refracción que está por debajo del límite de detección del sistema.

Para obtener las curvas de la reflectancia  $R$  de la interfase lente-muestra se siguió el procedimiento descrito en [9]. Se utiliza la intensidad reflejada de la interfase lente-aire como referencia para calcular la reflectancia de la muestra. La reflectancia de la muestra, que depende de la posición de  $x$ , está dada por

$$R(x) = \frac{I_s(x) - I_f(x)}{I_a(x) - I_f(x)}, \quad (7)$$

Donde  $I_s$  es la intensidad correspondiente a la luz reflejada de la interfase lente-muestra,  $I_a$  es la intensidad de la lente-aire y  $I_f$  la intensidad de fondo que es la intensidad con la fuente de luz apagada.

Para determinar la concentración de una muestra que contiene más de un elemento, se puede utilizar la variación del índice de refracción de la muestra en agua,  $\Delta n$ , en función de la longitud de onda  $\lambda$  por medio de la siguiente ecuación:

$$\Delta n(\lambda) = \frac{dn_1}{dc_1}(\lambda)C_1 + \frac{dn_2}{dc_2}(\lambda)C_2 + \dots + \frac{dn_m}{dc_m}(\lambda)C_m, \quad (8)$$

Donde  $dn/dc$  es el índice de refracción diferencial y  $m$  es el número de elementos en la solución.

El índice de refracción diferencial se puede determinar de las curvas de calibración para una longitud de onda determinada.

### 3 PREPARACION DE MUESTRAS

Se prepararon muestras binarias de 0.5, 1, 2, 3, 4 y 5 g dl<sup>-1</sup> de D-glucosa en agua bi-destilada. Las soluciones fueron utilizadas para obtener la curva de calibración para determinar la concentración de la glucosa en relación a la variación del índice de refracción de la muestra fermentada. Para realizar el proceso de fermentación, se colocó en un matraz 750 ml de agua destilada, 18 g de caldo de cultivo (PDB, Difco) y 57 g de D-glucosa. La concentración de dextrosa inicial fue de

100g/l tomado en cuenta la cantidad de glucosa que contiene el caldo PDB. La activación de la levadura fue realizada colocando 75 ml del caldo de cultivo previamente esterilizado, con 7.7 g de levadura liofilizada. La solución se colocó en una parrilla de calentamiento y agitación con una temperatura de 35°C durante 10 min. Todo el material utilizado fue previamente esterilizado en una autoclave a 120°C durante 20 min. Una vez activada la levadura, se agregó al caldo de cultivo para iniciar el proceso de fermentación. El matraz se colocó dentro de un recipiente de aluminio con agua destilada en agitación constante a 700 rpm. La temperatura del caldo se mantuvo a 30°C mediante un controlador de temperatura. Posteriormente, se realizó el proceso de fermentación durante 20 hrs a 30°C y se tomaron periódicamente 50 ml de muestra cada 60 min para su análisis.

Las muestras recolectadas fueron centrifugadas y filtradas para separar la levadura del resto del líquido. Posteriormente, se separó 3 ml en un microtubo y se almacenó a -4°C para analizar por HPLC. El resto de la muestra, se utilizó en la técnica de REAC. La temperatura de la muestra fermentada se estabilizó a la temperatura ambiente que fue de 20°C.

#### 4. RESULTADOS

En el desarrollo experimental, se usaron valores de ángulos críticos de 41.26° y 61.53° para las interfases lente-aire y lente-agua, respectivamente [10,11]. Los datos utilizados fueron para la longitud de onda de 589 nm a 20°C. Se procedió a medir la curva de la reflectancia espectral para la interfase lente-agua bi-destilada y se comparó con datos teóricos de Fresnel. Los datos de la intensidad reflejada se tomaron con pasos de 50 $\mu$ m en  $x$ . Posteriormente se localizó el  $\theta_c$  Al encontrar el valor máximo de la derivada angular de  $R$  y se le asignó el valor teórico de 61.53°. Utilizando la Ec.(6) se obtuvieron los valores de  $\theta_i$  correspondientes a cada valor de  $X$ .

Adicionalmente se agregó un pequeño desplazamiento lateral al valor del  $\theta_c$  debido a la resolución finita del arreglo experimental del sistema experimental, esto con el fin de realizar un mejor ajuste con la curva teórica de Fresnel. En la zona del ángulo crítico, las curvas de  $R$  presentan un pequeño cambio gradual hacia el valor de máxima reflexión, debido al ángulo de detección finito en la fibra óptica de salida. Los detalles para lograr un adecuado ajuste ya fueron reportados en una publicación reciente [9]. Posteriormente se midieron las curvas de  $R$  para las diferentes concentraciones de D-glucosa en agua. En la figura 3 se presentan las curvas experimentales de  $R$  para agua bi-destilada y las muestras binarias con diferentes concentraciones de D-glucosa. De la figura, se puede observar que a mayor concentración de D-glucosa, la curva de  $R$  se desplaza a ángulos mayores, esto a su vez, se relaciona con un incremento en el índice de refracción. Con el ajuste de las curvas teóricas se puede determinar la variación del índice de refracción en función de la concentración y generar una curva de calibración. En un trabajo anterior, se reportó una comparación de la técnica REAC y refractometría Abbe midiendo la variación de  $n$  en función de la concentración de D-glucosa en agua. Se encontró que el error estimado con Abbe fue de  $2 \times 10^{-4}$ , mientras que para REAC tuvo un error de  $0.7 \times 10^{-4}$ .

La curva de calibración se presenta en la figura 4 donde se hace una comparación con datos reportados en la literatura [12] y los datos experimentales obtenidos con REAC. El comportamiento para ambas curvas es lineal con una pendiente de  $1.4 \times 10^{-3} \text{ g dl}^{-1}$ . Por otro lado, se aprecia una diferencia proporcional en  $n$  para todas las concentraciones de glucosa debido a los diferentes valores del índice de refracción del agua. El valor de  $n$  para agua a 589 nm que se utiliza en este trabajo es tomado de la referencia [11].

Con la finalidad de reportar las variaciones de la concentración de la glucosa en un proceso de fermentación controlado, se obtuvieron las curvas espectrales  $R$  para las muestras recolectadas durante todo el proceso de fermentación controlada que duró 20 hrs. Inicialmente se midió la muestra de caldo de cultivo PDB sin levadura y posteriormente se analizaron las muestras fermentadas. En la figura 5 se muestran las curvas de  $R$  para diferentes tiempos de la fermentación a una sola longitud de onda de 589 nm. Se observa que el ángulo crítico para el caldo PDB tiene

un índice de refracción mayor que el resto de las muestras. Al consumir la glucosa por la levadura, el índice de refracción disminuye y de acuerdo a la literatura, se sabe que la concentración de etanol aumenta gradualmente. De las curvas de reflectancia se obtuvo el índice de refracción para diferentes longitudes de onda y se utilizó la ecuación (8) para la determinación de la concentración de la glucosa. Para este trabajo solo se analizaron dos longitudes que fueron 589 y 644 nm. De esta forma se tiene un sistema de ecuaciones con dos incógnitas para la determinación de la concentración. Las muestras analizadas por HPLC arrojaron información de la concentración de glucosa y etanol. Posteriormente se realizó una comparación con REAC. En la figura 6 se muestra el cambio de las concentraciones de glucosa y etanol durante el proceso de fermentación controlada. Se observa que las tendencias en la disminución de la glucosa, para ambos métodos, son similares. En la concentración de etanol, HPLC obtiene 39.7 g/L de etanol, que corresponde al 48.25%. La estimación teórica de etanol producido en función de la concentración final de la glucosa por REAC, es de 42.04 g/L de etanol.

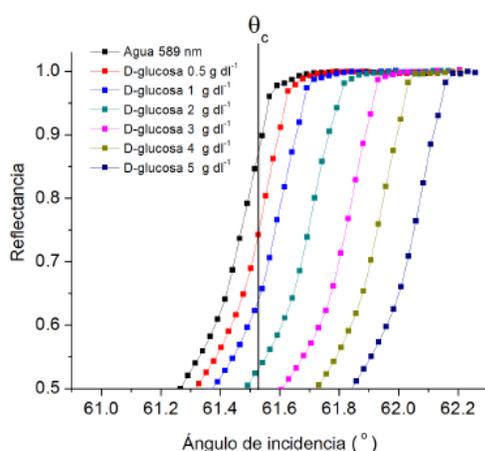


Fig. 3. Curvas de la reflectancia de agua y diferentes concentraciones de Dglucosa para 589 nm a 20°C.

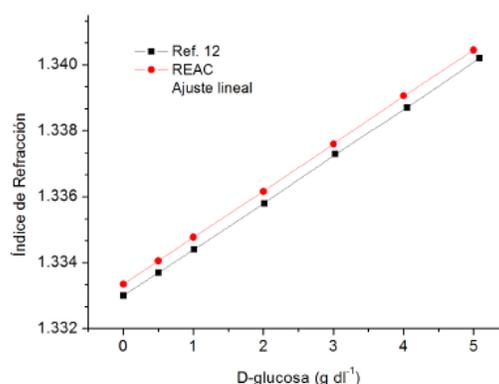


Fig. 4. Curvas de calibración de la dependencia de  $n$  con la concentración de glucosa en agua para 589 nm a 20°C

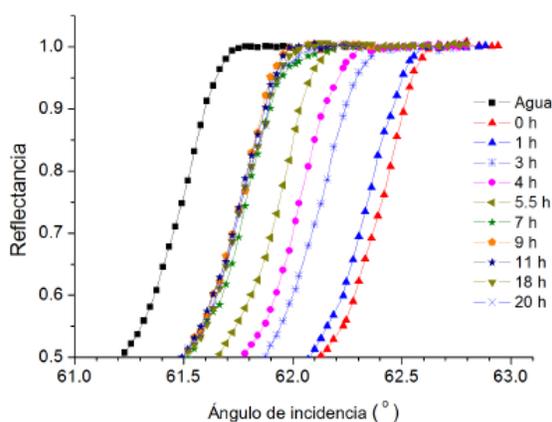


Fig. 5. Curvas de  $R$  para las diferentes muestras recolectadas en el proceso de fermentación a 589 nm a 20°C.

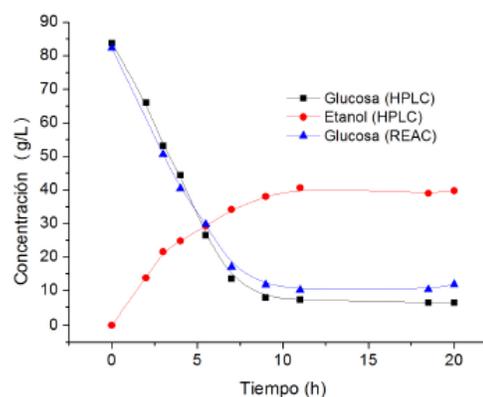


Fig. 6. Relación de la concentración en función del tiempo de los datos obtenidos por HPLC y REAC.

## 5. CONCLUSIONES

Se propuso el uso de la técnica de REAC para la determinación de etanol en un proceso de fermentación controlada. Se analizaron las curvas de la reflectancia en un rango espectral 320 a 1000 nm. En sistema de fermentación controlado se utilizó levadura *sacharomyces cerevisiae* durante 20 hrs a 30°C. Las curvas de calibración de la concentración de glucosa en agua fueron utilizadas para obtener el índice de refracción diferencial y se utilizó expresión simple, con dos longitudes de onda, para la determinación de la concentración de la glucosa en el sistema de fermentación. Se analizaron paralelamente las muestras con la técnica HPLC obteniendo una tendencia similar en la cinética de la concentración de la glucosa. Para la determinación de etanol se utilizó el valor teórico de rendimiento dando como resultado una concentración 42.04 g/L. Lo anterior sugiere que el método de REAC posee potencial para el seguimiento del proceso de fermentación a nivel industrial.

## BIBLIOGRAFÍA

1. J. A. Antonius van Maris, "Alcoholic fermentation of carbon source in biomass hydrolysates by *Saccharomyces cerevisiae*: current status", *Antonie van Leeuwenhoek*, Vol. 90, 2006, pp. 391–418.
2. M. O. Duran Quintana, O. Romero Barranco, P. García García, M. Brenes Balbuena, A. Garrido Fernández, "Bacterias del ácido láctico en la fermentación de aceitunas de mesa", *Grasas y Aceites*, Vol. 48, 5, 1997, pp-297-311.
3. Yan Lin, Shuzo Tanaka, "Ethanol fermentation from biomass resources: current state and prospects", *Appl Microbiol Biotechnol*", Vol. 69, 2006, pp. 627–642.
4. R. Ulber, J. Frerichs and S. Beutel, "Optical sensor system for bioprocess monitoring", *Anal. Bioanal Chem.*, Vol. 376, 2003, pp. 342-348.
5. S. Sivakesava, J. Irudayaraj and A. Demirci, "Monitoring a bioprocess for etanol production using FT-MIR and RT-Raman spectroscopy", *Journal of Industrial Microbiology and Biotechnology*, Vol. 26, 2001, pp. 185-190.
6. E. Fujiwara, E. Ono, T. Manfrim, J. S.Santos and C. K. Suzuki, "Measurement of sucrose and etanol cponcentration in process streams and effluents of sugarcane bioethanol industry by optical fiber sensor", *Proc. Of SPIE*, Vol. 7753, 2011, 77535I-1.
7. G. Mazarevica, J. Diewok, J. R. Baena, "On-line fermentation monitoring by Mid-infrared spectroscopy", Vol. 58, 7, 2004, pp. 804-810.
8. C. Sánchez-Pérez and A. García-Valenzuela, "Spectroscopic refractometer for transparent and absorbing liquids by reflection of white light near the critical angle", *Rev. Sci. Instrum.* Vol. 83, 2012,115102-1-7.
9. H. Sobral and M. Peña-Gomar, "Determination of the refractive index of glucose-ethanolwater mixtures using spectroscopic refractometry near the critical angle", *App. Opt.*, Vol 44, 28, 2015, pp. 8453-8458.
10. "Schott Optical Glass Data Sheets", [http://refractiveindex.info/download/data/2012/schott\\_optical\\_glass\\_collection\\_datasheets\\_dec\\_2012\\_us.pdf](http://refractiveindex.info/download/data/2012/schott_optical_glass_collection_datasheets_dec_2012_us.pdf), accessed 4/27/15.
11. M. Daimon and A Masumura, "Measurement of the refractive index of distilled water from the near-infrared region to the ultraviolet region", *Appl. Optics*, Vol. 46, 2007.
12. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, D.R. Lide, editor, (CRC Press, Boca Raton, FL, 2009).

## ANÁLISIS DE UN OBJETO CARGADO

Gabino Estevez Delgado<sup>1</sup>, Joaquin Estevez Delgado<sup>2</sup> y José Vega Cabrera<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Quimicofarmacobiología de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. <sup>2</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

### RESUMEN

La estructura interna de algunos objetos requiere de un análisis en el que sea considerado el efecto relativista, de manera particular el interior estelar cuando la densidad es del orden de la densidad nuclear o mayor. Teniendo esto en cuenta, para un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico realizamos el análisis del comportamiento de una solución a las ecuaciones de Einstein con fuentes descritas por las ecuaciones de Maxwell y fluido cargado anisotrópico con una ecuación de estado de Chaplygin para la presión radial. De manera específica es estudiado el comportamiento de la carga como función de la masa y de la razón de compacidad. Es mostrado que la carga como función del radio es una función monótona decreciente.

### 1. INTRODUCCIÓN

En construir soluciones a las ecuaciones de Einstein con características específicas permite ir entendiendo mejor la estructura de los objetos abordados en relatividad general. Por ejemplo en el caso de soluciones cargadas anisotrópica permite determinar si determinado tipo de estrellas son compatibles con los datos observacionales. Las primeras de las soluciones encontradas consideraban a la fuente de materia descrita por un fluido perfecto [1,2,3,4], para una revisión general de este tipo de soluciones se puede consultar el trabajo de Delgaty y Lake [5] y las referencias consideradas en el. Otros trabajos suponen presión anisotrópica han sido presentados y se ha mostrado que tales modelos son útiles para describir algunos objetos más compactos que en el caso del fluido perfecto [6,7]. Al igual has sido considerados modelos con carga y el efecto que genera la repulsión los hace de interés para representa estrellas compactas [8,9,10,11,12]. Para este tipo de estrellas se han establecido cotas sobre la razón de compacidad y estas pueden admitir valores mayores de compacidad [13,14,15,16]. Modelos con características más generales son los que consideran fluidos con presiones anisotrópicas cargados [17,18,19,20]. En recientes trabajos una estrategia para la construcción de soluciones estelares con propiedades físicamente aceptables es suponer una ecuación de estado y la asignación de una función métrica [21]. En [21] es construida una solución anisotrópica con una ecuación de estado tipo Chaplygin, es este reporte realizamos una generalización considerando un objeto cargado. La siguiente sección la dedicamos a presentar las ecuaciones asociadas a objetos compactos cargados en el marco de relatividad general para un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico, en la sección 3 damos las propiedades del comportamiento, en la sección 4 presentamos la forma grafica del comportamiento, finalizamos con la sección de las conclusiones.

## 2. SISTEMA DE ECUACIONES

El elemento de línea de un espacio tiempo esféricamente simétrico y estático puede ser descrito, en coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , por [4]:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \left(1 - 2\frac{m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

donde  $\phi(r)$  es la función de corrimiento al rojo gravitacional y  $m(r)$  es una función de masa y de carga. La fuentes de campos y materia es dada por el tensor de momento energía, formado por la parte del fluido anisotrópico mas la distribución del tensor de Maxwell:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_t)u_\mu u_\nu + P_t g_{\mu\nu} + (P_t - P_r)\chi_\mu \chi_\nu + \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

$\rho$  representa la densidad,  $P_r$  y  $P_t$  la presión radial y tangencial respectivamente,  $u$  la cuadrivelocidad y  $F_{\mu\nu}$  el tensor de Maxwell. Las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$  y la ecuación de conservación  $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$  con la métrica dada por (1) nos dan el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas a resolver:

$$\frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho + \frac{G}{c^2} \frac{q^2}{r^4} \quad (2)$$

$$\frac{2(r-2m)}{r^2 y} \frac{dy}{dr} - \frac{2m}{r^3} = \frac{8\pi G}{c^4} P_r - \frac{G}{c^2} \frac{q^2}{r^4} \quad (3)$$

$$\frac{2(r-2m)}{ry} \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{r-m}{r^2 y} \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r^2 y} \left( y + r \frac{dy}{dr} \right) \frac{dm}{dr} = \frac{8\pi G}{c^4} P_t + \frac{G}{c^2} \frac{q^2}{r^4} \quad (4)$$

$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r) \frac{d\phi}{dr} + \frac{2}{r} (P_t - P_r) + \frac{q^2}{r^4} \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{q^2}{r^2} \quad (6)$$

Nuestro sistema consiste de cuatro ecuaciones y seis incógnitas por lo que es necesario introducir dos relaciones adicionales, en nuestro caso supondremos una ecuación de estado y la forma explícita de la función de carga y masa.

## 3. CONDICIONES PARA UNA SOLUCIÓN FÍSICAMENTE ACEPTABLE

Para que la solución sea físicamente aceptable requerimos la imposición del conjunto de condiciones [22,23,24]:

- I. La solución debe estar libre de singularidades físicas y geométricas, es decir, valores finitos y positivos de presión central, densidad central, y los valores no cero positivos de  $f$  y  $g$ .
- II. La presión radial  $P_r$  debe anularse en la frontera, aunque la presión tangencial  $P_t$  no necesariamente se anula el límite  $r = r_b$ ,  $r_b$  radio de la esfera. Sin embargo, la presión radial es igual a la presión tangencial en el centro de la esfera de fluido.
- III. La densidad  $\rho$  y las presiones  $P_r, P_t$  deben ser positivas dentro de la estrella.
- IV.  $(dP_r/dr)_{r=0} = 0$  y  $(d^2P_r/dr^2)_{r=0} < 0$  de manera que el gradiente de la presión  $dP_r/dr$  es negativo para  $0 \leq r \leq r_b$ .
- V.  $(dP_t/dr)_{r=0} = 0$  y  $(d^2P_t/dr^2)_{r=0} < 0$  de manera que el gradiente de la presión  $dP_t/dr$  es negativo para  $0 \leq r \leq r_b$ .
- VI.  $(d\rho/dr)_{r=0} = 0$  y  $(d^2\rho/dr^2)_{r=0} < 0$  de manera que el gradiente de densidad  $d\rho/dr$  es negativo para  $0 \leq r \leq r_b$ . Las condiciones (iv)-(vi) implican que la presión y la densidad deben ser máximas en el centro y monótonamente decreciente hacia la superficie.
- VII. Dentro de la configuración estática la condición de causalidad debe ser obedecida; es decir, la velocidad del sonido debe ser inferior a la velocidad de la luz; es decir,  $0 \leq \sqrt{dP_r/c^2 d\rho} < 1$  y  $0 \leq \sqrt{dP_t/c^2 d\rho} < 1$ .
- VIII. Un tensor de energía-momento físicamente razonable tiene que obedecer a las condiciones  $\rho \geq P_r + 2P_t$  y  $\rho + P_r + 2P_t \geq 0$ .
- IX. El desplazamiento hacia el rojo central  $Z_0$  y el corrimiento al rojo de superficie  $Z_b$  debe ser positivo y finito; es decir,  $Z_0 = [e^{-v/2} - 1]_{r=0} > 0$  y  $Z_b = [e^{-v_b/2} - 1] > 0$  y ambas deben ser acotados.
- X. La intensidad Eléctrica  $E$  debe ser tal que  $E_{r=0} = 0$  y que esta es monótona decreciente.
- XI. El factor de anisotropía  $\Delta$  debe ser cero en el centro.

La solución que construimos es basada en el trabajo desarrollados en [25], aquí no damos su deducción, únicamente presentaremos la forma final y su representación grafica.

#### 4. CONSTRUCCION DE LA SOLUCIÓN

Para construir la solución, elegiremos una ecuación de estado y la forma explicita de la función de masa y de densidad suponemos una ecuación de estado de la forma

$$P_r = \mu c^2 \rho - \frac{v}{c^2 \rho} \quad (7)$$

y una función  $g$  de la forma

$$g(r) = 1 + \alpha r^2 \quad (7)$$

Con estas dos elecciones tenemos una ecuación diferencial ordinaria para la función  $f$ , que además involucra la función de carga, esta es elegida de manera que satisfaga la condición de ser monótona creciente. Debido al espacio el desarrollo de los cálculos no son presentados en este reporte. Se muestra solo el comportamiento de las variables, masa, carga, densidad y presiones radial y tangencial.

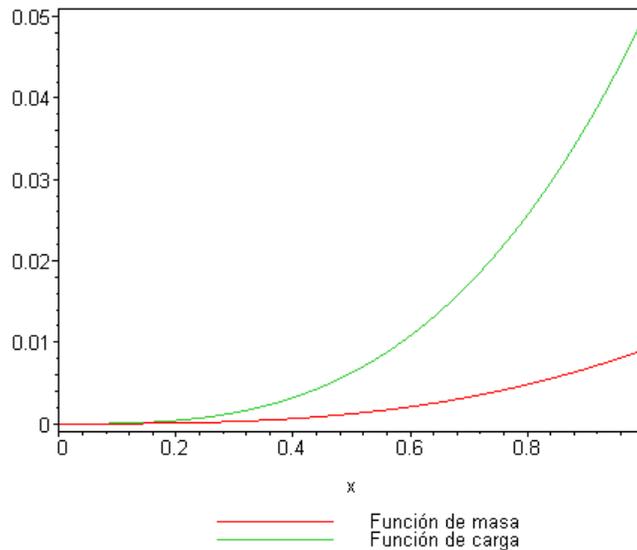
El comportamiento genérico de la solución es similar a las graficas que a continuación se muestra. Las graficas son generadas para el valor de los parámetros  $a = R^2/2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\nu = 361/6480 R^4 k^2$ . Para la representación grafica normalizamos las variables en la siguiente manera:

$$P(x)$$

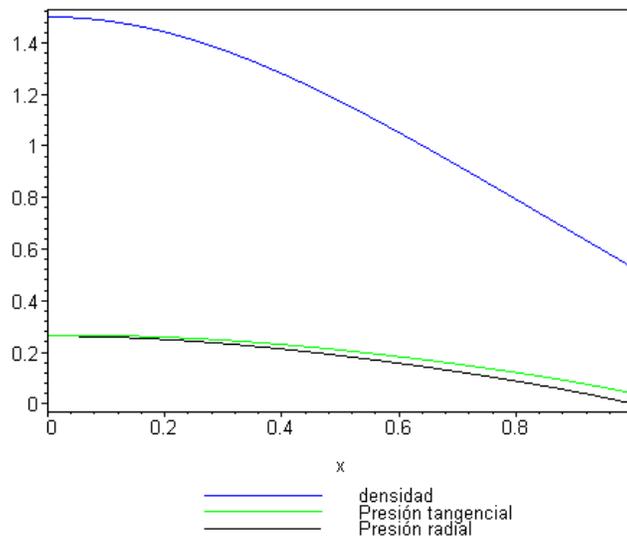
$$\rho_f(x) = kc^2 R^2 \rho, \quad P_{fr}(x) = kR^2 P_r, \quad P_{ft}(x) = kR^2 P_t, \quad v_{fr}^2(x) = \frac{v_r^2(r)}{c^2} \quad \text{y} \quad v_{ft}^2(x) = \frac{v_t^2(r)}{c^2}$$

$$m_f(x) = \frac{Gm(r)}{c^2}$$

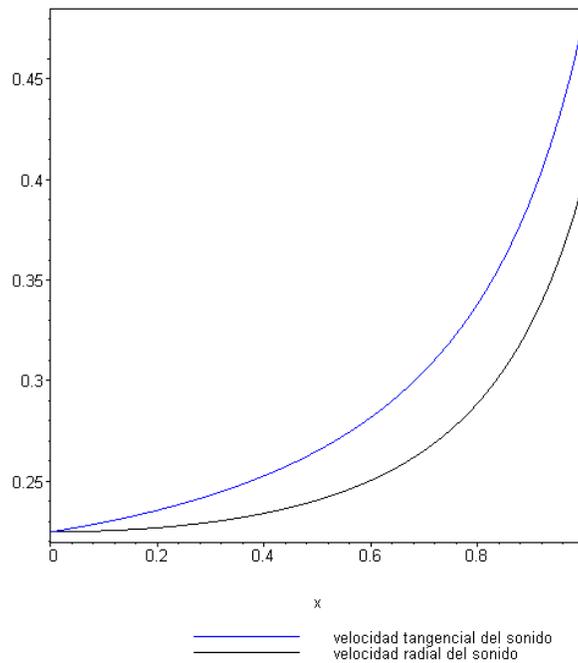
Las graficas normalizadas se presnetan a continuación



Grafica 1. Carga y masa



Grafica 2. Densidad, Presión radial y presión tangencial.



Grafica 3. Comportamiento de las velocidades radial y tangencial.

## 5. CONCLUSIONES

Hemos presentado un modelo estelar que satisface las condiciones requeridas para que este sea físicamente aceptable mostrando que la densidad y las presiones anisotrópicas son monótonas

decrecientes, mientras que las funciones de masa y carga son monótonas crecientes. Además se muestra que las velocidades del sonido radial y tangencial son menores que la velocidad de la luz.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas “Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”, así como a la Facultad de Químico Farmacobiología, de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y a la Coordinación de la Investigación Científica las facilidades brindadas durante la realización de este trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Schwarzschild K, Berlin Ber. 424 (1916), K. Schwarzschild (translation by S. Antoci) On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory: <http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9912033>
2. Richard C. Tolman, “Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid”, Phys. Rev. Vol 55,(1939) pp. 364–373
3. J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On Massive Neutron Cores”, Phys. Rev. Vol 55, (1939) , pp 374–381
4. M.C. Durgapal and R.S. Fuloria, “Analytic relativistic model for a superdense star” Gen. Rel. Grav. 17(7) (1985) pp 671-681
5. Physical Acceptability of Isolated, Static, Spherically Symmetric, Perfect Fluid Solutions or Einstein's Equations.M.S.R. Delgaty and Kayll Lake, gr-qc/9809013v1 2Sep 1998.
6. R. Bower and E.P.T. Liang, Astrophys. J. 188, (1967)657.
7. Boiko V. Ivanov. Maximum bounds on the surface redshift of anisotropic stars.Phys. Rev. D 65,(2002) 104011.
8. Ivanov B V, “Static charged perfect fluid spheres in general relativity” Phys. Rev. D 65 (2002) 104001
9. Sharma R, Mukherjee S y Maharaj S D, “General Solution for a Class of Static Charged Spheres” Gen. Relativ. Gravit. Vol 33 (2001) pp 999 -1009
10. Mohammad Hassan Murad, Saba Fatema, A family of well behaved charge analogues of Durgapal's perfect fluid exact solution in general relativity arXiv:1210.0712 [gr-qc]
11. Y.K. Gupta · Sunil Kumar Maurya, “A class of charged analogues of Durgapal and Fuloria superdense star” , Astrophys Space Sci Vol 331, (2011), pp 135–14
12. Jointly y A. Mussa Charged perfect fluids in the presence of a cosmological constant General Relativity and Gravitation Vol 43 (2011) pp 3033-3046
13. M. K. Mak, Peter N. Dobson Jr. y T. Harko. ” Maximum Mass-Radius Ratios for Charged Compact General Relativistic Objects”Europhys.Lett. 55 (2001) 310-316
14. Jointly, H. Andréasson y A. Mussa, Bounds on M/R for Charged Objects with positive Cosmological constant Classical and Quantum Gravity 29 (2012) 095012 [1201.5725 gr-qc]
15. Jointly y H. Andréasson,Bounds on M/R for static objects with a positive cosmological constant Classical and Quantum Gravity 26 (2009) 195007 [0904.2497 gr-qc]
16. Jointly y T. Harko,Minimum mass-radius ratio for charged gravitational objects General Relativity and Gravitation 39 (2007) 757-775 [gr-qc/0702078]
17. Thirukkanesh S y Maharaj S D, “Charged anisotropic matter with a linear equation of state”, Class. Quantum Grav. Vol 25 (2008) 235001
18. Tooba Feroze y Azad A. Siddiqui, Charged anisotropic matter with quadratic equation of state, General Relativity and Gravitation, Vol 43, 4 (2011), pp 1025-1035

19. Thirukkanesh S y Maharaj S D, "Charged anisotropic matter with a linear equation of state", *Class. Quantum Grav.* Vol 25 (2008) 235001
20. Tooba Feroze y Azad A. Siddiqui, Charged anisotropic matter with quadratic equation of state, *General Relativity and Gravitation*, Vol 43, 4 (2011), pp 1025-1035
21. Piyali Bhar, Strange star admitting Chaplygin equation of state in Finch–Skea spacetime, *Astrophys Space Sci* (2015) 359:41 DOI 10.1007/s10509-015-2492-3
22. Mak, M.K., Harko, T. An Exact Anisotropic Quark Star Model *Chin. J. Astron. Astrophys.* 3, 248 (2002). doi:10.1088/1009-9271/2/3/248
23. Mak, M.K., Harko, T. Anisotropic stars in general relativity *Proc. R. Soc. Lond. A* 459, 393 (2003). doi:10. 1098/rspa.2002.1014
24. Mak, M.K., Dobson, P.N., Harko, T. Exact models for anisotropic relativistic stars *Int. J. Mod. Phys. D* 11, 207 (2002). doi:10.1142/S0218271802001317

