ESTUDIO TEÓRICO DE LA ESTRUCTURA ELECTRÓNICA Y REACTIVIDAD DE CÚMULOS DE COBALTO $Co_{16}q(O)_n$ (n=0-6 y q=0-1)

Facio Muñoz J. G.¹, Tenorio Rangel F. J.², Rodríguez Zavala J. G.²

¹Posgrado en Ciencia y Tecnología, Centro Universitario de los Lagos, (aleman.iak@hotmail.com); ²Departamento de Ciencias Exactas y Tecnología, Centro Universitario de los Lagos, (ftenorio@culagos.udg.mx, jgrz@culagos.udg.mx). Universidad de Guadalajara.

RESUMEN

El estudio teórico y experimental acerca de cúmulos de metales, entre ellos los metales de transición, se encuentra en constante crecimiento debido a las diversas aplicaciones que muestran estos sistemas, los cuales son caracterizados por una relativa dependencia entre las propiedades físicas, químicas, electrónicas y magnéticas respecto al tamaño y la geometría. Dichas propiedades son sustancialmente diferentes tanto a las del átomo como a las del sólido o *bulk*, y por lo tanto, tienen características únicas e inesperadas para cada tamaño de cúmulo, incluso aunque se trate de elementos vecinos en la tabla periódica. En este sentido, tanto la estructura geométrica como la electrónica de estas partículas se ven afectadas significativamente por la adición o remoción de un solo átomo. Como ejemplo de este tipo de partículas se tiene a los cúmulos de cobalto los cuales son sistemas que poseen propiedades y características que le permiten el rompimiento de moléculas sobre su superficie. En este trabajo, se realiza un estudio teórico acerca de la estructura electrónica y reactividad de cúmulos de 16 átomos de cobalto tanto de naturaleza neutra como catiónica donde se analiza la quimisorción de átomos de oxígeno, bajo el formalismo de la Teoría de Funcionales de la Densidad (TFD).

INTRODUCCIÓN

El uso de metales de transición para la construcción de cúmulos con aplicación en procesos de disociación de moléculas ha sido objeto de intensas investigaciones en las últimas décadas. Entre estos cúmulos metálicos se encuentran los cúmulos de cobalto, los cuales pueden ser utilizados como agentes catalíticos en reacciones de rompimiento de moléculas que en la naturaleza resultan ser perjudiciales para el ser humano, como lo son las moléculas de gases de N_2O y NO [1]. Lo anterior ha motivado a la comunidad científica a realizar diversas investigaciones para proponer alternativas donde se aprovechen las propiedades catalíticas del cobalto para eliminar la formación de este tipo de compuestos. Es de esta manera, que en este trabajo se realiza una investigación teórica en el marco de la TFD [2] acerca de la estructura electrónica y reactividad de cúmulos de cobalto constituidos por 16 átomos tanto neutros como cationes Co169(O)n (n=0-6 y q=0-1). Las estructuras iniciales para la optimización de las geometrías, fueron tomadas de las trayectorias desarrolladas mediante la metodología de Dinámicas Moleculares Born-Oppenheimer (BOMD)[3]. Se realizó el análisis de la quimisorción de átomos de oxígeno sobre la superficie del cúmulo metálico en sitios reactivos que han sido determinados mediante el cálculo de la reactividad local que se obtiene mediante el cálculo de las funciones de Fukui [2]. Dicha quimisorción de átomos de oxígeno ha sido sugerida de manera experimental en la literatura [5], lo cual indica que se lleva a cabo el rompimiento de moléculas de NO sobre la estructura del Co169. Finalmente, se calcularon los índices de reactividad global tales como: el potencial de ionización (I), afinidad electrónica (A)(ambos de naturaleza vertical) así como el potencial químico (µ) para la caracterización de dichas estructuras.

METODOLOGÍA

Se realizó la búsqueda de estructuras de menor energía sobre la superficie de energía potencial utilizando las trayectorias desarrolladas mediante la metodología BOMD [3] la cual resuelve las ecuaciones de Kohn y Sham [5] para el problema electrónico así como el análisis de la propagación de los núcleos atómicos modelados mediante dinámica molecular en cada paso de la simulación. Dicha metodología se encuentra implementada en el paquete computacional Gaussian 09 [6] donde se utilizó el funcional VWN [7][8] con el pseudopotencial LANL2DZ[9] para los átomos de cobalto y la base D95V[10] para el resto de los dos átomos. Posteriormente se realizó una reoptimización de

las geometrías bajo el nivel de teoría BPW91/6-311G [11][12][13]. Se calcularon las funciones de Fukui como descriptores locales para la determinación de los sitios reactivos que ayudarían en la predicción de estructuras.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

a. Geometrías y Funciones de Fukui

En la Figura 1 se muestran las geometrías del cúmulo puro o aislado conformado por 16 átomos de cobalto en estado neutro y catión. La estructura más estable para el cúmulo neutro tiene una multiplicidad de 33, dicha geometría fue comparada con la reportada en la literatura [14] donde es evidente que existe alta correspondencia estructural. En la misma figura se muestra el cúmulo catiónico Co_{16}^+ , el cual presenta una multiplicidad de espín electrónico de 32. Se puede observar que ambas estructuras son geométricamente similares sugiriendo de esta manera que no existe efecto alguno al ionizar la estructura neutra.



Figura 1. Geometrías para los cúmulos Co₁₆q (q=0-1) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Los átomos de cobalto se muestran en color gris.

En la referencia de Anderson y colaboradores [4] se muestra un espectro de masas que sugiere la quimisorción de hasta 8 átomos de oxígeno por parte del cúmulo Co_{16^+} . Dichos átomos de O son provenientes de la disociación de moléculas de óxido nítrico NO, indicando así la posible liberación de nitrógeno molecular en el proceso experimental descrito en dicho trabajo. Con el objetivo de determinar la geometría y la reactividad del cúmulo de cobalto que muestra dicha guimisorción disociativa de moléculas de NO, en este trabajo se procedió a identificar las zonas reactivas que pudieran adsorber los átomos de oxígeno de manera gradual. Este análisis se llevó a cabo mediante el cálculo de las funciones de Fukui para los sistemas neutros tal como se muestra en la Figura 2. En dicha figura se presenta la reactividad nucleofílica, $f^{-q}(r)$, electrofílica, $f^{-}(r)$, y ante radicales, $f^{0}(r)$, representadas por los glóbulos en color púrpura sobre cada uno de los átomos que conforman el cúmulo de cobalto. Se puede observar que la reactividad ante ataques nucleofílicos para el cúmulo Co16 es poco probable, ya que la representación muestra que tal reactividad sería de menor proporción que la reactividad ante ataques electrofílicos, la cual es evidente que se presenta con mayor probabilidad en los átomos 1, 2 y 7 de cobalto. Se puede ver también que, de acuerdo a la definición de las funciones de Fukui, la reactividad ante radicales es el promedio de las dos anteriores, lo cual indica que el sistema Co₁₆ presenta poca susceptibilidad a reaccionar ante especies químicas de esa naturaleza.



Figura 2. Funciones de Fukui para el cúmulo Co₁₆. Reactividad hacia ataques nucleofílicos f⁺(r), electrofílicos f⁻(r) y ante especies radicales f⁰(r). Cálculos realizados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Isovalor usado 0.002. Los átomos de cobalto se muestran en color gris y las zonas púrpura representan la reactividad local respectiva.

A partir de los resultados de las funciones de Fukui descritos para este sistema neutro, se propusieron diferentes estructuras situando el primer átomo de oxígeno en regiones con mayor probabilidad de reaccionar ante ataques electrofílicos. La fundamentación de tal hecho se sustenta en la naturaleza de la configuración electrónica del oxígeno ya que se supuso que este átomo se comportaría como un aceptor de electrones por parte del cúmulo de cobalto, y por ende, buscaría enlazarse a dicho sistema en regiones susceptibles a ataque electrofílicos. Es de esta manera que mediante la metodología que incluye BOMD y posteriormente la reoptimización bajo el nivel de teoría mencionado, las geometrías más estables para los cúmulos $Co_{16}^{q}(O)$ se muestran en la Figura 3. Es evidente que para ambos sistemas, neutro y catión, ocurre quimisorción del átomo de oxígeno sobre la superficie del cúmulo de cobalto respectivo. Se observa que la inclusión del átomo de O no produce fragmentación de los sistemas Co_{16}^{q} . Además, debido a que ambas geometrías son bastante similares se supone que no existe ningún efecto estructural al ionizar $Co_{16}O$. Es importante notar que las multiplicidades siguen siendo las mismas que para el sistema aislado en su estado neutro y catión, 33 y 32 respectivamente.



Figura 3. Geometrías para los cúmulos Co₁₆q(O) (q=0-1) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Los átomos de cobalto se muestran en color gris y los átomos de oxígeno se muestran en color rojo.

Para determinar el sitio donde sería adsorbido el segundo átomo de oxígeno, se calcularon las funciones de Fukui de $Co_{16}(O)$. Dichos resultados se muestran en la Figura 4 donde es claro que el ataque nucleofílico es más probable alrededor del átomo de oxígeno; es decir, en los átomos 1, 2 y 3 de cobalto, sugiriendo que es la zona con mayor susceptibilidad de aceptar densidad de carga. Con respecto al ataque electrofílico, se observa que la mayoría de los átomos de cobalto presentan

susceptibilidad a ceder densidad de carga, siendo más probable entre los átomos 1 y 2 de cobalto. La reactividad ante especies radicales se presenta con mayor probabilidad en los átomos 1, 2 y 3 como era de esperarse debido a que resulta ser un promedio de las dos funciones anteriores.



Figura 4. Funciones de Fukui para el cúmulo Co₁₆(O). Reactividad hacia ataques nucleofílicos f⁺(r), electrofílicos f⁻(r) y ante especies radicales f⁰(r). Cálculos realizados con el nivel de teoría
 BPW91/6-311G. Isovalor usado 0.002. Los átomos de cobalto se muestran en color gris, el oxígeno en color rojo y las zonas púrpura representan la reactividad local respectiva.

Siguiendo con la premisa de que el átomo de oxígeno buscaría ser adsorbido en zonas electrofílicas del cúmulo metálico, para este caso se tienen mayor número de posibilidades donde se podría dar dicho enlace. A tales estructuras posibles, se les calcularon las trayectorias descritas por BOMD y se determinaron las estructuras que correspondieron a mínimos de energía relativa. Posteriormente se realizó la reoptimización respectiva, de tal manera que las estructuras más favorecidas energéticamente para los sistemas neutro y catión de $Co_{16}^{q}(O)_{2}$, resultaron ser las que se muestran en la Figura 5. En ambos casos, neutro y catión, no se observa distorsión del cúmulo metálico al incluir un átomo más de O. Además, de acuerdo a la geometría $Co_{16}^+(O)_2$, no ocurren cambios estructurales al ionizar el sistema neutro. Las multiplicidades se mantienen iguales que para los casos Co_{16}^{q} , Co_{16}^{q} (O), lo cual sugiere que no se modifica la configuración electrónica con la adición de un átomo más de O. Es importante notar que las zonas donde han sido quimisorbidos estos átomos de oxígeno, corresponden a regiones con alta reactividad electrofílica; además, se trata de regiones donde los glóbulos que representan tal reactividad se orientan hacia el centro de la cara formada por tres átomos de cobalto. Esta afirmación se hace ya que el segundo átomo de oxígeno ha sido quimisorbido en el centro del triángulo formado por los átomos 4, 5 y 6 de cobalto del cúmulo Co₁₆O (véase la Figura 4).



Figura 5. Geometrías para los cúmulos Co₁₆q(O)₂ (q=0-1) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Los átomos de cobalto se muestran en color gris y los átomos de oxígeno se muestran en color rojo.

En la Figura 6 se muestran la funciones de Fukui para el sistema $Co_{16}(O)_2$. Los átomos 1, 2 y 4 de cobalto muestran la mayor probabilidad de aceptar densidad de carga. Por otro lado, el átomo 2 de

cobalto junto con el átomo de oxígeno 1, muestran regiones susceptibles a ceder densidad de carga, sugiriendo que es la zona donde sería posible adsorber un átomo de oxígeno. La reactividad ante radicales se presenta con mayor proporción en los átomos 1 y 4 de cobalto de este sistema.



Figura 6. Funciones de Fukui para el cúmulo Co₁₆(O)₂. Reactividad hacia ataques nucleofílicos f⁺(r), electrofílicos f⁻(r) y ante especies radicales f⁰(r). Cálculos realizados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Isovalor usado 0.002. Los átomos de cobalto se muestran en color gris, el oxígeno en color rojo y las zonas púrpura representan la reactividad local respectiva.

A partir de los resultados mostrados en la Figura 6, se determinó el tercer sitio reactivo para la adsorción de otro átomo de O. Sin embargo, las zonas con probabilidad de reactividad electrofílica no arrojaron una estructura que fuera favorecida energéticamente para proponerla como la más estable. Tal como se muestra en la Figura 7, el tercer átomo de oxígeno fue adsorbido en el centro de los átomos 1, 3, 4 y 6 de cobalto (ver Figura 6) correspondiendo a una zona donde es más probable la reactividad ante ataques nucleofílicos. Es decir, el tercer átomo de oxígeno aparentemente cede densidad de carga al sistema para estabilizarlo. En la Figura 7 se puede observar que dada, la quimisorción de los tres átomos de O, la geometría catiónica presenta una ligera distorsión estructural respecto a la geometría neutra, indicando el efecto de eliminar un electrón de dicho sistema. Nuevamente las multiplicidades se mantienen constantes para ambos sistemas mostrados en esta figura, lo cual sugiere que la densidad electrónica del tercer oxígeno no cambia la configuración electrónica del sistema.



Figura 7. Geometrías para los cúmulos Co₁₆q(O)₃ (q=0-1) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Los átomos de cobalto se muestran en color gris y los átomos de oxígeno se muestran en color rojo.

Se calcularon las funciones de Fukui de este cúmulo con tres átomos de oxígeno, las cuales se muestran en la Figura 8. Es evidente que el sistema $Co_{16}(O)_3$ es altamente reactivo a aceptar densidad de carga en zonas cercanas a los átomos 1, 3, 4, 6 y 8 de cobalto. Mientras que para el caso inverso; es decir para ceder densidad de carga, los átomos 4 y 12 de cobalto, junto con el átomo 2 de oxígeno, resultan ser las regiones donde sería más probable este tipo de reactividad. Respecto a la susceptibilidad ante radicales, esta se muestra con mayor probabilidad en los átomos 1, 3 y 4 de cobalto.



Figura 8. Funciones de Fukui para el cúmulo Co₁₆(O)₃. Reactividad hacia ataques nucleofílicos f⁺(r), electrofílicos f⁻(r) y ante especies radicales f⁰(r). Cálculos realizados con el nivel de teoría
 BPW91/6-311G. Isovalor usado 0.002. Los átomos de cobalto se muestran en color gris, el oxígeno en color rojo y las zonas púrpura representan la reactividad local respectiva.

Utilizando los resultados mostrados en la Figura 8, se procedió a determinar la zona donde sería adsorbido el cuarto átomo de oxígeno sobre la superficie del sistema $Co_{16}(O)_3$. Para tal cálculo se utilizaron diferentes configuraciones. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 9 donde el cuarto átomo de oxígeno ha sido quimisorbido en el triángulo formado por los átomos 1, 7 y 8 de cobalto (ver Figura 8). Dicha región es principalmente reactiva a aceptar electrones de acuerdo a lo que se muestra en la Figura 8. De esta manera, es evidente que el átomo de oxígeno vuelve a comportarse como donador de electrones para conseguir estabilizar el sistema $Co_{16}(O)_4$. Nuevamente se observa gran similitud estructural entre los sistemas neutro y catión de esta composición, además de que se presentan las mismas multiplicidades (33 y 32 respectivamente) referidas para los sistemas anteriormente descritos en este trabajo, lo cual refleja la estabilidad del cúmulo Co_{16}^{q} .



Figura 9. Geometrías para los cúmulos Co₁₆q(O)₄ (q=0-1) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Los átomos de cobalto se muestran en color gris y los átomos de oxígeno se muestran en color rojo.

Continuando con la búsqueda de los sitios reactivos para la quimisorción de átomos de oxígeno, se

calcularon las funciones de Fukui del sistema $Co_{16}(O)_4$ para la determinación de la zona donde sería quimisorbido el quinto átomo de oxígeno. Los resultados se muestran en la Figura 10 donde ahora la reactividad nucleofílica se centra principalmente en los átomos 4, 5, 6, 8 y 9 de cobalto. Por otro lado, la probabilidad de ceder densidad de carga está presente en la mayoría de los átomos de cobalto que conforman el sistema; sin embargo, los glóbulos que representan esta reactividad se muestran con mayor proporción en la región formada por los átomos 6, 7 y 9 de cobalto. En la Figura 10, se sugiere que los ataques ante radicales podrían ser más probables en esta misma región electrofílica del sistema $Co_{16}(O)_4$.



Figura 10. Funciones de Fukui para el cúmulo Co₁₆(O)₄. Reactividad hacia ataques nucleofílicos f⁺(r), electrofílicos f⁻(r) y ante especies radicales f⁰(r). Cálculos realizados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Isovalor usado 0.002. Los átomos de cobalto se muestran en color gris, el oxígeno en color rojo y las zonas púrpura representan la reactividad local respectiva.

En la adsorción del quinto átomo de oxígeno, los resultados sugieren que la estructura de menor energía es precisamente aquella que adsorbe el átomo de O sobre la región formada por los átomos 6, 7 y 9 de cobalto, la cual es una región con alta probabilidad a ceder densidad de electrones (ver Figura 10). Las geometrías se muestran en la Figura 11, donde es evidente que no hay distorsión al ionizar la composición $Co_{16}(O)_5$. Nuevamente las multiplicidades 33 y 32 para el sistema neutro y catión respectivamente, se mantienen constantes.



Figura 11. Geometrías para los cúmulos Co₁₆q(O)₅ (q=0-1) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Los átomos de cobalto se muestran en color gris y los átomos de oxígeno se muestran en color rojo.

Los resultados de las funciones de Fukui para el sistema $Co_{16}(O)_5$, sugieren los posibles sitios reactivos para adsorber el sexto átomo de oxígeno (ver Figura 12). La reactividad nucleofílica se centra principalmente en los átomos 4, 6, 10, 11 y 12 de cobalto, mientras que la capacidad de ceder electrones es más probable en los átomos 3, 5, 7 y 8 de cobalto. Por otro lado, la susceptibilidad de reaccionar con especies radicales esta principalmente en los átomos 3 y 8 de cobalto.

Cúmulo	Funciones de Fukui			
	f +(r)	f -(r)	f ⁰ (r)	
Co ₁₆ (O) ₅				

Figura 12. Funciones de Fukui para el cúmulo Co₁₆(O)₅. Reactividad hacia ataques nucleofílicos f⁺(r), electrofílicos f⁻(r) y ante especies radicales f⁰(r). Cálculos realizados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Isovalor usado 0.002. Los átomos de cobalto se muestran en color gris, el oxígeno en color rojo y las zonas púrpura representan la reactividad local respectiva.

De acuerdo a estos resultados, los mínimos de las trayectorias descritas por BOMD sugieren que la estructura de menor energía es aquella donde el sexto átomo de oxígeno es adsorbido en el centro de la región triangular formada por los átomos 10, 11 y 12 de cobalto (ver Figura 12), la cual corresponde a una zona con gran posibilidad de aceptar densidad de electrones; es decir, que para el sistema $Co_{16}(O)_5$, el sexto átomo de oxígeno viene a donar densidad de carga para conseguir una estabilidad energética, de tal manera que incluso no se modifica la multiplicidad de espín electrónico, la cual se ha mantenido constante con un valor de 33 para el sistema neutro y de 32 para el sistema catión. Se puede observar una ligera distorsión del $Co_{16}^+(O)_6$ con respecto al sistema neutro. Dicha distorsión se le atribuye al efecto de ionizar al arreglo $Co_{16}(O)_6$.





Se muestran las funciones de Fukui de la composición $Co_{16}(O)_6$ en la Figura 14, tal que sea posible determinar el sitio reactivo para un séptimo átomo de oxígeno, ya que se ha visto que dicha quimisorción puede ocurrir tanto en zonas nucleofílicas como electrofílicas. Se observa que la las zonas con probabilidad de recibir densidad de carga están principalmente en los átomos 6, 9 y 12 de cobalto, mientras que las zonas donde es posible ceder densidad de carga están presentes en mayor proporción en las regiones cercanas a los átomos 5, 6, 7 y 8. Ésta última región también resulta ser reactiva hacia especies radicales.

Cúmulo	Funciones de Fukui			
	f +(r)	f -(r)	f ^o (r)	
Co ₁₆ (O) ₆			04 04 03 03 03 10 10 12 06	

Figura 14. Funciones de Fukui para el cúmulo Co₁₆(O)₆. Reactividad hacia ataques nucleofílicos f⁺(r), electrofílicos f⁻(r) y ante especies radicales f⁰(r). Cálculos realizados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Isovalor usado 0.002. Los átomos de cobalto se muestran en color gris, el oxígeno en color rojo y las zonas púrpura representan la reactividad local respectiva.

De esta manera, para conseguir predecir el sitio donde sería adsorbido el séptimo átomo de oxígeno, es necesario tomar en cuenta tanto los sitios susceptibles a ceder como aceptar densidad de carga. *b. Índices de reactividad global*

Finalmente se muestran los índices de reactividad global obtenidos de naturaleza vertical. En la Gráfica 1 se dan los resultados del potencial de ionización (I) en electrón-Volts para cada sistema neutro estudiado en este trabajo. Es evidente que conforme aumenta el número de oxígenos sobre la superficie del cúmulo Co_{16} (excepto para $Co_{16}(O)_2$), más energía será necesaria para ionizar el sistema. Este resultado sugiere que la adición de átomos de oxígeno puede darse de manera gradual sin afectar significativamente la estructura y la configuración electrónica, lo cual concuerda con el hecho de que las multiplicidades se mantengan constantes.





En la Gráfica 2 se muestran los valores de las afinidades electrónicas para los sistemas neutros descritos anteriormente. Se puede observar que el valor de este descriptor global aumenta con respecto al número de átomos de oxígeno; es decir, que se libera mayor cantidad de energía con la adición de un electrón al sistema conforme más átomos de oxígeno se tengan sobre la superficie de Co_{16} .



Gráfica 2. Afinidad electrónica (A) para los cúmulos $Co_{16}(O)_n$ (n=0-6) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Energía dada en electrón- Volts (eV).

Los resultados del potencial químico se presentan en la Gráfica 3, de donde se puede concluir que conforme aumenta el número de átomos de oxígeno sobre el cúmulo de cobalto, menor tendencia se tiene a presentar un flujo de densidad de carga, lo cual sugiere que el sistema adquiere estabilidad con la quimisorción de átomos de oxígeno. Este hecho tiene relación con los resultados del potencial de ionización, ya que estos últimos sugieren que existe mayor resistencia a ser ionizados de manera catiónica.



Gráfica 3. Potencial químico (μ) para los cúmulos $Co_{16}(O)_n$ (n=0-6) calculados con el nivel de teoría BPW91/6-311G. Energía dada en electrón- Volts (eV).

CONCLUSIONES

Se destaca la eficiencia de la metodología utilizada para la obtención de la estructura Co_{16} , ya que concuerda con datos reportados en la literatura [14]. La quimisorción de átomos de oxígeno sobre la superficie del cúmulo de cobalto Co_{16} corresponde con lo que se señala en la referencia de Anderson y colaboradores [4], donde se sugiere la disociación experimental de 8 moléculas de *NO* de manera gradual. Los resultados de las funciones de Fukui indican que los átomos de oxígeno pueden comportarse como donadores o aceptores de electrones dependiendo de cuantos átomos de *O* han sido quimisorbidos antes sobre el sistema. Las estructuras han sido obtenidas de manera gradual con respecto al número de átomos de oxígeno adsorbidos ya que la adición de cada uno de estos,

cambia la reactividad local de toda la superficie del cúmulo metálico. De acuerdo a los resultados de la reactividad global, la estabilidad del sistema estará en función del número de átomos de oxígeno que han sido enlazados al cúmulo de cobalto, es decir, mayor estabilidad conforme más átomos de O estén presentes sobre Co_{16} .

REFERENCIAS

- 1. V.I. Parvulescu, P. Grange, B. Delmon, Catalysis Today 46 233-316, 1998.
- 2. Parr Robert G., Yang Weitao. Oxford University Press, USA, New York, 1994.
- 3. Robert N Barntt, Uzi Landman, Phys. Rev. B 48 (4) 2081-2097, 1993.
- 4. M. L. Anderson, A. Lacz, T. Drewello, P. J. Derrick, D. P. Woodruff, y S. R. Mackenzie. The Journal of Chemical Physics 130, 064305, 2009.
- 5. Kohn W. Sham J. Phys Rev. 137, A1697-A1705, 1965.
- 6. M. J. Frisch, et. al., Gaussian Inc. Wallingford CT 2009.
- 7. P. Hohenberg, W. Kohn. Phys. Rev., 136(3B):B864-B871, 1964.
- 8. S. H. Vosko, L. Wilk, M. Nusair. Canadian Journal of Physics, 58(8):1200–1211, 1980.
- 9. P. Jeffrey Hay, Willard R. Wadt. The Journal of Chemical Physics, 82(1):270–283, 1985.
- 10. T. H. Dunning Jr., P. J. Hay. in Modern Theoretical Chemistry. Ed. H. F. Schaefer III, New York, plemnum press edition, 1977.
- 11. A. D. Becke. Phys. Rev. A, 38(6):3098-3100, 1988.
- 12. Yue Wang, John P. Perdew. Phys. Rev. B, 43(11):8911-8916, 1991.
- 13. R. Krishnan, J. S. Binkley, R. Seeger, J. A. Pople. The Journal of Chemical Physics, 72(1):650–654, 1980.
- 14. Lixin Zhan, Chen Jeff Z., Wing-Ki Liu, S. K. Lai. The Journal of Chemical Physics, 122(24):244707, 2005.

MODOS DE VIBRACIÓN DE DOS PLACAS CONECTADAS POR UN CANAL

Manuel Vega Guzmán, Omar Ortiz Guzmán, José Vega Cabrera, Gabriel Arroyo Correa

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio experimental de los modos de vibración (de 100 a 1000 Hz) de una estructura que consiste de una placa de cartón cortada en forma de la letra "H", en donde los extremos corresponden a placas cuadradas (de dimensiones 15X15 cm) y la parte central corresponde a un canal de acoplamiento de longitud fija (5 cm) y anchura variable (7, 5, 3, 1 cm). Se usó la técnica de Chladni, que consiste en montar la placa a analizar sobre un vibrador y esparcir material granular ligero sobre su superficie, para obtener un registro gráfico de los modos de vibración. Se utilizó también instrumentación moderna (generador de funciones, vibrador, sensores de sonido, sistema de adquisición y procesamiento de datos, computadora) para obtener de manera precisa el espectro de Fourier del modo de vibración correspondiente. Los resultados muestran que: a) a frecuencias bajas (del orden de 240 Hz) los espectros de Fourier muestran resonancias adicionales a la que resonaría solo una de las placas cuadradas, b) los patrones de Chaldni, en la mayoría de los caos, son diferentes en la placa derecha y en la placa de la izquierda (sólo a frecuencias del orden de 370 Hz los patrones son similares). Agradecimiento: CIC-UMSNH 2018.

INTRODUCCIÓN

La técnica de Chladni es un procedimiento simple y visualmente atractivo para observar los patrones de vibración de placas fue inventada por Ernst Chladni [1]. Originalmente el método consistía en hacer vibrar una placa sujeta a una base por medio de un arco de violín. En la actualidad, la placa a analizar se monta sobre un vibrador y se esparce material granular ligero sobre su superficie. Cuando el vibrador se pone a oscilar a una frecuencia específica, el material granular empezará a agregarse sobre las líneas nodales del patrón vibratorio correspondiente a una de las frecuencias de resonancia de la placa. En principio, es posible obtener información de las propiedades mecánicas de la placa a partir de sus patrones de Chladni. A pesar de que el cartón es un material difícil de trabajar en los estudios de vibración, en trabajos recientes [2], [3], demostramos que es posible estudiar la dinámica de vibración en estructuras de cartón más complejas. En este trabajo se estudia experimentalmente los patrones de Chladni de dos placas de cartón conectadas por un canal.

PARTE EXPERIMENTAL

El arreglo experimental es similar al indicado en la ref. 2. En el presente trabajo se diseñó una estructura de cartón cortada en forma de la letra "H", como se muestra en la Fig. 1. La estructura se fijó al vibrador por su placa izquierda, en tanto que la placa derecha se apoyó libremente sobre un pivote aislante, cuidando siempre que la estructura estuviera en posición horizontal. Los patrones de Chladni se obtuvieron espolvoreando sal sobre la estructura y variando la frecuencia hasta obtener patrones definidos. Para identificar el modo de resonancia de la placa, se observó simultáneamente el patrón de Chladni y su espectro de Fourier. Se tomó una fotografía del patrón y se registró su espectros de Fourier de la estructura al ir variando la anchura A del canal. Los espectros de Fourier se registraron a una razón de muestro de 5000 muestras por segundo. Otro aspecto que se cuidó fue tener la misma amplitud de vibración alimentada al vibrador, lo que permite seguir la razón entre las amplitudes espectrales a las frecuencias de resonancia de las placas. El análisis se hizo en el rango de frecuencia de 100 a 1000 Hz. Excepto la PC, la instrumentación utilizada fue de la marca PASCO. La placa tiene una cuadrícula para la medición cuantitativa de las líneas nodales de los diferentes patrones.



Figura 1. Estructura analizada en este trabajo: L es el largo del canal (fijo: 5 cm), A es el ancho del canal (variable: 7, 5, 3 ,1 cm). La placa del lado izquierdo se fijó al vibrador y la del lado derecho se apoyó sobre un soporte aislante.

RESULTADOS

En la Fig. 2 se muestran las fotografías de los patrones de Chladni y sus respectivos espectros de Fourier para la placa de referencia (mismas dimensiones que las placas que conforman la estructura). De manera similar, las Figs. 3-5 presentan las fotografías de los patrones de Chladni y sus respectivos espectros de Fourier para la estructura para las anchuras de canal de 7 cm, 3 cm y 1 cm, respectivamente. Los patrones mostrados corresponden a tres rangos de frecuencias consideradas: bajas (de 100 a 310 Hz), medias (de 350 a 550 Hz) y altas (de 600 a 1000 Hz).



Figura 2. Patrones de Chladni y espectros de Fourier para la placa de referencia.



Figura 3. Patrones de Chladni y espectros de Fourier para la placa con A=7cm.



Figura 4. Patrones de Chladni y espectros de Fourier para la placa con A=3 cm.



Figura 5. Patrones de Chladni y espectros de Fourier para la placa con A=1 cm.

Al comparar las diferentes figuras, es claro el efecto que tiene el canal de conexión entre las dos placas que forman la estructura, así como las diferencias y similitudes con respecto a la placa de referencia. Se puede observar que el patrón en la placa de referencia a la frecuencia más baja (del orden de 242 Hz), se replica solo en la placa izquierda de la estructura, para los diferentes valores de A (aunque la figura nodal está contraída). Nótese también como los espectros de Fourier muestran resonancias adicionales en comparación con la de la placa de referencia, aumentando el número de resonancias adicionales conforme disminuye el ancho del canal. A las frecuencias del orden de los 372 Hz, se observa también como el patrón nodal en la placa de referencia se replica solo en la placa izquierda de la estructura, para los diferentes valores de A. En contraste, los espectros de Fourier no presentan resonancias adicionales relevantes. Es de contrastar que el patrón de Chladni que se presenta en la placa de referencia a la frecuencia del orden de 473 Hz, solo se replicó en la placa izquierda de la estructura en el caso de A=1 cm. Sorprendentemente, el patrón de la placa de referencia a la frecuencia del orden de 522 Hz, no se replicó en la estructura para los tres valores de A, como se puede ver de las Figs. 3-5. Esto mismo ocurrió para las frecuencias del orden de 643 Hz y 714 Hz. El hecho de que las placas sean de las mismas dimensiones, no implica que los patrones de Chladni sean similares en ambas placas. En el caso de la Fig. 3 (A=7 cm), solo a la frecuencia del orden de los 373 Hz los patrones son similares en ambas placas. Esto mismo ocurrió en el caso de la Fig. 4 (A=3 cm), solo a la frecuencia del orden de los 473 Hz. En el caso del canal más angosto (A=1 cm) de la Fig. 5, no se identificó ninguna replica de patrones entre las placas, lo que demuestra el efecto de la anchura del canal.

CONCLUSIONES

Los resultados experimentales demuestran que el uso de la técnica de Chladni y el análisis espectral de Fourier permiten visualizar y cuantificar el efecto de la anchura del canal sobre las propiedades vibratorias de la estructura de cartón. En particular, a frecuencias del orden de 240 Hz los espectros de Fourier muestran resonancias adicionales a la frecuencia a la que operó el vibrador. La cuantificación del efecto de la anchura del canal sobre la estructura puede entenderse, por una parte, al analizar las amplitudes de los espectros de Fourier, y, por otra parte, inspeccionando visualmente los patrones de Chladni (los patrones en la placa derecha, en la mayoría de los caos, no es similar a la de la placa de la izquierda). Los resultados de este trabajo pueden ser de utilidad en el estudio de las propiedades vibratorias de estructuras acústicas no convencionales

BIBLIOGRAFÍA

- 1. H.J. Stockmann, "Chladni meets Napoleon", Eur. Phys. J. Special Topics, Vol. 145, 2007, pp. 15-23.
- G. Arroyo Correa, M. Vega Guzmán, J. Vega Cabrera, C. H. Mendoza Pérez, "Estudio experimental de los patrones de vibración de placas con geometría no convencional usando la técnica de Chladni", XII encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, 2015, trabajo S1-FMCT16.
- 3. G. Arroyo Correa, M. Vega Guzmán, J. Vega Cabrera, Omar Ortiz Guzmán, "Estudio experimental de los patrones de Chladni de placas isoespectrales", XIV encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, 2017, trabajo S4-FMCT04.

CÁLCULO DE LA ESTRUCTURA DE BANDAS DE UN CRISTAL FONÓNICO DENTRO DE UNA GUÍA DE ONDAS EN 3D CON INCLUSIONES CÚBICAS

Hugo Enrique Alva Medrano, María Claudia Guillén Gallegos, Alberto Mendoza Suárez, Héctor Pérez Aguilar

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

RESUMEN

Las guías de onda de cristal fonónico (PnCW), han generado un creciente interés científico como medio para controlar la dispersión de ondas en aplicaciones tecnológicas diversas como las telecomunicaciones. Estos cristales están compuestos de distribuciones periódicas de dispersores inmersos en un medio de propagación y, diseñados mediante una disposición con dimensiones y periodos comparables a la longitud de onda. Los cristales fonónicos (PnCs) presentan propiedades que los confieren de la capacidad para guiar ondas acústicas de manera eficiente. En este trabajo presentamos una técnica numérica del tipo Método de Elementos de Frontera, conocido como el Método de la Ecuación Integral, el cual permite calcular la estructura de bandas de cristales fonónicos en dos y tres dimensiones. En particular, se calcula la estructura de bandas para una guía de ondas formada por placas acústicas suaves o rígidas, y planas que envuelven un arreglo periódico bidimensional de inclusiones cúbicas, bajo condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann. La influencia de la presencia de las inclusiones en la guía se ve reflejada en la variación de la estructura de bandas, generando bandas prohibidas al aumentar el tamaño de la inclusión. Debido a esta propiedad este sistema es una alternativa para el control de la propagación de las ondas acústicas.

INTRODUCCIÓN

Los PnCs son estructuras artificiales compuestas de al menos dos materiales con distinta densidad de masa y propiedades elásticas. Estos se construyen de tal modo que las constantes elásticas y/o la densidad de masa de este compuesto estructurado son funciones periódicas en el espacio. Los materiales con que se pueden formar los PnCs pueden ser sólidos líquidos o gaseosos.

Los PnCs son diseñados para el control de la propagación de ondas acústicas. Estos permiten cubrir gran parte del espectro sónico continuo, desde los infrasonidos (hercios) hasta las ondas térmicas (terahercios), pasando por los sonidos audibles (kilohercios), los ultrasonidos (megahercios) y los hipersonidos (gigahercios) [1]. Un ejemplo de cristal fonónico es la escultura minimalista de Eusebio Sempere (1923-1985) localizada en un parque de la capital española, en Madrid, y la cual es mostrada en la Fig. 1.



Fig 1. Escultura hecha por Eusebio Sempere, la cual resulta ser un cristal fonónico.

Las dimensiones que intervienen en los cristales fonónicos van desde unos pocos metros hasta un centenar de nanómetros. A esta escala, la materia aparece como continua, por lo que las leyes de la mecánica clásica son aplicables y empleadas como regla general.

En los PnCs, los bandgaps son el resultado de la interferencia destructiva de ondas acústicas o

elásticas dispersas [2-4]. De modo que cuanto más contraste exista entre las propiedades acústicas que participan, más probable será observar fenómenos relacionados con la interferencia de ondas [5]. En los bandgaps o regiones de frecuencia prohibidas, no se pueden propagar ondas elásticas, de modo que estos sistemas pueden ayudar en el desarrollo de estructuras libres de vibraciones en rangos de frecuencia específicos. El ancho de los bandgaps y su posición dependen de varios factores. Por ejemplo, el contraste entre las densidades de masa o las velocidades de las ondas en lo materiales involucrados [2, 3, 5]. Evidentemente los parámetros geométricos como el tipo de inclusiones también juegan un papel importante en las posiciones y anchos de los bandgaps [3, 7-9].

Hoy en día ya se han desarrollado dispositivos optoacústicos, que acoplan fonones y fotones. Usando un material de estructura periódica con un espaciado de 150 nm se pueden localizar fotones de 500 THz y fonones de 20 GHz [1]. Entre las posibles aplicaciones de los PnCs sistemas podemos mencionar, por supuesto, el aislamiento acústico [10], las guias de onda [11, 12] y otra menos intuitiva es el uso de estas estructuras para focalizar las olas del mar hacia una planta con el fin de convertir la energía mecánica en energía eléctrica [13].

TEORÍA

En esta sección introduciremos un método numérico para calcular la estructura de bandas de una guía de ondas de cristal fonónico en tres dimensiones (3DPnCW) formada por dos superficies planas que envuelven un arreglo bidimensional periódico de inclusiones cúbicas como se muestra en la Fig. 2. Se considera que todas las superficies involucradas son superficies acústicas y el medio entre los planos es aire. La celda unitaria del sistema es mostrada en la Fig. 3.



Figura 2. Descripción grafica de una 3DPnCW formada por dos superficies acústicas planas y paralelas que el envuelven un arreglo periódico de inclusiones cúbicas.



Figura 3. Celda unitaria de una 3DPnCW formada por dos superficies planas y paralelas que envuelven una inclusión cúbica.

Para una onda de presión acústica lineal en una celda unitaria $P_{l,m}(\mathbf{r}, t)$, para el caso harmónico con el tiempo con frecuencia $\omega(P_{l,m}(r, t) = P_{l,m}(r)e^{-i\omega t})$, se cumple la ecuación de Helmholtz dada por:

$$\nabla^2 P_{l,m}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P_{l,m}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},\tag{1}$$

siendo $l, m \in \mathbb{Z}$, donde *c* es la velocidad longitudinal de la onda acústica en el medio acústico y r es el punto de observación. Nuestro problema es calcular la estructura de bandas de un sistema periódico, para ello proponemos utilizar un método numérico integral que puede ser formulado a partir de una función de Green periódica (PGF) para resolver la ecuación de Helmholtz, en condiciones de frontera de Dirichlet y Neumman.

Debido a que se tiene periodicidad en la dirección X y Y podemos hacer uso del teorema de Bloch, de donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$P_{l,m}(x + la, y, z, t) = e^{ik_x al} P_{0,m}(x, y, z),$$
(2)

$$P_{l,m}(x, y + la, z, t) = e^{ik_y bl} P_{l,0}(x, y, z),$$
(3)

$$\frac{\partial P_{l,m}(x+la,y,z,t)}{\partial n} = e^{ik_{\chi}al} \frac{\partial P_{0,m}(x,y,z)}{\partial n}$$
(4)

У

$$\frac{\partial P_{l,m}(x,y+la,z,t)}{\partial n} = e^{ik_y al} \frac{\partial P_{l,0}(x,y,z)}{\partial n},$$
(5)

donde $k = (k_x, k_y)$ es el vector de Bloch bidimensional.

Para calcular la estructura de bandas es necesario obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. Para ello consideremos la función de Green tridimensional dada por

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\tag{6}$$

donde r es un punto de integración y r´un punto de observación. La función de Green es una solución de

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$
(7)

Considerando la geometría del sistema y aplicando la segunda identidad de Green tridimensional a la onda de presión $P_{l,m}$ y a la función de Green *G* en la región de aire, se obtiene la expresión

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}_{l,m}}\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial P_{l,m}(\mathbf{r}')}{\partial n'}-\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}P_{l,m}(\mathbf{r}')\right]dS'=\theta(r)P_{0,0}(r),$$
(8)

donde $\theta(r) = 1$ si r está dentro de la zona donde se resuelve la ecuación de Helmholtz y cero en otro caso, dS' es un elemento diferencial de área y el punto de integración r' está separado infinitesimalmente de la región $S_{l.m.}$

Consideremos una versión numérica para la parte izquierda de la Ec. (8), tomando un muestreo de pequeñas superficies denotadas por $\Delta S_{l,m}^n$, sobre la superficie $S_{l,m}$, con n = 1, 2, ..., N tal que

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_{l,m}} \left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \frac{\partial P_{l,m}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} P_{l,m}(\mathbf{r}') \right] dS' \approx$$
$$\sum_{n=1}^{N} Q_n \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_{l,m}^n} e^{i(k_x al + k_y am)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') dS' \right) -$$

$$\sum_{n=1}^{N} P_n \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_{l,m}^n} e^{i(k_x al + k_y am)} \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} dS' \right), \tag{9}$$

siendo P_n y Q_n valores numéricos de la presión, $P_{0,0}(\mathbf{r}')$, y su derivada normal $\partial P_{0,0}(\mathbf{r}')/\partial n'$, evaluados en el *i*-ésimo punto central, denotado por R_i , de la pequeña superficie elemental $\Delta S_{l,m}^n$, respectivamente. En la última expresión las relaciones de periodicidad dadas por las Ecs. (2), (3), (4) y (5) son utilizadas. Es conveniente seleccionar *N* puntos de observación $R_i + \varepsilon \hat{n}(R_i)$ siendo ε una cantidad infinitesimal. Con esto nos aseguramos de que r - r' nunca sea cero. Finalmente la Ec. (8) puede escribirse como un sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{N} \mathcal{L}_{ij}(k,\omega) Q_j - \sum_{j=1}^{N} \mathcal{N}_{ij}(k,\omega) P_j = 0, \qquad (10)$$

para i = 1,2,3...N, donde los elementos de matriz $\mathcal{L}_{ij}(k,\omega)$ y $\mathcal{N}_{ij}(k,\omega)$, que dependen del vector de Bloch y de la frecuencia, están dados por:

$$\mathcal{L}_{ij}(k,\omega) = \sum_{l=-N_L}^{N_L} \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x al + k_y am)} L_{ij}^{lm}(\omega)$$
(11)

у

$$\mathcal{N}_{ij}(k,\omega) = \sum_{l=-N_L}^{N_L} \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x al + k_y am)} N_{ij}^{lm}(\omega), \qquad (12)$$

siendo N_L el máximo valor de l, considerado numéricamente. Este número entero positivo representa una forma simple de truncar la serie, para N_L lo suficientemente grande se deberían obtener resultados muy precisos. En las dos últimas expresiones los elementos $L_{ij}^{lm}(\omega)$ y $N_{ij}^{lm}(\omega)$ están definidos por los límites [14]

$$L_{ij}^{lm}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\Delta S_{l,m}^n} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_l+\varepsilon\hat{n}(\mathbf{R}_l)} dS', \qquad (13)$$

$$N_{ij}^{lm}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\Delta S_{l,m}^n} e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - i\frac{\omega}{c}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right) (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_l + \epsilon \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_l)} \, dS', \quad (14)$$

donde tanto la función de Green (Ec. (6)) como su derivada normal han sido utilizadas.

Para superficies acústicas suaves se tiene que la presión acústica es cero en todas las superficies (condiciones de frontera de Dirichlet). Esto lleva a que $P_j = 0$ para toda i = 1,2,3...N, en la Ec. (10), obteniendo un sistema de ecuaciones reducido,

$$\sum_{j=1}^{N} \mathcal{L}_{ij}(k,\omega) Q_j = 0, \ i = 1, 2, 3 \dots N.$$
(15)

Para superficies acústicas rígidas, la derivada normal de la presión acústica es cero en las superficies (condiciones de frontera de Neumman). En este caso $Q_j = 0$ para toda i = 1,2,3 ... N, en la Ec. (10), obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{N} \mathcal{N}_{ij}(k,\omega) P_j = 0, \, i = 1, 2, 3 \dots N.$$
(16)

El sistema lineal de ecuaciones obtenido tiene una matriz asociada $M(k, \omega) = \mathcal{L}_{ij}(k, \omega)$ o $\mathcal{N}_{ij}(k, \omega)$, que depende del vector de Bloch k y la frecuencia ω . Ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución distinta de la trivial puede ser obtenida si el determinante de la matriz es cero. Para determinar la estructura de bandas, definimos la función

$$D(k,\omega) = \ln|\det(M(k,\omega))| = 0, \qquad (17)$$

que numéricamente representa puntos de mínimos locales que nos dan la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. De este modo la estructura de bandas de la 3DPnCW puede ser calculada.

RESULTADOS

Los primeros resultados numéricos fueron obtenidos considerando una 3DPnCW formada por dos placas planas de superficies acústicas (sin inclusiones), la cual tiene una estructura de bandas que puede ser calculada de forma analítica para ambas condiciones de frontera (Dirichlet y Neumman). Una guía 3DPnCW formada por dos placas planas (sin inclusiones) y paralelas con una distancia entre placas de $b = 2\pi$, así como periodicidad en ambos ejes, X y Y, de $a = 2\pi$, donde se cumplen las condiciones de frontera de Dirichlet tiene la relación de dispersión

$$\omega\left(k = \left(k_{x}, k_{y}\right)\right) = \frac{P}{2\pi} \sqrt{\left(k_{x} - \frac{2\pi}{P}l\right)^{2} + \left(k_{y} - \frac{2\pi}{P}m\right)^{2} + \left(\frac{\pi}{a}q\right)^{2}},$$
 (18)

con $l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...; q = 1,2,3,$ Cuando en la guía se tengan condiciones de frontera de Neumman, la única diferencia en la relación de dispersión analítica es que q puede tomar el valor de cero; es decir q = 0, 1, 2, 3, En estos cálculos es común introducir cantidades adimensionales, por lo que nuestros resultados serán expresados en términos de una frecuencia reducida dada por $\omega_r = \frac{P}{2\pi} \omega$ y un vector de Bloch reducido dado por $k_r = \frac{P}{2\pi} k$. En la Fig. 4 se muestran las estructuras de bandas obtenidas de forma analítica en el rango de

En la Fig. 4 se muestran las estructuras de bandas obtenidas de forma analítica en el rango de frecuencia normalizada de [0,1.5], para (a) superficies suaves (condiciones de frontera de Direchlet) y (b) superficies duras (condiciones de Neumman), respectivamente.



Figura 4. Estructuras de bandas de una 3DPnCW con superficies (a) suaves y (b) duras. La distancia entre las superficies es $b = 2\pi$.

Como podemos notar en la Fig. 4, el caso de paredes duras es más rico en cuanto a modos debido a que en la Ec. (18) *q* puede tomar como valor al cero, lo cual no ocurre para superficies suaves. En la Fig. 5 se comparan las estructuras de bandas obtenidas analíticamente (puntos azules) y numéricamente (puntos rojos) para $a = 2\pi$, $b = 2\pi$ y $N_L = 50$ y superficies duras. En la Fig. 5 se puede observar una excelente concordancia entre ambas estructuras, mostrando confiabilidad para obtener resultados numéricos precisos.



Figura 5. Comparación de estructuras de bandas obtenidas analítica (puntos azules) y numéricamente (puntos rojos) para una 3DPnCW.

Finalmente en la Fig. 6 mostramos la superficies obtenidas considerando los parámetros: $a = 2\pi$, $b = 2\pi$, y $N_L = 5$ con lados de inclusiones iguales a (a) $c = 0.1\pi$ y (b) $c = 0.5\pi$. Adicionalmente en (c) y (d) se muestran las estructuras de bandas para ambos tamaños de inclusión, respectivamente.



Figura 6. Celdas unitarias para una 3DPnCW con $a = 2\pi$, $b = 2\pi$, y $N_L = 5$ con lados de inclusiones iguales a (a) $c = 0.1\pi$ y (b) $c = 0.5\pi$. En (c) y (d) se muestran sus respectivas estructuras de banda calculadas, respectivamente.

Podemos apreciar que se observa cierta irregularidad en las bandas de la Fig. 6 (d), lo cual puede deberse a que por cuestión de tiempo de cómputo y poder computacional solo se consideró $N_L = 5$, a diferencia de la Fig. 5, donde se consideró $N_L = 50$. El método numérico implementado arroja resultados que están de acuerdo con lo esperado.

CONCLUSIONES

En este trabajo se calcularon las estructuras de bandas de una 3DPnCW formada por dos superficies acústicas (o sónicas) planas y paralelas que envuelven un arreglo periódico bidimensional de cubos considerados también de material acústico. Se calcularon las soluciones analíticas partiendo del cálculo de modos en una cavidad cúbica. Fueron comparadas las estructuras analíticas con las calculadas por el método numérico implementado para superficies duras. Los resultados numéricos concuerdan con los predichos por la teoría mostrando confiabilidad para hacer cálculos con inclusiones dentro de la guía. Además se calcularon estructuras de bandas para la 3DPnCW considerando inclusiones cúbicas, sin embargo el tiempo de cómputo se incrementa considerablemente al considerar inclusiones, por lo que sólo se muestran cálculos con inclusiones relativamente pequeñas. Como trabajo futuro queda realizar cálculos con inclusiones de mayor tamaño con el objetivo de encontrar bandgaps en la estructura de bandas, así como obtener resultados numéricos para superficies acústicas suaves.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. M. Maldovan, "Sound and heat revolutions in phononics. Nature, Vol 503, pp. 209.217.
- Y. Tanaka, Y. Tomoyasu, S. Tamura, Band structure of acoustic waves in phononic lattices: Two-dimensional composites with large acoustic mismatch. Phys. Rev. B. Vol. 62, 2000, pp. 7387-7392.
- 3. JO. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, MS. Kushawa, P. Halevi, "Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials: the carbon/epoxy composite and some metallic systems. J. Phys.: Condens. Matter, Vol. 6, 1994, pp. 8759-8770.
- 4. MS. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, "Acoustic band structure of periodic elastic composites. Phys. Rev. Lett, Vol. 71, 1993, pp. 2022-2025.
- 5. T. Ibiza, "Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica", Universidad Politécnica de Valencia, Trabajo de Grado, 2013, pp. 1-68.
- 6. M. S. Kushwaha, P. Halevi, G Martinez, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, "Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. Phys. Rev. B, Vol. 49, 1994, pp. 2313-2322.
- 7. W. Kuang, Z. Hou, Y. Liu, "The effects of shapes and symmetries of scatterers on the phononic band gap in 2D phononic crystals", Phys. Lett. A, Vol 332, 2004, pp. 481-490.
- 8. T. Wu, Z. Huang, S. Lin, "Surface and bulk acoustic waves in two-dimensional phononic crystal consisting of materials with general anisotropy", Phys. Rev. B, Vol.69, 2004, 094301.
- 9. JO. Vasseur, PA, Deymier, B. Chenni, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, D. Prevost, "Experimental and Theoretical Evidence for the Existence of Absolute Acoustic Band Gaps in Two-Dimensional Solid Phononic Crystals", Phys. Rev. Lett., Vol. 86, 2001, pp. 3012-3015.
- 10. M. M. Sigalas, E. N. Economou, "Elastic and acoustic wave band-structure", J. Sound Vib, Vol 158, 1992, pp. 377-382.
- N-K. Kuo, G. Piazza, "Evidence of Acoustic Wave Focusing in a Microscale 630 MHz Aluminum Nitride Phononic Crystal Waveguide", IEEE International Frequency Control Symposium, pp. 530-533, 2010 390
- A. Khelif, B. Djafari-Rouhani, J.O. Vasseur, P. A. Deymier. "Transmission and dispersion relations of perfect and defect-containing waveguide structures in phononic band gap materials", Phys. Rev. B. Vol. 68, 2003, 024302
- 13. T. Ibiza, "Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica", Universidad Politécnica de Valencia, Trabajo de Grado, 2013, pp.1-68.
- JA. Guel-Tapia JA, F. Villa-Villa, A. Mendoza-Suárez, H. Pérez-Aguilar, "Acoustic Scattering of 3D Complex Systems Having Random Rough Surfaces by Scalar Integral Equations", Arch. Acoust, Vol 41, 2016, pp. 461-472.

LA GEORREFERENCIA COMO INSTRUMENTO PARA UN ANÁLISIS MULTICRITERIO DEL IMPACTO AMBIENTAL EN EL SISTEMA SUELO.

Bertha Alicia Arce Chávez¹, William Iván Aceves Ibarra²

Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara.

INTRODUCCIÓN

A partir de la celebración de la Conferencia Mundial sobre el Medio Humano (Estocolmo, 1972) se comenzó a cuestionar seriamente el modelo de la civilización *moderna* y sus formas dominantes de consumo de recursos naturales, producción y consumo. La intención era conducir a un proceso de concientización sobre el riesgo de caer en una crisis ambiental dado el desequilibrio de este esquema e incorporar medidas preventivas y, en su caso, correctivas en las políticas públicas a través de los Planes Nacionales de Desarrollo.

Y es que – lo razonable – es considerar una concordancia de las actividades fundamentales del hombre con *su lugar*; sin embargo, para lograrlo se hace necesaria una reflexión acerca de ese entorno con base en preguntas básicas tales como ¿qué se tiene? ¿Cuánto se tiene? ¿Dónde se tiene? Sobre todo en un escenario de globalidad rampante que le da paso a una mayor complejidad en el análisis de los problemas sociales y ambientales obligando a un análisis sistémico y transdisciplinar.

Desafortunadamente, no se ha logrado. El conocimiento ambiental producido hasta la fecha es legítimo pero fraccionado, es decir, no conlleva un carácter holístico. En este sentido, las acciones públicas también son sectoriales e, incluso, disociadas. La derivación de esta realidad es la inmoderada utilización y aprovechamiento inadecuado de los recursos.

En ese escenario de incertidumbre se desenvuelven las ciudades medias de México y, entre ellas, Lagos de Moreno (Jalisco); están sujetas al orden económico internacional que las limita en el control de sus procesos demográficos, urbanizantes y receptores de industrias privilegiando el sentido intrusivo y extractivo en aras de un estado de confort tangible y creando estilos de vida donde se prioriza el valor (y precio) de los productos manufacturados en relación con los productos primarios y, aun así, compeliendo al agotamiento de las fuentes de recursos naturales más productivas: el suelo y el agua.

El territorio Laguense se integra mayormente de ecosistemas semiáridos dispersos en una zona de transición ecológica vulnerable derivada de un proceso de deshidratación natural a lo largo de los siglos. Es a partir del siglo XVII que este territorio se convierte en una zona agrícola y ganadera de gran importancia para la región centro y occidente del país. Como consecuencia lógica (en el sentido mercantilista) la industrialización de los productos primarios se asentó en la región desde la segunda mitad del siglo XX convirtiendo a esta localidad jalisciense en un enclave estratégico para la producción agroindustrial y, gracias a su ubicación geográfica, a la eficiente distribución de productos y recepción de materiales; así, repuntó la economía con el menoscabo de la cantidad y la calidad de su capital natural dado que en la instalación de las naves industriales privó el arbitrio y la cercanía a los productores rurales lo que, se encuentra en riesgo de agotar sus, ya pobres, acuíferos y suelos; Actualmente, Lagos de Moreno es una ciudad media que se ha vocacionado hacia la agroindustria desde la década de los 1940 y, en los últimos años, se pretende incorporar al cinturón de la industria automotriz; toda esta actividad ha utilizado el recurso suelo sin un registro o control formal de la instalación en el territorio de las plantas industriales o de la emisión de sus subproductos que se concentran en dicho sistema y que, a la postre por filtración, es probable que se mezclen con aguas subterráneas.

En contraparte, la intensificación de la agricultura, la urbanización y la industrialización aunada a esta distribución dirigida o tendenciosa, genera efectos negativos en los sistemas naturales constituye una sumatoria de factores que derivan en un Impacto Ambiental difuso pero sinérgico evidenciado en la disminución cualitativa de las propiedades físicas, químicas o biológicas de los suelos ocupados y, como impacto remanente, se ha dado una pérdida de valores paisajísticos y en el fenómeno de la contaminación que, como es sabido, ocasiona problemas de salud pública por vertido de efluentes, emanación de olores, emisión de polvos, y, con sospecha fundada, incorporación de sustancias tóxicas y producción de vectores infecciosos.

Así las cosas, se plantea este estudio cuyo propósito es proveer de información ambiental relativa al sistema suelo que permita la conservación de valores intrínsecos de los sitios, favorezca la armonía entre la vivencia cotidiana y las actividades empresariales con miras a que, más allá del mero usufructo del territorio, se tomen decisiones de política pública que coadyuven a la generación de cadenas de valor a través de procesos productivos de ciclo cerrado y promoviendo en los ocupantes o usuarios del territorio un sentido de pertenencia e identidad.

TEORÍA/REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.

Según Leff [1], se ha perdido el equilibrio entre la calidad ambiental y la racionalidad productiva debido a que no hemos sido capaces de desarrollar el conocimiento ambiental pertinente que, de manera transversal y articulada, refleje los procesos reales. El autor señala que la producción académica y científica debe estar basada en un enfoque transdisciplinar y multifactorial: como componente no sólo desde la perspectiva ecológica purista sino como variable socioeconómica, cultural y política para influir en el desarrollo socioeconómico en un atmósfera de consciente colectivo sobre la degradación del medio natural o antropizado que incida sobre la indiferencia institucional que no abona a una eficiente planificación del territorio.

Para contribuir a las prácticas saludables en la interacción con el medioambiente es fundamental conocer las cualidades de éste; la divulgación de los inventarios de recursos y valores naturales es una acción fundamental. Es imperante determinar –y evaluar – las condiciones de factores bióticos y abióticos de los ecosistemas como una premisa para la toma de decisiones, el ordenamiento y la planeación territorial por quienes articulan la Gobernanza de los sistemas primarios y la Planeación Estratégica del Desarrollo haciendo hincapié en las dinámicas que se construyen desde su ubicación geográfica con el clima y el paisaje.

Como lo mencionan Delgadillo y Torres [2], considerar unidades territoriales no implican una visión fragmentada sino enfoques desde las políticas públicas integrales y en una lógica de planeación orientada al territorio con relevancia otorgada a las implicaciones sociales, culturales y ecológicas presentes en cada una de ellas. En este sentido, algunos autores estudiosos de lo rural como Echeverri [3] y Moyano [4] coinciden en la multidimensión como enfoque para la comprensión de los procesos y factores que enlazan los recursos con los usuarios y las instituciones. Si bien reconocen el papel fundamental de la agricultura como un eje de desarrollo y fuente de riqueza, aducen que tal actividad, de manera aislada, no robustece el tejido social ni la conservación de espacios naturales. En la inteligencia de que algunos territorios, como es el caso de este estudio, son intervenidos con actividades comerciales e industriales, las valoraciones cualitativas y cuantitativas deben ser más precisas; por ello, la cartografía y la georreferenciación se convierten en una herramienta inteligente pues ofrecen datos de amplio espectro desde lo gráfico y descriptivo hasta la mensura de la influencia de las acciones de degradación o conservación del recurso suelo.

La aplicación de la técnica de análisis con base en sistemas de información geográfica obliga, por sí misma, a una interdisciplinariedad que encierra el carácter sistémico del medio natural. Si se utiliza eficazmente en los estudios del impacto ambiental que se propaga por un equivocado aprovechamiento del suelo y un ralentizado devenir de la sustentabilidad, la cartografía, afirma Corona Chávez [5], forma parte de un método holístico para "*entender, anticipar, minimizar y eventualmente remediar los efectos*" en una región influenciada por diversos procesos naturales y sociales; así, con esta herramienta complementada con bases de datos e información de campo, es posible reconocer los diferentes elementos de los bienes materiales tangibles e intangibles y los méritos de identidad del sitio a través de los atributos espaciales y medioambientales e, incluso, la dimensión cultural del paisaje provocando que germine el sentido de pertenencia, la identidad y la idea del territorio como patrimonio.

El suelo, si entonces, es el receptor de los efectos de actividades primarias como la agricultura y la ganadería se tendrán fenómenos de compactación contrarios a la escorrentía pluvial y a la estabilidad estructural causando remociones de la masa vegetal y erosión superficial; afirma Murgueitio [6] que estos dos tipos de degradación llevan a una perdida acelerada e irreversible del suelo y con ello la productividad y, a mediano plazo, disminuyendo la rentabilidad del sistema.

A pesar de estas potenciales condiciones negativas, se promueve, con la integración del Consejo de Desarrollo Rural Sustentable del municipio de Lagos de Moreno (2003), en el que participan los consejos comunitarios trabajando en talleres comunitarios para construir un diagnóstico y las líneas

estratégicas del Plan de Desarrollo Rural Sustentable [[7] entre las cuales se desprende que "en el medio rural, se propiciará la instalación de agroindustrias para lograr un mayor valor agregado a la producción primaria, mejorando significativamente el ingreso familiar. La acción en el medio rural buscará una diversificación significativa en la actividad económica con otros productos, comercio y servicios relacionados".

Es posible que tal aseveración se fundamente en la extensión territorial del suelo laguense (2849.36 km²) que representa el 3.52 % del total del estado de Jalisco y lo coloca como el tercer municipio con mayor área; ubicado entre las coordenadas geográficas 21°21' de latitud norte y 101° 56' de longitud oeste, su cobertura edafológica [8] está dominada por el pastizal con un 42.6%, por la práctica agrícola en un 25.8%, por bosque en 22.1%, la selva cubre el 7.3% del Territorio, otros tipos de vegetación representan sólo un 0.6% y los cuerpos de agua un 0.9%; los asentamientos humanos representan, apenas, el 0.6% de cobertura del suelo abrigando una población es de 153,817 habitantes [9].

Los suelos están influenciados por un clima, según la taxonomía Koppën, semiseco con otoño e invierno secos y semicálidos, con invierno benigno, moderado por una temperatura media anual de 18.7°C y un régimen de lluvias que se registra entre los meses de junio a octubre, contando con una precipitación media de 573.2 milímetros. El promedio anual de días con heladas es de 87. Los vientos dominantes son en dirección del suroeste [10].

Bajo estas condiciones, la vegetación del municipio se compone, básicamente, de cactáceas (nopal, cactus y maguey) y sus asociaciones de matorrales espinosos, además de pastizales de clima semidesértico. En la parte oriental del municipio, en las partes más elevadas del municipio se pueden encontrar áreas de bosque de encinos asociados con pastizales naturales; en la región centro noroeste se tiene matorral inerme, es decir, matorral con predominancia de plantas sin espinas y matorral subinerme que es una mezcla de plantas no espinosas y espinosas, asociado con pastizal natural y nopalera. En la parte poniente del municipio se tiene matorral espinoso, nopalera y pastizal natural [11].

Desde el punto de vista socioeconómico, Lagos de Moreno es considerado como la principal concentración urbana y de servicios administrativos de la región Altos Norte y, además, es un nodo de articulación con otras ciudades de gran importancia comercial e industrial como Aguascalientes, León, San Luís Potosí, Querétaro y Guadalajara.

PARTE EXPERIMENTAL.

- I. Se seleccionan zonas de muestreo suburbanas y rurales con influencia de actividad industrial a partir de recursos digitales de información geográfica disponibles tanto en la plataforma "Espacio y Datos de México" administrada por el INEGI; se georreferencian con base en la aplicación del mapa digital para realizar la colecta de muestras en sitios representativos de la industria local y con posible influencia sobre entornos naturales, zonas agrícolas o cuerpos de agua.
- II. Se recolectan muestras con base en los protocolos de la Norma Oficial Mexicana NOM-021-SE-MARNAT-2000 [12] (previamente denominada 021-RECNAT-2000) que establece las especificaciones de fertilidad, salinidad y clasificación de suelos, estudios, muestreo y análisis para los suelos de referencia existentes en la superficie que ocupa el territorio de Lagos de Moreno, a saber [13]:
 - a. Litosol (I) que recubre el 30.7% del territorio; etimológicamente significa suelo de piedra. Son los suelos más abundantes del país pues ocupan 22 de cada 100 hectáreas de suelo. Se caracterizan por su profundidad menor a 10 cm limitada por la presencia de roca, tepetate o caliche endurecido. Su fertilidad natural y la susceptibilidad a la erosión son muy variables dependiendo de otros factores ambientales. El uso de estos suelos depende principalmente de la vegetación que los cubre y de la altitud/latitud que los enmarca: sierras, barrancas, lomeríos y algunos terrenos planos.
 - b. Planosol (W) localizado en el 25.9% de la superficie laguense; su denominación se deriva del vocablo latino *planus*, connotativo de suelos generalmente desarrollados en relieves planos que en alguna parte del año se inundan en su superficie. En otros países se les conoce como suelos *duplex* por el contraste en su textura. Son medianamente profundos en su mayoría, entre 50 y 100 cm, y se encuentran principalmente en los climas templados y semiáridos de México. Se caracterizan por presentar debajo de la capa más superficial, una capa infértil y

relativamente delgada de un material claro que generalmente es menos arcilloso que las capas, tanto que lo cubren, como las capas que la subyacen. Debajo de esta capa se presenta un subsuelo muy arcilloso, o bien, roca o tepetate, todos impermeables. Su vegetación natural es de pastizal o matorral. Se utilizan con rendimientos moderados en la ganadería de bovinos, ovinos y caprinos. Su rendimiento agrícola depende de la subunidad de Planosol que se trate. Son muy susceptibles a la erosión, sobre todo en las capas superficiales.

- c. Feozem (H) localizado en el 25.9% de la extensión del suelo laguense, es una unidad de los suelos Calcáreos, es decir, suelos ricos en cal y nutrientes para las plantas. Asimismo se encuentra en suelos secundarios como el Gleysol (G) (del ruso gley: suelo pantanoso). Son suelos con una capa saturada de agua al menos alguna época del año. Esta capa es de color gris, verde o azuloso y se mancha de rojo cuando se expone al aire. Se localizan generalmente en depresiones o llanuras y son poco susceptibles a la erosión.
- III. Las muestras recolectadas se caracterizan con los dispositivos de medición de un kit portátil; es un mini laboratorio diseñado para el monitoreo de la calidad del suelo mediante el procedimiento de extracción basado en el método de extracción multielemental Mehlich I que está basado en el uso de disoluciones extractantes "universales" válidas para una amplia diversidad de suelos y que sean capaces de extraer simultáneamente macronutrientes (P, Ca, Mg, Na y K) y micronutrientes (Cu, Zn y Mn). Este método y la condición de portabilidad de los dispositivos digitales medidores (colorímetro, medidor de Ph y TDS 5) permite la medición de forma rápida, precisa y económica de la cantidad de nutrientes efectivos contenidos en una muestra de suelo en razón de 15 parámetros básicos según se muestra en la tabla 1.

Nitrato Nitrógeno*	Reducción de Cadmio	0-300 lb/acre
Nitrato Nitrógeno;	Diazotización	0-40lb/acre
Nitrogeno Amoniacal*	Nessler	0-200lb/acre
Fósforo*	Reducción por Ácido Ascórbico	0-991b/acre
Potasio*	Tetrafenilboro	0-500lb/acre
Sulfuro	Cloruro De Bario	3-94 ppm
Cobre	Dietildicarbamato	0-30 ppm
Hierro	Bipiridil	0-30 ppm
Manganeso	Peryodato	0-75ppm
Zinc	Zincon	0-15 ppm
Calcio		0-4000 lb/acre
Manganeso		0-2400 lb/acre
Cloruro		0-1000 lb/acre
pH 5		pH 0-14
		0-99.9 ppm
TDS 5		100-999 ppm
		1.00-9.99 ppt

- Tabla 1.- Parámetros medibles en muestras de suelo con kit de laboratorio portátil Fuente: LaMotte; manual de usuario del modelo SCL-12. [14].
- IV. Con los resultados obtenidos, se alimenta una base de datos cuyos campos son las coordenadas, los parámetros obtenidos y, con ambos, un campo de inferencias: si cumple con el perfil del tipo de suelo de referencia del sitio donde se tomó la muestra o si existe un rango de carencia o exceso de alguno de los elementos, se agrega otro campo de causas probables con base en una extrapolación a la teoría y las referencias bibliográficas; en indicadores alejados de los rangos que establece la Norma, se alimenta un campo con las posibles consecuencias: Impacto Ambiental e incidencias en los componentes del ecosistema y, en su caso, potencial riesgo sanitario por bioacumulación.

A continuación, se presenta un diagrama de flujo del proceso en la llustración 1



Ilustración 1. Diagrama de flujo del proceso Experimental

CONCLUSIONES

Dado que el estudio está en desarrollo, después de seis meses se tienen algunos aspectos que nos sirven como resultados preliminares y que pueden resumirse en las siguientes líneas generales:

- A. Las muestras que se han analizado se obtuvieron de una amplia zona que la Carta de uso de suelo (INEGI, 2012) señala como de uso agrícola; asimismo, la Carta Topográfica de Lagos de Moreno (FC1431) muestra esa área con una tipología común de suelo por lo que se podría inferir que las cualidades serían similares; sin embargo, los especímenes muestras diferenciación en su morfología o textura, granulometría y color.
- B. Las recolecciones cercanas a cuerpos de agua (río Lagos y Laguna de San Juan Bautista) mostraron mayor presencia de contenido orgánico.
- C. Con base en la presencia de alto contenido orgánico, los especímenes evidenciaron alto índice de NH₃N (Nitrógeno amoniacal) y bajo contenido en Mg (Manganeso).
- D. El contenido de Fe (Hierro) también mostró variaciones, lo que supone una diferenciación también en el pH: a mayor acidez, mayor probabilidad de presencia de Fe.
- E. Al mostrar cantidades altas de Fe, el P (fósforo) reduce su presencia e, incluso, no se detecta.
- F. En algunos suelos de textura arenosa con alto índice de contenido orgánico se evidenció una relación inversamente proporcional con la presencia de Zn (Zinc).

- G. Dadas las lecturas obtenidas y mencionadas en los puntos anteriores se pueden argumentar los siguientes corolarios:
 - a. Algunas zonas están expuestas al sobrepastoreo o tránsito vehicular que provoca la compactación o la pulverización.
 - b. Los contenidos de mayores índices con materia orgánica suponen vertidos de aguas negras y nutrientes incluidos en fertilizantes agrícolas.
 - c. Se fortalece la idea de una interacción intensa e inmediata con el factor antropológico y cultural.

A pesar de que en esta fase ya se pueden establecer criterios para ofrecer propuestas de gestión y políticas públicas, consideramos ineludible dar continuidad al estudio por algunos meses más para establecer de manera más precisa las relaciones entre los elementos naturales del suelo y su presencia (o su ausencia) en las diferentes zonas y sitios; en esta fase se profundizará en los aspectos que aparentan ser ajenos al sistema para que, al obtener otras variables y datos, se pueda modelar un modelo de análisis que lo represente y a través del cual, se obtengan especificidades de su evolución o impacto.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. E. LEFF, et al., "Los problemas del conocimiento la perspectiva ambiental del desarrollo", Siglo XXI Editores. S. A. de C. V, México, 2000.
- 2. J. Delgadillo Macías y F. Torres Torres, "La gestión territorial como instrumento para el desarrollo rural", Revista Estudios Agrarios, Procuraduría Agraria, México, 2009; p. 56
- R. Echeverri, "Identidad y territorio en Brasil", Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura, Secretaría de Desarrollo Territorial del Ministerio de Desarrollo Agrario de Brasil, Sao Paulo, 2009.
- 4. E. Moyano, "Multifuncionalidad, territorio y desarrollo", en Revista Ambienta, núm. 81, Ministerio de Medio Ambiente y Medio Rural y Marino, Madrid, 2008.
- 5. P. Corona Chávez, J. A. Uribe Salas, "Atlas cartográfico del distrito minero El Oro Tlalpujahua", Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México, 2009, 101 pp.
- E. Murgueitio, "Impacto ambiental de la ganadería de leche en Colombia y alternativas de solución", *Livestock Research for Rural Development, Vol. 15, Art. #78.,* 2003; disponible en <u>http://www.lrrd.org/lrrd15/10/murg1510.htm</u>
- SAGARPA Plan de Desarrollo Rural Sustentable de Lagos de Moreno; OIEDRUS; México. 2003. 58 pp.
- IIEG Instituto de Información Estadística y Geográfica del Estado de Jalisco, "Diagnóstico del Municipio de Lagos de Moreno"; con base en: Geología, Edafología, esc. 1: 50,000 y Uso de Suelo y Vegetación SV, esc. 1: 250,000, Guadalajara, 2017.
- INEGI, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, "Censo de Población y Vivienda", 2010.
- E. García "Catálogo de metadatos geográficos: Climas, climatología, esc. 1:1000000", CO-NABIO Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad, México 2001-2008.
- INEGI, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, "Tomo 1 Geografía y Medio Ambiente de la Enciclopedia Temática Digital de Jalisco.", Modelo Digital de Elevaciones y Modelos Digitales de Terreno del conjunto de datos vectoriales, esc. 1: 50,000, México, 2012.
- 12. DOF, Diario Oficial de la Federación, "NOM-021-SEMARNAT-2000. Norma Oficial Mexicana, que establece las especificaciones de fertilidad, salinidad y clasificación de suelos. Estudios, muestreo y análisis", México, 2002.
- 13. INEGI, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, "Guías para la interpretación cartográfica: edafología", México, 2004, 27 pp.
- 14. LaMotte, "Manual del Usuario Smart3Soil".

RESPUESTA ÓPTICA DE UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FOTÓNICO CON DEFECTOS Sergio Sánchez López, Héctor Pérez Aguilar, Gabriel Arroyo Correa, Alberto Mendoza Suárez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

RESUMEN

La importancia de la manipulación de las propiedades ópticas de los materiales sin modificar sus propiedades electrónicas se ha convertido en una cuestión vital en la fotónica. Las ventajas de usar dispositivos fotónicos frente a los electrónicos se manifiesta en mayor velocidad de operación, derivada de la naturaleza intrínseca de los portadores (fotones frente a los electrones) y de los procesos involucrados en su funcionamiento (respuesta óptica frente a la electrónica de los materiales) que conllevan a una menor disipación de energía. Por tal motivo, en el presente trabajo se hace un estudio teórico y numérico de la respuesta óptica de una guía de ondas de cristal fotónico (PCW) de longitud finita con defectos para obtener modos discretos en regiones que una PCW sin defectos tiene bandas prohibidas. En este sentido al modelar el sistema, se espera encontrar frecuencias correspondientes a la banda de energías prohibidas, esto nos permitirá la exploración de ciertas propiedades del cristal fotónico (CF) y abre las posibilidades de nuevas aplicaciones tecnológicas.

INTRODUCCIÓN

El conocer las propiedades ópticas de los materiales ha proporcionado un importante avance en la tecnología como es el caso del desarrollo de las telecomunicaciones, o bien en la construcción de dispositivos láser, fibras ópticas, etc. Estos avances son un resultado del creciente conocimiento que se tiene del comportamiento de la luz en los materiales. En los últimos años se han hecho diversos estudios teóricos acerca de cómo controlar las propiedades electromagnéticas de los materiales. Es decir, se tiene interés en diseñar materiales que sean capaces de controlar la propagación de ondas electromagnéticas con una longitud de onda específica, que controlen las direcciones de propagación de ondas en el espacio. Dentro de los tipos de materiales que nos permiten la manipulación de las propiedades ópticas, tenemos a los Cristales Fotónicos (CFs); que son arreglos periódicos en una, dos o tres dimensiones de diferentes materiales con una celda unitaria de la dimensión del orden de la longitud de onda. Los CFs son materiales en los que existe una modulación periódica y ordenada de la constante dieléctrica y presentan bajas pérdidas por absorción. Esta característica de la periodicidad confiere interesantes propiedades en regiones concretas del espectro electromagnético delimitadas por la periodicidad de la estructura y origina la existencia de bandas fotónicas que definen sus propiedades para la propagación de la luz. En particular, la banda de energías prohibidas, las cuales para ciertas energías del fotón no hay estados disponibles en el cristal.

El estudio de la propagación de la luz en una PCW se basa en métodos numéricos que ha desarrollado el grupo de cristales fotónicos de la FCFM de la UMSNH, para el estudio de estructuras de bandas en caso de tratarse de una guía de tamaño infinito y de la respuesta óptica en caso de ser una guía de tamaño finito con geometrías diferentes [1]. En este trabajo se pretende estudiar una PCW con defectos periódicamente en una dimensión; es decir, quitando inclusiones en diferentes posiciones. Para el análisis de los resultados, se calculan las reflectancias de las PCWs, usando un método numérico conocido como el Método de la Ecuación Integral (IEM) mediante el Modelo de Drude (DM) y el Método de la Condición a la Frontera de Impedancia (IBCM).

TEORIA

A continuación, se presenta un breve desarrollo descriptivo de la base teórica que se pretende utilizar y así poderle dar continuidad a este trabajo.

Propagación de la luz a través de la materia

En nuestro estudio de la propagación de la luz a través de la materia nos ocuparemos únicamente en los medios no magnéticos y eléctricamente neutros. Por lo tanto, **M** y ρ se toman igual a cero. Así, las ecuaciones de Maxwell, se reducen a:

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right),$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \mathbf{J},\tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P},\tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H}=0.$$

(3) Tomando el rotacional de la Ec. (1) y la derivada respecto al tiempo de la Ec. (2) para eliminar H, obtenemos la ecuación de onda para el campo eléctrico, (4)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \left(\frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación anterior se llaman términos fuente. Se derivan de la presencia de las cargas de polarización y de conducción, respectivamente, dentro del medio. (5) La manera en la que la propagación de la luz se ve afectada por los términos fuentes está incluida. En caso de tratarse de medios no conductores, el término $-\mu_0 \partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$ es de importancia, ya que conduce a una explicación de muchos efectos ópticos como: la dispersión y la doble refracción, por mencionar algunos. En el caso de los metales, el término de conducción $-\mu_0 \partial I/\partial t$ es el importante. Las soluciones resultantes de la ecuación de onda explican la gran opacidad y alta reflectancia de los metales. Es por esto que consideraremos el caso de interacción de la luz con los medios conductores metálicos utilizando el Modelo de Drude.

Modelo de Drude

Las características esenciales de los metales se pueden describir teóricamente con el Modelo de Drude [2]. En este modelo, existe una frecuencia crítica llamada frecuencia de plasma, por debajo de la cual la permitividad eléctrica es negativa y en consecuencia la propagación de ondas electromagnéticas está prohibida. Por encima de la frecuencia de plasma la permitividad es positiva, el medio es transparente y permite la propagación de ondas electromagnéticas.

En el caso general tenemos que el índice de refracción de un medio conductor real (metálico) es

$$n^2 = 1 - \left(\frac{c^2 \mu_0 \sigma \gamma}{\omega^2 + i\omega \gamma}\right),$$

donde $\tau = 1/\gamma \approx 10^{-4}$ s es el tiempo de relajación y *m* es la masa del electrón; además se define la "frecuencia del plasma" como:

$$\omega_p^2 = c^2 \mu_0 \sigma \gamma = \gamma \left(\frac{Ne^2}{m\gamma}\right) c^2 \mu_0 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

Así, el índice de refracción del medio conductor está dado por

$$n^{2} = 1 - \left[\left(\frac{\omega_{p}^{2}}{\omega^{2} + i\omega\gamma} \right) \right], \tag{7}$$

donde $\omega_p = \sqrt{\left(\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\right)}$ es la frecuencia de plasma.

(8)

(6)

Condición a la Frontera de Impedancia

Se presenta una condición a la frontera de impedancia para superficies unidimensionales, la cual permite el estudio de la difracción y esparcimiento de ondas electromagnéticas por una superficie conductora. El problema teórico es simplificado notablemente si la superficie puede ser considerada como un material perfectamente conductor. El uso de una condición a la frontera de impedancia elimina la necesidad de tomar en consideración al campo dentro de la superficie esparcidora, y retiene algunos de los aspectos físicos importantes del problema. En el contexto de cálculos de esparcimiento, es conocido que la condición a la frontera de impedancia representa una buena aproximación, para el caso de metales altamente reflejantes.

La función de impedancia $Z(\mathbf{r})$, está definida por la relación

$$H_t^{(v)}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{E_t^{(v)}(\boldsymbol{r})}{Z(\boldsymbol{r})}\right),$$

donde $E_t^{(v)}(\mathbf{r})$ y $H_t^{(v)}(\mathbf{r})$ son las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Aplicando las ecuaciones de Maxwell, las condiciones de frontera y la geometría bidimensional del sistema, obtenemos

$$\Phi^{(v)}(\mathbf{r}) = K(\mathbf{r})\Psi^{(v)}(\mathbf{r}).$$

Con la finalidad de encontrar la denominada función K(r), como una serie de potencias en términos de la profundidad de piel d de un metal, se define la siguiente transformación de coordenadas:

$$x_1 = \xi(s) - ud\eta'(s), \ y \quad x_3 = \eta(s) + ud\xi'(s).$$

La transformación anterior proviene de representar el punto de observación \mathbf{r} como una suma del vector \mathbf{R} que localiza al punto P del perfil con el vector $ud\mathbf{n}(\mathbf{R})$. Con estas consideraciones, damos los cinco primeros términos de la serie de potencias que representa la función de impedancia:

$$K(S) = d^{-1} + \frac{1}{2\xi'} [\eta''](d)^0 + \frac{1}{8(\xi')^2} [(\eta'')^2](d)^1 + \frac{1}{8(\xi')^3} [(\xi')^2 \eta''' + 3\eta' \eta'' \eta''' + 2(\eta'')^3 + 3(\xi'')^2 \eta''](d)^2 - \frac{1}{8(\xi')^4} [\frac{7}{2} (\xi')^2 \eta'' \eta''' + 3(\xi')^2 (\eta''')^2 + \frac{33}{2} \eta' (\eta'')^2 \eta'''' + \frac{81}{16} (\eta'')^4 + \frac{27}{2} (\xi'')^2 (\eta'')^2](d)^3 + \cdots,$$
(9)

la cual es utilizada, en puntos en donde, $\xi'(s) \neq 0$. Se puede obtener una expresión similar en aquellos puntos donde $\eta'(s) \neq 0$. Para más detalle sobre el desarrollo de este método puede consultarse la Ref. [3].

Así, con esta condición nos permite sustituir el campo por su derivada (o viceversa) para una u otra polarización, ya que podemos modelar el esparcimiento de ondas electromagnéticas por una superficie conductora.

Descripción del Método de la Ecuación Integral

Se considera que la guía de ondas de cristal fotónico está compuesta por superficies planas paralelas u onduladas con un arreglo periódico de inclusiones con geometrías arbitrarias de materiales conductores (Fig. 1). El Método de la Ecuación Integral está basado en la solución numérica de la ecuación de Helmholtz usando ecuaciones integrales [4]. El método parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal. Para nuestro estudio consideraremos el caso de una guía de ondas finita y a continuación daremos la descripción del método. *Guía de ondas de cristal fotónico finita*

Vamos a considerar una guía de ondas de cristal fotónico finita que es iluminada por un campo incidente. El sistema está formado por dos placas paralelas y un arreglo periódico de inclusiones de diferentes tamaños que se considera como un sistema de *M* cuerpos como se ve en la Fig. (1). La región 0 se caracteriza por un índice de refracción $n_0(\omega) = \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ y las regiones desde 1 hasta *M* están definidas $n_j(\omega) = \sqrt{\mu_j(\omega)\varepsilon_j(\omega)}$ que involucran las propiedades de los materiales que se dan en términos de la permeabilidad magnética $\mu_j(\omega)$ y de la permitividad eléctrica $\varepsilon_j(\omega)$.



Figura 1. Esquema de una PCW conductora de anchura l, longitud d y un arreglo periódico de inclusiones de diferentes tamaños.

Es importante mencionar que el método integral para este caso será descrito muy brevemente y a continuación explicaremos las partes importantes, pero si el lector desea conocer el desarrollo detalladamente puede consultar la Ref. [4].

Iniciaremos asumiendo una dependencia armónica del tiempo $e^{-i\omega t}$ para los campos electromagnéticos, la ecuación de onda es transformada en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = 0, \tag{10}$$

donde *j* indica el *j*-ésimo medio, *r* es el vector de posición del punto de observación y $\Psi_j(r)$ representa el campo eléctrico o magnético. La magnitud del vector de onda está dada por

$$k_j = n_j(\omega) \frac{\omega}{c}.$$
(11)

Para resolver la Ec. (10) consideramos una función de Green $G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ como la solución de la ecuación

$$\nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_j^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$
(12)

donde $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' y correspondiente a cada medio. La $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac. Una función de Green que es solución de la Ec. (12) está dada por

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j | \mathbf{r} - \mathbf{r}' |),$$
(13)

siendo $H_0^{(1)}(z)$ la función de Hankel de primera clase y de orden cero. Ahora empleando las Ecs. (10) y (12) y el segundo teorema integral de Green [5], el campo en la región 0 se expresa como

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi^{(0)}_{inc}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} \int_{\tau_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds.$$
(14)

En esta expresión $\Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r})$ representa el campo incidente y la suma de las integrales representa el campo esparcido.

Siguiendo los mismos pasos, para la *j*-ésima región (placas e inclusiones), el campo $\Psi^{(j)}(\mathbf{r})$ puede expresarse como

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r})\theta_{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\tau_{j}} \left[G_{j}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_{j}(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_{j}(\mathbf{r}) \frac{G_{j}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds,$$
(15)

donde $\theta_j(\mathbf{r})$ es una función cuyo valor es: uno para todos los puntos del medio *j*-ésimo y cero en otro caso. Las Ecs. (14) y (15) forman un sistema de ecuaciones integrales con las que se

puede obtener el campo total en el medio de incidencia y de esparcimiento.

Con estas consideraciones, la potencia incidente se puede expresar en términos del campo incidente total, que en este caso es un haz Gaussiano de semi-ancho *g*

$$P_{inc}(k) = L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} g\alpha_0(k) \frac{c^2}{8\pi\varepsilon\omega} |\Psi_0|^2 = L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} g\alpha_0(k) \frac{c^2}{8\pi\varepsilon\omega},$$

donde se ha supuesto que $(\omega/c) \gg 1$. De manera similar se obtiene la expresión para la (16) potencia esparcida,

$$P_{sc}^{\pm}(k) = \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} \int_{-n0(\frac{\omega}{c})}^{n0(\frac{\omega}{c})} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^{\pm}(q,k)|^2.$$
(17)

Finalmente utilizando las Ecs. (16) y (17), se obtiene la Reflectancia R y la Transmitancia T respectivamente, como:

$$R(k) = \frac{P_{sc}^{+}(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{F(k)} \int_{-n0\left(\frac{\omega}{c}\right)}^{n0\left(\frac{\omega}{c}\right)} \frac{dq}{2\pi} \alpha^{0}(q) |S^{+}(q,k)|^{2},$$

$$T(k) = \frac{P_{sc}^{-}(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{F(k)} \int_{-n0\left(\frac{\omega}{c}\right)}^{n0\left(\frac{\omega}{c}\right)} \frac{dq}{2\pi} \alpha^{0}(q) |A(q,k) + S^{-}(q,k)|^{2},$$
(18) (19)

donde $F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g\alpha_0(k) |\Psi_0|^2$ y A(q, k) es el espectro angular del campo incidente.

RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos de los cálculos numéricos de la respuesta óptica de una PCW finita con defectos, mediante el cálculo de la reflectancia y de los modos de este sistema por medio del Método de la Ecuación Integral (IEM).

Para esto consideraremos el sistema mostrado en la Fig. (1), el cual modelamos haciendo uso de las ecuaciones integrales dadas por las Ecs. (14) y (15). Con estas consideraciones y tomando en cuenta los M cuerpos que componen la guía de ondas de longitud finita, se tiene que la reflectancia del sistema la podremos calcular con la Ec. (18).

Vamos a iniciar mostrando los perfiles de las PCWs sin defectos y con defectos (quitando inclusiones). La longitud de la guía de ondas, para este trabajo se considera con el valor $d = 22\pi$ (sólo 11 periodos). En la Figs. 2(a), (b) y (c) mostramos el perfil de una PCW con la distancia entre las superficies planas de $b = \pi$, sin defecto (11 inclusiones circulares) y con defecto (10 y 8 inclusiones circulares) respectivamente.



Figura 2. Perfil de una PCW con distancia entre las superficies planas de $b = \pi$ y la longitud $d = 22\pi$ con arreglo de (a) 11 inclusiones circulares (sin defecto), (b) 10 inclusiones circulares (con defecto) y (c) 8 inclusiones circulares (con defecto) que son iluminadas a incidencia normal con un haz Gaussiano.

Ahora comparemos las reflectancias de las PCWs con defectos calculadas usando el Modelo de Drude (DM) y el Método de la Condición a la Frontera de Impedancia (IBCM). También vamos hacer la comparación de las reflectancias de una PCW con defecto y sin defecto. En donde, mostraremos que ciertas frecuencias y en ciertos casos es posible la aparición de modos de propagación en una PCW con defecto.

En las Figs. 3(a), (b), (c) y (d) mostramos las reflectancias de una PCW conductora con defectos (10 inclusiones circulares). Los parámetros considerados son: $b = \pi$ y utilizando las fracciones de llenado f = 0.005, f = 0.007, f = 0.009 y f = 0.01. La razón de que se consideraron fracciones de llenado pequeñas es porque requieren recursos de cómputo muy altos a pesar de utilizar la programación en paralelo. Las curvas punteadas (color azul) son para los resultados obtenidos utilizando MD y las curvas sólidas (color rojo) son con el IBCM.



Figura 3. Reflectancias de PCWs con defecto de longitud $d = 22\pi$, con 10 inclusiones circulares que son iluminadas a incidencia normal con un haz Gaussiano, para fracciones de llenado (a) f = 0.005 (b) f = 0.007 (c) f = 0.009 y (d) f = 0.01.

Como se puede observar en las Figs. 3(a), (b), (c) y (d), los métodos DM y IBCM corresponden a los mismos resultados en el cálculo de las reflectancias del sistema y se reduce considerablemente los tiempos de cómputo con IBCM.

En las Figs. 4(a) y (b), se muestran las reflectancias de una PCW con defecto (8 inclusiones circulares) (línea sólida en color rojo) y sin defecto (línea punteada en color negro) con fracciones de llenado de f = 0.007 y f = 0.009 respectivamente, usando IBCM.



Figura 4. Reflectancia de la PCW, con defecto (8 inclusiones circulares) y sin defecto (11 inclusiones circulares), para fracciones de llenado (a) f = 0.007 (b) f = 0.009 usando IBCM.

En la Fig. 4, podemos ver modos de propagación en las zonas de bandas prohibidas. Para el caso de la PCW con fracción de llenado de f = 0.007 se tiene dos modos con una frecuencia de $\omega_r = 1.679$ y $\omega_r = 1.893$. Para la fracción de llenado de f = 0.009 también se tiene dos modos de propagación en las frecuencias de $\omega_r = 1.684$ y $\omega_r = 1.897$.

CONCLUSIONES

Hemos mostrado un estudio teórico y numérico de la respuesta electromagnética de una PCW conductora con defectos. A continuación se describen las conclusiones importantes para este trabajo.

Se ha aplicado dos métodos para el cálculo de la reflectancia del sistema: el DM y el IBCM junto con el IEM, en donde tienen una buena correspondencia entre sí. Es decir, corresponden a los mismos resultados en el cálculo de la reflectancia del sistema; sin embargo, el primero requiere más tiempo de cómputo con rango de matriz de $2N \times 2N$ y el segundo con menos tiempo de cómputo con una matriz de $N \times N$. Bajo estos cálculos es importante señalar que si el arreglo periódico de las inclusiones es pequeña, las zonas de máxima reflectividad, prácticamente no cambian. En cambio, si hacemos que las inclusiones sean un poco más grandes las zonas de máxima reflectividad se hacen un poco más anchas.

Por otro lado, en el cálculo de la reflectancia las PCWs con defectos se comportan casi de la misma forma que las PCWs sin defecto. Ahora, para el cálculo de los modos de propagación podemos señalar que la PCW con defectos (10 inclusiones circulares) no encontramos modos discretos. En cambio, para la PCW con defectos (8 inclusiones circulares) se pudo observar la aparición de dos modos de propagación para las fracciones de llenado de f = 0.007 y f = 0.009. Así, finalmente podemos concluir que al ponerle defecto a la PCW y a ciertas frecuencias puede dar lugar a modos de propagación en intervalos de frecuencia de alta reflectancia, en donde en una PCW sin defecto tiene bandas prohibidas.

BIBLIOGRAFIA

- 1. Mendoza-Suárez, A. y Pérez-Aguilar, H. (2016). Numerical integral methods to study plasmonic modes in a photonic cristal waveguide with circular inclusions that involve a metamaterial. Opt. Mater, 28: 1156-1159.
- 2. Fowles, G. R. (1968). Introduction to modern optics. Dover Publications, Inc., New York, 2th edition.
- Mendoza-Suárez, A. (1996). Métodos rugosos para el esparcimiento de luz por superficies y medios estrificados con perfiles arbitrarios. Tesis de Doctorado, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada CICESE.
- 4. Pérez, H. I., Valencia, C. I., Méndez, E. R. y Sánchez-Gil, J. A. (2009). On the transmission of diffuse light through thick slits. JOSA A, 26(4): 909-918.
- 5. Jackson, J. D. (1999). Classical Electrodynamics. John Wiley and Sons, New York, 1th edition.
DIFUSIÓN DE CALOR, VOLCANES Y ORIGEN DE LA VIDA

Isthar Cahum Marruffo, Diana Patricia Barragán Vázquez, Rafael Zamorano Ulloa

Instituto Politécnico Nacional

RESUMEN

Las ecuaciones diferenciales y sus condiciones de frontera, han sido una útil herramienta en el proceso del ser humano de comprender el universo. Por muchos años una diversidad de autores han trabajado con la ecuación diferencial de difusión aplicada a problemas reales como en el campo de ecología, neurociencias, geofísica, física, etc. Sin embargo, son escasos los trabajos que modelan completo 3 dimensiones espaciales y una temporal.

En este trabajo nos centramos en resolver en 4 dimensiones, el problema de difusión de calor a través de una placa tectónica, y su importancia en la formación de volcanes y criovolcanes. Mostramos cuál es la temperatura máxima que una placa soporta antes de permitir la formación de un volcán y su relación con el tiempo. Aplicamos la ecuación de difusión in-homogénea en coordenadas cartesianas a una sección rectangular de placa tectónica con varios kilómetros de espesor, en la cual, existe difusión de calor de la parte más caliente a la más fría; proponiendo después condiciones de frontera no homogéneas en el eje z, con el objetivo de encontrar la relación entre éstas y la formación de volcanes y crio volcanes.

Hallamos la solución a la ecuación no homogénea, utilizando dos veces y de manera sucesiva separación de variables. Posteriormente utilizamos desarrollo en series de potencias, y aplicamos el método de funciones ortogonales de Fourier. Obteniendo así, las soluciones espacial y temporal. Las soluciones encontradas se analizan en diferentes contextos de actividad volcánica, como nacimientos y erupciones de volcanes y criovolcanes. A su vez proveen información útil, ya sea para resguardar la vida aquí en la tierra, o para profundizar el conocimiento de los ricos procesos térmicos en los materiales del criomagma, abriendo rutas químicas de formación de vida en otros cuerpos celestes.

INTRODUCCION

Una infinidad de fenómenos en el universo incluyen en su comportamiento cambio. Cambio en el tiempo, cambio en el espacio, cambio de concentraciones, cambio de temperatura, etc. Las cantidades físicas mencionadas y sus cambios, generalmente siguen leyes matemáticas que se expresan en forma de ecuaciones diferenciales. El comportamiento térmico interno de la Tierra a través de millones de años también puede ser modelado con ecuaciones diferenciales parciales. La difusión de calor del núcleo de la Tierra hacia su superficie obedece una ecuación diferencial de difusión. La descripción matemática de esta difusión es el problema planteado en este trabajo y se escogió principalmente para mostrar la relevancia de la aplicación de las ecuaciones diferenciales parciales y sus condiciones de frontera. Además, tiene impacto en el conocimiento que podemos adquirir en la formación de volcanes, respiraderos hidrotermales y actividad volcánica.



También se vuelve un tema de más amplio interés pues se puede extender a problemas vulcanológicos en otros planetas y se pueden incluir los llamados "criovolcanes" o "volcanes fríos". Los volcanes fríos se encuentran en satélites y otros planetas, por ejemplo en Quobar un cuerpo pequeño del sistema solar localizado en el cinturón de Kuiper, o en Triton un satélite de Neptuno. La sonda Cassini-Huygens lanzada por la NASA en 1997, encontró Criovolcanes y fumarolas de Metano en dos satélites de Saturno (Titán y Encélado), según Seewald: "los gases emitidos por dichos volcanes son la fuente principal

de su atmósfera, además de expulsar vapor de agua desde sus océanos congelados, entre los elementos expulsados en dicho vapor se encuentra el hidrógeno, las implicaciones de que sean correctas dichas afirmaciones son fundamentales para la posibilidad de vida en estos satélites" (Science)[1]. El modelar a los llamados criovolcanes sigue la misma sistemática que desarrollamos en este trabajo.



Figura 2. Ubicación de los principales "puntos calientes".

El planteamiento del problema se basó en considerar un trozo de corteza continental, v estudiar la difusión de calor en él; y así relacionar los máximos de la función que nos describió éste fenómeno con la posible localización de los llamados "punto calientes", que según Donald J de Paolo y Michel Manga "son áreas de actividad volcánica alta en relación a sus entornos"[2], los cuales están ubicados en el interior de placas tectónicas, y aunque la mayoría de los volcanes del mundo afloraron por la actividad geológica en los límites de las placas tectónicas algunos volcanes se forman en puntos calientes, como lo es el Kilaue en Hawai, el cual se encuentra sobre un punto caliente lejos de los límites de las placas tectónicas, éste punto ha sido

grabado por tomografía sísmica, y se estima que tiene una anchura de 500–600 km. (Zhao, Science) [3].



Figura 3. Deriva de la corteza terrestre sobre un punto caliente. El calor asciende del núcleo de la Tierra al manto por convección.

Además los puntos calientes pueden formar largas cadenas de volcanes extintos al moverse una placa litosférica sobre el punto caliente fijo en el manto. En placas oceánicas esto puede producir la formación de archipiélagos volcánicos en los que la edad de sus rocas aumenta a medida que se incrementa la distancia al punto caliente. Un ejemplo clásico de este fenómeno es una vez más las islas de <u>Hawái</u>, las cuales son una cadena de volcanes proceso debió ser el siguiente: cada isla en



Figura 4. Proceso del surgimiento de cadenas de volcanes.

la cadena comienza como un volcán activo que es alimentado por el punto caliente y que finalmente, por la acumulación de material, se eleva por encima de la superficie del océano. A medida que la tectónica de placas aleja al volcán del punto caliente, el volcán se extingue. El punto caliente creará entretanto otro volcán: la próxima isla de la cadena. (Figura 4).

Asimismo la actividad volcánica está directamente ligada con los orígenes de la vida, pues de acuerdo a la teoría de fuentes hidrotermales, la cual trata de explicar cómo a partir de los compuestos que emanan de los respiraderos, (formando "sopas bioquímicas"), se pudieron haber formado los primeros seres vivos. Beatty, Overmann, y Lince indican que "Los respiraderos hidrotermales pueden parecerse al ambiente en el que evolucionó la vida... éstos dan las condiciones necesarias para realizar fotosíntesis empleando como fuente de luz la radiación geotérmica producida por dichos respiraderos" (PNAS)[4]; y Fox-Skelly Jasmin indica: "La actividad volcánica actúa como un faro, atrayendo la vida a la zona". (BBC, earth)[5]

TEORÍA

Se estudia la difusión de calor a través de una placa tectónica. Tomando como fuente de calor un "punto caliente". Se supone que la placa tiene las siguientes dimensiones: 1000 km de largo, 1000 km de ancho y 100 kilómetros de grosor. Una corriente de materiales calientes llega al manto superior y después a la parte posterior de la placa, una temperatura de 1500°C, entra a la placa y se difunde. Se analiza la difusión de calor en esta placa, así como la pérdida de calor a través de la parte superior. Se supone además, que la difusión actúa en un solo sentido, en este caso a lo largo del eje z, es decir, de la parte inferior a la superior, que variará de 0 a 100 km. La ecuación de difusión es una ecuación diferencial en derivadas parciales, utilizada para estudiar diversos fenómenos físicos, como lo son tinta en agua, glutamato en neuronas, flujo de calor; la difusión involucra aspectos de observación experimental, descripción teórica y aplicaciones técnicas, siendo campo de estudio de extensas áreas de la ciencia y la tecnología, de las cuales pueden mencionarse la ciencia de los suelos, la hidrología, la ecología, la producción de petróleo y los reactores catalíticos, convirtiéndose en un tema de verdadera importancia interdisciplinaria. Ecuación Diferencial:

 $\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} = D\frac{du}{dt} - - >$ Ecuación de difusión, cuya solución se propone como el producto de sus variables:

U(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t), esta función la transferencia de calor a través de un cuerpo tridimensional en un tiempo t.

Para nuestro problema, se utilizó dicha ecuación, como estamos suponiendo que hay pérdida de calor en una de las caras, se empleó con una modificación, restándole una constante multiplicada por la función que describe la temperatura.

 $\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} - \sigma u = \frac{du}{dt} - \dots$ (1), $\sigma > 0$, constante.

Esta es la ecuación de difusión modificada. Dónde el coeficiente de difusión D, es una propiedad del material, en este caso de una placa tectónica, es el valor obtenido de la <u>conductividad térmica</u> de un dividida entre el producto del valor de su <u>densidad</u> y la <u>capacidad calorífica específica</u> del mismo. En problemas de calor, como en el presente, se refiere al coeficiente de difusión térmica, el cual es un índice que expresa la velocidad de cambio, y flujo de temperaturas, en un material hasta que alcanza

el equilibrio térmico.

Sometemos (1), de acuerdo a las especificaciones del problema a las siguientes condiciones de frontera:

Condiciones de frontera	1) $u(0, y, z, t) = 0$ 2) $u(a, y, z, t) = 0$ 3) $u(x, 0, z, t) = 0$ 4) $u(x, b, z, t) = 0$ 5) $u(x, y, 0, t) = 1500^{\circ}C$ 6) $u(x, y, z, t) = 700^{\circ}C$ 7) $u(x, y, z, 0) = 1100$	
Figur	5. Diagrama de una sección de	placa, en la cual se muestra

Figura 5. Diagrama de una sección de placa, en la cual se muestra el flujo de calor de acuerdo a las condiciones de frontera.

Tenemos una ecuación in-homogénea con condiciones de frontera independientes del tiempo inhomogéneas en el eje z. Haremos, pues, el siguiente cambio de variable: $u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) + \varphi(z)$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{\partial v^2}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial v^2}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial v^2}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tenemos:

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial v^2}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma v - \sigma \varphi = \widehat{D} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Agrupando términos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial v^2}{\partial z^2} - \sigma v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma \varphi \end{pmatrix} = \widehat{D} \frac{\partial v}{\partial t}$$
$$(\nabla^2 v - \sigma v) + (\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma \varphi) = \widehat{D} \frac{\partial v}{\partial t} - - - - (2)$$

La ecuación (2) se hace homogénea si:

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} - \sigma \varphi = 0 \rightarrow \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = \sigma \varphi - - - - - (\mathbf{3})$$

Lo que nos lleva a tener que dar solución a los siguientes dos problemas:

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = \sigma \varphi \rightarrow P1 \qquad \qquad \nabla^2 v = D \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma v \rightarrow P2$$

Dado el cambio de variable, es necesario modificar las condiciones de frontera:

Notemos que como la función ϕ solo depende de z, las primeras cuatro condiciones, no aplican pues se refieren a x & y.

- 1) $u(0, y, z, t) = v(0, y, z, t) = 0, \rightarrow 1.1)v(0, y, z, t) = 0$
- 2) $u(1000, y, z, t) = v(1000, y, z, t) = 0, \rightarrow 1.2)v(1000, y, z, t) = 0$

- 3) $u(x, 0, z, t) = v(x, 0, z, t) = 0, \rightarrow 1.3)v(0, y, z, t) = 0$
- 4) $u(x, 1000, z, t) = v(x, 1000, z, t) = 0, \rightarrow 1.4)v(x, 1000, z, t) = 0$
- 5) $u(x, y, 0, t) = v(x, y, 0, t) + \varphi(0) = 1500$, si suponemos: 1.5) $\varphi(0) = 0 \rightarrow 2.5$ v(x, y, 0, t) = 0
- 6) $u(x, y, 100, t) = v(x, y, 100, t) + \varphi(100)=0$, si suponemos 1.6) $\varphi(100) = u_0 \rightarrow 2.6$) v(x, y, 100, t) = 0
- 7) $u(x, y, z, 0) = v(x, y, z, 0) + \varphi(0) = U_0$,

Despejando:

 $1.7)U_0 - \varphi(z) = v(x, y, z, 0)$

Se resolvió P1, sujeto a las condiciones correspondientes, usando el método de series de potencias:

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} = \sigma \varphi$$

 $\sigma \varphi = 0$

Supongamos $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, entonces $\varphi'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n)(n-1)C_n z^{n-2}$

Entonces:

$$\varphi'' - \sigma\varphi = \sum_{n=2}^{\infty} (n)(n-1)C_n z^{n-2} - \sigma \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n =$$
$$= C^2(2)z^0 + \sum_{n=3}^{\infty} (n)(n-1)C_n z^{n-2} - \sigma C_0 z^0 - \sigma \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n =$$
$$= (2C_2 - \sigma C_0) + \sum_{k=1}^{\infty} [C_{k+2}(k+2)(k+1) - \sigma C^k] z^k = 0$$

Luego:

$$\begin{array}{l} C_{2} = \frac{\sigma}{2} C_{0} \ \text{y se debe tener que } C_{k+2} = \frac{\sigma C_{k}}{(k+2)(k+1)} \\ \text{Haciendo que k tome valores sucesivos enteros, comenzamos con k=0} \\ k = 0 \ \rightarrow \ C_{2} = \frac{\sigma}{2} C_{0} \\ k = 1 \ \rightarrow \ C_{3} = \frac{\sigma}{(3)(2)} C_{1} \\ k = 2 \ \rightarrow \ C_{4} = \frac{\sigma}{(4)(3)} C_{2} = \frac{\sigma}{(4)(3)} C_{0} = \frac{\sigma^{2}}{(2)(3)(4)} C_{0} \\ k = 3 \ \rightarrow \ C_{5} = \frac{\sigma}{(5)(4)} C_{3} = \frac{\sigma}{(5)(4)} \frac{\sigma}{(3)(2)} C_{1} = \frac{\sigma^{2}}{(2)(3)(4)(5)} C_{1} \\ k = 4 \ \rightarrow \ C_{6} = \frac{\sigma}{(6)(5)} C_{4} = \frac{\sigma}{(6)(5)} \frac{\sigma}{(2)(3)(4)(5)} C_{0} \\ k = 5 \ \rightarrow \ C_{7} = \frac{\sigma}{(7)(6)} C_{5} = \frac{\sigma}{(7)(6)} \frac{\sigma^{2}}{(2)(3)(4)(5)} C_{1} = \frac{\sigma^{3}}{(2)(3)(4)(5)(6)(7)} C_{0} \\ \end{array}$$

Así que la solución es de la forma:

 $\varphi = C_0 + C_1 x + \frac{\sigma}{2} C_0 x^2 + \frac{\sigma}{3!} C_1 x^3 + \frac{\sigma^2}{4!} C_0 x^4 + \frac{\sigma^2}{5!} C_1 x^5 + \frac{\sigma^3}{6!} C_0 x^6 + \frac{\sigma^3}{7!} C_1 x^7 + \cdots$ $\varphi = C_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2!} x^2 + \frac{\sigma^2}{4!} x^4 + \frac{\sigma^3}{6!} x^6 + \cdots \right) + C_1 \left(x + \frac{\sigma}{3!} x^3 + \frac{\sigma^2}{5!} x^5 + \frac{\sigma^3}{7!} x^7 + \cdots \right)$ La cual es equivalente a: $\varphi(z) = C_0 \operatorname{senh} (\sigma z) + C_1 \cosh(\sigma z) \operatorname{----}(4)$ Aplicando las condiciones de frontera:

$$\varphi(0) = C_0 senh(0) + C_1 cosh(0) = C_1 = 1500$$

$$\varphi(100) = C_0 senh(100\sigma) + T_0 cosh(100\sigma) = T_1$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$C_0 = \frac{T_1 - \cosh(100\sigma)1500}{\operatorname{senh}(100\sigma)}$$

Finalmente:

$$\varphi(z) = \left[\frac{T_1 - \cosh(100\sigma) * 1500}{\operatorname{senh}(100\sigma)}\right] * \operatorname{senh}(\sigma z) + 1500 * \cosh(\sigma z) - ---(5)$$

Se resolvió P2, sujeto a las condiciones 1.1) a 1.7), mediante el método de separación de variables. $\frac{dv^2}{dx^2} + \frac{dv^2}{dy^2} + \frac{dv^2}{dz^2} = D\frac{\partial v}{\partial t} + \sigma v$, suponiendo v = X(x)Y(y)Z(z)T(t), se hace la sustitución en la ecuación anterior:

$$\frac{dXYZT^{2}}{dx^{2}} + \frac{dXYZT^{2}}{dy^{2}} + \frac{dXYZT^{2}}{dz^{2}} = D\frac{\partial XYZT}{\partial t} + \sigma XYZT$$
Y multiplicando ambos lados por $\frac{1}{XYZT}$:
Similarmente al problema (1):
 $\frac{X''}{x} + \frac{Y''}{y} + \frac{Z''}{z} = D\frac{T'}{T} + \sigma$
Similarmente al problema (1):
 $\frac{X''}{x} + \frac{Y''}{y} + \frac{Z''}{z} = -\lambda$ ------(6)
 $DT' + T(\sigma + \lambda) = 0$ ------(7)
Similarmente para (A):
 $\frac{X''}{x} + \frac{Y''}{y} = -\beta$ ------(8)
 $Z'' + Z(\lambda - \beta) = 0$ ------(9)
Y análogamente para (8)
 $\frac{X''}{x} = -\beta - \frac{Y''}{y} = -\alpha$
 $Y'' + Y(\beta - \alpha) = 0$ ------(11)

Se resolvió (10) sujeto a 2.1) y 2.2), de donde se encontró la solución siguiente: $\alpha = K_x^2, \qquad x = C_1 sen\left(\frac{n\pi}{1000}x\right) \quad K_x = \frac{n\pi}{1000}, n = 1, 2, ...$ Se resolvió (11) sujeto a 2.3) y 2.4), de donde se encontró la solución siguiente: $\beta - \alpha = k_Y^2 \rightarrow y = C_2 sen\left(\frac{m\pi}{1000}y\right), \qquad K_y = \frac{m\pi}{1000}, \qquad m = 1, 2, ...$

Se resolvió (9) sujeto a 2.4) y 2.5), de donde encontró la solución siguiente:

$$\lambda - \beta = K_z^2 \to z = c_3 sen\left(\frac{p\pi}{100}\right), \quad K_z = \frac{p\pi}{100}, \quad p = 1, 2, ...$$

Finalmente para (7) $DT' + T(h + \lambda) = 0$ $D\frac{dT}{T} = -T(h + \lambda)dt$ $\int \frac{dT}{T} = \frac{-(h+\lambda)}{D}\int dt$ $lnT = \frac{-(h+\lambda)}{D}t \rightarrow T = c_4 e^{\frac{-(h+\lambda)}{D}t}$ Sustituyendo los resultados en v:

$$V(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) = C_1 sen\left(\frac{n\pi}{1000}x\right)C_2 sen\left(\frac{m\pi}{1000}y\right) c_3 sen\left(\frac{p\pi}{1000}z\right)c_4 e^{\frac{-(\sigma+\lambda)}{D}t}$$

Haciendo Amnp=c_1c_2c_3 y utilizando el principio de superposición:

$$V(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mnp} sen\left(\frac{n\pi}{1000}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{1000}y\right) sen\left(\frac{p\pi}{100}z\right) e^{\frac{-(\sigma+\lambda)}{D}t}$$

RESULTADOS

A continuación se muestran gráficas de esta solución, se graficó variando a x & y, y dejando a z constante utilizando los siguientes parámetros, que se consideraron razonables:

 $T_0=1500 \\ T_1=700 \\ U_0=1100 \\ \sigma=.000001 \\ z=50$



Figura 6. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111} , al tiempo t=0.



Figura 7. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1 y n=m=p=3, considerando los dos primeros sumandos de la solución con A_{111} , A_{333} al tiempo t=0.



Figura 8. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, n=m=p=3, n=m=p=5 considerando los tres primeros sumandos de la solución con A_{111} , A_{333} al tiempo t=0.

Como se puede observar de las figuras 1,2 y 3, no hay variación relevante conforme aumentan los sumandos, por lo que se procedió a graficar ahora a un tiempo distinto:



Figura 9. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111} , al tiempo t=1.



Figura 10. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111} , al tiempo t=2.





Figura 11. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111} , al tiempo t=3.





Figura 13. Gráfica de u(x,y,z,t) para n=m=p=1, considerando solamente el primer sumando de la solución con A_{111} , al tiempo t=10.

El análisis de los resultados obtenidos mediante las gráficas de las soluciones encontradas, que se realizó a una determinada altura de la placa, indica que el calor se acumula en el centro de la placa. Asimismo se encontró que la variación conforme se aumentan los parámetros m, n y p en la solución,

es mínima, así que el término de mayor relevancia es el correspondiente a m=n=p=1, pues la amplitud de nuestra solución decae con rapidez al incrementar el valor de dichos parámetros, cabe señalar que los términos constantes asociados con índices pares se anula, así que nuestra solución es diferente de cero solo para índices impares. También se puede observar que conforme transcurre el tiempo, el cual contribuye a nuestra solución con una exponencial elevada a un número negativo, los valores de la función u, disminuyen entre 110 y 160°C. Conforme el tiempo aumenta, la variación en la temperatura se va haciendo cada vez menor.

CONCLUSIONES

De acuerdo a lo que podemos observar en las gráficas; el máximo que observamos, está relacionado con el punto caliente del que se habla en la literatura geológica, o sea un posible punto en el que un volcán puede emerger, notamos que conforme pasa el tiempo el máximo de calor que se alcanza en la placa es cada vez menor, es decir, el volcán se vuelve menos activo; lo cual, suena completamente lógico, pues como ya se dijo antes, el punto caliente de la tierra es fijo, mientras que la placa tectónica va reacomodándose constantemente; es decir se va alejando cada vez más del punto caliente, y por tanto el volcán que se estaba estudiando en el trozo de placa que tomamos se va extinguiendo hasta que el flujo de calor en este trozo se vuelve nulo tal y como se muestra en la figura 12.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. Jeffrey S. Seewald, "Detecting molecular hydrogen on Enceladus". Science
- 2. Donald J. DePaolo y Michael Manga. 2003. Deep Origin of Hotspots the Mantle Plume Model. <u>Science</u>
- 3. <u>DapengZhao</u>, "Global tomographic images of mantle plumes and subducting slabs: insight into deep Earth dynamics ". Science.
- 4. J. Thomas Beatty, Jörg Overmann, Michael T. Lince, Ann K. Manske, Andrew S. Lang, Robert E. Blankenship, Cindy L. Van Dover, Tracey A. Martinson and F. Gerald Plumley Blankenship, Cindy L. Van Dover, Tracey A. Martinson and F. Gerald Plumley, 2005 "An obligately photosynthetic bacterial anaerobe from a deep-sea hydrothermal vent". PNAS
- 5. Jasmin Fox-Skelly 6 November 2015, "The strange Worms that live on erupting mud vulcanoes". BBc earth.

ENSEÑANZA DE ESTADISTICA CON EL USO DE EXCEL COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA

Julio Cesar Mendoza Rojas¹, Joaquín Estévez Delgado², Jesús Iván Mejía Navarro³, Estefanía Alfaro Quintero⁴ y Blanca Yecenia Tapia Maldonado⁵

¹ Escuela Preparatoria "Gral. Lázaro Cárdenas", UMSNH, ² Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH, ³ Preparatoria Melchor Ocampo, UMSNH, ⁴ Escuela Preparatoria Melchor Ocampo, UMSNH, ⁵ H.G.U. Dr. Pedro Daniel Martínez. merojuce@hotmail.com

RESUMEN

La materia de estadística es una rama de las matemáticas que tiene aplicación en diferentes áreas del conocimiento y presenta problemas en el proceso enseñanza - aprendizaje, reflejándose en altos índices de reprobación, debido a este problema surge la motivación por buscar alternativas de enseñanza para reducir los índices de reprobación. En este trabajo se realizó un diseño instruccional sustentado en las teorías del aprendizaje significativo y constructivista, integrando la tecnología (hoja de cálculo de Excel) como herramienta educativa. Tomando como muestra un grupo de licenciatura en Criminología del Centro de Estudios Universitario Vizcaya de las Américas (CEUVA), plantel Uruapan. Se consideró el tema de regresión lineal por mínimos cuadrados para monitorear su aprendizaje. Se explicó el tema de manera tradicional y se aplicó una evaluación escrita. Se realizó un provecto por equipos; de manera aleatoria tomaron muestras de 20 alumnos por equipo, para determinar la correlación entre las variables: independiente (longitud del brazo) y dependiente (estatura), realizando un análisis de regresión lineal. Por último se explicó el tema de regresión lineal con el uso de la hoja de cálculo de Excel (uso de tablas, formulas y graficas) y se realizó otra evaluación escrita y los resultados fueron: el 34.78% reprobaron, el 4.34 % obtuvieron 7, el 17.39 % 9 y el 43.47% 10. Al comparar los resultados de las evaluaciones: El índice de reprobación disminuyo 8.69 % y el promedio mejoro 30.48 %.

INTRODUCCIÓN

La materia de estadística es una rama de las matemáticas que tiene aplicación en diferentes áreas del conocimiento y presenta problemas en el proceso enseñanza - aprendizaje, reflejándose en altos índices de reprobación, debido a este problema surge la motivación por buscar alternativas de enseñanza para reducir los índices de reprobación.

El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje es una herramienta que no podemos dejar de lado porque las nuevas generaciones utilizan la computadora e internet de manera cotidiana y se puede aprovechar esta situación para motivar al estudiante a desarrollar un aprendizaje significativo, constructivista y colaborativo. En la actualidad se cuanta una variedad de software especializado en realizar cálculos estadísticos, de los cuales algunos son de acceso libre, otros tienen un costo en el mercado, algunos son más sencillos de aprender y otros más complejos. Para el desarrollo de este trabajo de investigación se decidió utilizar la hoja de cálculo Excel por las siguientes razones: Lewis, Pamela: Considera que esta es una herramienta de aprendizaje poderosa y que si los estudiantes tienen acceso a computadores, deben utilizarla. Argumenta que desarrolla en los estudiantes habilidades para:

a) Organizar datos (ordenar, categorizar, generalizar, comparar y resaltar los elementos claves)

b) Realizar diferentes tipos de gráficas que agreguen significado a la información ayudando en la interpretación y análisis;

c) Utilizar gráficas para reforzar el concepto de porcentaje;

d) Identificar e interpretar para un conjunto de datos, el máximo y mínimo, media, mediana y moda;
e) Utilizar elementos visuales concretos con el fin de explorar conceptos matemáticos abstractos (inteligencia visual y espacial);

f) Descubrir patrones;

g) Comprender conceptos matemáticas básicos como conteo, adición y sustracción;

h) Estimular las capacidades mentales de orden superior mediante el uso de fórmulas para responder a preguntas condicionales del tipo "si... entonces";

i) Solucionar problemas y

j) Usar fórmulas para manipular números, explorar cómo y qué formulas se pueden utilizar en un

problema determinado y cómo cambiar las variables que afectan el resultado.

Aunado a lo anterior Excel es una herramienta que está al alcance de cualquier alumno por su bajo costo y fácil manejo.

Esta investigación se fundamenta en las teorías del aprendizaje significativo y constructivista: el aprendizaje significativo es fundamental en áreas exactas donde muchas veces el docente desarrolla los temas con ejemplos de los libros que no tienen nada que ver con el contexto social y el entorno del estudiante, generando enfado, desánimo y poco interés por aprender la materia, la mayoría de los alumnos aprende de forma mecánica y de memoria los conceptos y/o formulas haciendo más difícil su aprendizaje de esta área de las matemáticas, como es la estadística. Ausubel, D. P., Novak, J. Y. H. H., & Hanesian, H. (1976) Consideran que: "El aprendizaje significativo presupone tanto que el alumno manifiesta una actitud hacia el aprendizaje significativo; es decir, una disposición para relacionar, no arbitraria, sino sustancialmente, el material nuevo con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, especialmente relacionable con su estructura de conocimiento, de modo intencional y no al pie de la letra." De ahí la importancia del dominio de la materia por parte del docente para realizar ejemplos y ejercicios relacionados con el entorno donde se desarrolla el estudiante y así poder atraer la atención del estudiante al relacionar los conocimientos nuevos con una aplicación a su vida cotidiana, entonces surge la necesidad de que el alumno construya sus nuevos conocimientos haciendo uso de las herramientas que conoce y le son de interés. Requena, S. H. (2008), Considera que: "El constructivismo ofrece un nuevo paradigma para esta nueva era de información motivado por las nuevas tecnologías que han surgido en los últimos años. Con la llegada de estas tecnologías (wikis, redes sociales, blogs...), los estudiantes no sólo tienen a su alcance el acceso a un mundo de información ilimitada de manera instantánea, sino que también se les ofrece la posibilidad de controlar ellos mismos la dirección de su propio aprendizaje".

En este trabajo se realizó un diseño instruccional sustentado en las teorías del aprendizaje significativo y constructivista, integrando la tecnología (hoja de cálculo de Excel) como herramienta educativa para monitorear el aprendizaje de un grupo de estudiantes, al desarrollar un tema de estadística en una primera etapa de forma tradicional, en una segunda etapa realizando un trabajo en equipo de manera colaborativa, para lograr un aprendizaje constructivista y en una tercera etapa se utilizó la hoja de cálculo Excel como herramienta tecnológica en el proceso de enseñanza aprendizaje para generar un material de aprendizaje significativo en el alumno.

DESARROLLO

Se realizó y aplico un diseño instruccional, considerando una muestra aleatoria estratificada por clases, considerando un grupo de licenciatura en Criminología del Centro de Estudios Universitario Vizcaya de las Américas (CEUVA), plantel Uruapan. Se determinó utilizar en este trabajo específicamente el tema de estadística de regresión lineal por mínimos cuadrados para monitorear su aprendizaje. Se consideraron tres etapas para el monitoreo: Primero el profesor explico de manera tradicional el tema con plumón y pintarrón, desarrollando teóricamente el tema con ejemplos y ejercicios, al final se aplicó una evaluación escrita. En la segunda etapa se realizó un proyecto por equipos donde el grupo de estudio se dividió en equipos de 5 integrantes y analizaron muestras de 20 alumnos de la Carrera de Criminología de primer cuatrimestre, para determinar la correlación entre las variables: independiente (longitud del brazo) y dependiente (estatura), realizando un análisis de regresión lineal. En la tercera etapa, se explicó el tema de regresión lineal con el uso de la hoja de cálculo de Excel explicando específicamente las funciones de Excel sobre: el uso de tablas, fórmulas para calcular parámetros estadísticos y graficas de funciones. En cada etapa se registró el avance en el desempeño de cada alumno con evidencias y se realizó una segunda evaluación escrita similar a la primera en reactivos y complejidad, con la finalidad de comparar los resultados.

RESULTADOS

En la primera etapa de la investigación el docente desarrollo el tema de regresión lineal por mínimos cuadrados en dos casos principales: Cuando la ecuación se ajustaba a los casos más simples de una recta y una parábola. Explicando: el método de regresión lineal por mínimos cuadrados. Para la línea recta se resolvieron ejemplos para determinar la pendiente, ordenada al origen, ecuación de la

recta y coeficiente de correlación, Para la parábola se resolvió un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para determinar la ecuación de la parábola que meior se ajustaba a la distribución maestral de los datos. Las gráficas de la distribución muestral, de las rectas y parábolas las realizaron los alumnos con lápiz en papel milimétrico con las escalas respectivas. Todos los cálculos los realizaron utilizando calculadora científica básica. (Sin la opción de realizar graficas). Al final del desarrollo de los temas por parte del docente y de realizar ejemplos y ejercicios con los alumnos, se aplicó una evaluación escrita, en el cual realizaron un ejercicio de cada caso. Los resultados fueron: el 34.78% de los alumnos reprobaron, el 4.34 % obtuvieron 7, el 17.39 % 9 y el 43.47% 10. En una segunda etapa los alumnos formaron equipos de 5 integrantes, cada equipo considero una muestra de 20 alumnos de primer cuatrimestre de la carrera de Criminología para determinar la correlación entre las variables: independiente (longitud del brazo) y dependiente (estatura), tomaron la muestra de los datos y realizaron un análisis estadístico de regresión lineal para determinar el mejor ajuste lineal o parabólico para la distribución muestral de datos, es decir, aplicaron los conocimientos de estadística a un problema practico que resultaba más interesante para el grupo de estudio y al recolectar los datos, representarlos en tablas, analizar el margen de error en la toma de los mismos, les fue muy significativo porque sabían el origen de los números que estaban analizando y les quedo claro que la finalidad de obtener una ecuación era poder predecir con cierta probabilidad uno de los parámetros analizados en función de la otra variable, situación que no les quedaba clara al realizar ejercicios solo con la primer etapa de enseñanza tradicional. En una tercera etapa el docente explico el tema de mínimos cuadrados (Línea recta y parábola) con el uso de la hoja de cálculo Excel primero en el manejo de datos con tablas, utilizando las formulas predeterminadas para realizar sumatorias, así como las funciones para calcular los parámetros estadísticos básicos, así como la forma en que se introducen nuevas fórmulas, de acurdo a las necesidades del problema a resolver. Finalmente se explicó la realización de graficas de dispersión, así como las curvas o líneas que mejor se ajustaban a la distribución de datos de cada muestra.

Al final de las tres etapas del diseño instruccional se aplicó otra evaluación escrita el grupo de estudio con dos reactivos a resolver, uno de regresión lineal y otro parabólico, con el mismo grado de dificultad que el aplicado en la primer etapa del diseño instruccional. Al comparar los resultados, se observó lo siguiente: El índice de reprobación disminuyo 8.69 % y el promedio mejoro 30.48 %.

CONCLUSIONES

El diseño instruccional de la enseñanza de la materia de estadística utilizando la tecnología como herramienta educativa (la hoja de cálculo Excel), fundamentada en las teorías del aprendizaje constructivista, significativo y aprendizaje por proyectos desarrolla en el alumno un aprendizaje significativo y colaborativo, cambiando la percepción que tiene de las matemáticas, al considerarlas puramente teóricas y sin sentido para su vida diaria. Los resultados fueron los siguientes:

* Se logró disminuir el índice de reprobación en un 8.69 %.

* El 30.48 % del grupo de estudio mejoro su promedio.

*Cambio la percepción de la materia de algunos alumnos que antes la consideraban aburrida y fuera de contexto.

Al aplicar el diseño instruccional se encontraron algunas problemáticas que representan desventajas en su aplicación, considerando las necesidades del perfil docente:

- El docente requiere una mayor preparación en el dominio del uso de la tecnología como herramienta educativa.
- El docente debe presentar disponibilidad de tiempo y dedicación para la actualización continua en las teorías de la enseñanza aprendizaje.

Las desventajas observadas en el diseño instruccional, considerando el perfil del alumno son:

- El alumno debe tener los conocimientos básicos en el uso de la calculadora científica.
- El alumno debe tener los conocimientos básicos en el uso de la computadora.
- El alumno debe tener la disposición de utilizar la tecnología como herramienta educativa y no solo de forma lúdica.

Las desventajas institucionales observadas:

• Los laboratorios de cómputo en la institución son insuficientes para realizar actividades similares con todos los grupos de todas las carreras. • No todos los alumnos cuentan con laptop o computadora personal.

En conclusión se propone realizar el diseño instruccional solo para algunos temas que se consideren de mayor relevancia en la materia y realizar una transversalidad con las otras materias relacionas como son: Metodología de la investigación, seminario de tesis, etc. Para solventar el uso de los laboratorios de computo.

Para lograr el perfil deseado en los docentes se propone realizar al final de cada cuatrimestre diplomados para actualizar a los docentes en las diferentes áreas del conocimiento y su aplicación en el uso de herramientas educativas.

Para lograr el perfil deseado en los alumnos se propone realizar cursos de inducción en los alumnos de nuevo ingreso para unificar conocimientos previos y desarrollar destrezas en el uso de la computadora y calculadora científica.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. Ausubel, D. P., Novak, J. Y. H. H., & Hanesian, H. (1976). Significado y aprendizaje significativo. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*, 53-106.
- Belfiori, L.V. (2014). Enseñanza de estadística con recursos TIC. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires (Argentina).
- López, M., Lagunes, C. & Herrera, S.(2008) Excel como una herramienta asequible en la enseñanza de la Estadística. Ed. Universidad de Salamanca. Universidad Autónoma del Carmen. Campeche, México. Encontrado en: http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_07/n7_art_lopez_lagunes_herrera.htm
- 4. Pamela Lewis, Psicóloga de la Universidad de Sur África con un magíster en ciencias especializada en el área de computadores en educación. Profesora y coordinadora de informática en el Colegio "St. Luke", de Brookfield, Winsconsin, Estados Unidos.
- 5. Requena, S. H. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. RUSC. Universities and Knowledge Society Journal, 5(2), 26-35.

CODIFICACIÓN DE CAMPOS ÓPTICOS ADIFRACCIONALES PERIÓDICOS CON POLARIZACIÓN INHOMOGÉNEA

María C. Alonso Casimiro, Ulises Ruiz Corona

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica,

RESUMEN

En este trabajo se reconstruyó un campo óptico adifraccional periódico, mediante la codificación de la fase del campo, el cual es generado a partir de la superposición de cuatro ondas con distintas polarizaciones. Para la obtención experimental del campo se usa la técnica de holografía sintética, donde el elemento principal es un LC-SLM (Liquid Cristal- Spatial Light Modulator), en el cual se despliega la fase del campo. Los resultados del campo reconstruido mostraron periodicidad y buena calidad. Lo cual implica que el método experimental empleado es un método eficiente para el estudio de las características de un campo vectorial.

INTRODUCCIÓN

Un campo óptico adifraccional (NDOFs, Non-difractive optical fields) es aquel que conserva su perfil transversal a la largo de su propagación. Este tipo de campos tiene aplicaciones en la generación de cristales y cuasi-cristales fotónicos. Algunos NDOFs pueden ser obtenidos mediante la superposición de campos escalares como ondas planas. Cuando dos campos escalares con estados de polarización mutuamente ortogonales se combinan se obtiene un campo óptico vectorial.

Una forma muy eficiente para generar campos ópticos escalares o vectoriales es a través de holografía sintética, la cual consiste en un proceso de formación de imágenes a partir de la codificación de campos ópticos arbitrarios complejos, descritos por una función matemática, una vez que ésta ha sido desplegada en algún dispositivo que proporcione la modulación espacial adecuada. Los hologramas sintéticos se clasifican en hologramas de amplitud y hologramas de fase. En los primeros se emplea una función únicamente de amplitud que codifica los valores del campo complejo. De manera similar, en los hologramas sintéticos de fase (SPH) se tiene una función de transmitancia únicamente de fase que permite codificar a la función compleja.

Actualmente los sistemas de despliegue más empleados en holografía sintética son los moduladores espaciales de luz basados en tecnología de cristal líquido LC-SLMs, (por sus siglas en inglés Liquid Crystal- Spatial Light Modulators). Los LC-SLM son dispositivos programables capaces de modificar en tiempo real la amplitud o fase de un campo óptico **¡Error! No se encuentra el origen de la eferencia.**].

La versatilidad que ofrece la combinación de la holografía sintética con los LC-SLMs, ha hecho relevante su aplicación en varios campos de la óptica tales como: el reconocimiento de patrones, metrología óptica, y recientemente la manipulación micropartículas mediante gradientes de intensidad o gradientes de polarización **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**].

TEORÍA

Un NDOF puede ser expresado como la superposición de ondas planas de igual amplitud, cuyos vectores de propagación tienen proyección común k_z respecto al eje z. El módulo de la componente transversal de los vectores de propagación k_t es una constante dada por la identidad

$$k_t^2 = k^2 - k_z^2 \tag{1}$$

donde k= $2\pi/\lambda$, corresponde al número de onda. Para el caso particular de los NDOFs periódicos y cuasiperiódicos, los vectores de propagación de las ondas que interfieren tienen una proyección común sobre el eje z, y las proyecciones transversales de esos vectores tiene ángulos azimutales uniformemente distribuidos en el plano x-y. Los NDOFs periódicos y cuasiperiódicos formados por la superposición de Q ondas planas en el plano z=0, son expresados en coordenadas polares (r,θ), como:

$$s(r,\theta) = C \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_n) \exp\left[i2\pi\rho_0 r \cos(\theta - n\Delta\theta)\right]$$
⁽²⁾

donde $\theta_n = np \Delta \theta$ es el corrimiento de fase de la n-ésima onda plana con $\Delta \theta = 2\pi/Q$, p es un número entero, $2\pi p_0$ es el módulo de las componentes transversales de los vectores de propagación y C es una constante de normalización que hace que el máximo de $|s(r, \theta)|$ sea igual a 1. En particular si p=0, entonces C=1/Q.

Por conveniencia, en el siguiente análisis expresaremos un NDOF en coordenadas rectangulares como la función s(x,y). Si fuéramos capaces de implementar una función de transmisión con la forma matemática de una amplitud compleja del NDOF, podríamos generar un campo con eficiencia [3],

$$\eta_f = \frac{\int_D |s(x, y)|^2 \, dx \, dy}{\int_D \, dx \, dy} \tag{3}$$

donde el dominio de integración D es un soporte que físicamente limita el campo. Expresando el NDOF en forma polar, $s(x,y)=|s(x,y)|exp[i\phi(x,y)]$ la función de transmitancia del holograma de fase del campo está dada por,

$$h_k(x, y) = \exp[i\phi(x, y)] \tag{4}$$

donde la función de modulación de fase $\varphi(x,y)$, es la fase del propio NDOF. Cuando el campo se reconstruye a partir de su fase el holograma resultante se denomina kinoform. Es posible relacionar s(x,y) y h_k(x,y) por la expresión

$$h_{k}(x, y) = \beta s(x, y) + \varepsilon(x, y)$$
(5)

donde β es una constante positiva , referida a la amplitud de ganancia y $\epsilon(x,y)$ es el error de modulación del holograma. Denotando las transformadas de Fourier de s(x,y) y $\epsilon(x,y)$ por S(u,v) y E(u,v) respectivamente, la transformada de Fourier del kinoform está dada por,

$$H_k(u,v) = \beta S(u,v) + E(u,v)$$
(6)

La condición necesaria para obtener la función compleja s(x,y) de su kinoform es tener una superposición nula de las funciones S(u,v) y E(u,v). El campo complejo es obtenido mediante un filtraje espacial, aplicado al espectro de Fourier H_k(u,v), y una operación de transformada de Fourier adicional.

En el caso cuando el campo s(x,y) es generado por su kinoform con eficiencia $\eta_k = \beta^2 \eta_f$. La ganancia eficiente del kinoform, respecto a la eficiencia de la transmitancia compleja está dada por,

$$G_{K} = \beta^{2} = \frac{\eta_{K}}{\eta_{f}}$$
⁽⁷⁾

PARTE EXPERIMENTAL

En la figura 1, se muestra el arreglo experimental empleado para la obtención de un campo adifraccional producido por 4 ondas planas. Un haz de luz láser de He-Ne pasa a través de una placa $\lambda/2$ y un polarizador (P) generando luz linealmente polarizada en dirección horizontal. El haz es enfocado a la distancia focal de un objetivo de microscopio (OM), donde es filtrado con un pinhole (FE1), la luz se expande hasta ser colimada por la lente L1, colocada a su distancia focal F1. El LC-SLM es iluminado de manera cuasi-normal por la luz colimada. Una lente (L2) se coloca después del LC-SLM a su distancia focal (F2) para hacer una transformada de Fourier del campo, un filtro espacial (FE2) es colocado en el plano focal posterior de la lente, el filtro permite la selección de cuatro spots que corresponden a los términos que contienen información del campo óptico escalar

codificado en su holograma de fase, cada holograma es enviado en niveles de gris al LC-SLM a través de una PC. Después del FE2 se coloca una placa $\lambda/2$ rotada 45° sobre los spots que se desee, para cambiar su polarización de horizontal a vertical. Posteriormente se coloca una placa $\lambda/4$ rotada 45° para obtener polarización circular sobre los spots que se requiera. El campo óptico es obtenido después de hacer una trasformada inversa de Fourier con una lente (L3). Un segundo polarizador (P) puede ser colocado después de la lente L3 para bloquear algunas componentes del campo eléctrico. Las imágenes del campo son obtenidas mediante una cámara CCD antes y después de colocar el segundo polarizador.



RESULTADOS

En la figura 2, se presentan los resultados obtenidos de una simulación numérica construida en MATLAB, así como los resultados experimentales de un campo óptico adifraccional con parámetros (Q=4,p=1) sin emplear el segundo polarizador en el arreglo experimental (figura 1). La figura 2a corresponde a la intensidad del campo obtenida numéricamente, en la figura 2b se visualiza la intensidad del campo obtenida experimentalmente y en la figura 2c se muestra el holograma de fase correspondiente al campo.



Figura 2. Campo adifraccional con parámetros Q=4 y p=1. a) Intensidad del campo obtenida numéricamente. b) Intensidad del campo obtenida experimentalmente. c) Holograma de fase del campo periódico.

En la figura 3 se muestran las configuraciones de polarización empleadas experimentalmente en cada spot filtrado perteneciente al campo con parámetros Q=4 y p=1. En la figura 3a dos spots tienen polarización lineal horizontal (LH) y los restantes tienen polarización lineal vertical (LV). Mientras que en la figura 3b cada spot tiene una polarización distinta: circular derecha CD, circular izquierda (CI), LH y LV.



Figura 3. Configuraciones de spots con distinta polarización empleando los parametros Q=4 y p=1: a) 2 spots con polarización LH (lineal horizontal) y dos spots con polarización LV (lineal vertical).

En la figura 4, se muestran los resultados numéricos y experimentales tras usar la configuración de la figura 3a. La intensidad del campo numérica y experimental se muestra en la figura 4a y 4b respectivamente. En las figuras 4c, 4e y 4g se observa el cambio del campo cuando se emplea el segundo polarizador en la figura 1, rotado 0°, 45°, y 90° de forma numérica. Las imágenes obtenidas de forma experimental del campo se muestran en 4d, 4f y 4h. En esta configuración de polarización, el campo que se obtiene es prácticamente uniforme. Con el uso del polarizador se bloquearon componentes del campo. Con el polarizador rotado 0° se bloquen las componentes verticales y se obtiene la interferencia entre dos ondas, con el polarizador rotado 45° se recupera el campo original (sin polarización inhomogénea), y con el polarizador rotado 90° se bloquean las componentes horizontales y también se obtiene interferencia entre dos ondas.



Figura 4. Resultados numéricos y experimentales empleando la configuración de polarización 3a. Intensidad numérica y experimental a) y b). Después de colocar un polarizador rotado 0° se obtiene c), a 45° se obtiene e) y a 90° se obtiene g). En d), f), y h) se muestran los campos obtenidos experimentalmente.

De igual manera en la figura 5, se muestran los resultados de los campos construidos después de montar la configuración de la figura 3b y rotar el segundo polarizador del arreglo experimental a 0° 45° y 90°. En esta configuración de polarización, el uso del polarizador rotado 0° genera el campo original (sin polarización inhomogénea), con el polarizador rotado a 45° se obtiene el campo con la misma configuración de polarización, es decir deja pasar todas las componentes, y con el polarizador rotado 90° se bloquean las componentes horizontales lo cual genera interferencia entre dos ondas.



Figura 4. Resultados numéricos y experimentales usando la configuración de polarización 3b. Intensidad numérica y experimental a) y b). Después de colocar un polarizador rotado 0° se obtiene c), a 45° se obtiene e) y a 90° se obtiene g). En d), f), y h) se visualizan los campos obtenidos experimentalmente.

Cada una de las imágenes obtenidas muestra la congruencia que hay entre los resultados experimentales y los numéricos. Se observa que el empleo de hologramas sintéticos de fase genera campos ópticos de forma eficiente.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran la eficiente reconstrucción del campo adifraccional con parámetros Q=4 y p=1 tras emplear hologramas sintéticos de fase, cuya fase correspondió a la propia fase del campo. Este hecho fue útil para reconstruir el mismo campo empleando polarización inhomogenea, los campos generados con polarización homogénea también se obtuvieron con buena calidad. Lo cual implica lo conveniente que resulta emplear holografía sintética en la construcción de campos ópticos.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. J. A. Neff, R. A. Athale y S. H. Lee. Two-Dimensional Spatial Light Modulators: A Tutorial. Proc. IEEE, 78:826-855, 1990.
- 2. María Guadalupe Méndez Vázquez. Generación y síntesis de campos luminosos escalares y vectoriales empleando hologramas sintéticos de fase. Tesis de Doctorado. Enero 2013.
- V. Arrizón, D. S. de-la Llave, G. Méndez, and U. Ruiz, "Efficient generation of periodic and quasi-periodic non-diffractive optical fields with phase holograms," Opt. Express 19, 10553– 10562 (2011)

CUANTIFICACIÓN DE PLATA EN ALIMENTOS

Sandra Judith Castañeda Palafox, José de Jesús Bernal Alvarado, Teodoro Córdova Fraga, Christian Gómez Solís

División de Ciencias e Ingenierías Campus León, Universidad de Guanajuato, Loma del Bosque No. 103 Col. Lomas del Campestre, C.P. 37150, León Gto. México.

RESUMEN

El determinar la composición química de un material es de gran interés, ya que esto permite conocer su comportamiento y propiedades que le definen. La técnica de fluorescencia de rayos-X por energía dispersiva (EDXRF), es un método analítico que nos permite estudiar de manera cualitativa y cuantitativa la composición química de diversos materiales. Además de ser un método rápido, exacto v no destructivo. Su aplicación abarca desde la investigación científica hasta la industria [1-4]. Mediante el uso de patrones de calibración para la determinación de plata coloidal se llevaron a cabo mediciones en muestras de orgánicas de uso común, para de este modo determinar la cantidad qué es ingerida mediante su consumo. Los patrones de calibración, se llevaron a cabo usando muestras de gel de agarosa con plata coloidal en distintas concentraciones. Teniéndolas se procede a realizar una calibración con el uso del espectrómetro de fluorescencia de rayos X por energía dispersiva, el cual relaciona la cantidad de plata contenida en las muestras con las intensidades relativas y de esta manera, calcular curvas de calibración. Establecidas, se procede a medir muestras de diversos vegetales, entre ellos, fresas. Se tienen dos muestras, una como control y otra que es sometida a un tratamiento previo para así poder determinar la cantidad de plata coloidal que se adhiere a cada una de estas. Los resultados obtenidos para el grupo control de 0.050 gramos y 0.045 gramos para la muestra que se sometió al tratamiento. Se observa un contenido de plata original, lo cual puede ser ocasionado por procedimientos de esterilización y limpieza del producto desde el empaque, o bien, del suelo donde creció.

INTRODUCCIÓN

La determinación química de un material o muestra representa una cuestión de gran interés, ya que permite conocer su comportamiento y propiedades que lo definen. La técnica de fluorescencia de rayos X por energía dispersiva (EDXRF), es un método analítico que permite el estudio de manera cualitativa y cuantitativa la composición elemental de diversos materiales. Es rápido, exacto y no destructivo, por lo que es método idóneo usado en diversas ramas que van desde la investigación hasta la industria [1-4].

La fluorescencia de rayos X ocurre cuando los átomos de la muestra absorben energía, un electrón cercano al núcleo (capas K o L) es expulsado del átomo por lo que queda instable y para que su estado sea reestablecido, los electrones de las capas subsecuentes llenan el espacio vacío. Al pasar un electrón de otra capa con diferente energía al del electrón saliente habrá una diferencia de energía, la cual se emite en forma de radiación de rayos X y es única de cada elemento [5].

La plata es un metal al que se le ha dado diversos usos desde metalúrgicos hasta médicos, por ejemplo su uso como bactericida. E. Coutiño et al. [6-7] estudiaron varios de estos usos así como sus posibles complicaciones de salud al estar expuestos de distintas maneras a este metal, ya sea inhalado, oral y dérmica. Llegaron a la conclusión de que su uso es desmedido y descontrolado, el cual repercute en más de una modo a la salud por ser un elemento bajamente excretado que suele ser retenido por el organismo.

TEORÍA

La fluorescencia de rayos X es una técnica de emisión atómica. Existen dos tipos de procesos para la producción de rayos X (Figura 1):

- a) Bremsstrahlung. Cuando un electrón pasa lo suficientemente cerca del núcleo se produce una interacción electrostática, esto hace que el electrón se frene y desvíe, de modo que hay perdida de energía cinética que se disipa en forma de un fotón de rayos X.
- b) Rayos X característicos. Cuando hay emisión de fotones de rayos X por parte del átomo cuando un electrón pasa de un nivel de energía alto a otro bajo.

Al tener rayos X característicos se podrán identificar y cuantificar los elementos presentes.



Figura 1. Producción de rayos X. En a) se tiene la radiación Bremsstrhlung o de frenado mientras que en b) se tienen los rayos X característicos.

La manera usual de generar los rayos X es mediante un tubo acelerador de electrones por alto voltaje conocido como tubo de rayos X.



Figura 2. Tubo de rayos X. El filamento al rojo vivo libera electrones por efecto termoiónico, los cuales son acelerados por un alto voltaje (hasta 50 kV) que chocan en un blanco metálico produciendo fotones de rayos X.

La espectrometría de rayos X consiste en analizar la radiación X característica generada por una muestra al ser ésta irradiada con rayos X emitidos desde un tubo de rayos X. Esta técnica permite obtener análisis químicos de manera rápida y no destructiva, pudiendo analizarse cualquier elemento químico entre en Na y U.

Cuando un átomo se encuentra excitado, experimenta transiciones a estados de menor energía de modo que emite radiación electromagnética, por lo que la longitud de onda de esta radiación emitida está relacionada con los estados inicial y final. En un tubo de rayos X, el electrón después de salir disparado del cátodo llega al ánodo con la suficiente energía para vencer la repulsión eléctrica de los electrones más exteriores al átomo, perforando en cierto modo las capas superiores logrando llegar hasta la capa más cercana al núcleo del átomo. Al impactar con unos de los dos electrones de la primera capa, lo saca fuera del átomo dejando con ello un hueco. Este estado es inestable, lo cual conlleva a que un electrón de las capas subsecuentes estabilice al átomo llenando ese hueco. En el proceso de descenso, el átomo libera un fotón de alta energía, siendo este un fotón de rayos X.

Como la transición electrónica corresponde a la diferencia de energía entre dos orbitas atómicos, el fotón emitido tiene una energía característica descrita por la ecuación (1):

$$\Delta E = E_f - \dot{E}_i \tag{1}$$

Corresponde a la diferencia de energía de estos dos niveles y por tanto, es distintivo del átomo. Como resultado a este proceso, se tiene un gran número de átomos que generan de manera simultánea series espectrales K, L, M, etc., de rayos X de modo que forman un espectro para cada elemento.

Los elementos presentes en la muestra emitirán radiación fluorescente de rayos X con energías discretas, equivalente al color en la luz visible y característica para esos elementos. Una energía diferente es equivalente a un color diferente, por lo que, la medición de las energías de la radiación emitida por la muestra es posible determinar los elementos que están presentes, a esto se le

denomina análisis cualitativo. Por la medición de las intensidades de las energías emitidas, es posible determinar qué tanto de cada elemento está presente en la muestra, a esto se le denomina análisis cuantitativo [8].

La plata es un metal precioso que se encuentra en todo el mundo y tiene propiedades diversas fisioquímicas. Se encuentra de manera natural, la corteza terrestre contiene 0.1 ppm y el agua de mar alrededor de 0.15 ppm, incluso es posible detectar de manera natural concentraciones de plata en el humus de las plantas, que pueden llegar hasta 5 ppm, en trigo 0.9 ppm y en algunos hogos hasta 30 ppm de plata. También es encontrada en alimentos como el agua, por ejemplo 2 litros de agua pueden contener 200 µg de plata, la leche contiene 27-54 µg/L y la harina de trigo contiene 0.3 µg/g [9].

Las propiedades antibacterianas de la plata han sido conocidas y estudiadas desde hace tiempo, en especial es comúnmente usado como un agente naturalmente microbicida, contiene moléculas de plata entre 1 a 100 nm de tamaño en agua desionizada, que es la plata coloidal.

Los coloides son sistemas de dispersión con características intermediarias a las soluciones y a las suposiciones, poseen un diámetro de $1x10^{-10}$ pero no es visible por su estado de homogeneidad.

La reacción de la plata iónica con proteínas resulta un complejo insoluble de plata proteica con estructura cuadrimentada, por tanto los coloides son capaces de liberar lentamente los iones de plata, contribuyendo a la actividad antiséptica de la plata.

En estudios sobre el efecto antibacteriano con tres presentaciones de plata coloidal, se encontró que lavar las muestras reduce el número de bacterias en comparación con las muestras no lavadas. La plata tiene afinidad a reaccionar con proteínas, por lo que entre mayor cantidad de materia orgánica es menos efectiva. Así, la actividad microbiana es considerada por el grado de suciedad de las muestras y, el uso crónico podrías traer resistencia bacteriana debido a que la población utiliza más de lo recomendado para la desinfección.

Los efectos de la plata coloidal en los organismos dependen del grado de consumo, esto va desde las vías de entrada, la metabolización, eliminación y acumulación.

PARTE EXPERIMENTAL

Para el análisis se usó el espectrómetro 3XLE, que es un espectrómetro de fluorescencia de rayos X por energía dispersiva. Es decir, los rayos van desde la fuente a la muestra y las energías van directamente al detector para que después los datos sean analizados mediante un software denominado Epsilon 3.

Este equipo puede realizar dos tipos de análisis, uno elemental (cualitativo) y otro cuantitativo. En el cualitativo, se determina la posición de los máximos y área de los perfiles de emisión, mientras que en el cuantitativo se busca las medidas intensidades del elemento con las concentraciones relativas en una muestra.

El análisis cualitativo consiste en medir en cualquier muestra mediante una calibración general llamada Omnian, la cual me indica el porcentaje o ppm de los elementos encontrados en la muestra. Para la medición, se prepara el porta muestras con papel mylar en el cual se deposita la muestra que desea ser analizada.

Para la cuantificación de la plata coloidal, se usa como soporte para las muestras gel de agarosa. Que es un polisacárido natural que forma una matriz inerte que permite su uso como modelo de tejidos biológicos.

Para que un gel de agarosa pueda ser usado en el espectrómetro, es decir, se considere idóneo, debe tener consistencia de tal modo que no se endurezca o pierda su forma en portamuestras y que sea estable ante las pruebas que se le realicen.

La preparación del gel de agarosa se llevó a cabo a una concentración de 0.6% en agua destilada, se mezclan ambos en una vaso de precipitado que para ser llevado a un agitador magnético de modo que la mezcla llegue a una temperatura de 200° durante 12min y 1250 rpm. De este modo, se tiene un gel firme y bien comportado que permite la cuantificación de distintos componentes o materiales de interés.

Si el contenido elemental de la muestra es conocido, se puede utilizar como patrón para la cuantificación del elemento que se desea analizar. En este trabajo, se utilizó plata coloidal (Ag_c) o comercialmente conocido como mycrodin para construir patrones y poder calcular una curva de calibración.

Para obtener patrones que midan bajas concentraciones de Ag_c y calcular la curva de calibración que permita la cuantificación de la plata en menor cantidad.

Se diluyen 0.05 g de Ag_c en 1 ml de gel de agarosa y a su vez en 1 ml previamente vertido en 5 porta muestras. De manera que se tiene 0.0025, 0.0050, 0.0075, 0.0100 y 0.0125 g de Ag_c.

Una vez que se ha obtenido un patrón de calibración, se miden muestras de origen orgánico para determinar la cantidad de Ag contenida en ellas. Se analizan muestras de fresa y lechuga. La medición se llevó a cabo en dos etapas:

- Con el uso del bactericida conforme al fabricante lo recomienda, 8 gotas por cada litro de agua durante 10 min (tratado).
- Sin el bactericida (no tratado).

Llevado a cabo el procedimiento anterior, se procede a medir con el patrón para baja concentración de Agc.

RESULTADOS

Del análisis cualitativo, se realizan mediciones a muestras de fresa y lechuga. Los resultados para este análisis son los mostrados en la tabla 1

Compuesto	FRESA	LECHUGA
-	Concentración (ppm)	Concentración (ppm)
Mg	-	10.6
Al	-	347.5
Si	149.3	251.2
Ρ	490	423.7
CI	34.2	907.4
Κ	847.6	0.149
Са	166.1	375.2
Mn	-	0.5
Fe	-	3.4
Zn	-	0.4
Rb	0.7	0.2
Ru	0.4	-
Ag	112.1	14.8
Re	-	0.1
Sn	9.3	-
Те	11	-

Tabla 1. Análisis cualitativo. Se muestran los elementos presentes en las muestras de fresa y lechuga, para la fresa se tiene que=CH2 99.818% y para la lechuga CH2 = 99.617%.

En el análisis cuantitativo se calcula la curva de calibración con el grupo de patrones fabricados con el gel de agarosa y las distintas cantidades de plata coloidal. La tabla 2 muestra los estándares, que son los patrones con distintas concentraciones de plata coloidal y las intensidades relativas que fueron obtenidas por el espectrómetro.

Estándares	Cantidad de Ag _c	cps
	gramos	
STD 1	0.0025	1178.38
STD2	0.0050	1322.99
STD3	0.0075	1315.17
STD4	0.0100	1454.09
STD5	0.0125	1593.87

Tabla 2. Estándares introducidos para cuantificación de Agc.

Con estos estándares e intensidades obtenidas, se calcula la curva de calibración, la cual se muestra en la figura 1.



Figura 1. Curva de calibración para bajas concentraciones de plata coloidal (Ag_c) inmersa en geles de agarosa. En el eje abscisas se presenta la concentración Ag_c en cada muestra, y en el eje de las ordenadas se tienen las cuentas por segundo (cps), es decir, cuántas veces se detectó la energía del elemento de interés en esa muestra. Se tiene una correlación de 0.97.

Obtenida la curva, es posible obtener la cantidad contenida de Ag_c en cualquier muestra desconocida. En este trabajo, se determinó en las muestras de fresa y lechuga. La tabla 3, muestra la cantidad de Ag_c en los muestras con y sin tratamiento, siendo M1 (fresa sin tratamiento), M2 (fresa con tratamiento), M3 (lechuga sin tratamiento) y M4 (lechuga con tratamiento).

Muestras	Ag _c gramos
M1	0.0375
M2	0.0250
M3	-0.0175
M4	-0.0200

Tabla 3. Cantidad de Ag_c en muestras de fresa y lechuga. Se tiene una cantidad en las muestras que no fueron tratadas aunque es posible ver que al llevar a un tratamiento la muestra, se adhiere una cantidad de Ag_c a ella.

Del análisis cuantitativo, se determinó que si tiene Ag_c en las muestras. Pero si se desea conocer la cantidad de Ag en ellas, se obtiene a partir de que el proveedor indica que el producto contiene 0.35% de plata que equivale a 3,500 ppm.

CONCLUSIONES

La metodología establecida para la preparación de las muestras de gel de agarosa ya se encuentra bien establecida, ya que se ha demostrado que cumplen con los requisitos necesarios para poder realizar las pruebas en el espectrómetro. Presentan estabilidad en las dimensiones, son firmes y sin rastro de partículas.

La curva de calibración es una línea recta con alta correlación con los datos experimentales.

Se observó un contenido de plata original en todas las muestras, lo cual puede ser ocasionado por la tierra en donde creció.

Además se corroboró que al ser tratada la muestra con microdyn, se adhiere una cantidad del producto en ella. Por lo que hay una cantidad que logra ser ingerida.

Los reportes de posibles problemas de salud por el consumo de plata coloidal, se ha estudiado. Y debido al consumo desmedido que se tiene del producto es posible que la afección a la salud sea mayor por un incremento en su consumo. Por tal, es importante seguir correctamente las indicaciones de uso y no exceder ni de tiempo ni de cantidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Doyle, "Determination of S, Ca, Fe, Ni and V in crude oil by energy dispersive X-ray fluorescence spectrometry using direct sampling on paper substrate", Fuel, Vol. 162, 2015, pp. 39-46.
- 2. N. Tanaka, "Distinction between entrance and exit wounds by energy dispersive X-ray fluorescence spectrometry", Legal Medicine, Vol. 22, 2016, pp. 5-8.
- D. Guimaräes, "Quantitative determinations and imaging in different structures of buried human bones from the XVIII-XIXth centuries by eenergy dispersive X-ray fluorescence – Postmortem evaluation", Talanta, Vol. 155, 2016, pp. 107-115.
- 4. Kinoshita, "Application of energy dispersive X-ray fluorescence spectrometry (EDX) in a case of methomyl ingestion", Forensic Science International, Vol. 227, 2013, pp. 103-105.
- 5. C.O. Meléndez, "Espectrometría de fluorescencia de rayos X", Aventuras del pensamiento, 2009, Facultad de Ciencias Químicas/Universidad Autónoma de Chihuahua.
- 6. E. Coutiño, "Los compuestos de plata y la salud", Altepepaktli, Vol. 3, 2007, pp. 29-38.
- 7. E. Coutiño, "Plata coloidal y la salud", Universalud, Vol. 6, 2010, pp. 56-68.
- S. Castañeda, Tesis de Licenciatura en ingeniería física: Espectroscopia de fluorescencia de rayos X aplicada al análisis de elementos químicos en un sustrato biológico, División de Ciencias e Ingenierías Campus León, Septiembre 2017.
- Scientific committee on medicinal products and medical devices, "Toxicological Data on colouring agents for medical products: E174 Silver", European commission health and consumer protection directorate general, 2001.
- N. Shiavon, "An energy-dispersive X-ray fluorescence spectrometry and monte carlo simulation study of iron-age small bronzes (Navicelle) from Sardinia, Italy", Spectrochimica acta part B, Vol. 123, pp. 42-46.

GENERACIÓN DE PATRONES DE INTENSIDAD MEDIANTE EL ALGORITMO ITERATIVO DE TRANSFORMADA DE FOURIER.

Teresa Cerdà, Ulises Ruiz, Víctor Arrizon

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

RESUMEN

La generación de un campo óptico arbitrario es una tarea importante en la óptica física. Un método conveniente para realizar una modulación independiente de amplitud y de fase es utilizar holografía sintética, la cual se basa sólo en la modulación de amplitud o de la fase. Un método que ha sido usado ampliamente en las últimas décadas para obtener distribuciones de intensidad definidas mediante la propagación libre de un campo complejo de sólo fase es el llamado algoritmo iterativo de transformada de Fourier (*Iterative Fourier-Transform Algoritm, IFTA*). El cual se basa en la modificación en el plano de Fourier del campo generado por el elemento de fase iterativamente hasta obtener la distribución de intensidad deseada.

INTRODUCCIÓN

La capacidad que se tiene para plasmar el campo completo de una onda, es decir, conservar tanto la amplitud como la fase del campo, es la característica más importante de la holografía óptica. Ya que el medio que se utiliza para grabar responde a variaciones de intensidad, es necesario convertir la información de la fase en cambios de intensidad. Esto se logra implementando métodos sencillos para la grabación de hologramas los cuales en sentido general utilizan una onda de referencia y una onda esparcida por el objeto, provenientes de la misma fuente. Ambas llegan a la placa fotográfica y son grabadas formando un patrón de interferencia. Para realizar la reconstrucción del campo codificado es necesario utilizar la misma onda de referencia que se usó para generar el holograma.

Debido a que la holografía ha evolucionado considerablemente en los últimos años, es posible crear hologramas en computadora y utilizarlos experimentalmente para la reconstrucción del frente de onda de algún campo codificado. Es por esto que la generación de campos ópticos escalares complejos con modulación espacial de amplitud y fase, que son independientes, es una labor importante dentro de la óptica contemporánea. Un método práctico y versátil para generar estos campos arbitrarios es utilizando hologramas sintéticos de fase generados con ayuda de un modulador de fase.

Los hologramas sintéticos de fase (*synthetic phase holograms, SPHs*) actualmente son una im- portante herramienta para la generación de campos ópticos complejos. Para la construcción de los SPHs se considera el campo escalar complejo a codificar el cual se representa mediante una función matemática. Un SPH es modulado en fase y puede ser grabado o desplegado de diferentes maneras, en una máscara de fase, un modulador espacial de luz, entre otras.

Con la aparición de las pantallas de cristal líquido surgieron los moduladores espaciales de luz (*spatial light modulator, SLM*), los cuales son dispositivos pixelados de cristal líquido que pueden ser utilizados para sintetizar un holograma. Éstos se volvieron una gran herramienta para la generación de haces estructurados debido a que son reconfigurables dinámicamente, además, los hologramas sintéticos de fase pueden ser evaluados y aplicados sin la necesidad de desperdiciar algún material de grabado. Esto permite que el tiempo de generación de los hologramas se reduzca considerablemente en comparación del de la fabricación de un holograma óptico.

TEORÍA

Los hologramas generados por medio de una computadora pueden ser utilizados para producir frentes de onda con una amplitud y distribución de fase ya prescritas, por lo tanto, éstos son extremadamente útiles en aplicaciones tales como el escaneo con luz láser y filtraje óptico espacial al igual que para pruebas ópticas de superficies.

La generación de un campo óptico arbitrario es una tarea importante en la óptica física. Para esto, se requiere la modulación independiente tanto de la amplitud como de la fase del campo. Un método conveniente para realizar esta tarea es utilizar holografía sintética. Tanto la eficiencia como la exactitud de los hologramas generados con esta técnica dependen del tipo de holograma que se utilice y el campo que será generado. Los hologramas sintéticos para la generación de campos complejos arbitrarios se basan sólo en la modulación de la amplitud o de la fase. En este trabajo nos enfocaremos en los hologramas sintéticos de fas.

Para este tipo de hologramas, se tiene una expresión matemática característica que incluye la amplitud como la fase del campo a codificar. Además presentan grandes ventajas como una mayor eficiencia y mejor calidad respecto a los hologramas de amplitud. Hasta ahora han sido desarrollados una gran variedad de esta clase de hologramas, cada uno posee diferentes características por lo que su desempeño depende de la onda del objeto a codificar.

Un campo óptico complejo arbitrario cuya modulación de amplitud y fase sean independientes se puede generar utilizando la siguiente expresión [1]

$$s(x, y) = a(x, y) \exp[i\phi(x, y)]$$
(1)

en donde la amplitud a(x, y) y la fase $\phi(x, y)$ tomen valores en el intervalo [0, 1] y $[-\pi, \pi]$, respectivamente. Los valores complejos de la amplitud de la función s(x, y) pertenecen a un conjunto de números con módulo igual o menor a uno, denotado como Ωs . El objetivo es codificar el campo complejo s(x, y) por medio de la transmitancia de un holograma sintético de fase. Este tipo de hologramas, que codifica la modulación compleja arbitraria s(x, y), tiene una transmitancia compleja limitada con valores en un subconjunto de Ωs . En el caso de los SPH, este subconjunto está formado por puntos complejos de módulo uno. La transmitancia de este tipo de hologramas se puede escribir como una función dependiente de la amplitud y de la fase del campo codificado, dada por

$$h(x, y) = \exp[i\Phi(a, \phi)], \tag{2}$$

en donde $\Phi(a, \phi)$ es la fase modulada del SPH.

Una forma de generar hologramas por computadora es empleando el método interativo de Transformada de Fourier (IFTA), el cual es computacionalmente más eficiente comparado con otros métodos. Los algoritmos de IFTA utilizados recientemente son variantes del algoritmo Gerchber-Saxton [3]. El IFTA puede ser descompuesto en dos partes, la primera parte consiste en el paso de inicialización en el cual se define una fase inicial y el segundo es el algoritmo iterativo. Para la fase inicial se construye un campo de entrada

$$E_{in}^{(1)}(x,y) = A_0 \exp[i\phi]$$
(3)

para la primera iteración. Cada iteración n del algortimo comienza por calcular el campo a la salida

$$E_{out}^{(n)} = \mathcal{F}[E_{in}^{(1)}].$$
 (4)

Entonces el algoritmo combina la propagación del campo $E_{out}^{(n)}$ con el perfil de intensidad I_0 para producir un nuevo campo $G^{(n)}(x', y')$. Con este nuevo campo se tendrá la fase para comenzar otra iteración, es decir, el argumento de la Transformada inversa de Fourier de este campo será la fase de un nuevo campo para otra iteración. De forma más explícita se tiene

$$E_{in}^{(n+1)} = A_0 \exp[i \arg(\mathcal{F}^{-1}(G^{(n)}))].$$
(5)

Y para obtener el campo final se harán N iteraciones y la Transforamda de Fourier del último $E_{in}^{(N+1)}$ será el campo codificado.

Utilizando una máquina con 8GB de memoria RAM tomó alrededor de 5 minutos cada campo. El tiempo depende del tamaño de cada uno de estos. Se escribió el algortimo en un programa de Matlab y se utilizó el siguiente arreglo experimental para proceder con la reconstrucción de cada holograma.

PARTE EXPERIMENTAL

Un holograma sintético de fase emplea niveles de gris para codificar al conjunto de valores de fase de la función h(x, y) de la Ec.(2), dicha equivalencia entre los niveles de gris y los valores de fase depende de la modulación que provee el sistema de despliegue. Una vez obtenida la codificación de la función de transmitancia del holograma sintético, se requiere un dispositivo para el desplegado de hologramas en tiempo real, que permitan la reconstrucción de la información compleja codificada. Una de las formas más recientes para desplegar SPHs es utilizar un modulador espacial de luz

(SLM), debido a que este puede ser controlado dinámicamente en lugar de usar las placas fotográficas u otro material fotosensible donde el holograma grabado será fijo.

La aparición de este tipo de moduladores revolucionó al campo de la holografía, ya que son dispositivos electrónicamente direccionables y reconfigurables en tiempo real. Estos dispositivos están formados de una celda de cristal líquido de manera que la modulación se produce gracias a que la disposición de moléculas en su interior varía en función del voltaje aplicado, este debido a un campo eléctrico externo. Como resultado, la luz incidente cambia su estado de polarización a la salida.

Una celda de cristal líquido nemático torcido es una capa delgada de cristal líquido en su fase nemática depositada entre dos placas de vidrio pulidas en direcciones perpendiculares. La orientación de las moléculas rota helicoidalmente alrededor de un eje que es perpendicular a las placas, es decir, el eje de torsión. Este tipo de moduladores tiene la capacidad de modular ya sea en amplitud o en fase el campo incidente [2].

En la actualidad son más utilizados los moduladores con alineación paralela de las moléculas. Estos se iluminan con un campo polarizado linealmente paralelo a la alineación que tienen las moléculas por lo que su estado de polarización no cambia y pueden modular solamente en fase.

En la siguiente figura se presenta ilustrativamente lo que sucede al aplicar un campo externo sobre la capa de cristal líquido del modulador.



Fig. 1 Influencia del voltaje sobre una capa de cristal líquido con alineación paralela.

El SLM, de marca Holoeye y modelo *Pluto-VIS-014 phase only*, utilizado para desplegar los campos codificados, está compuesto de una celda de cristal líquido nemático. Éste es un dispositivo reflectivo y trabaja en un rango de 420 – 650nm. Posee una interfaz la cual se conecta a una computadora, esta se encarga de convertir la escala de grises del holograma en diferencias de voltaje en el modulador, lo cual permite que su manejo sea más sencillo.

El arreglo experimental que se implementó para realizar la reconstrucción de distintos frentes de onda codificados en el modulador de fase utilizó un láser HeNe. Se colocó un objetivo de microscopio con un pinhole de $30\mu m$, cuyo propósito es limpiar el ruido del haz y expandirlo para cubrir la superficie total activa del SLM. Después, la primer lente positiva (f1) colimará el haz que ilumina un diafragma para poder implementar un sistema óptico 4f, esto con el objetivo de controlar el diámetro del haz de iluminación. Al final de esta parte se tiene el SLM el cual desplegará los hologramas.

Para realizar la reconstrucción del campo codificado se coloca una lente justo después del SLM, la cual aplicaría una transformada de Fourier. Y luego se realiza un filtraje ya que se tienen diversos órdenes de difracción. Finalmente con el CCD se capturaron los campos reconstruidos.



Fig. 2 Arreglo experimental para generación de los campos complejos el cual está basado en un sistema óptico 4f. Donde f1 = 25cm, f2 = 40cm, f3 = 40cm, f4 = 75cm y SLM es el modulador espacial de luz.

RESULTADOS

El IFTA se utilizó para la generación experimental de diferentes campos de amplitud, los cuales se expresan numéricamente como elementos en escala de grises. De esta forma se desplegaron desde imágenes binarias hasta algunas fotografías.

Se implementó el arreglo experimental presentado en la sección anterior para desplegar los hologramas generados por computadora y luego reconstruir los campos codificados.







CONCLUSIONES

Se demostró que la técnica de holografía sintética de fase, la cual explota la naturaleza vectorial de la luz, es un método alternativo para la generación de haces complejos de luz arbitrarios mediante la implementación de un modulador espacial de luz. El cual es reconfigurable dinámicamente, haciendo los tiempos de generación demasiado pequeños.

Utilizando el IFTA se logró codificar y reproducir los hologramas de un conjunto de imágenes, entre las más destacadas está el logo del INAOE.

Una de las características más importantes de codificar utilizando este método es que al tener un campo de amplitud y fase, es posible codificarlo en un campo resultante de sólo fase, lo cual puede permitir grabar un campo completo en algún material con respuesta a los cambios de fase, un ejemplo son las celdas de cristal líquido.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. V. Arrizón, U. Ruiz, R. Carrada and L. A. González, "Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields", Opt. Lett. 24, 3500-3507 (2007).
- 2. B. Saleh, M. Teich, "Fundamentals of Photonics", 2nd. Ed., Jonh Wiley & Sons Inc., USA, 2004, capítulo 3.
- 3. M. Pasienski and B. DeMarco, "A high-accuracy algorithm for designing arbitrary holographic atom traps", Opt. Express. 16, 2178-2190, 2008.

MONITOREO ANUAL DE LAS VARIACIONES DE LA TEMPERATURA Y LA HUMEDAD EN EL SUR DE MORELIA MICHOACÁN

Carlos Heriberto Mendoza Pérez, Gabriel Arroyo Correa, José Vega Cabrera, Misael Vieyra Ríos

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH.

RESUMEN

En este trabajo se reporta un análisis experimental del comportamiento temporal de la temperatura y la humedad monitoreada con un equipo datalogger (Az Instruments 87799) en una área del Sur de Morelia. Las mediciones se capturaron cada minuto, y se realizó un monitoreo de abril de 2017 a marzo de 2018. El análisis se hizo con herramientas de análisis de series de tiempo y de dinámica no lineal (correlación, análisis de Fourier y mapas de retorno). Los resultados obtenidos permiten identificar: a) patrones definidos para la temperatura y la humedad; b) buena correlación entre la temperatura y la humedad; c) comportamiento cuasi-regular en las variaciones de la temperatura y la humedad. Fue posible identificar semejanzas y diferencias de eventos climatológicos específicos, sobre todo en época de lluvias y época invernal.

INTRODUCIÓN

El cambio climático es un hecho que nos afecta pero actualmente no tenemos parámetros suficientes para predecir en que factores cambia el clima debido a la falta de un muestreo efectivo de datos con una periodicidad adecuada. Si buscamos datos por internet de una cierta zona de México, nos damos cuenta de que el muestreo de variables como la temperatura, humedad y presión, como indicativos de cambio climático, son muestreados cada hora y la información que hay en ocasiones es solamente de valores máximos y mínimos en el día. Cuando tenemos un evento como una lluvia ligera observamos que inmediatamente la humedad se altera al igual que la temperatura y esto pasa en cuestión de minutos por lo que consideramos que es un buen parámetro de muestreo. Nuestros datos fueron tomados por un Datalogger que consta de un sensor de temperatura y humedad que registra todos los datos en una memoria SD la cual puede almacenar hasta 2 Gb en memoria (se recomienda no saturar la memoria con más de 6 meses de muestreo). En el presente trabajo se hizo un monitoreo de la temperatura y humedad con un factor de muestreo de 1 dato por minuto, desde el mes de abril al mes de marzo de 2018.

METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Se utilizó un datalogger (Az Instruments, modelo 87799), que mide la humedad y temperatura cada minuto, colocado en una oficina del edificio L, en CU al sur de la ciudad de Morelia. Los datos registrados se transfirieron a la PC donde fueron analizados y procesados con el programa *OriginPro* versión 8 [1]. Se utilizó el programa *Mathematica* versión 5 para hacer los mapas de retorno, de gran utilidad en estudio de sistemas dinámicos [2]. El análisis de los datos se hizo en cuatro etapas. En la primera etapa se analizaron los datos de la primavera 2017 (Abril-Junio, con un registro de 122478 datos). En la segunda etapa se analizaron los datos del verano 2017 (Julio-Septiembre, con un registro de 130923 datos). En la tercera etapa se analizaron los datos del otoño 2017 (Octubre-Diciembre, con un registro de 132418 datos). En la última etapa se analizaron los datos del invierno (Enero-Marzo de 2018, con un registro de 80762 datos).

RESULTADOS

En la Fig. 1 se muestran variaciones de la temperatura (traza negra) y de la humedad (traza azul) para diferentes fechas de los periodos estacionales analizados. Cada gráfico corresponde a mediciones tomadas en un día en particular. Es de notarse el contraste entre las variaciones de la temperatura en un día en época de primavera con respecto a las de los días del verano, otoño e invierno. Este contraste es más marcado en las variaciones que presentó la humedad.



Figura 1. Variaciones de la temperatura (traza en negro) y de la humedad (traza en azul) en diferentes días a lo largo de los periodos estacionales analizados.

En la Fig. 2 se presentan las variaciones temporales de la temperatura (trazas en rojo) y humedad (trazas en azul) para los periodos señalados en los gráficos. Nótese la cuasi periodicidad, la cual es

más marcada para la temperatura. Es conveniente hacer notar las diferencias marcadas en las variaciones de la temperatura y la humedad en el periodo invernal en la región posterior a la parte central de la traza (arriba de los 30º para la temperatura y del 60% para la humedad), Esta variación se debió a que el datalogger se encontraba en el exterior y no al interior de la oficina. Esto se decidió hacerlo para registrar periodos en donde el calor fue intenso. En todos los patrones de la Fig. 2 se puede notar una cierta cuasi-periodicidad. Para investigar este punto, en la Fig. 3 se muestran las transformadas de Fourier (FFT) correspondientes a las series temporales de los periodos mostrados gráficamente en la Fig. 2: Abril-Junio, Julio-Septiembre, Octubre-Diciembre y Enero-Marzo. En todos, es posible identificar frecuencias bien características. Nótese cómo en el periodo de primavera (Abril-Junio) la temperatura y humedad presentan espectros más limpios que los correspondientes a los periodos estacionales de verano (Julio-Septiembre), otoño (Octubre-Diciembre) e invierno (Enero-Marzo). Sin embargo, los espectros de Fourier de las épocas de otoño e invierno presentan un mayor número de frecuencias definidas. Es de destacarse sobre todo una muy marcada cuasi-periodicidad del espectro de Fourier en el periodo invernal, lo muestra la complejidad de este periodo estacional. Las características de cuasi-periodicidad se puede también observar al analizar los mapas de retorno, que es una herramienta utilizada en el análisis de sistemas dinámicos [2]. En la Fig. 4 se presentan los mapas de retorno de la temperatura y humedad para los periodos estacionales de otoño e invierno, los cuales muestran comportamientos ligados a una dinámica cuasi-periódica [2]. En esta figura se puede observar, sin embargo, una mayor dispersión de los puntos de la época invernal comparados con los del periodo de otoño. A pesar de esta característica, en la Fig. 5 se muestran las gráficas de la correlación entre la humedad y temperatura, en donde se puede notar una muy baja correlación para ambos periodos (r²=0.043 y r²=0.046, respectivamente). Esto contrasta con lo observado para la época de primavera ($r^2=0.144$) y verano ($r^2=0.901$), reportado en un trabajo anterior [3].



Figura 2. Variaciones temporales de la temperatura (traza en rojo) y de la humedad (traza en azul) para los cuatro periodos estacionales estudiados: primavera (Abril-Junio), verano (Julio-Septiembre), otoño ((Octubre-Diciembre) e invierno (Enero-Marzo).



Figura 3. Transformadas de Fourier (FFT) de la temperatura (traza en rojo) y de la humedad (traza en azul) para los cuatro periodos estacionales estudiados: primavera (Abril-Junio), verano (Julio-Septiembre), otoño ((Octubre-Diciembre) e invierno (Enero-Marzo).



Figura 4. Mapas de retorno de la temperatura (traza en rojo) y de la humedad (traza en azul) de los periodos de otoño (Octubre-Diciembre) e invierno (Enero-Marzo).



Figura 5. Correlación Humedad-Temperatura de los periodos de otoño (Octubre-Diciembre) e invierno (Enero-Marzo). La línea en rojo muestra el ajuste lineal correspondiente. Nótese cómo en ambos casos la correlación es muy baja.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un estudio de las variaciones temporales de la temperatura y humedad durante un año, en una región localizada al sur de la ciudad de Morelia, Michoacán. El estudio se complemento con análisis espectrales, mapas de retorno y gráficas de correlación. Los resultados obtenidos permiten concluir que se presentan diferencias notables entre las diferentes épocas esta-

cionales (primavera, verano, otoño e invierno). Los periodos de otoño e invierno mostraron características espectrales muy diferentes a los periodos de primavera y verano, lo que explica una mayor complejidad dinámica en estas épocas estacionales. Sin embargo, los periodos de otoño e invierno mostraron una muy baja correlación entre la temperatura y humedad, en contraste con la época de verano en donde la correlación entre la temperatura y la humedad fue alta. Se pretende seguir el monitoreo por más tiempo para estar en condiciones de hacer comparativos en las mediciones entre un año y otro, lo cual podría arrojar datos más completos acerca del cambio climático.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. OriginPro 8, v8.0724, "Información técnica" (OriginLab Corporation, 2007).
- 2. R. H. Enns, G. C. McGuire, "Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers" (Birkhäuser, Boston, 2001), pp. 355-387.
- 3. C. H. Mendoza Pérez et al., "Análisis de las variaciones de temperatura y humedad en un área del sur de Morelia Michoacán", LX Congreso Nacional de Física, 2017, trabajo M1A003.
EQUILIBRIO Y EXTINCIÓN EN LA INTERACCIÓN ENTRE SISTEMAS POBLACIONALES DEL TIPO HOLLING II Y III

Yunuen Vidal Sánchez¹, Gabriel Arroyo Correa²

¹Instituto Tecnológico Superior P'urhépecha, ²Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH.

RESUMEN

Los modelos de poblaciones, iniciado en los años 1920 por A. Lotka y V. Volterra, son sistemas dinámicos que pretenden predecir la evolución temporal en el número de individuos para un conjunto de especies en particular. Para ello se parte de ciertas condiciones iniciales y se suponen determinadas reglas que representan la interacción entre las especies y su relación con el ecosistema o medio en que habitan, en términos de los recursos necesarios para la supervivencia. En cualquier ecosistema existe un gran número de especies que compiten por recursos limitados para evitar su extinción. En la actualidad el estudio de los modelos poblacionales es un área muy activa de investigación. En este trabajo se estudia numéricamente la dinámica no lineal de la interacción, del tipo de retro-alimentación lineal en un par de especies, entre un sistema del tipo Holling II compuesto por tres especies (presa-depredador-presa) con un sistema del tipo Holling III compuesto por tres especies (presa-depredador-presa). Los resultados obtenidos permiten identificar, en función del parámetro de acoplamiento entre los sistemas, los siguientes escenarios: a) un equilibrio del sistema completo; b) un cuasi-equilibrio del sistema completo; c) una extinción de algunas especies de los sistemas involucrados. Se agradece el apoyo a través del proyecto CIC-UMSNH 2018.

INTRODUCCIÓN

Uno de los modelos que incorporan interacciones entre depredadores y presas fue propuesto en 1925 por el biofísico americano Alfred Lotka y en forma independiente por el matemático italiano Vito Volterra. Este modelo, llamado de Lotka-Volterra, describe las interacciones entre dos especies en un ecosistema: una especie que consiste de presas (por ejemplo, conejos) y otra especie que consiste de depredadores (por ejemplo, zorros). Este modelo está descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (el punto indica derivación con respecto del tiempo):

$$\dot{X}_{1} = b_{1} X_{1} (c_{1} - Y_{1})$$

$$\dot{Y}_{1} = b_{2} Y_{1} (-c_{2} + X_{1})$$
(1)

donde X_1 representa a las presas y Y_1 representa a los depredadores. El término b_1X_1 representa la densidad de presas consumidas por los depredadores en una unidad de tiempo y se conoce como la respuesta funcional del depredador (o también como la respuesta Holling tipo I) sobre la presa. En forma similar, el término b_2Y_1 representa la densidad de depredadores en una unidad de tiempo. Los parámetros c_1 y c_2 son constantes positivas. Una de las características encontradas en el modelo descrito por las Ecs. (1) se presenta de forma gráfica en la Fig. 1. Las trayectorias son curvas periódicas cerradas alrededor del punto P*=(c_2,c_1), llamado punto de equilibrio. Entonces se puede entender que en el modelo original de Lotka-Volterra existen soluciones en donde ninguna de las especies es dominante: hay una coexistencia entre ambas especies.

TEORÍA

Para analizar situaciones más realistas, se han propuesto modelos más generales que el planteado originalmente por las Ecs. (1). Uno de estos modelos son los llamados modelos de Holling, que se analizan en este trabajo. En el trabajo de Samanta y Gómez Aíza [1], se estudian los llamados modelos Holling tipo II (HII) y el Holling tipo III (HIII) para dos especies (presa-depredador).



Figura 1. Trayectorias típicas en el modelo Lotka-Volterra: las curvas cerradas implica una coexistencia (comportamiento periódico) entre las especies X₁ y Y₁.

En este trabajo los modelos HII y HIII los extendemos a tres especies (presa-depredador-presa), y supondremos interacciones del tipo retroalimentación lineal entre un par de especies de los sistemas HII y HIII. Las ecuaciones que describen esta dinámica están dadas por:

$$\begin{split} \dot{X}_{1} &= r_{1} X_{1} \left(1 - \frac{X_{1}}{k_{1}}\right) - \frac{b_{1} X_{1} Y_{1}}{a_{1} + X_{1}} + kx_{12} (X_{2} - X_{1}) \\ \dot{Y}_{1} &= -d_{1} Y_{1} + \frac{c_{1} X_{1} Y_{1}}{a_{1} + X_{1}} + \frac{c_{2} Z_{1} Y_{1}}{a_{2} + Z_{1}} \\ \dot{Z}_{1} &= r_{2} Z_{1} \left(1 - \frac{Z_{1}}{k_{2}}\right) - \frac{b_{2} Z_{1} Y_{1}}{a_{2} + Z_{1}} \\ \dot{X}_{2} &= r_{V1} X_{2} \left(1 - \frac{X_{2}}{k_{V1}}\right) - \frac{b_{V1} X_{2}^{2} Y_{2}}{a_{V1} + X_{2}^{2}} + kx_{21} (X_{1} - X_{2}) \\ \dot{Y}_{2} &= -d_{V1} Y_{2} + \frac{c_{V1} X_{2}^{2} Y_{2}}{a_{V1} + X_{2}^{2}} + \frac{c_{V2} Z_{2}^{2} Y_{2}}{a_{V2} + Z_{2}^{2}} \\ \dot{Z}_{2} &= r_{V2} Z_{2} \left(1 - \frac{Z_{2}}{k_{V2}}\right) - \frac{b_{V2} Z_{2}^{2} Y_{2}}{a_{V2} + Z_{2}^{2}} \end{split}$$

$$\end{split}$$

En las Ecs. (2), S₁=(X_1 , Y_1 , Z_1) representa el subsistema 1 (del tipo HII); X_1 es la presa 1, Y_1 es el depredador 1 y Z_1 es la presa 2. De forma similar $S_2=(X_2, Y_2, Z_2)$ representa el subsistema 2 (del tipo HIII); X_2 es la presa 1, Y_2 es el depredador 1 y Z_2 es la presa 2. Los factores kx_{12} y kx_{21} representan retroalimentación entre las presas X_1 y X_2 . Los parámetros que aparecen en las Ecs. (2) se toman como sigue: r₁= 1.1, k₁=2.5, a₁=1.2, b₁=2.1, c₁=c₂=3.8, d₁=1.3, r₂=1.1, k₂=2.9, a₂=1.2, b₂=2.1, r_{V1}= 1.1, kv1=8.5, av1=1.2, bv1=2.1, cv1=cv2=0.85, dv1=1.3, rv2=1.1, kv2=8.9, av2=1.2, bv2=2.1. Se resolvió numéricamente las Ecs. (2), usando el paquete DynPac escrito en el lenguaje Mathematica [2]. En la Fig. 2(a) y 2(b) se muestran, respectivamente, las trayectorias de los subsistemas HII y HIII en la ausencia de interacción entre ellos ($kx_{12}=kx_{21}=0$). La naturaleza cerrada de las trayectorias (ciclos límites) es un indicativo de la coexistencia de las tres especies en cada subsistema; los periodos para los subsistemas HII y HIII son 11.41 y 10.46, respectivamente. Las condiciones iniciales para los subsistemas S₁ y S₂ fueron las mismas: (2.7,1,2.6). Los valores de los demás parámetros son como se indicó arriba. El rango de valores para los factores de acoplamiento de las especies, en los tres casos, fue de 0 a 10. En este trabajo se analizaron tres casos de acoplamiento: caso 1 ($kx_{21}=0$), caso 2 ($kx_{12}=0$) y caso 3 ($kx_{12}=kx_{21}$). En la literatura, a los dos primeros casos se les considera acoplamientos unidireccionales y al tercero acoplamiento bidireccional [3].



Figura 2. Subsistemas Holling: (a), $X_1Y_1Z_1$ (HII); (b), $X_2Y_2Z_2$ (HIII). Nótese la coexistencia de las especies en cada subsistema.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos muestran que dependiendo de la naturaleza de la interacción, el sistema puede evolucionar a una coexistencia, estabilidad y extinción de especies. En la tabla 1 se sintetizan los resultados obtenidos para la interacción entre las especies X_1 y X_2 , para los tres casos estudiados en este trabajo.

En la Fig. 3 se muestra de manera gráfica las evoluciones temporales (gráficos de la izquierda) y el espacio fase (gráficos de la derecha) para los subsistemas S_1 y S_2 del caso 1 mostrado en la tabla 1. Es de notar en este caso la extinción de la especie Z_1 (presa), sin embargo se favorece la coexistencia de las especies restantes, en ambos subsistemas, al periodo original del subsistema S_2 . De manera similar, en la Fig. 4 se muestra de manera gráfica las evoluciones temporales y el espacio fase para los subsistemas S_1 y S_2 del caso 2 mostrado en la tabla 1. En este caso se favorece la extinción de la especie Y_2 (depredador) y el equilibrio de la especie Z_2 (presa), sin embargo se favorece la coexistencia de las especies restantes al periodo original del subsistema S_1 .

Tabla 1. Características de la interacción entre las especies X_1 y X_2 .			
CASO	CARACTERÍSTICAS		
1	Los periodos de S_1 y S_2 adquieren rápidamente el valor original de		
kx ₁₂	<i>S</i> ₂ (=10,96), a partir de 0.1.		
□□□0,10]	Solo las especies X_1 y Y_1 de S_1 alcanzan rápidamente una evolución		
(kx ₂₁ =0)	periódica (coexistencia), a expensas de la extinción de la especie		
	Z_1 de S_1 .		
	Las tres especies de $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ alcanzan rápidamente una evo- lución periódica (coexistencia).		
2	Los periodos de S_1 y S_2 adquieren rápidamente el valor original de		
kx ₂₁	S_1 (=11.41), a partir de 0.1.		
□□□0,10]	Se favorece la extinción de la especie Y_2 y el equilibrio de la especie		
(kx ₁₂ =0)	Z_2 de S_2 , en el rango de 1.1 a 10.		
	Las tres especies de S_1 (X_1 , Y_1 , Z_1) alcanzan rápidamente una evo- lución periódica (coexistencia).		
3	Los periodos de S_1 y S_2 no están definidos, excepto para el rango		
kx ₁₂ = kx ₂₁	de 5 a 10; los valores adquiridos no corresponden a los originales		
□□□0,10]	de S_1 y S_2 .		
	Se favorece la extinción de la especie Z_1 de S_1 (a partir de 0.1) y de		
	la especie Y_2 de S_2 (a partir de 3).		
	Las especies X_1 y Y_1 de S_1 y las especies X_2 y Y_2 de S_2 , alcanzan		
	valores de equilibrio, en el rango de 0.1 a 1. La especie Z_2 de S_2 alcanza un valor de equilibrio (a partir de 3).		

La dinámica del caso 3 es muy diferente, como se muestra en la Fig. 5. En este caso, se favorecen las extinciones de la especie Z_1 (presa) a partir de un valor de acoplamiento de 0.1 y de la especie Y_2 (depredador) a partir de un valor de acoplamiento de 3. Es de notarse, sin embargo, que para valores en el factor de acoplamiento entre 0.1 y 3, Figs. 5(a) y 5(b), las especies restantes (X_1 , Y_1 ,

 X_2 , Z_2) rápidamente alcanzan valores de equilibrio, de donde se entiende el por qué el periodo de coexistencia del sistema no esté definido. Para valores en el factor de acoplamiento entre 5 y 10, Figs. 5(c) y 5(d), las especies restantes (X_1 , Y_1 , X_2 , Z_2) mantienen comportamientos periódicos lo que garantiza su coexistencia, pero con periodos de coexistencia diferentes a los de los subsistemas originales: en la Fig. 5(c) el periodo del sistema es 7.57 y en la Fig. 5(d) el periodo del sistema es 9.11.



Figura 3. Evolución temporal y espacio fase de los subsistemas S_1 y S_2 para el caso 1 de la tabla 1 (kx_{12} =1.0). En este caso se favorece la extinción de la especie Z_1 de S_1 .



Figura 4. Evolución temporal y espacio fase de los subsistemas S₁ y S₂ para el caso 2 de la tabla 1 $(kx_{21}=1.0)$. En este caso se favorece la extinción de la especie Z_2 de S_2 , a partir de 1.1.



Figura 5. Evolución temporal de los subsistemas S₁ y S₂ para el caso 3 de la tabla 1 (kx_{12} = kx_{21}): (a), kx_{12} =1; (b), kx_{12} =3; (c), kx_{12} =5; (a), kx_{12} =10.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este trabajo permiten identificar esquemas de acoplamiento en donde es posible la coexistencia, estabilidad y extinción de especies. Los acoplamientos de tipo unidireccional, casos 1 y 2 de la tabla 1, favorecen la extinción de solo una especie y la coexistencia de las especies restantes. El acoplamiento de tipo bidireccional, caso 3, de la tabla 1, favorece la extinción simultánea de dos especies, el equilibrio de las especies restantes para valores bajos en el factor de acoplamiento y su coexistencia para valores grandes en el factor de acoplamiento. De esta manera, se puede entender a los acoplamientos como mecanismos de control de especies en sistemas poblacionales del tipo Holling.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. G., R. Samanta y R. Gómez Aíza, "Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa", Miscelánea Matemática, Vol. 58, 2014, pp. 77-110.
- 2. Clark, "DynPac: A dynamical systems package for Mathematica", disponible en: http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html. Fecha de consulta: enero de 2018.
- 3. T. Kapitaniak, "Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control", Second Ed. (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2000), pp. 120-127.

EFECTO DEL ELEMENTO DE ACOPLAMIENTO EN LA INTERACCIÓN DE DOS CADENAS FORMADAS POR OSCILADORES CAÓTICOS

Karla Ivonne Serrano Arévalo¹, Alicia Campos Hernández², Gabriel Arroyo Correa¹

¹Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, ²Instituto Tecnológico Superior de Pátzcuaro.

RESUMEN

En este trabajo se estudia numéricamente el efecto que tiene el elemento de acoplamiento en la dinámica de la interacción entre dos cadenas formadas por cuatro circuitos de Chua cada una. Se analizan los casos en que el elemento de acoplamiento es del tipo de: (a) Duffing (CD), (b) van der Pol (CP) y Dixon modificado (DX). En cada caso, el sistema completo consiste de 26 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas, cuya solución numérica se hizo con el paquete libre DynPac que corre bajo el entorno de *Mathematica*. Inicialmente se sincronizan las dos cadenas, por separado, en el estado caótico del atractor de Chua. Se analiza el caso de cadena abierta-cadena abierta. Se monitorea la estabilidad de cada cadena y el cambio de estructura del elemento de acoplamiento en cada caso (CD, CP y DX). Los resultados obtenidos permiten identificar diferentes cambios en la estructura dinámica del elemento de acoplamiento y que están relacionados con el comportamiento dinámico de las cadenas inter-actuantes. A pesar de la naturaleza distinta de los elementos usados en el acoplamiento, es posible identificar similitudes y diferencias en la evolución dinámica de las dos cadenas. En particular se identificar las topologías que preservan la sincronización simultánea de las dos cadenas ó de solo una de ellas. Se agradece el apoyo a través del pro-yecto CIC-UMSNH 2018.

INTRODUCCIÓN

El circuito de Chua es el sistema dinámico autónomo más simple que puede ser utilizado para estudiar la dinámica no lineal en circuitos eléctricos. La importancia de este circuito radica en que manifiesta una amplia variedad de las características comunes a otros sistemas no lineales, tales como bifurcaciones, caos y sincronización [1], [2]. Las ecuaciones que describen al sistema de Chua están dadas por [1]:

$$\dot{x} = C (y - bx - 0.5(b - a)(|x + 1| - |x - 1|))$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -Dy$$
(1)

En este trabajo se toman los valores C = 7, D = 10, a = -0.28 y b = 0.56, que definen el estado caótico del doble atractor de Chua (AC).

Un problema relevante en la dinámica no lineal de sistemas caóticos es la sincronización de caos entre sistemas idénticos y no idénticos. En este trabajo estaremos interesados en estudiar la dinámica de la interacción entre dos cadenas formadas por cuatro elementos del tipo de Chua, cada una, y en donde el acoplamiento entre estas se hace con un sistema no caótico. Los sistemas de acoplamiento serán de tres tipos: Dixon modificado (DX), Duffing (CD) y van der Pol (CP). Las ecuaciones que describen a estos sistemas están dadas, respectivamente, por [3]:

$$\dot{u} = \frac{uv}{0.0001 + u^2 + v^2} - 0.3 u$$

$$\dot{v} = \frac{v^2}{0.000001 + u^2 + v^2} - 0.7 v - 0.3$$
(2)

$$\dot{u} = v \tag{3}$$

$$\dot{u} = v$$

 $\dot{v} = -u - 0.8(u^2 - 1)v$
(4)

En la Fig. 1 se muestran los estados dinámicos de los sistemas descritos por las Ecs. (1)-(4), y que son los elementos básicos en el presente trabajo.



Figura 1. (a) Atractor caótico (AC) del sistema de Chua, Ec. (1), en el plano XY; (b) atractor de Dixon (DX), Ec.(2), en el espacio uv; (c) ciclo límite del sistema Duffing (CD), Ec.(3), en el espacio fase uv; (d) ciclo límite del sistema van der Pol (CP), Ec.(4), en el espacio fase uv.

TEORÍA

En este trabajo se analiza la interacción entre dos cadenas formadas por cuatro elementos del tipo AC, Fig. 1(a), cada una, y en donde el elemento de acoplamiento puede ser cualquiera de los elementos DX, CD o CP. En las Figs. 2(a) y 2(b) se presentan de forma gráfica los dos sistemas estudiados en este trabajo. En el sistema de la Fig. 2(a) el acoplamiento se hace entre los circuitos extremos de las dos cadenas (circuitos 4 y 5), en tanto que en la Fig. 2(b) el acoplamiento se hace a través de un circuito interior de cada cadena (circuitos 2 y 6). En ambos casos, la dinámica está descrita por 26 ecuaciones diferenciales que se resuelven numéricamente con el paquete DynPac [4]. La nomenclatura kx_{12} en la Fig. 2, significa agregar en la ecuación diferencial para x_1 (Ec. (1)) el término de acoplamiento kx_{2u} (u- x_2); kx_{2u} significa agregar en la ecuación diferencial para x_2 el término de acoplamiento kx_{2u} (u- x_2); kx_{u2} , que no se muestra en la Fig. 2 para no saturar el gráfico, significa agregar en la ecuación diferencial para x_2 (x_2 - x_1); kx_{u2} , que no se muestra en la Fig. 2 para no saturar el gráfico, significa agregar en la ecuación diferencial para x_2 (x_2 - x_2). Este proceso se hace para el resto de los términos. El sistema de la Fig. 2(a) lo identificaremos como el sistema S₁ y el de la Fig. 2(b) lo identificaremos como el sistema S₂.



Figura 2. Representación gráfica de los sistemas analizados: (a), sistema S₁; (b), sistema S₂.

Se resolvió numéricamente los sistemas S₁ y S₂ representados gráficamente en las Figs. 2(a) y 2(b), usando el programa libre DynPac escrito en el lenguaje Mathematica [4]. Se supone que las cadenas C_1 y C_2 están individualmente sincronizadas, en conexión unidireccional ($kx_{12}=kx_{23}=kx_{34}=kx_{56}=kx_{67}=kx_{78}=100$), en el atractor caótico de Chua (Fig. 1(a)). Se considera que el estado inicial del elemento de acoplamiento puede corresponder a cualquiera de los estados DX, CD o CP, Figs. 1(b)-(d). Para identificar la dinámica del sistema estudiado, se analizaron las señales de sincronización entre los circuitos extremos de cada cadena (x_1 - x_4 y x_5 - x_8), entre los circuitos extremos del sistema del elemento central (u-v), para diferentes esquemas de conexión entre las cadenas y el elemento de acoplamiento.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos muestran que dependiendo del esquema de conexión, los sistemas S_1 y S_2 pueden evolucionar a diferentes escenarios como se indica en la tabla 1. Sin embargo, existen diferencias y similitudes que pueden ser explicadas en la evolución dinámica del elemento central de acoplamiento. Los casos 1 y 2 son relevantes en esquemas de encriptación ya que permitirían enviar información simultánea a través de ambas cadenas ó de manera independiente por cada cadena. Entre las diferencias más marcadas está el hecho de que solamente el sistema S_1 permite el caso 1 de la tabla 1, como se muestra en la Fig. 3. Nótese que en este caso el estado dinámico del elemento central de acoplamiento adquiere las características del atractor de Chua, independiente de la naturaleza del elemento de acoplamiento. En la Fig. 4 se presenta gráficamente el caso 2 de la tabla 1 para el sistema S_1 . De manera sorprendente, en este caso el estado dinámico del elemento central de acoplamiento adquiere las características de un triple atractor, independiente también de la naturaleza del elemento de acoplamiento. De manera similar este mismo comportamiento se presentó para el sistema S_2 , como se observa en la Fig. 5. En síntesis, los casos 1 y 2 de la tabla 1 presentan patrones dinámicos en donde, al parecer, la naturaleza específica del elemento de acoplamiento no es relevante.

CASO	CARACTERÍSTICAS	DX	CD	СР
1	Se mantienen las sincroniza- ciones individualmente en cada cadena y entre ellas.	S ₁	S ₁	S ₁
2	Se mantienen las sincroniza- ciones individualmente en cada cadena pero no entre ellas.	S1 y S2	S1 y S2	S1 y S2
3	Se mantiene la sincronización solo en una cadena.	S1 y S2	$S_1 y S_2$	S1 y S2
4	Preservación del elemento de acoplamiento en estado origi- nal.	S1 y S2	S1 y S2	S ₁ y S ₂

Tabla 1. Dinámicas para los diferentes sistemas de acoplamiento en el elemento central.



Figura 3. Representación gráfica del caso 1 de la tabla 1. Aquí $kx_{2u}=kx_{u6}=ky_{v2}=ky_{v6}=100$. Este caso solo se presenta para el sistema S₁. (a), acoplamiento por el elemento del tipo Dixon (DX); (b), acoplamiento por el elemento del tipo Duffing (CD); (c), acoplamiento por el elemento del tipo van der Pol (CP).



Figura 4. Representación gráfica del caso 2 de la tabla 1 para el sistema S₁. Aquí $kx_{u2}=kx_{u6}=ky_{v2}=ky_{v6}=100$. (a), acoplamiento por el elemento del tipo Dixon (DX); (b), acoplamiento por el elemento del tipo Duffing (CD); (c), acoplamiento por el elemento del tipo van der Pol (CP).



Figura 5. Similar a la Fig. 4 para el sistema S₂.

CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó la interacción entre dos cadenas caóticas, en donde el acoplamiento entre ellas es mediado por un elemento no caótico. Los resultados obtenidos en este trabajo permitieron identificar conexiones particulares que pueden ser de interés en esquemas de sincronización: las conexiones que mantienen la sincronización individual de las cadenas y simultáneamente entre ellas (caso 1 de la tabla 1), así como conexiones que mantienen la sincronización individual de las cadenas pero no entre ellas (caso 2 de la tabla 1). Las conexiones del caso 1 están ligadas a una evolución del elemento de acoplamiento hacia el atractor de Chua (doble atractor), en tanto que las del caso 2 mostraron una evolución del elemento de acoplamiento hacia un triple atractor.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. G. Arroyo Correa et al., "Estudio de caos y sincronización con el Circuito de Chua", *Ciencia Nicolaita,* Vol. 51, 2009, pp. 195-205.
- 2. T. Kapitaniak, "Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control", Second Ed. (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2000), pp. 120-127.
- 3. J. C. Sprott, *Elegant chaos: Algebraically simple chaotic flows* (World Scientific Publishing Co., Singapore, 2014), pp. 41-43, 44-47, 109-112.
- 4. A. Clark, "DynPac: A dynamical systems package for Mathematica", disponible en: http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html. Fecha de consulta: enero de 2018.

ESTRUCTURAS DE BANDAS SINTONIZABLES DE CF2D QUE INCLUYEN LHM DISPERSIVO, DEBIDO A INCLUSIONES CON SUPERFICIES RUGOSAS

Víctor Castillo Gallardo, Luis E. Puente Díaz, Héctor I. Pérez Aguilar, Alberto Mendoza Suárez

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

RESUMEN

El interés por desarrollar dispositivos nanométricos capaces de manipular las propiedades ópticas a través de su estructura ha ido en aumento en las últimas décadas, para lo cual se ha propuesto un tipo de material novedoso: el Cristal Fotónico (CF). Un CF es material ordenado periódicamente en el cual se modula el índice de refracción. En el caso de los Cristales Fotónicos bidimensionales (CF2D), la periodicidad está presente en dos dimensiones. Se ha demostrado en los últimos años que agregar nuevos materiales a la estructura de los cristales fotónicos da como resultado propiedades novedosas de estos sistemas, que originalmente se concibieron como compuestos de materiales puramente dieléctricos. Una opción es considerar este tipo de sistemas con materiales zurdos o metamateriales (LHM) dispersivos. Las propiedades ópticas de los CF2D dependen del tipo de periodicidad, de la geometría de las inclusiones, del contraste del índice de refracción y de la fracción de llenado de la estructura fotónica. En este trabajo se utilizó una técnica numérica conocida por el Método de la Ecuación Integral para calcular las estructuras de bandas de estructuras fotónicas bidimensionales de red hexagonal que incluyen metamaterial dispersivo. Se obtuvo que la rugosidad de las inclusiones modula la posición y el ancho de las bandas fotónicas de propagación prohibidas. Esta propiedad es de gran utilidad al proponer guías de ondas y filtros.

INTRODUCCIÓN

El interés por controlar las propiedades ópticas a través de estructuras periódicas tuvo un gran impulso en las últimas décadas del siglo pasado debido a los trabajos publicados por Ely Yablonovitch [1] y Sajeev John [2], en los cuales proponen estructuras periódicas para controlar la emisión espontánea y localización de la luz, respectivamente. Hay evidencia de que en 1888, Lord Rayleigh [3] analizó el flujo de la luz a través de estructuras periódicas en forma de placas apiladas.

Los CFs [4] son un grupo de estructuras que se pueden clasificar en una (CF1D), dos (CF2D) o tres (CF3D) dimensiones, en las cuales, el índice de refracción se modula periódicamente. Los CFs son materiales ópticos novedosos que poseen características que no se encuentran en materiales convencionales. En el caso de los CF2Ds la periodicidad se presenta en dos direcciones, mientras que en la otra es invariante. El propósito de este tipo de materiales es controlar las propiedades ópticas a través de su estructura. Estos cristales están presentes en la naturaleza y son responsables del color iridiscente en la piedra de ópalo, de la coloración en las plumas del pavo real y de las alas de las mariposas, de la reflexión en el visible de las púas de animales acuáticos, de algunas plantas, etc. [5]. Aunque también se pueden obtener artificialmente, mediante técnicas modernas que permiten micro-maquinar la materia en el régimen sub micrométrico y nanométrico [6]. No obstante, la fabricación de los CFs no es perfecta; es decir, tienen ciertas irregularidades que pueden modificar las propiedades ópticas de este tipo de materiales. Ésta es nuestra motivación para estudiar sistemas con inclusiones cilíndricas circulares en promedio con superficies aleatoriamente rugosas.

Las ondas de luz que son permitidas para propagarse en el CF se conocen como modos y los grupos de modos forman las bandas fotónicas. Las bandas de longitudes de ondas no permitidas se llaman bandas prohibidas (band-gaps). Muchas de las propiedades de los CFs se deducen a partir de su estructura de bandas, de la misma forma que en los semiconductores se deduce para los electrones [7]. En los CFs, la variación periódica del índice de refracción es el que juega el papel equivalente al potencial periódico de los semiconductores. Las propiedades ópticas de los CF2D dependen del tipo de periodicidad, de la geometría de las inclusiones, del contraste del índice de refracción y de la fracción de llenado de la estructura fotónica. Esto ha permitido la fabricación de súper-prismas [8], súper-colimadores [9], guías de ondas [10], fibras micro estructuradas [11], LEDs fotónicos [12], plasmones de superficie [13], sensores químicos y bioquímicos [14], entre otras.

Se ha demostrado en los últimos años que agregar nuevos materiales a la estructura de los cristales fotónicos da como resultado propiedades novedosas de estos sistemas, que originalmente se con-

cibieron como compuestos de materiales puramente dieléctricos [15, 16]. Un tipo de material estructurado que recientemente han atraído mucho interés, a partir de los trabajos experimentales de Prendy y colaboradores [17], son los materiales zurdos (LHM). Su nombre se debe al hecho de que los vectores del campo electromagnético y el de onda (E, H y k) forman una tríada de la mano izquierda para una onda propagándose a través de estos medios. Este fenómeno fue predicho años atrás por V. Veselago [18]. Los primeros LHM se diseñaron como matrices periódicas de condensadores y cables metálicos con una celda unitaria de dimensiones mucho más pequeñas que la longitud de onda.

Al proponer un CF es necesario pronosticar la posición y el tamaño de la banda prohibida. Esto se hace mediante un cálculo de simulación numérica usando alguno de los siguientes métodos: Método de expansión de ondas planas (PWM) [19], Método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) [20] o Método de la Ecuación Integral (IEM) [21]. Básicamente estos métodos calculan las frecuencias de propagación de las ondas electromagnéticas en los CFs para cada valor de la dirección de propagación dada por el vector de onda. En el método de ondas planas se realiza una expansión en series de Fourier de la función dieléctrica y del campo electromagnético que son periódicos para tener un sistema de valores propios para la relación de dispersión. Con la relación de dispersión es posible obtener la estructura de bandas del sistema. En el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo se hace un mallado del sistema igualmente espaciado de modo que los campos puedan ser evaluados de manera discreta dentro del sistema. Los operadores diferenciales se aproximan mediante una serie de Taylor para finalmente llegar a un sistema de vectores propios. El IEM se basa en el Segundo Teorema Integral de Green aplicado a la ecuación de Helmholtz, en el cual se obtienen ecuaciones integrales que involucran como incógnitas al campo y a su derivada normal evaluada en los contornos que separan las regiones del sistema. Para tener un muestreo finito de puntos, los límites se dividen en pequeñas regiones, Δs , por lo que las ecuaciones acopladas se aproximan por sumas que resultan en un sistema matricial homogéneo, cuva solución determina las funciones fuente. Con estas funciones fuente, se obtienen las estructuras de bandas. En este trabajo se utiliza el IEM para calcular las estructuras de bandas de los CF2D de red hexagonal con inclusiones circulares con superficies aleatoriamente rugosas. A lo largo de las últimas décadas se han estudiado diversos sistemas físicos en los cuales se analiza la rugosidad de las superficies tales como: esparcimiento de la luz por superficies rugosas 2D [22-25], pérdida de dispersión óptica en guías de ondas [26], efectos de coherencia en la propagación a través de CF1D [27], correcciones a las energías electromagnéticas de Casimir [28]; así como estructura de bandas en guías de onda [29], en CF1D y CF2D formados por diferentes materiales [30-31], pero no hay evidencia del estudio de la rugosidad en CF2D.

Método de la Ecuación Integral aplicado a sistemas periódicos

El objetivo de este trabajo es estudiar numéricamente las estructuras de bandas de un CF2D con periodicidad hexagonal con inclusiones cilíndricas circulares con superficies aleatoriamente rugosas y compararlas con el caso de inclusiones circulares lisas. Un análisis detallado del método integral aplicado al CF2D con periodicidad cuadrada se encuentra en [32]. A partir de la ecuación de onda y asumiendo campos armónicos en el tiempo, se obtiene la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k_j^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = \mathbf{0},\tag{1}$$

donde $\Psi(\mathbf{r})$ representa el campo eléctrico, E_z , para polarización TE y el campo magnético, H_z , para la polarización TM, ambos en el j-ésimo medio. Además $k_j = n_j(\omega)^{\omega}/c$ es la magnitud del vector de onda, siendo el índice de refracción $n_j(\omega) = \pm \sqrt{\mu_j(\omega) \varepsilon_j(\omega)}$ dado en términos de la permeabilidad magnética $\mu_j(\omega)$ y de la permitividad eléctrica $\varepsilon_j(\omega)$, ambas funciones dependen de la frecuencia ω . El signo que aparece en el índice de refracción será positivo si se trata de un dieléctrico y negativo, si es un LHM. Aplicando el Segundo Teorema Integral de Green a la Ec. (1), obtenemos

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_q} [G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, \Phi_j - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}] = \Psi(\mathbf{r}) \Theta(\mathbf{r}) \,, \tag{2}$$

donde $G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green en la región R_i y $\theta(\mathbf{r})$ es la función de Heaviside. Aquí $\theta(\mathbf{r}) =$

1 si r está dentro de la superficie $S' y \theta(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ en el caso contrario. Realizando una aproximación discreta de los términos de la Ec. (2), se tiene que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_q} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, \boldsymbol{\Phi}_n ds' \cong \sum_{n=1}^{N_q} L_{mn}^j \boldsymbol{\Phi}_n^j \tag{3}$$

у

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_q} \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} ds' \cong \sum_{n=1}^{N_q} N_{mn}^j \Psi_n^j.$$
(4)

Las condiciones de continuidad en la superficie de separación de la inclusión están dadas por

$$\Psi_n^{(1)} = \Psi_n^{(2)}, \qquad \Phi_n^{(1)} = \frac{f_2}{f_1} \Phi_n^{(2)},$$
(5)

donde $f_i = \varepsilon_i(\omega)$ para la polarización TE y $f_i = \mu_i(\omega)$ para la polarización TM. Consideramos una celda unitaria hexagonal compuesta por dos materiales con diferente índice de refracción. El tipo de inclusión puede ser de geometría arbitraria. En este caso se utiliza la inclusión de tipo circular con rugosidad aleatoria como se muestra en la Fig. (1).



Figura 1. Celda unitaria hexagonal con inclusión circular con superficie aleatoriamente rugosa. La rugosidad fue modelada con un perfil Gaussiano en el cual la longitud de correlación (l_c) y la desviación estándar (σ) fueron (A) l_c=0.08 y σ =0.025, (B) l_c=0.09 y σ =0.03. Con estos parámetros se realizaron las simulaciones.

Aplicando las condiciones de periodicidad $\Psi_{n(d)}^{(1)} = e^{ik_x D} \Psi_{n(a)}^{(1)}, \quad \Psi_{n(e)}^{(1)} = e^{-i\frac{D}{2}(k_x - \sqrt{3}k_y)} \Psi_{n(b)}^{(1)}, \quad \Psi_{n(f)}^{(1)} = e^{-i\frac{D}{2}(k_x + \sqrt{3}k_y)} \Psi_{n(c)}^{(1)}, \quad \Phi_{n(e)}^{(1)} = -e^{-i\frac{D}{2}(k_x - \sqrt{3}k_y)} \Phi_{n(b)}^{(1)}, \quad \Phi_{n(f)}^{(1)} = -e^{-i\frac{D}{2}(k_x + \sqrt{3}k_y)} \Phi_{n(c)}^{(1)}, \quad y \qquad \Phi_{n(d)}^{(1)} = -e^{ik_x D} \Phi_{n(a)}^{(1)}, \quad a \text{ las Ecs. (3) y (4) obtenidas de los contornos } a, b, c, d, e y f, \text{ tenemos que las ecuaciones matriciales son:}$

$$\begin{split} \sum_{n=1}^{N} N_{mn}^{(1)} \Psi_{n(a)} &- \sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(1)} \Phi_{n(a)} + \sum_{n=1}^{N} N_{mn}^{(1)} \Psi_{n(b)} - \sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(1)} \Phi_{n(b)} + \sum_{n=1}^{N} N_{mn}^{(1)} \Psi_{n(c)} - \\ \sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(1)} \Phi_{n(c)} + e^{ik_{x}D} \sum_{n=1}^{N} N_{mn}^{(1)} \Psi_{n(a)} + e^{ik_{x}D} \sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(1)} \Phi_{n(a)} + e^{-i\frac{D}{2}(k_{x} - \sqrt{3}k_{y})} \sum_{n=1}^{N} N_{mn}^{(1)} \Psi_{n(b)} + \\ e^{-i\frac{D}{2}(k_{x} - \sqrt{3}k_{y})} \sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(1)} \Phi_{n(b)} + e^{-i\frac{D}{2}(k_{x} + \sqrt{3}k_{y})} \sum_{n=1}^{N} N_{mn}^{(1)} \Psi_{n(c)} + e^{-i\frac{D}{2}(k_{x} - \sqrt{3}k_{y})} \sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(1)} \Phi_{n(c)} + \\ & \sum_{n=1}^{N_{inc}} N_{mn}^{(1)} \Psi_{n(g)} - \sum_{n=1}^{N_{inc}} L_{mn}^{(1)} \Phi_{n(g)} = 0 \end{split}$$
(6)

y

$$\sum_{n=1}^{N_{inc}} \left(\delta_{mn} - N_{mn}^{(2)} \right) \Psi_{n(g)} + \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_{inc}} L_{mn}^{(2)} \Phi_{n(g)} = \mathbf{0}.$$
⁽⁷⁾

En este caso, las ecuaciones constituyen un sistema lineal $M(\omega)F(\omega) = 0$ que tiene una matriz cuadrada M de dimensión $6N + 2N_{inc}$, que depende de la frecuencia ω y el vector de Bloch k. Dado que los sistemas matriciales son homogéneos, una solución no trivial puede obtenerse si el determinante de la matriz es cero. Para determinar el diagrama de bandas definimos la función

$$D(k,\omega) = \ln |\det(\mathbf{M}(\mathbf{k},\mathbb{Z}))|, \qquad (8)$$

que numéricamente representa los puntos mínimos locales que nos darán la relación de dispersión numérica $\omega = \omega(k)$.

Verificación del método

El Dr. Mendoza [21 y 32] y colaboradores han estudiado los CF2D infinitos de periodicidad cuadrada con diferentes inclusiones lisas utilizando el método de la ecuación integral. Por otra parte, el Dr. Plihal [33] hizo lo propio para un CF2D infinito de periodicidad hexagonal con inclusiones circulares lisas, utilizando el método de ondas planas. Esto nos permitió verificar el método. En la Fig. (2) se muestran las estructuras de bandas de los CF2D considerados por Plihal obtenidas por el método de ondas planas (PWM) y se comparan con las estructuras de bandas obtenidas con el IEM. La estructura de bandas para un CF2D infinito que está formado por cilindros dieléctricos ($\varepsilon_2 = 5$) embebidos en aire ($\varepsilon_1 = 1$) con una fracción de llenado (f = 0.169) bajo la polarización TE, se muestra en la Fig. 2(a). En la Fig. 2(b) se muestra la estructura de bandas de una placa dieléctrica ($\varepsilon_1 = 12.5$) infinita con orificios de aire ($\varepsilon_2 = 1$) y f = 0.6 bajo la polarización TM. El cálculo de la estructura de bandas está en términos de la frecuencia reducida $\overline{\omega} = \omega D/2\pi c$ y la magnitud del vector de onda reducido $\overline{k} = kD/2\pi$ en la primera zona de Brillouin. El parámetro de red fue tomado como D = 1 (u. a.). De las Figs. 2(a) y 2(b) se observa que las estructuras de bandas obtenidas con el IEM se sobreponen a las obtenidas con el PWM, por lo tanto el IEM es una herramienta numérica confiable para obtener la estructura de bandas para CF2D de longitud infinita.



Figura 2. Estructuras de bandas fotónicas de un CF2D infinito de red hexagonal para (a) cilindros dieléctricos ($\varepsilon_2 = 5$) embebidos en aire ($\varepsilon_1 = 1$) con una fracción de llenado de 0.169 y superficies lisas, bajo polarización TE y (b) orificios de aire en una placa dieléctrica ($\varepsilon_1 = 12.5$) con una fracción de llenado de 0.6 y superficies lisas, bajo polarización TM. Aquí se comparan dos técnicas numéricas para la obtención de estructuras de bandas.

RESULTADOS

Los materiales que fueron considerados para simular las celdas unitarias de los CF2D fueron dieléctrico – dieléctrico (ambos no dispersivos), para ambas polarizaciones y dieléctrico - LHM dispersivo y viceversa, para la polarización TM. Las rugosidades de las superficies de las inclusiones fueron modeladas con los parámetros enunciados en la Fig. 1. Primero se analizó el caso dieléctrico y después el de LHM dispersivo. Al obtener numéricamente las estructuras de bandas de un CF2D formado por dieléctrico – dieléctrico, se observó que para rugosidades pequeñas la modulación de las estructuras de bandas es nula. No obstante, al aumentar la rugosidad de la superficie de las inclusiones, la estructura de bandas tiene ligeras modulaciones para algún tipo de polarización. En este trabajo no se muestran ni se discuten estos resultados.

En el caso del LHM dispersivo, las propiedades ópticas están dadas por la función dieléctrica [34],

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{9}$$

y la permeabilidad magnética [35],

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2},\tag{10}$$

donde $\omega_p = 10c/D$ es la frecuencia de plasma, $\omega_0 = 4c/D$ es la frecuencia de resonancia y F = 0.56, siendo *c* la velocidad de la luz en el vacío y *D* el parámetro de red; estos parámetros fueron tomados de [36]. La región donde está el LHM presenta índice de refracción negativo en el rango de frecuencias comprendido de $\omega_p < \omega < \omega_{LH}$, aquí $\omega_{LH} = \omega_0/\sqrt{1-F}$. En nuestros análisis, se consideró $D = 1 \mu m$. Con esto, las frecuencias de plasma y de resonancia en unidades reducidas son: $\overline{\omega}_p = 1.592$ y $\overline{\omega}_p = 0.637$, respectivamente.

Al analizar estructuras periódicas bidimensionales que contienen metamaterial dispersivo se encuentra que si consideramos la rugosidad de la superficie de las inclusiones, la estructura de bandas fotónicas se modula. En la Fig. (3), se presenta la comparación de las estructuras de bandas de un CF2D infinito de red hexagonal formado por cilindros de LHM dispersivo embebidos en aire para inclusiones con superficies lisas y superficies aleatoriamente rugosas con diferentes fracciones de llenado, bajo la polarización TM. En la Figs. 3(a) y 3(c) se presentan las estructuras de bandas de diferentes CF2D con cilindros de LHM dispersivos con superficies lisas y con fracciones de llenado de f = 0.25 y f = 0.35, respectivamente, y se comparan con sistemas que tienen una pequeña rugosidad. Aquí se observa que las estructuras de bandas se modulan, además surgen gaps fotónicos donde antes no había. Al aumentar la rugosidad de los sistemas, la modulación de las estructuras de bandas es mayor. Esto se muestra en las Figs. 3(b) y 3(d).



Figura 3. Estructuras de bandas fotónicas de un CF2D infinito de red hexagonal con cilindros de LHM dispersivo embebidos en aire para dos perfiles rugosos diferentes y dos fracciones de llenado distintas, bajo polarización TM. Los parámetros de la rugosidad A son I_c=0.08 y σ=0.025, mientras que en la rugosidad B son I_c=0.09 y σ=0.03. Aquí se comparan las estructuras de bandas obtenidas de inclusiones lisas e inclusiones rugosas.

Por otra parte, si consideramos que el CF2D está formado por una placa infinita de LHM dispersivo y orificios de aire, encontramos que la modulación de las estructuras de bandas es similar al caso anterior. Es decir, que la rugosidad de la superficie de las inclusiones también modifica a la estructura de bandas para este tipo de sistemas, como se muestra en la Fig. (4).



Figura 4. Estructuras de bandas fotónicas de un CF2D infinito de red hexagonal formado por una placa de LHM dispersivo con orificios de aire para los mismos parámetros de la figura anterior.

CONCLUSIONES

El Método de la Ecuación Integral tiene grandes ventajas, en comparación de otros métodos, como son: la reducción del tiempo y del recurso de cómputo ya que sólo actúa en los contornos de separación de la celda unitaria y la inclusión. Esto proporcionó la oportunidad de obtener las estructuras de bandas de CF2D de red hexagonal con inclusiones circulares con superficies lisas y aleatoriamente rugosas para ambas polarizaciones. La rugosidad en la superficie de las inclusiones cilíndricas modula las estructuras de bandas de los CF2D que incluyen LHM dispersivo. Por lo tanto, al tomar en cuenta la rugosidad de los sistemas, se puede tener un mejor control del flujo de la energía, que es importante al desarrollar aplicaciones tecnológicas.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. Yablonovitch, E. "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics", Phys. Rev. Lett., 58: 2059-2062 (1987).
- John, S. "Strong localization of photons in certain disordered dielectric super lattices", Phys. Rev. Lett., 58: 2486-2489 (1987).
- 3. Rayleigh, J. W. S. "On the remarkable phenomenon of crystalline reflexion described by Prof. Stokes", Phil. Magazine, 26: 256-265 (1888).
- 4. Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N., y Meade, R. D. "Photonic Crystals: Molding the Flow of Light",. Princeton University Press, New York. (2008)
- 5. Vukusic, P. and Sambles, J., "Photonic structures in biology", Nature 424 851-857 (2004)

- 6. Krauss, T. F., *et al.* "Photonic crystals in the optical regime: past, present and future", Prog. Quant Electron. 23: 51-96 (1999).
- 7. I. A. Sukhoivanov and I. V. Guryev, "Photonic Crystals: Physics and Practical Modeling", Springer: Series in optical sciences, (2009)
- 8. Bernier, D., Le Roux, X., y Lupu, A. "Compact, low cross-talk CWDM demultiplexer using photonic crystal superprism", Opt. Express, 22(16): 17209-17214 (2008).
- 9. H. Kosaka, et al., "Self-collimating phenomena in photonic crystals", Appl. Phys. Lett. 74, 10, 1370 (1999)
- 10. Assefa, S., McNab, S. J., y Vlasov, Y. A. "Transmission of slow light through photonic crystal waveguide bends", Opt. Lett., 6(31): 745-747 (2006).
- 11. Ju, J., Jin, W., y Ho, H. L. "Compact in fiber interferometer formed by long period gratings in photonic crystal fiber", IEEE Photon. Technol. Lett., 23(20): 1899-1901 (2008).
- Englund, D., Fattal, D., Waks, E., y Solomon, G., "Controlling the spontaneous emission rate of single quantum dots in a two-dimensional photonic crystal", Phys. Rev. Lett., 95: 013904 (2005).
- 13. Ebbesen, *et al.* "Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays.", Nature, 391:667-669 (1998).
- 14. Baker, J. E., *et al.*, "Two-Dimensional Photonic Crystals for Sensitive Microscale Chemical and Biochemical Sensing", Lab Chip, 15, 971-990, (2015)
- 15. J. Li, W. Huang, and Y. Han, "Tunable photonic crystals by mixed liquids", Colloids Surf. 279, 213.217 (2006).
- 16. T. Stomeo, *et al.* "Design and fabrication of active and passive photonic crystal resonators. Microelectron", Eng. 83, 1823.1825 (2006).
- 17. J. B. Pendry, "Negative Refraction Makes a Perfect Lens", Phys. Rev. Lett. 85, 3966 (2000)
- 18. V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ", Sov. Phys. Usp. 10, 509 (1968)
- R. Archuleta-García, M. B. Manzanares-Martínez y J. Manzanares-Martínez, "Una descripción del método de ondas planas para el cálculo de bandas fotónicas", Rev. Boliviana de Fis. 13, 79-85 (2007).
- 20. K. S. Yee, "Numerical Solution of initial Boundary Value Problem Involving Maxwell's Equatios in Isotropic Media", IEEE Trans. on Antennas and propagation, 14: 302.307 (1966)
- A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, y J. A. Gaspar-Armenta, "Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of oneand two-dimensional photonic crystals", JOSA B, 23(10): 2249-2256 (2006).
- 22. P. A. Letnes, *et al.*, "Calculation of the Mueller matrix for scattering of light from two-dimensional rough surfaces", Phys. Rev. A 86, 031803(R) (2012)
- 23. Keding Yan, "Full angular Stokes vectors of light scattering from two-dimensional randomly rough surfaces by Kirchhoff approximation method", J. Opt. 16 105714, 2014
- T. Nordam, *et al.*, "Numerical solutions of the Rayleigh equations for the scattering of light from a two-dimensional randomly rough perfectly conducting surface", J. Opt. Soc. Am. A 31, 1126-1134 (2014)
- A. K. González-Alcalde, *et al.* "Experimental and numerical studies of the scattering of light from a two-dimensional randomly rough interface in the presence of total internal reflection: optical Yoneda peaks", Opt. Express 24, 25995-26005 (2016)
- 26. S. Hughes, *et al.* "Optical scattering loss due to disorder and fabrication roughness in semiconductor photonic crystal slab waveguides", IEEE Xplore, (2004)
- 27. A. Mandatori, *et al.* "Coherence effects in propagation through one-dimensional photonic bandgap structures with a rough glass interface", J. Opt. Soc. Am. B, 24, 2921-2929, (2007)
- 28. H. Y.Wu and M. Schaden, "Perturbative Roughness Corrections to Electromagnetic Casimir Energies", Phys. Rev. D 89, 105003 (2014)
- 29. A. Mendoza-Suárez, H. Pérez-Aguilar, "Band structure of a periodic waveguide that include a dispersive metamaterial", Proc. SPIE.Int. Soc. Opt. Eng. 8785 (2013) 8785AT.
- A. Labbani and A. Benghalia, "Tunability of photonic band gaps in one- and two-dimensional photonic crystals based on ZnS particles embedded in TiO2 matrix", Photonic Sensors, 180.186 (2012)

- 31. Yi-Xin Zong and Jian-Bai Xia, "Photonic band structure of two-dimensional metal/dielectric photonic crystals", J. Phys. D: Appl. Phys. 48 355103 (2015)
- A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, and J. A. Gaspar-Armenta, "Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive left-handed materials and dielectrics in the unit cell," J. Opt. Soc. Am. B 24, 3091-3098 (2007)
- 33. M. Plihal and A. A. Maradudin. "Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice", Physical Review B. 44(16): 8565-8571 (1991).
- 34. J. M. Pitarke, F. J. Garcia-Vidal, and J. B. Pendry, "Effective electronic response of a system of metallic cylinders", Phys. Rev. B 57, 15 261 (1998)
- 35. J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Steweat, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena", IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47, 2075 (1999)
- 36. D. Bria, *et al.* "Band structure and omnidirectional photonic band gap in lamellar structures with left-handed materials", Phys. Rev. E 69, 066613 (2004)

ENTENDIENDO LA RELATIVIDAD CON UN NUEVO ENFOQUE MEDIANTE LAS TRANSFOR-MACIONES DE LORENTZ. LAS IMPLICACIONES DEL CUERVO RELATIVISTA DE EINSTEIN Omar Alfonso Sanvicente Tapia, Rafael Zamorano Ulloa

Escuela Superior de Fisica y Matematicas . Instituto Politecnico Nacional.

RESUMEN

En 1916 A. Einstein escribió "Relativity: The Special and General Theory" donde el proporciona una idea mucho más clara y con un enfoque accesible para todo público de la relatividad especial desarrollada por el mismo y publicada en 1905. En él hace referencia a un Cuervo que 2 observadores miran desde diferentes sistemas de referencia (uno en movimiento y otro en reposo). Sin embargo este da a entender que en ambos casos la trayectoria de vuelo que los 2 observadores en sus respectivos sistemas ven es una recta. Dicho resultado no parece trivial de entender, debido a las consecuencias físicas que tiene la relatividad especial. En este trabajo hemos desarrollado una perspectiva la cual se enfoca en las Transformaciones de Lorentz-Einstein para entender mediante el álgebra y dichas Transformaciones las implicaciones relativistas que se experimentan a velocidades relativistas y ultra-relativistas. Con base en este enfoque mostramos que con el "simple" algebra de bachillerato e identificando adecuadamente las coordenadas espacio temporales, podemos ser capaces de dar a entender todas las implicaciones de la relatividad especial de Einstein, incluidos al cuervo relativista de Einstein, todo esto únicamente con los resultados de las operaciones con la Transformada de Lorentz-Einstein.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad todo el mundo tanto del ámbito científico como los que no, saben que Einstein llevo a cabo uno de los desarrollos más importantes en la ciencia moderna "La teoría de la relatividad", sin embargo pocos van más allá de saber que "todo es relativo". Visualizando esta carencia, nos enfocamos en que con solo algebra de bachillerato las personas puedan entender mejor esta rama de la física moderna, ya que es importante dar a conocer las teorías físicas más importantes al gran público, más allá de las clásicas explicaciones con analogías, sin que estas pierdan fuerza e interés. Es decir hacemos que el conocimiento de esta teoría sea más profundo y más enriquecedor.

Albert Einstein en 1916 escribió "The theory of relativity the special and general theory", libro que escribió debido a que se lo pidieron debido a la popularidad de su teoría, sin embargo está dirigido a un público en general, con esto en mente. El dirige ejemplos muy simples, como: El cuervo relativista. Sin embargo este es un ejemplo que el da por hecho que todos pueden entender.

Aquí damos un enfoque mucho más algebraico a la teoría de la relatividad, sin embargo este enfoque lo puede entender cualquiera que haya tenido un curso de algebra básica, lo que permite entender el ejemplo de Einstein y poner de manifiesto que las cantidades que varían con la Transformación de Lorentz son únicamente las que tienen que ver con la dirección del movimiento (x, y o z). Como consecuencia directa de las Transformaciones de Lorentz. Más aún podemos ser capaces de entender y construir todo en relatividad mediante únicamente estas trasformaciones.

Mediante un enfoque puramente algebraico, podemos lograr una comprensión más clara y profunda de la relatividad mediante únicamente el uso de las transformaciones de Lorentz, sobre las cuales descansa toda la relatividad especial

Usando el formalismo de las transformaciones de Lorentz verificamos que Einstein tiene razón al decir en su libro "Relativity the special and general theory". Al citar el ejemplo del cuervo que se observa por alguien que va en un tren que dicho cuervo se vera con una velocidad relativa igual, sin embargo en otra dirección. Esto es consecuencia del empleo de las transformaciones de Lorentz.

TEORÍA

Usando los dos postulados de Einstein encontremos una transformación entre marcos de referencia inerciales, tales que se cumplan las leyes de Newton y las leyes de Maxwell.

Este problema básicamente es el problema al que se enfrentó Einstein y que publico en 1905 "On the electrodynamics of moving bodies".

Usaremos un sistema fijo K y un sistema en movimiento K'

En el instante t=t[^]=0 ambos ejes están alineados, es decir coinciden. De acuerdo al segundo postulado "la velocidad de la luz será la misma en todos los sistemas de referencia inerciales". Imaginemos que un destello de luz se emite en ese momento, el frente de onda vendrá dado por:

En el sistema K

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{1}$$

En el sistema K'

$$x^{\prime 2} + y^{\prime 2} + z^{\prime 2} = c^2 t^{\prime 2}$$
⁽²⁾

Asumamos que $t \neq t'$. Esto quiere decir que cada sistema tiene su propio reloj. Como los sistemas solo se mueven en la dirección de x, tendremos que:

$$y = y'$$
 (3)
 $z = z'$ (4)

Buscamos una transformación para encontrar el valor de la posición en el sistema en movimiento. Sabemos que en este caso la transformación galileana x' = x - vt es incorrecta, por lo tanto agreguemos un término de proporcionalidad, que convenientemente llamaremos γ

$$x' = \gamma(x - \nu t) \tag{4}$$

Puesto que esta transformación debe ser lineal, no puede depender de x, ni de t. Otra cosa que debemos notar es que el parámetro γ debe ser muy próximo a 1, para que las leyes de la mecánica de Newton sean válidas.

Ahora desde el punto de vista de un observador en el sistema K' queremos obtener la posición en el sistema en reposo. Por lo que del mismo modo, proponemos un factor de proporcionalidad γ'

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}\boldsymbol{t}') \tag{5}$$

Debido a que desde un sistema con respecto al otro cambia la dirección de la velocidad cuando hacemos el cambio de sistema lo único que se verá afectado será la dirección de la misma. Debido a que las leves de la física deben ser las mismas en todo sistema de referencia inercial.

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}' \tag{6}$$

De acuerdo al segundo postulado la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, por lo que:

$$ct' = \gamma(ct - \nu t) \tag{7}$$

$$ct = \gamma(ct' + \nu t') \tag{8}$$

Dividiendo por c estas ecuaciones tenemos:

$$t' = \gamma \left(t - \left(\frac{\nu}{c} \right) t \right) \tag{9}$$

$$t = \gamma \left(t' + \left(\frac{v}{c}\right) t' \right) \tag{10}$$

Factorizando t y t':

$$t' = \gamma t \left(1 - \frac{\nu}{c} \right) \tag{11}$$

$$t = \gamma t' \left(1 + \frac{v}{c} \right) \tag{12}$$

Sustituimos el valor de t en la ecuación de t' y tenemos:

$$t' = \gamma \left(\gamma t' \left(1 + \frac{\nu}{c} \right) \left(1 - \frac{\nu}{c} \right) \right)$$
(13)

A partir de esta relación podemos eliminar t' y expresamos la diferencia de cuadrados.

$$1 = \gamma^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right) \tag{14}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right)} \tag{15}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\tag{16}$$

Así la expresión para calcular la posición en el sistema en reposo con respecto al sistema en movimiento será:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{17}$$

Y el tiempo, lo deducimos de las expresiones usadas para encontrar el valor de y

$$t' = \frac{\left(t - \frac{v}{c}t\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(18)

Como c = x/t tenemos tambien que t = x/c, sustituyendo esta expresión tendremos:

~~~~

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(19)

Y para el caso contrario es decir x, t tendremos:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
 (20)

Y

$$t = \frac{t' + \frac{vc}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(21)

Con lo que tendremos que las transformaciones entre sistemas en movimiento serán: Para hacer cálculos de la posición espacio temporal desde un sistema en movimiento

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{22}$$

$$\sqrt[n]{1-\frac{1}{c^2}}$$
  
y' = y (23)

$$z' = z$$
(24)  
$$t - \frac{vx}{c^2}$$

$$t' = \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(25)

Y para hacer cálculos de la posición espacio temporal desde un sistema en reposo que observa a un sistema en movimiento.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}}$$
(26)

$$\begin{array}{c} v & c^2 \\ y = y' \\ z = z' \end{array}$$

$$(27)$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(29)

A esto se le llaman las Transformaciones de Lorentz.

# PARTE EXPERIMENTAL

Para probar la aseveración de Einstein debemos primero visualizar el vuelo del ave como una trayectoria con puntos coordenados (x,y)



Ilustración 2 Cuervo en vuelo dibujando una trayectoria.

Ahora agreguemos un observador en movimiento en un MEGA Hyper Loop, el cual se estará moviendo a velocidades relativistas.



Ilustración 3 Cuervo en vuelo siendo observado por una persona dentro del tren a 0,7 c

Dicho observador medira puntos distintos (x',y'), debido a los efectos relativistas que se dan al estar moviéndose a velocidades comparables con la velocidad de la luz. Para verificar esto hagamos las transformaciones de Lorentz pertinentes a este caso.

Usando las ecuaciones:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}}$$
(22)

$$v' = y$$
 (23)  
 $z' = z$  (24)

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \tag{24}$$

$$t' = \frac{t - \frac{1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(25)

Recordemos que solo estamos visualizando la trayectoria del cuervo, con esto podemos asociar a ese movimiento una ecuación de la recta, para este caso tomemos:

$$y = -x \tag{30}$$

Que es la ecuación de la recta que pasa por el origen a exactamente 45°. Con lo que generaremos el conjunto de puntos:

| t[µs] | x[m] | <b>y</b> [ <b>m</b> ] |
|-------|------|-----------------------|
| 0     | 0    | 0                     |
| 1     | -10  | 10                    |
| 2     | -20  | 20                    |
| 3     | -30  | 30                    |
| 4     | -40  | 40                    |
| 5     | -50  | 50                    |
| 6     | -60  | 60                    |
| 7     | -70  | 70                    |

Ahora a estos puntos les aplicaremos la Transformada de Lorentz, para obtener las coordenadas que observaría una persona dentro del tren que viaja a 0,7c En este caso solo hacemos uso de las transformaciones en (x,y,t)

Es decir, tomaremos cada uno de los puntos y los transformaremos como:

$$x \rightarrow x'$$

$$egin{array}{c} y 
ightarrow y' \ t 
ightarrow t' \end{array}$$

# RESULTADOS

Una vez aplicadas las Transformaciones de Lorentz, lo que obtenemos es:

| $t' = [\mu s]$ | x'[m] | y'[m] |
|----------------|-------|-------|
| 1.4327         | -308  | 10    |
| 2.8653         | -616  | 20    |
| 4.298          | -924  | 30    |
| 5.7307         | -1232 | 40    |
| 7.1633         | -1540 | 50    |
| 8.596          | -1848 | 60    |
| 1.0029         | -2156 | 70    |

Donde vemos un cambio significativo en el tiempo, aproximadamente un cuarenta por ciento más lento pasa para este observador en el tren, mientras que vemos un cambio dramático en la posición x', cambiando en un factor multiplicativo y un orden de magnitud mayor. Por otro lado también observamos que en la coordenada y el cambio es imperceptible, en otras palabras no hay cambio alguno.

Mientras que la ecuación de la recta que describe el movimiento del cuervo para el observador en el tren, será:



Ilustración 4 Comparación de las trayectorias del cuervo, en azul se observa desde un sistema en reposo y en morado se observa desde un tren que viaja a una velocidad de 0,7 c

# CONCLUSIONES

Mediante este tipo de análisis, reduciendo todo a las transformaciones de Lorentz, es más fácil comprender la consecuencia de la relatividad.

Este análisis también permite verificar mediante gráficas y un poco de geometría analítica las consecuencias de la relatividad especial.

En efecto se verifica lo que Einstein dijo en su libro: " "Encontraremos que el movimiento del cuervo será uno diferente, con velocidad y dirección diferentes, pero aun será uniforme y en una línea recta" Un análisis sencillo con solo operaciones algebraicas nos permite observar las dramáticas consecuencias de la teoría de la relatividad especial.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. A. Einstein "On the electrodynamics of moving bodies", Annalen Phys. 17 (1905) 891-921.
- 2. A. Einstein "Relativity: The Special and General Theory" Methuen & Co. (1920)
- 3. Shahen Hacyan. (2013). Relatividad para estudiantes de física. México: Fondo de Cultura Económica.
- 4. R. Zamorano (2018). Notas para el curso de "Relatividad Especial"

#### VARIABILIDAD EN ESTRELLAS GIGANTES. María Isabel Pérez Martínez

Unidad Académica de Ciencias Químicas, Universidad Autónoma de Zacatecas

#### RESUMEN

Dependiendo de la masa y de su etapa evolutiva, las estrellas exhiben variabilidad estelar por diferentes mecanismos. Durante su periodo dentro de la secuencia principal, la variabilidad que presentan es una consecuencia de fuertes campos magnéticos sostenidos por un dínamo global, que es responsable de ciclos de actividad tipo solar. Sin embargo, cuando una estrella evoluciona fuera de la secuencia principal, sus características físicas cambian, es decir, su tamaño aumenta, su temperatura efectiva así como su velocidad de rotación disminuven, de manera que la variabilidad que presenta tiene un origen diferente a solamente por campos magnéticos. El estudio de variabilidad estelar, ha permitido conocer acerca de la evolución estelar, así como del medio en el que se encuentran, además, ha permitido, a través del estudio de astrosismología, conocer parámetros estelares como temperatura, radio y masa. Uno de los objetivos de este trabajo es observar variabilidad en estrellas gigantes, de tipo tardía a partir de observaciones fotométricas. Para este tipo de análisis, se requieren observaciones a largo plazo, por lo que se las mediciones se tomaron de la base de datos de la Asociación Americana de Observadores de Estrellas Variables (AAVSO por sus siglas en inglés). Se analizaron las curvas de luz de 30 estrellas evolucionadas, de las cuales, a través de un análisis de periodograma, se obtuvieron los periodos máximos, estadísticamente significativos. Además, a partir del espectro de potencia que se obtuvo, se abre la posibilidad de un futuro análisis asterosismológico para determinar los armónicos de vibración, ya sea dominados por gravedad o por presión.

#### INTRODUCCIÓN

A lo largo de su evolución fuera de la secuencia principal, las estrellas disminuyen su velocidad de rotación, aumentan su tamaño y disminuyen su temperatura. Los cambios en su estructura interna son una consecuencia del medio de producción de energía, es decir, durante su estancia dentro de la secuencia principal, su principal fuente de energía es a través de la fusión de hidrógeno en helio, proceso llamado cadena p - p.

Una de las consecuencias de su evolución hacia una gigante roja, es la disminución en su velocidad de rotación, lo que se ve reflejado en sus ciclos de actividad. El ciclo de actividad de una estrella se puede monitorear a través de su emisión en la región del ultravioleta, principalmente en las líneas de Ca II y Mg II. Uno de los principales proyectos es el llevado a cabo en el Monte Wilson, donde a través de fotomultiplicadores, se estima una emisión en la línea de Ca II, por medio del índice S [1]. En dicho proyecto, se concluye que existen ciclos de actividad tipo solar, ciclos con periodos largos, y estrellas con ciclos indeterminados. El ciclo de actividad de una estrella está estrechamente vinculado con su velocidad de rotación, en este sentido, cuando en una estrella disminuye su velocidad, es espera que su actividad disminuya, o bien, sea inexistente.

Sin embargo, también se puede monitorear el ciclo de actividad de una estrella en la región del visible, debido a la aparición de manchas estelares que afectan la emisión en esta región del espectro. Esto resulta más factible de monitorear, ya que la región del ultravioleta es solo observable desde el espacio. Así, para poder observar, o analizar variablidad estelar, se requieren mediciones a lo largo del tiempo. Una de las bases de datos más extensas y variadas, es la base de datos de la Asociación Americana de Observadores de Estrellas Variables (AAVSO, por sus siglas en inglés)[2]. Esta base de datos incluye observaciones de astrónomos en diferentes localidades, y en diferentes magnitudes. Lo que permite tener varias mediciones a lo largo del tiempo para una misma estrella.

# MUESTRA.

La muestra consta de 30 estrellas, catalogadas como estrellas gigantes, como se puede observar en el diagrama Hertzsrpung Russell de la muestra de estrellas. En esta imagen se encuentran las regiones teóricas de la secuencia principal, como una línea larga punteada, la región de estrellas gigantes, como una línea cortada, y la región de estrellas gigantes, como una línea punteada. Como se puede observar las estrellas de la muestra se encuentran fuera de la secuencia principal, en la región entre estrellas gigantes y supergigantes, los datos de magnitud y paralaje fueron tomados de [3].

Ya que se desea analizar la variabilidad de dichas estrellas a través de su magnitud V, los datos se



obtuvieron de la base de datos de la AAVSO. En los cuales, como se puede observar en la tabla 1, existen alrededor de hasta 18 000 observaciones, como es el caso de WPer, y incluso de 58, para el caso de HD 108907. La cantidad de mediciones se ve reflejada en la curva de luz de las estrellas, como se puede observar en la figura 1, que es la curva de luz de XY Lyr, una estrella con clase de luminosidad M2II, catalogada como una estrella variable con un periodo largo. La base de datos pública de la AAVSO, se conforma de mediciones hechas por astrónomos de diferentes lugares, que observan en diferentes



### **ANÁLISIS Y RESULTADOS**

Se realizó un periodograma de Lomb Scargle [4] para cada curva de luz, de los cuales se obtiene la frecuencia de oscilación con el p valor más pequeño. En la siguiente figura se puede observar un ejemplo de los resultados arrojados por el análisis de Lomb Scargle, en donde se tienen las observaciones a lo largo del tiempo, el espectro de potencia y el p valor.



Así, se toma aquella frecuencia con el p – valor más bajo, estos valores se encuentran en la tabla 1. En la siguiente imagen, se observa el mismo diagrama Hertzsprung Russell de la muestra, indicando a través del tamaño de la viñeta, el periodo de cada una, es decir, entre más grande el tamaño, mayor el periodo del ciclo. En este caso, es solamente comparativo para poder observar cómo se comporta el periodo de la estrella a lo largo del diagrama Hertzsrpung Russell para la muestra de estrellas. En ese sentido, los ciclos más grandes se observan entre la región de estrellas gigantes y supergigantes para un índice de color (B-V) entre 0.5 y 2.5. Para estrellas más frías, el ciclo de actividad, en comparación con el resto es más pequeño.



# CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO.

Se hizo un análisis de periodograma para estrellas gigantes, las cuales por sus características evolutivas, se esperan ciclos de actividad largos, o bien, inexistentes. En este sentido, a partir de los resultados se observó que las estrellas que se encuentran entre la región de gigantes y supergigantes, para un índice de color entre 0.5 y 2.5, tienen periodos, en comparación con el resto de la muestra, más largos. Sin embargo, estrellas con un índice de color mayor este, poseen periodos, en comparación más pequeños. Este análisis nos servirá para futuros estudios, principalmente sobre astrosismología, que nos permita ajustar valores de los armónicos de oscilación, y conocer otros parámetros estelares.

| Estrella | Frecuencia [1/días] | Número de obser-<br>vaciones | V    | В    | Paralaje [mas] |
|----------|---------------------|------------------------------|------|------|----------------|
| HD156014 | 0.00076951          | 16246                        | 3.35 | 4.51 | 8.53           |
| HD108903 | 0.004099398         | 332                          | 1.64 | 3.23 | 36.83          |
| HD108907 | 0.003534483         | 58                           | 4.95 | 6.57 | 5.25           |
| HD219139 | 0.00102152          | 728                          | 5.85 | 6.85 | 9.44           |
| SWScl    | 0.007007671         | 1108                         | 9.2  | 10.3 | 0.87           |
| XXPer    | 0.000421385         | 4271                         | 8.2  | 10.3 | 0.95           |
| BUPer    | 0.000595719         | 6215                         | 10.4 | 12.9 | 0              |
| TPer     | 0.000519764         | 10062                        | 8.45 | 10.8 | 0.39           |
| ADPer    | 0.000474242         | 6319                         | 7.88 | 10.2 | 1.36           |
| FZPer    | 0.002701119         | 2622                         | 7.96 | 10.2 | 0.88           |
| RSPer    | 0.000248486         | 7225                         | 7.82 | 10.1 | 0.69           |
| WPer     | 0.001878919         | 18473                        | 9.62 | 12.2 | 0.35           |
| CETau    | 0.000783687         | 4861                         | 4.33 | 6.41 | 1.82           |
| BUGem    | 0.000397846         | 15148                        | 6.39 | 8.63 | 0.52           |
| YLyn     | 0.000797174         | 15228                        | 6.98 | 8.71 | 3.95           |
| EVCar    | 0.000941            | 1000                         | 9.2  | 10   | 0.01           |
| CKCar    | 0.001040134         | 1196                         | 7.59 | 9.63 | 0.03           |
| BOCar    | 0.000203099         | 3388                         | 7.18 | 9.12 | 0              |
| IXCar    | 0.000211508         | 2685                         | 9    | 9.68 | 0.48           |
| CLCar    | 0.002692861         | 1877                         | 8.6  | 10.3 | 0              |
| BZCar    | 0.000571805         | 1700                         | 7.71 | 9.89 | 0.46           |
| AlfSco   | 0.002873984         | 1476                         | 0.91 | 2.75 | 5.89           |
| AHSco    | 0.001288506         | 1736                         | 8.1  | 10   | 0.09           |
| KWSgr    | 0.001357815         | 530                          | 11   | 11.5 | 2.43           |
| VXSgr    | 0.001321164         | 7271                         | 6.52 | 9.41 | 3.82           |
| XYLyr    | 0.000226552         | 14193                        | 6.05 | 7.67 | 1.9            |
| BCCyg    | 0.001433168         | 5024                         | 11.3 | 14.6 | 1.2            |
| RWCyg    | 0.001921378         | 2119                         | 8    | 10.6 | 0.91           |
| WCep     | 0.000146879         | 14855                        | 7.59 | 9.44 | 1.01           |
| PZCas    | 0.001172683         | 1025                         | 8.9  | 11.5 | 0.18           |

Tabla 1. Datos generales de la muestra de estrellas, así como las frecuencias encontradas a través del análisis de periodograma, y el número de observaciones disponibles en la base de datos.

# **BIBLIOGRAFÍA.**

- 1. Wilson, O.C. 1978, ApJ, 226, 379
- Henden, A. A., Levine, S. E., Terrell, D., Smith, T. C., & Welch, D. (2012). Data release 3 of the AAVSO all-sky photometric survey (APASS). *Journal of the American Association of Variable Star Observers (JAAVSO)*, 40, 430.
- 3. Wenger, M., Ochsenbein, F., Egret, D., et al. 2000, AAPS, 143, 9

4. Ruf, T. (1999). The Lomb-Scargle periodogram in biological rhythm research: analysis of incomplete and unequally spaced time-series. *Biological Rhythm Research*, *30*(2), 178-201.

# ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DE OPERACIÓN PARA UN SISTEMA DE LÍNEAS DE ESPERA M/M/1 CON RECESOS

Carlos Camilo Garay, Hugo Adán Cruz Suárez, Francisco Solano Tajonar Sanabria

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

# RESUMEN

Este trabajo se relaciona con la teoría de control, específicamente con los Procesos de Decisión Semi-Markovianos. Un proceso de decisión es una sucesión de controles dentro de un tiempo determinado siguiendo una estrategia y pagando un costo por cada decisión realizada. Se considera un sistema de colas M/M/1 con receso permitidos en el servidor, estos recesos serán llamados periodos, el servidor es apagado tan pronto la cola se vacía. Las duraciones de dichos periodos se suponen forman una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente. Al final de cada periodo, el servidor puede o bien ser activado si la cola no está vacía o tomar nuevamente otro receso. En dicho sistema se incurren dos costos: un costo por almacenamiento y un costo fijo cada vez que el servidor se vuelve a activar. Para este sistema se garantiza que existe una regla que minimiza un criterio de rendimiento. Los resultados obtenidos se ilustran en un ejemplo numérico.

# **INTRODUCCIÓN**

Los Procesos de Decisión Semi-Markovianos (PDSM), son una clase importante de los procesos de decisión en tiempo continuo. Un proceso de decisión es una sucesión de controles realizadas en un tiempo determinado siguiendo una estrategia y pagando un costo por cada decisión elegida. Una política es una regla mediante la cual se elige una acción en cada punto de observación del proceso, para evaluar la eficiencia de cada política se cuenta con un criterio de rendimiento, este trabajo considera el criterio de costo promedio.

El problema de control óptimo consiste en encontrar una política que optimice el criterio de rendimiento y ésta es llamada política óptima y, al criterio de rendimiento evaluado en tal política, función de valor óptimo. Una manera de resolverlo está basado en el principio de Bellman conocido como Programación Dinámica (ver [2]), dicho principio permite resolver problemas en los que es necesario tomar decisiones en etapas sucesivas. Las decisiones elegidas en una etapa condicionan la evolución futura del sistema, afectando a las situaciones en las que el sistema se encontrará en el futuro, y a las decisiones que se plantearán en el futuro.

Los modelos de decisión semi-Markovianos han sido estudiados y aplicados, especialmente en líneas de espera controladas. Un sistema de líneas de espera se presenta con frecuencia cuando se solicita un servicio por parte de una serie de clientes. Los modelos de líneas de espera son muy útiles para determinar cómo operar un sistema de colas de la manera más eficaz y nos permiten encontrar un balance adecuado entre el costo de servicio y el tiempo de espera.

# TEORÍA

Un modelo de decisión semi-Markoviano (MDSM) consiste de las siguientes componentes (ver [3]);

$$\left(\mathbf{S}, \mathbf{A}, \{\mathbf{A}(s) : s \in \mathbf{S}\}, Q, H, D, d\right)$$

donde

- S es un espacio de Borel llamado espacio de estados.
- ✤ A es un espacio de Borel llamado espacio de controles o acciones.
- ◆ Para cada  $s \in S$ ,  $A(s) \subset A$  es un conjunto medible y no vacío, cuyos elementos representan las acciones admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado *s*.
- ♦ La ley de transición  $Q(|\cdot)$  es un kérnel estocástico sobre S dado K.
- ★ H(| s, a) es la función de distribución del tiempo de permanencia sobre R, para cada  $(s, a) \in K$ . Donde  $K := \{(s, a) : s \in S, a \in A(s)\}$  es el conjunto de pares estado acción admisible.

 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  y  $S_n \in S$ .

•  $D \neq d$  son functiones de costo de K a R, las cuales son medibles sobre K.

Un MDSM representa un sistema dinámico que evoluciona de la siguiente manera. En el tiempo de la *n*-ésima época de decisión,  $t_n$ , el sistema se encuentra en el estado  $s_n = s$  y el controlador elige una acción  $a_n = a \in A(s)$ , generándose con ello lo siguiente:

- Se incurre un costo inmediato D(s, a).
- El sistema permanece en dicho estado  $s_n = s$  durante un tiempo aleatorio no-negativo  $\delta_{n+1}$  con distribución H(| s, a).
- En el tiempo  $t_{n+1} := t_n + \delta_{n+1}$   $(n \ge 0, t_0 := 0)$ , el sistema transita a un nuevo estado  $s_{n+1} = s'$  de acuerdo a la distribución Q(|s, a).
- Se produce un costo debido al tiempo de permanencia en el estado s, cuya razón de costo es d(s,a).
- Finalmente, una vez en el estado s' el proceso se repite.

Se define el espacio de historias admisibles hasta la *n*-ésima época de decisión mediante  $H_0 := S$ y  $H_n := (K \times R_+)^n \times S$ , para  $n \ge 1$ . Llamamos *n*-historia a  $h_n \in H_n$ , que es un vector de la forma  $h_n := (s_0, a_0, \delta_1, s_1, a_1, \delta_2, \dots, s_{n-1}, a_{n-1}, \delta_n, s_n)$ , donde  $(s_k, a_k, \delta_{k+1}) \in K \times R_+$  para

Definición 1. Una política de control admisible es una sucesión  $\pi := \{\pi_n\}$ , donde cada  $\pi_n$  es un kérnel estocástico sobre A dado  $H_n$ , tales que satisfacen la restricción  $\pi_n(A(s) \ h_n) = 1$ , para todo  $h_n \in H_n$  y  $n \ge 1$ . Una política se dice estacionaria si  $\pi_n(| h_n)$  está concentrada en  $f(s_n)$ , para cada  $h_n \in H_n$ ,  $n \ge 0$ , donde f es una función medible de S a A. Se denota por  $\Pi$  al conjunto de todas las políticas.

Problema de Decisión. Cada MDSM está dotado de una función real, llamada función objetivo o criterio de rendimiento, cuyo fin es medir el comportamiento de los costos por etapa en función de la política elegida, para ello se utiliza el criterio de la razón de costo promedio.

El tiempo medio de permanencia en el estado s cuando se elige la acción  $a \in A(s)$  está dado por

$$\tau(\mathbf{s},\mathbf{a})\coloneqq\int tH(dt\mid s,a)$$

Se define la razón de costo promedio, para cada  $s \in S$  y  $\pi \in \Pi$ 

$$J(s,\pi) := \limsup_{n \to \infty} \frac{E_s^{\pi} \left\lfloor \sum_{k=0}^{n-1} c(s_k, a_k) \right\rfloor}{E_s^{\pi} (t_n)}.$$

Usando propiedades de esperanza condicional se tiene la siguiente equivalencia, para  $\,s\in {\rm S}\,$  y  $\pi\in\Pi\,$ 

$$J(s,\pi) = \limsup_{n \to \infty} \frac{E_s^{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} c(s_k, a_k) \right]}{E_s^{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \tau(s_k, a_k) \right]}.$$

Definición 2 La función  $J(s) := \inf_{\pi \in \Pi} J(s, \pi)$  se llama función de costo promedio óptima y una política

 $\pi^* \in \Pi$  se dice de costo promedio óptima si  $J(s) = J(s, \pi^*)$ , para todo  $s \in S$ .

Dado el MDSM, el Problema de Control Óptimo (PCO) consiste en encontrar una política óptima que minimice el criterio de rendimiento.

Condiciones Sobre el Modelo de Decisión.

Supongamos que S y A son espacios de Borel con  $\sigma$ -Álgebra B(S) y B(A), respectivamente. La siguiente condición conocida como condición de crecimiento nos permite analizar el PCO con costos no acotados y a su vez garantizar la finitud de  $J(s,\pi)$ .

Condición 1 (Crecimiento)

- a) Existen constantes positivas  $b, \beta < 1$ , y una función medible  $w: S \rightarrow [1, \infty)$ , tales que  $\int w(s') Q(ds | s, a) \leq \beta w(s) + b$  para todo  $(s, a) \in K$ .
- b) Existen constantes positivas  $L, \theta$  y M tales que

 $|c(s,a)| \le Lw(s)$  y  $\theta \le \tau(s,a) \le M$ , para toda  $(s,a) \in K$ .

Para asegurar la existencia de una política óptima, se necesita la siguiente condición. Condición 2 (Continuidad y Compacidad)

- a) A(s) es un conjunto compacto, para cada  $s \in S$ .
- c) Para cada  $s \in S$ , la ley de transición  $Q(\cdot | s, a)$  es fuertemente continua en  $a \in A(s)$ , esto es que, para cada función medible y acotada u sobre S, se tiene que

$$\int u(s') Q(ds' \mid s, a),$$

es una función continua en  $a \in A(s)$ .

d) Para cada  $s \in S$ , la función c(s,a) es semi-continua inferiormente en  $a \in A(s)$ , y las funciones  $\tau(s,a)$  y  $\int w(s') Q(ds' + s,a)$  son continuas en  $a \in A(s)$ .

Trasformación de Schweitzer.

Esta transformación se ha utilizado ampliamente para estudiar la existencia de políticas óptimas en los PDSM bajo el criterio de costo promedio, se utiliza para pasar del modelo a tiempo continuo a un modelo a tiempo discreto, con el cual se podrá resolver el PCO con el criterio de costo descontado y así asegurar la existencia de una política óptima estacionaria. Se introduce dicha transformación. Sea  $\rho \in (0, \theta)$ , con  $\theta$  una constante positiva, definamos a la función  $\hat{c}$ :  $K \to R$  y el kérnel estocás-

tico  $\hat{Q}$  sobre S dado K mediante

$$\hat{c}(s,a) \coloneqq \frac{c(s,a)}{\tau(s,a)}, \hat{Q}(\cdot \mid s,a) \coloneqq \frac{\rho}{\tau(s,a)} Q(\cdot \mid s,a) + \left(1 - \frac{\rho}{\tau(s,a)}\right) \delta_s(\cdot),$$

para todo  $(s, a) \in K$ , donde  $\delta_s(\cdot)$  es la medida de Dirac concentrada en el estado s.

Para dar la última condición, se necesitan algunos resultados relacionados con el criterio de costo descontado (ver [3]) para el PDM. Para cada factor de descuento  $\alpha \in (0,1)$ , definimos el costo descontado esperado  $V_{\alpha}(\cdot | \cdot)$  y su correspondiente función de valor óptimo para el PDM de la siguiente manera

$$V_{\alpha}(s,\pi) \coloneqq \hat{E}_{s}^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} \hat{c}(s_{n},a_{n}) \right], \quad V_{\alpha}^{*}(s) \coloneqq \inf_{\pi \in \Pi} V_{\alpha}(s,\pi),$$

para cada  $s \in S$  y  $\pi \in \Pi$ .
Una política  $\pi^* \in \Pi$  se dice óptima ( $\alpha$ -descontada) si y sólo si  $V_{\alpha}(s, \pi^*) = V_{\alpha}^*(s)$ , para todo  $s \in S$ .

Tenemos el siguiente resultado, para una demostración ver [3].

Lema 1. Supongamos que se cumplen las condiciones de crecimiento, continuidad y compacidad, entonces

a) 
$$|V_{\alpha}(s,\pi)| \leq \frac{L}{(1-\alpha)\theta} w(s) + \frac{bLM}{(1-\alpha)(1-\beta)\theta^2}$$
, para todo  $\alpha \in (0,1)$ ,  $s \in S$  y  $\pi \in \Pi$ .

b) Para cada  $\alpha \in (0,1)$ , existe una política óptima  $f_{\alpha} \in F$ , tal que  $V_{\alpha}(s, f_{\alpha}) = V_{\alpha}^{*}(s)$ ,

para todo  $s \in S$ .

Las Condiciones 1 y 2 garantizan la existencia de una política óptima estacionaria α-descontada, sin embargo, para asegurar la existencia de una política óptima para el criterio de costo promedio, se necesita dar una condición más, para esto se introduce el concepto de norma ponderada.

Sea  $w: S \rightarrow [1, \infty)$  una función medible, denotamos por  $B_w(S)$  el espacio lineal normado el cual consiste de todas las funciones medibles  $u: S \rightarrow R$  con norma finita, definida por

$$\| u \|_{w} \coloneqq \frac{\sup}{s \in S} \frac{|u|}{w(s)}.$$

Condición 3

Existen dos funciones  $v_1^*, v_2^* \in B_w(S)$  y un estado  $\hat{s} \in S$  tales que  $v_1^*(s) \le h_\alpha(s) \le v_2^*(s)$ , para todo  $s \in S$  y  $\alpha \in (0,1)$ , en donde  $h_\alpha(s) := V_\alpha^*(s) - V_\alpha^*(\hat{s})$ , a la función  $h_\alpha(s)$  se le conoce como la diferencia relativa de la función de costo descontada óptima  $V_\alpha^*(s)$ .

Existencia de políticas óptimas

El objetivo es probar la existencia de una política estacionaria óptima bajo el criterio de costo promedio. Para esto se presenta el siguiente teorema (para una demostración ver [3])

Teorema

Bajo las Condiciones 1, 2 y 3, se cumplen los siguientes incisos.

a) Existen una única constante  $g^*$ , dos funciones  $h_1^*, h_2^* \in B_w(S)$ , y una política estacio-

naria  $f^* \in F$ , que satisfacen las siguientes dos desigualdades de optimalidad promedio:

$$h_{1}^{*}(s) \leq \inf_{a \in A(s)} \Big\{ c(s,a) - g^{*}\tau(s,a) + \int_{S} h_{1}^{*}(s')Q(ds' \mid s,a) \Big\},$$
(1)

$$h_{2}^{*}(s) \ge \inf_{a \in A(s)} \left\{ c(s,a) - g^{*}\tau(s,a) + \int_{S} h_{2}^{*}(s')Q(ds' \mid s,a) \right\}$$
(2)

$$= c(s, f^{*}(s)) - g^{*}\tau(s, f^{*}(s)) + \int_{S} h_{2}^{*}(s')Q(ds' \mid s, f^{*}(s)), \qquad (3)$$

para todo  $s \in S$ .

- b)  $g^* = \inf_{\pi \in \Pi} J(s, \pi)$ , para todo  $s \in S$ .
- c) Cualquier política estacionaria  $f \in F$  que cumpla con el mínimo en (1) es óptima, y así  $f^*$  en (2) es una política estacionaria óptima de costo promedio.

Observación

Cuando S es numerable, el argumento de diagonalización estándar (ver [3]), nos ayuda para mostrar la existencia de una subsucesión  $\{h_{\alpha_k}(s)\}$ , tal que el límite  $h^* := \lim_{k \to \infty} h_{\alpha_k}(s)$  existe,

para todo  $s \in S$ . Por tanto, se tiene que  $h_1^*(s) = h_2^*(s) = h^*(s)$ , para todo  $s \in S$ , consecuentemente las desigualdades (1) y (2) coinciden, y así la Ecuación de Optimalidad de Costo Promedio se obtiene.

Metodología

La metodología a seguir para resolver el PCO en el caso semi-Markoviano se describen a continuación:

- Se considera un modelo de decisión semi-Markoviano fijo, estacionario, a tiempo continuo.
- La transformación de Schweitzer se usa para asegurar la existencia de políticas óptimas estacionarias para los PDSM, bajo esta transformación se pasa de un modelo en tiempo continuo a un modelo a tiempo discreto.
- Con el modelo discreto se resuelve el PCO con el criterio de costo descontado, también conocido como el factor de descuento desvaneciente.
- Una vez resuelto el PCO bajo el criterio descontado, se regresa al modelo original, esto haciendo tender al factor de descuento desvaneciente a uno.

## RESULTADOS

Optimalidad de una Política en el Sistema M/M/1 con Recesos.

Consideramos un sistema M/M/1 donde el servidor atiende a los clientes hasta que la cola se vacía, inmediatamente toma un receso de tiempo arbitrario (ver [1]). Al volver de este período, el servidor puede seguir apagado o ser activado, siempre que la cola no esté vacía. Suponemos que los procesos de tiempos entre llegadas, los de servicios y de receso son independientes entre sí. Sean  $1/\lambda$ ,  $1/\mu$  y  $1/\nu$  los tiempos medios de éstos, respectivamente. Suponemos que en dicho sistema se incurre un costo de almacenamiento por unidad de tiempo y por cliente en el sistema h > 0, y un costo fijo  $\gamma > 0$  cada que el servidor se vuelve a activar.

Suponemos que el sistema se observa en cada llegada, en cada finalización de servicio y en cada tiempo de salto de un proceso Poisson V, independiente de los procesos de entrada y de servicio, con parámetro v. El proceso V desempeñará el papel de un proceso de receso virtual en el sentido de que, si se produce un salto en V cada vez que el servidor está en reposo, entonces este salto puede tomarse como el tiempo de finalización del próximo receso. En cada punto de observación que corresponde a un salto en V, una decisión será elegida ya sea en reanudar o no el servidor.

Se construye un PDSM tal que el estado del proceso en la *n*-ésima época de decisión  $t_n$ ,  $n \ge 0$ , sea representado por una tripleta  $(X_n, Y_n, Z_n) \in N \times \{0, 1\}^2$ , donde  $X_n$  es la longitud de la cola al tiempo  $t_n$ ,  $Y_n \in \{0,1\}$  describe la actividad del servidor al tiempo  $t_n$ , ( $Y_n = 1$  si el servidor está activo y  $Y_n = 0$  si está en reposo) y  $Z_n = I_{(t_n \in V)}$ , esto es  $Z_n = 1$  si  $t_n$  es un tiempo de salto del proceso V y  $Z_n = 0$ , en caso contrario. El MDSM se puede construir con las componentes siguientes; sea S = $N \times \{0, 1\}^2$  el espacio de estados, y sea  $A(x, y, z) \subset A = \{0, 1\}$  el conjunto de todas las acciones disponibles cuando el sistema se encuentra en el estado  $s \in S$ . Asumimos que

$$A(x,1,1) = \{1\}, x \ge 1;$$
  

$$A(x,1,0) = \begin{cases} \{1\}, x \ge 1; \\ \{0\}, x = 0; \end{cases}$$
  

$$A(x,0,1) = \begin{cases} \{0,1\}, x \ge 1; \\ \{0\}, x = 0; \end{cases}$$
  

$$A(x,0,0) = \{0\}, x \ge 1$$

$$A(x,0,0) = \{0\}, \ x \ge 1,$$

donde por convención la acción 1 (respectivamente 0) se toma si la decisión es reanudar el servidor (apagar respectivamente).

Sea Q(| s; a) la distribución de probabilidad del siguiente estado visitado por el sistema dado que se encuentra en el estado  $s = (x, y, x) \in S$  y la acción  $a \in A(x, y, z)$  se elige. Las probabilidades de transición están dadas por

$$Q(x-1,1,0 \ x,1,1;1) = \mu/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x+1,1,0 \ x,1,1;1) = \lambda/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x,1,1 \ x,1,1;1) = \nu/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x-1,1,0 \ x,1,0;1) = \mu/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x+1,1,0 \ x,1,0;1) = \lambda/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x,1,1 \ x,1,0;1) = \nu/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(0,0,1 \ 0,1,0;0) = \nu/(\lambda+\nu);$$
  

$$Q(1,0,0 \ 0,1,0;0) = \lambda/(\lambda+\nu);$$
  

$$Q(x-1,1,0 \ x,0,1;1) = \mu/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x+1,1,0 \ x,0,1;1) = \nu/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x,1,1 \ x,0,1;1) = \nu/\beta, \ x \ge 1;$$
  

$$Q(x+1,0,0 \ x,0,1;0) = \frac{\lambda}{\lambda+\nu}, \ x \in N,$$

donde  $\beta \coloneqq \lambda + \mu + \nu$ . Sean  $s = (x, y, z) \in S$  y  $a \in A(x, y, z)$ , h y  $\gamma$  conocidos, definamos  $D(x, y, z; a) \coloneqq (h/\nu)xz + \gamma(1-y)z \cdot I_{\{a=1\}}$ .

Suponemos que h/v=1 y que la función de costos d=0. Denotemos por  $\hat{\beta}$  la tasa de transición para cada estado dado la acción. Entonces

$$\hat{\beta}(s,a) = \begin{cases} \beta, & x \ge 1, \ y, z \in \{0,1\}, \ a = 1; \\ \lambda + \nu, & (x, y, z) \in \mathbf{S}, \ a = 0; \end{cases}$$

para  $s = (x, y, z) \in S$  y  $a \in A(s)$ , así

$$H(\mathfrak{k} \ s,a) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t}, & a=1;\\ (\lambda+\nu)e^{-(\lambda+\nu)t}, & a=0, \end{cases}$$

Sigue una distribución exponencial con parámetro  $\beta$  para  $x \ge 1$  y a = 1, y con parámetro  $\lambda$ +v en otro caso. El tiempo medio de permanencia está dado de la siguiente manera.

$$\tau(s,a) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & a = 1; \\ \frac{1}{(\lambda + \nu)} & a = 0. \end{cases}$$

Ahora se procede a la transformación de Schweitzer, esto para analizar el caso descontado y poder asegurar la existencia de una política estacionaria óptima para el modelo.

La función de costos y la ley de transición para el modelo transformado son

$$\hat{c}(s,a) = \begin{cases} \beta x, & (x,1,1), x \ge 1; \\ \beta(x+\gamma), & (x,0,1), x \ge 1, a = 1; \\ x(\lambda+\nu), & (x,0,1), x \ge 1, a = 0; \\ 0 & e.o.c., \end{cases}$$
recordando que  $\rho \in (0,\theta)$ , se elige a  $\rho = \frac{1}{\lambda + \mu + \nu + 1}$ , así,

$$\begin{split} \widehat{Q}(x-1,1,0 \mid x,1,1;1) &= \rho\mu, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x+1,1,0 \mid x,1,1;1) &= \rho\lambda, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x,1,1 \mid x,1,1;1) &= \rho\nu + (1-\rho\beta), & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x-1,1,0 \mid x,1,0;1) &= \rho\mu, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x+1,1,0 \mid x,1,0;1) &= \rho\lambda, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x,1,1 \mid x,1,0;1) &= \rho\nu, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(1,0,0 \mid 0,1,0;0) &= \rho\nu; \\ \widehat{Q}(1,0,0 \mid 0,1,0;0) &= \rho\lambda; \\ \widehat{Q}(x-1,1,0 \mid x,0,1;1) &= \rho\mu, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x+1,1,0 \mid x,0,1;1) &= \rho\lambda, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x,1,1 \mid x,0,1;1) &= \rho\nu, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x+1,0 \mid x,0,1;0) &= \rho\lambda, & x \ge 1; \\ \widehat{Q}(x+1,0,0 \mid x,0,1;0) &= \rho\lambda, & x \in N; \end{split}$$

Sea  $(x, y, z) \in S$ ,  $x \ge 1$  y  $a \in A(x, y, z)$ , a partir del Teorema tenemos que, para  $\alpha \in (0, 1)$  y  $x \ge 1$ ;  $V(0, 0, 1) = V(0, 1, 0) + \alpha [1 - \alpha(\lambda + x)]V(0, 0, 1)$ 

$$V(0,0,1) = V(0,1,0) + \alpha [1 - \rho(\lambda + \nu)]V(0,0,1),$$
  

$$V(1,0,0) = \frac{1 - \alpha + \alpha \lambda \rho}{\alpha \lambda \rho} V(0,0,1),$$
  

$$V(x,0,1) = \min \left\{ (\lambda + \nu)x + V(x,0,0) + \alpha (1 - \rho(\lambda + \nu))V(x,0,1); \beta(x + \gamma) + V(x,1,0) \right\},$$
  

$$V(x,0,0) = \alpha \lambda \rho V(x+1,0,0) + (\alpha \rho \nu) \min \left\{ (\lambda + \nu)x + V(x,0,0) + (\alpha (1 - \rho(\lambda + \nu))V(x,0,1); \beta(x + \gamma) + V(x,1,0) \right\},$$
  

$$V(x,1,1) = \beta x + V(x,1,0) + (1 - \rho\beta)V(x,1,1),$$
  

$$V(x,1,0) = \left( 1 - \alpha [1 - \rho(\lambda + \nu)] \right) V(0,0,1) + \frac{\alpha^2 \nu \rho(\mu - \lambda)}{1 - \alpha \left(\frac{\nu}{\beta} + \lambda \rho + \mu \rho\right)} \beta_1^x$$
  

$$+ \frac{\alpha \nu}{1 - \alpha \left(\frac{\nu}{\beta} + \lambda \rho + \mu \rho\right)} x + \frac{\alpha^2 \nu \rho(\lambda - \mu)}{1 - \alpha \left(\frac{\nu}{\beta} + \lambda \rho + \mu \rho\right)}.$$

## RESULTADOS

Las siguientes tablas muestran los resultados de los costos  $V_n(x, y, z)$  en forma de matriz, para valores de  $n = \{1, 2, 5, 10\}$ , donde  $\alpha = .98$ ,  $\lambda = 1/5$ ,  $\mu = 1/2$ ,  $\nu = 1/2$ ,  $\gamma = 1$  y m = 10, donde la matriz muestra los costos  $V_n(x, y, z)$  de la siguiente forma,

| $(V_n(1,0,0))$ | $V_n(1,1,0)$   | $V_n(1,0,1)$   | $V_n(1,1,1)$ |
|----------------|----------------|----------------|--------------|
| $V_n(2,0,0)$   | $V_n(2,1,0)$   | $V_n(2,0,1)$   | $V_n(2,1,1)$ |
| :              | :              | •              | :            |
| $V_n(m,0,0)$   | $V_n(m, 1, 0)$ | $V_n(m, 0, 1)$ | $V_n(m,1,1)$ |

| n = 1 |        |        |        | n = 2  |       |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 0.702 | 0.3965 | 1.000  | 1.418  | 1.362  | 0.413 | 1.416  | 1.413  |
| 1.200 | 1.902  | 2.000  | 3.402  | 2.361  | 1.952 | 2.833  | 3.402  |
| 2.650 | 2.900  | 3.000  | 5.400  | 3.353  | 2.950 | 4.250  | 5.400  |
| 3.203 | 3.900  | 4.000  | 7.400  | 4.345  | 3.950 | 5.667  | 7.400  |
| 4.527 | 4.900  | 5.000  | 9.400  | 5.337  | 4.950 | 7.083  | 9.400  |
| 5.965 | 5.900  | 6.000  | 11.400 | 6.329  | 5.950 | 8.500  | 11.400 |
| 6.470 | 6.900  | 7.000  | 13.400 | 7.320  | 6.950 | 9.967  | 13.400 |
| 7.860 | 7.900  | 8.000  | 15.400 | 8.314  | 7.950 | 11.333 | 15.400 |
| 8.400 | 8.900  | 9.000  | 17.400 | 9.306  | 8.950 | 12.750 | 17.400 |
| 9.430 | 9.900  | 10.000 | 19.400 | 10.298 | 9.950 | 14.167 | 19.400 |

| n = 5  |       |        |        | n = 10 |       |        |        |
|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1.392  | 0.416 | 2.105  | 1.416  | 1.392  | 0.419 | 2.105  | 1.416  |
| 2.391  | 1.956 | 3.988  | 3.400  | 2.391  | 1.960 | 3.988  | 3.400  |
| 3.389  | 2.953 | 5.840  | 5.000  | 3.389  | 2.953 | 5.840  | 5.400  |
| 4.387  | 3.956 | 7.758  | 7.400  | 4.387  | 3.960 | 7.758  | 7.000  |
| 5.386  | 4.958 | 9.644  | 9.400  | 5.386  | 4.960 | 9.644  | 9.400  |
| 6.384  | 5.954 | 11.566 | 11.400 | 6.384  | 5.954 | 11.566 | 11.400 |
| 7.380  | 6.951 | 13.108 | 13.000 | 7.380  | 6.953 | 13.108 | 13.000 |
| 8.381  | 7.952 | 15.290 | 15.400 | 8.381  | 7.954 | 15.290 | 15.000 |
| 9.379  | 8.953 | 17.193 | 17.400 | 9.379  | 8.958 | 17.193 | 17.400 |
| 10.377 | 9.958 | 19.635 | 19.400 | 10.377 | 9.960 | 19.635 | 19.000 |

Elegir, por ejemplo  $s_1 = (3,0,0)$ , de las tablas se observa que  $V_1(s_1) = 2.650$ ,  $V_2(s_1) = 3.353$ ,  $V_5(s_1) = 3.389$ ,  $V_{10}(s_1) = 3.389$  así que, conforme *n* aumenta, los costos  $V_n(s)$  van acercándose

a V(s), esto es, que conforme *n* crece, los costos por operar en el estado  $s_1$  se acercan a su valor óptimo. De manera análoga se analizan los demás estados. Se observa que a partir de la décima iteración el algoritmo se estabiliza a su valor correspondiente a cada estado  $(x, y, z) \in S$ , esto es, que se acerca a su valor óptimo.

## CONCLUSIONES

Bajo la teoría de control, específicamente con los PDSM, se consideró un sistema de colas M/M/1 con receso permitidos en el servidor. Bajo las hipótesis mencionadas, se presentó el teorema que garantiza la existencia de una política que minimiza el criterio de rendimiento conocido como razón de costo promedio. Para determinar una estrategia óptima de operación se asignaron valores específicos a los parámetros con el fin de mostrar los costos mínimos por operar en cierto estado del sistema, esto se hizo con la ayuda del software *Mathematica*.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. Altman, E. and Nain, P. "Optimality of a threshold policy in the M/M/1 queue with repeated vacations", Math. Meth. Op. Res., 1996, 44: pp. 75-96.
- 2. Bellman, R. E. "Dynamic Programming", Dover Publications, 2003.
- 3. Camilo, C. "Procesos de decisión semi-Markovianos con criterio de costo promedio", Tesis Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017.

## ESTUDIO TEORICO DE LOS PARAMETROS FISICOS INVOLUCRADOS EN EL PROCESO DE PINTURA AUTOMOTRIZ ELECTROFORÉTICA.

Mirna Patricia Juárez Varela<sup>1</sup>, Edy Flores Flores<sup>1</sup>, José Eladio Flores Mena<sup>2</sup> Azucena López Casique<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad Tecnológica de Puebla, Sistemas Automotrices, <sup>2</sup> Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

## RESUMEN

La electroforesis es un fenómeno electrocinético utilizado en la separación de moléculas, cuando éstas están en un solvente la movilidad de las partes de molécula cambian y al actuar un campo eléctrico intenso las partes se separan. Las partes emigran hacia el cátodo o ánodo de acuerdo a su carga eléctrica. En este trabajo se presenta una de las aplicaciones a voltajes pequeños del fenómeno de electroforesis, ampliamente conocido en el sector industrial, el proceso de pintura electroforética, en el cual se realiza el recubrimiento de una pieza por un material coloidal que la protege de la corrosión. Este recubrimiento es uniforme, se puede controlar su espesor por medio del voltaje, temperatura y concentración de la solución coloidal.

Aquí presentamos el análisis electrohidrodinámico de una solución electrolítica bajo las condiciones presentes en el fenómeno de electroforesis. Resolviendo la ecuación de Poisson-Boltzmann y Navier-Stokes, obtenemos los perfiles de potencial eléctrico y de velocidad de la solución. Estos perfiles están en función de los parámetros de la solución.

## **INTRODUCCIÓN**

La electrodeposición catódica es un proceso de pintado por inmersión, totalmente automatizado y basado en el desplazamiento de partículas cargadas dentro de un campo eléctrico hacia el polo de signo opuesto. (Cataforesis es el desplazamiento hacia el cátodo). Se aplica pues únicamente a piezas metálicas por la necesidad de conducción de la corriente eléctrica y se consigue así una película de pintura uniforme garantizándose un pintado correcto incluso en los interiores y cuerpos huecos, aportando una gran protección anticorrosiva y resistencia a deformaciones mecánicas (gravillonado, embutición, doblado, impacto etc.) Previamente a la electrodeposición, las piezas deben someterse a un complejo tratamiento de desengrase y fosfatado que nos asegure el anclaje de la pintura sobre el metal.

Posteriormente debe pasar por un horno que facilite la polimerización correcta para obtener garantía total de las prestaciones de la pintura.

En este trabajo se presentan desde el punto de vista de la teoría clásica de fluidos, los perfiles de densidad y el fenómeno de apantallamiento de una solución electrolítica. En este sistema, la solución induce un potencial sobre la superficie interna del electrodo, el potencial interno define los perfiles de densidad; adicionalmente se aplica un campo eléctrico muy intenso, lo cual cambia las movilidades de los constituyentes del soluto. Éste último hecho hace que se produzca una separación medible de las moléculas que conforman el soluto.

## TEORÍA

Características generales de la pintura por cataforesis

La pintura de cataforesis es una dispersión de resinas y pigmentos en medio acuoso con un contenido en disolventes orgánicos bajo (inferior al 4%) y con tres componentes básicos:

- Agua desmineralizada
- Ligante catiónico
- Pasta pigmentada

Que se incorporan directamente sobre la pintura para compensar el consumo por el pintado de piezas, evaporaciones, arrastres etc. Al ser tres componentes es posible una regulación de parámetros rápida y eficaz.

#### Agua desmineralizada

Es imprescindible que la conductividad del agua sea inferior a 10 µs/cm y esté exenta de microorganismos. Además de tener un control estricto de ciertos parámetros como son; velocidad de caída de aire de 8 m/seg. Aproximadamente, humedad relativa de entre 55 y 65%, temperatura de 20 a 25 °C, RPM de las campanas de aplicación en base a especificación de los fabricantes y tecnología.

El problema de cómo se distribuyen los iones de una solución electrolítica cerca de una pared fue primero considerado por Gouy-Chapmann. Esta teoría se basa en las siguientes hipótesis:

- a) Los iones son considerados como partículas puntuales
- b) la constante dieléctrica del líquido es independiente de la posición y es constante
- c) la superficie de separación es considerada perfectamente plana, de extensión infinita y uniformemente cargada,
- d) el único trabajo para traer un ion cerca del electrodo desde un lugar donde el potencial es cero hasta un lugar donde el potencial es  $\Psi$ , es el trabajo eléctrico Ze $\Psi$
- e) El electrolito es simétrico del tipo z-z y
- f) La distribución de iones sigue la distribución de Boltzmann.

(3)

En base a la hipótesis f) la distribución de los iones cerca de la pared se distribuyen como sigue:

$$n_i = n_{i\infty} \exp\left(-\frac{z_i e \psi}{k_B T}\right)$$

(1)

donde  $n_{i^{\infty}}$  es el numero concentración de iones en el estado neutro  $\psi = 0$  y  $n_i$  es la concentración número de iones de la especie iónica i-ésima en el estado donde el potencial eléctrico es  $\Psi$ . La valencia iónica  $z_i$  puede ser positiva o negativa dependiendo de si es un catión o un anión, respectivamente. Como un ejemplo, para el caso de la sal CaCl<sub>2</sub>, z para el ion calcio es +2 y es -1 para el ion de cloro. Además, k<sub>B</sub> es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.

En la Teoría Gouy Chapman, el potencial eléctrico se encuentra de resolver la ecuación de Poisson,

$$\varepsilon \nabla^2 \Psi(x) = -\rho_f \tag{2}$$

donde  $\rho f$  es la densidad de carga total de la solución. La cual está dada por la expresión siguiente  $e_{\sigma}^{\Psi}$ 

$$\rho_{\alpha}(x) = \rho_0 e^{-\frac{\alpha}{K_B T}}$$

Sustituyendo ésta en la expresión de Poisson (2) se obtiene la ecuación de Poisson-Boltzmann

$$\epsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\sum_{i=1}^{N} z_i e n_{i\infty} \exp\left(-\frac{z_i e \psi}{k_B T}\right)$$
(4)

A) Solución Exacta de la ecuación Poisson-Boltzmann para el caso de un electrolito simétrico  $z_+ = -z_- = z_- =$ 

$$\epsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 2zen_{\infty} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T}\right)$$
(5)

donde  $n_{+\infty} = n_{-\infty} = n_{\infty}$  es la llamada densidad estequiométrica de la solución electrolítica donde  $\psi = 0$  (en el bulto). La anterior ecuación de Poisson-Boltzmann (5) se resuelve con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad \psi = \psi_s \\ x &\to \infty \qquad \psi = 0 \end{aligned}$$
 (6)

donde  $\Psi$ s es el potencial en la superficie en x = 0.

$$\Psi(x) = \frac{2K_BT}{Ze} \ln\left(\frac{1+\gamma e^{-\kappa_D x}}{1-\gamma e^{-\kappa_D x}}\right)$$
(7)

Donde

$$\gamma = \tanh\left(\frac{Ze\Psi_o}{4K_BT}\right) \tag{8}$$

donde  $\Psi$  es el potencial eléctrico sin dimensiones definido por la expresión

$$\Psi=rac{ze\psi}{k_BT}$$

Mientras que, la longitud de Debye esta dada por

$$\kappa^{-1} = \left(rac{\epsilon k_B T}{2e^2 z^2 n_\infty}
ight)^{1/2}$$

(10)

(9)

La longitud de Debye, es una medida del grosor de la doble capa eléctrica y es una propiedad de la solución electrolítica. Debe notarse que este parámetro contiene los parámetros de la solución, y no depende de las características de la superficie cargada. Aunque esta longitud tiene el significado del grosor de la doble capa, el grosor real de la doble capa se extiende más allá de la longitud de Debye. Típicamente, la longitud de Debye representa una longitud característica desde la superficie cargada a un punto en la solución donde el potencial eléctrico ha decaído aproximadamente 33 % de su valor en la superficie.

B) Para s << 1 y electrolito simétrico z-z, la ecuación (2) se simplifica a

$$\Psi = 2 \ln \left[ \frac{1 + 0.25 \Psi_s \exp(-\kappa x)}{1 - 0.25 \Psi_s \exp(-\kappa x)} \right]$$
(11)

C) Teoría de Debye-Hunkel, además de las consideraciones dichas en el primer párrafo de esta sección, se asume que para potenciales en la superficie  $\psi$ s << 0.025 V, se puede considerar la siguiente aproximación de linealización

$$\sinh\left(rac{ze\psi}{k_BT}
ight) pprox rac{ze\psi}{k_BT} \quad ext{for} \quad rac{ze\psi}{k_BT} \ll 1$$
 (11)

Con lo cual la ecuación de Poisson-Boltzmann (5) para una solución z-z, se obtiene la ecuación de Posson Boltzmann Linealizada,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2e^2z^2n_{\infty}}{\epsilon k_BT}\psi = \kappa^2\psi$$
(12)

Cuya solución con las condiciones de frontera (6), se obtiene el potencial eléctrico dado por

$$\Psi = \Psi_s \exp\left(-\kappa x\right) \tag{13}$$

Podemos notar que la densidad de carga superficial varía directamente con el potencial y que en el centro del capilar la función de Bessel de primer orden vale cero por lo que la densidad de carga superficial es también cero. Para calcular la relación entre la densidad de carga superficial sobre la pared y el potencial en el mismo partimos de la Condición de Electroneutralidad Local, cabe hacer notar que la densidad de carga superficial varía directamente con el potencial y que en el centro del capilar la función de Bessel de primer orden vale cero por lo que la densidad de carga superficial varía directamente con el potencial y que en el centro del capilar la función de Bessel de primer orden vale cero por lo que la densidad de carga superficial es también cero.

#### RESULTADOS

De la ecuación (2.13) obtenemos la figuras (1) donde se reporta la densidad de carga superficial sin región de exclusión, consideramos la densidad de carga superficial con región de exclusión, es decir, los iones no son puntuales junto a la superficie del electrodo plano y en donde mostramos la densidad de carga superficial total y la densidad de carga superficial en el electrodo plano. Factor de Apantallamiento.

Continuando con el estudio del sistema electrodo-solución iónica, consideramos la relación entre la densidad de carga superficial y el potencial eléctrico sobre el electrodo. Se grafica la relación exacta entre la ambas cantidades y se compara con la relación lineal. Cuando se considera una capa interna la densidad de carga se observa se satura conforme aumenta el potencial sobre el electrodo (3.5). Mientras que, cuando no hay una capa interna la densidad de carga superficial aumenta conforme aumenta el potencial. Estos resultados los obtenemos de la ecuación (2.14) en donde tenemos la densidad de carga superficial en el electrodo plano.



Fig. 1. Potencial Eléctrico y Perfiles de Densidad en el electrodo plano para concentraciones muy pequeñas. Para valores típicos de una solución electrolítica T=298°k y e=78.5

Un primer camino para estudiar el fenómeno de apantallamiento es por medio de la relación entre  $\sigma_0$  y  $\Psi_0$  esto debido a que el potencia al que esta la superficie limitadora, induce una densidad de carga en la solución la cual es justo la densidad de carga de la superficie limitadora. De esta manera es claro que un potencial eléctrico grande implica una densidad de carga mayor, esto debido al apantallamiento de la solución electrolítica. La relación entre la densidad de carga superficial sobre la pared y el potencial en el mismo se determina de la condición de electroneutralidad local [8], definida como sigue.



Fig. 2 Factor de Apantallamiento para un electrodo plano, en función de la distancia r. Para diferentes molaridades en a)0.1 M, b)0.5 M ye en c) 1.0 M. Para valores típicos de una solución electrolítica T=298°k y e=78.5



Fig. 3 Densidad de Carga Superficial Total y Densidad de Carga Superficial Parcial que Dependen de b, en el electrodo plano. Para un a temperatura de T=298°k, con una molaridad de 1.0 y e=78.5

La figura 3 muestra el comportamiento del parámetro de apantallamiento en función de b, ésta distancia tan grande a la que se consigue el apantallamiento se debe a que tenemos un electrodo infinito, pero para un sistema con geometría finita como una esfera o cilindro esperamos que ésta distancia sea más pequeña.



Fig. 4 Densidad de Carga Superficial vs Potencial Eléctrico en el electro plano considerando a los iones puntuales. Para diferentes temperaturas T=200° K, T=300° k con una molaridad de 1.0 M y e=78.5

## CONCLUSIONES

Un parámetro que determina el apantallamiento de una carga en el interior de una solución electrolítica, es la longitud de Debye. Esta mide la distancia a la cual el potencial eléctrico a partir del ion central deja de tener una influencia importante. En este trabajo, para el sistema de un electrodo plano rodeado por un fluido iónico, hemos definido el parámetro de apantallamiento, A(b), como el cociente entre la densidad de carga superficial sobre el electrodo plano y la densidad de carga superficial debida a la capa iónica de ancho b- $\delta$ . La distancia b $\kappa$ -1<sub>D</sub> medida a partir del electrodo a la cual A(b) = 100% la llamamos la distancia de apantallamiento, justa a esta distancia el electrodo es apanta-llado. Este parámetro de apantallamiento puede ser importante para conocer la distancia donde es importante la actividad de una membrana celular. Continuando con el estudio del sistema electrodo-solución iónica, consideramos la relación entre la densidad de carga superficial y el potencial eléctrico sobre el electrodo. Se grafica la relación exacta entre la ambas cantidades y se compara con la relación lineal. Cuando se considera una capa interna la densidad de carga se observa se satura conforme aumenta el potencial sobre el electrodo. Mientras que, cuando no hay una capa interna la densidad de carga superficial aumenta conforme aumenta el potencial.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. J. P. Hansen and I. R. McDonald, The theory of Simple Liquids, Academic Press, London 2nd. Ed. 1990.
- 2. Ph. A. Martin, Rev. Mod. Phys., 60, 1075 (1988).
- 3. D. A. McQuarrie, Statistical Mechanics, (Harper and Row, New York, 1976).
- 4. J. A. Barker and D.Henderson, What is a Liquid?, Rev. Mod. Phys., 48, No.4 (1976).
- 5. D. Henderson, J.Barojas and L. Blum, Aspects of the Statistical Mechanics of simple fluids and Electrolytes, proceeding of the Second Escuela Mexicana de F´ısica Estad´ıstica (1985).
- 6. R. Weinberger, Practical Capillary Electrophoresis, (Chappaqua, New York, 2000).

## OSCILACIÓN DE UN PÉNDULO CON MOMENTO ANGULAR AGREGADO

G. Del Valle D., G. Hernández M., R. Espíndola H., D. Muciño, J. Díaz, I. Pineda, M. López R. y R. Rubio.

Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco

#### RESUMEN

En este trabajo, elaboramos experimentalmente un Péndulo, mismo que utilizamos para estudiar sus propiedades dinámicas rotacionales, cuando a la masa pendular se le coloca un "spiner". El spiner le proporciona un Momento Angular (L) al sistema original. Estudiamos tanto el periodo (T) como la frecuencia angular ( $\omega$ ) del péndulo con esta propiedad adicional. El estudio se realiza de la siguiente manera: primero medimos el periodo del péndulo con el spiner en reposo, obteniendo: T<sub>0</sub> y  $\omega_0$ , previamente medimos el momento angular del "spiner", conociendo la torca ( $\tau$ ) y la aceleración angular ( $\alpha$ ) causada por la torca. Posteriormente colocamos al spiner sobre la masa pendular a distintos ángulos ( $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$ ), hacemos oscilar el péndulo con el spiner rotando, medimos los distintos periodos y frecuencias, y los resultados se comparan con el periodo y frecuencia de referencia, es decir, cuando el spiner se encuentra en reposo: T<sub>0</sub> y  $\omega_0$ , para estudiar el comportamiento del péndulo con una propiedad rotacional adicionada, este estudio es realizado de manera teórica, numérica y experimental.

## INTRODUCCIÓN

Nuestro sistema de estudio corresponde al del Péndulo Simple con Momento Angular Agregado (PSMAA), el cual consta de un péndulo simple que se encuentra suspendido de un punto de referencia por medio de un hilo de longitud *l* inextensible y masa despreciable, la masa pendular  $m_p$ , a la que se le ha agregado un sistema rotacional "spiner" que posee un momento angular *L*, el cual proporciona un cambio en el movimiento natural del péndulo simple.

Se consideran dos casos, el primero de ellos tal como fue descrito con anterioridad y un segundo caso que consiste en cambiar el "spiner" por un mecanismo más ligero, de tal manera que remedará al de una turbina eólica.

Ambos sistemas se desarrollaron de manera teórica y numérica basados en la formulación Lagrangiana, para obtener las ecuaciones de movimiento. Para el segundo caso, se estudió la relación entre el movimiento pendular y el "spiner" a partir de la conservación de energía, para ello fue necesario establecer un sistema de referencia preciso y controlar adecuadamente las variables, así como tomar en cuenta ciertas idealizaciones. Las ecuaciones de movimiento obtenidas se resolvieron por medio del método Runge-Kutta de orden 4 (RK4), Para obtener así la representación gráfica de cada variable involucrada en el movimiento y verificar la utilización del modelo propuesto para su análisis.

## TEORÍA

# Caso 1

Para el modelado matemático del sistema se realizaron las siguientes suposiciones como base:

- 1) El momento angular del spiner tiene un ángulo  $\varphi$  que permanece constante respecto de la dirección tangencial al movimiento pendular (Figura 1).
- 2) Se asume que el giro del spiner es sobre el eje principal que pasa por su centro de masa en el sistema de referencia ( $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ), es decir en el eje  $z_1$  mostrado en la figura 2,
- 3) Lo anterior implica que  $\dot{\phi}$  (velocidad angular del spiner) será igual a su componente  $\dot{\phi}_{z1}$ , con  $\dot{\phi}_{x1} = \dot{\phi}_{y1} = 0$ .

En adición se propone que la geometría del spiner es un disco delgado de radio  $r_d$ . Las condiciones del modelo se plantean ideales, lo que significa que se desprecia la fricción producida por el aire, así como la fricción contenida en el giro del spiner.







Figura 2. Geometría propuesta para el spiner.





La posición del péndulo está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \\ y &= l \cos \theta \end{aligned}$$
 (1)

Donde *l* es la longitud de la cuerda, y  $\theta$  es el ángulo que produce el desplazamiento del péndulo respecto a la coordenada al origen. que a velocidad en la dirección "*x*" y "*y*" se describe:

$$\dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta$$
(2)

Y de manera conjunta la magnitud de la velocidad se puede expresar en términos de un vector de posición "r" se tiene que:

$$v^2 = \dot{r}^2 = (l\dot{\theta})^2 \tag{3}$$

La energía cinética total se compone por la suma de las energías cinéticas: de traslación y rotacional.

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_s\dot{\phi}^2\cos\gamma$$
 (4)

Dónde  $I_s = mr_d^2/2$  es el momento de inercia del spiner,  $\dot{\phi}$  es su respectiva velocidad angular, el término  $\cos \gamma$  se encuentra de la proyección del momento angular sobre el plano cartesiano, v representa la velocidad de traslación del péndulo, y m es la masa total definida por la adición de la masa del spiner ( $m_s$ ) y la masa del péndulo ( $m_n$ ).

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_s + \boldsymbol{m}_p \tag{5}$$

La energía potencial, tomando como referencia el origen del sistema coordenado (x,y) mostrado en la figura 3, está definida a continuación

$$V = -mgl\,\cos\theta\tag{6}$$

Ahora se cuenta con los elementos necesarios para escribir el lagrangiano que corresponde al sistema PMAA y se define de la siguiente manera

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^{2} + \frac{1}{2}I_{s}\dot{\phi}^{2}\cos(\theta + \varphi) + mgl\cos\theta$$
(7)

Las obtenciones de las ecuaciones de movimiento para el sistema surgen de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{8}$$

Para  $q \rightarrow \theta$  tenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(\frac{1}{2}I_s\dot{\phi}^2\sin(\theta+\varphi) + mlg\sin\theta\right)$$
(9)

Y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \tag{10}$$

Finalmente se obtiene la ecuación de movimiento en términos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} I_s \dot{\phi}^2 \sin(\theta + \varphi) + mlg \sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \kappa \dot{\phi}^2 \sin(\theta + \varphi) + \omega^2 \sin\theta = 0$$
(11)

Dónde  $\omega^2 = g/l$  y  $\kappa = I_s/2ml^2$ . Para  $q \to \phi$  tenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \mathbf{0} \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_s \dot{\phi} \cos(\theta + \phi) \tag{13}$$

Finalmente se obtiene la ecuación de movimiento en términos de  $\phi$ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}L\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = I_s \ddot{\phi} - I_s \dot{\phi} \dot{\theta} \tan(\theta + \phi) = 0$$
  
$$\ddot{\phi} - \dot{\phi} \dot{\theta} \tan(\theta + \phi) = 0$$
 (14)

De lo anterior cabe señalar que:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \mathbf{0} \to \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} L \right) = \mathbf{0} \to \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = cte = L_{z1}$$
(15)

De ello se concluye que  $L_{z1}$  es una constante de movimiento, en otras palabras la conservación del momento angular.

Caso 2

Asimismo al considerar el principio de la conservación de energía, si suponemos que el "spiner" tiene una superficie similar a la de una turbina (con hélices o aspas), y si su peso es muy ligero en comparación a la masa del péndulo, Podemos plantear lo siguiente: Sabemos que la energía cinética es:

$$E_k = \frac{1}{2}m_a v^2 \tag{16}$$

Suponiendo que el movimiento del péndulo tiene una energía cinética igual a la del aire que tiene contacto en dirección normal con la superficie del spiner (figura 4), consideramos que  $m_a$  en este caso sería la masa de aire que está en contacto con el spiner, su velocidad sería igual a la velocidad del péndulo.

De la relación que describe la densidad despejamos la masa:

$$m_a = \rho_a V_a \tag{17}$$

Dónde  $\rho_a$  corresponde a la densidad del aire, y  $V_a$  a su volumen, y se sustituye en la ecuación de la energía cinética (16).





$$E_k = \frac{1}{2}\rho_a V_a v^2 \tag{18}$$

La relación del cambio de volumen por el cambio en el tiempo se puede expresar como sigue

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av \tag{19}$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación que define a la potencia se obtiene

$$P_a = \frac{E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_a}{\Delta t} \rho_a v^2 = \frac{1}{2} A \rho_a v^3$$
(20)

Siendo *A* el área de contacto entre el aire y el spiner. Proponiendo que la velocidad del aire es igual a la velocidad de la turbina, de la definición de trabajo, para el caso rotacional se tiene que:

$$W = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \vec{\tau} \cdot d\vec{\phi}$$
 (21)

Dónde  $\vec{\tau}$  es el momento o torca definida por la razón de cambio en el tiempo del momento angular  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ , y  $\vec{\phi}$  la posición angular, de la definición del producto punto y dado que el ángulo entre ambos vectores es 0, se puede escribir la siguiente expresión, conociendo que el momento angular se define como  $\vec{L} = I_s \vec{\phi}$  para el caso de que la rotación pasa sobre uno de los ejes principales en su centro de masa.

$$W = \int I_s \frac{d}{dt} \dot{\phi} \, d\phi = I_s \int \dot{\phi} \, d\dot{\phi} = \frac{1}{2} I_s \dot{\phi}^2 \tag{22}$$

De la definición de potencia instantánea tenemos para el spiner que:

$$P_s = \vec{\tau} \cdot \dot{\phi} = I_s \, \frac{d\dot{\phi}}{dt} \, \dot{\phi} = I_s \ddot{\phi} \dot{\phi} \tag{23}$$

Igualando la potencia del aire y la potencia del spiner (ecuaciones 20 y 23) se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}A\rho_a v^3 = I_s \ddot{\phi} \dot{\phi} \tag{24}$$

La velocidad del aire, al ser el péndulo el que se encuentra en movimiento, es igual a la velocidad del péndulo, que corresponde a la solución del péndulo simpe obtenida de manera analítica para ángulos pequeños:

$$l\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega l \sin(\omega t + \delta)$$
(25)

Donde R es el radio de la turbina. Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación 24 expresa la relación entre el ángulo de oscilación del péndulo y la velocidad angular del spiner

$$-\frac{1}{2}l^{3}A\rho_{a}[\theta_{0}\omega\sin(\omega t+\delta)]^{3}=I_{s}\ddot{\phi}\dot{\phi}$$
(26)

#### SIMULACIÓN

Mediante el método numérico RK4 se obtienen las soluciones para las ecuaciones de movimiento (11 y 14). El método fue programado en Mathematica<sup>TM</sup> 10.4, con las condiciones iniciales y parámetros, dados en la Tabla 1. El tamaño del paso en el tiempo de simulación fue  $\delta t = 0.03$  con lo

que el error se expresa como:  $err = \delta t^4 = 8.1 \times 10^{-7}$ , se simularon 100 condiciones iniciales diferentes haciendo variar la variable  $10 < \theta < 25$  rad, mientras que su derivada se varió entre los valores de  $0 < \dot{\theta} < 5$  rad/s, ambas variaciones fueron obtenidas de manera aleatoria dentro de la simulación.

# RESULTADOS

Caso 1

Se obtuvieron las gráficas siguientes que representan las soluciones para los parámetros mostrados a continuación, variándolos como se especifica en el apartado anterior.

Tabla 2. Condiciones iniciales utilizadas para la solución numérica del primer caso del sistema PMAA.

| $g \left[ m/s^2 \right]$ | l [ <i>m</i> ] | m <sub>s</sub> [ <i>kg</i> ] | m <sub>p</sub> [ <i>kg</i> ] | r <sub>d</sub> [ <i>m</i> ] | $\theta_0$ | φ₀ | θ̈ <sub>0</sub> [rad/s] | $\dot{\Phi}_0[rad/s]$ | φ   |
|--------------------------|----------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------|----|-------------------------|-----------------------|-----|
| 9.781                    | 0.46           | 0.0614                       | 0.0207                       | 0.03                        | 30°        | 0° | 0                       | 15                    | 15° |

A continuación, se muestra en las figuras 5, 6 y 7; representando la posición, velocidad, y aceleración en función del tiempo del sistema PMAA, de la coordenada  $\theta$ , y sus correspondientes análogos (figuras 8, 9 y 10) para la coordenada  $\phi$ .



Figura 5. Desplazamiento del PMAA en función del tiempo.



Figura 6. Velocidad del PMAA en función del tiempo.



gura 7. Aceleración del PMAA en función del tiempo.



Figura 8. Muestra la dependencia de la variable phi en el tiempo





Figura 10. Aceleración angular en función del tiempo.

Las figuras 11 y 12 corresponden al espacio fase de  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente, se puede observar que el espacio fase para la coordenada  $\theta$  describe el comportamiento, ya conocido, de un oscilador armónico, el caso de la coordenada phi muestra que efectivamente existe una periodicidad en el incremento de la amplitud de la velocidad angular conforme el ángulo inicial de la oscilación aumenta, ya que se mide a partir de la proyección de su componente sobre la dirección del desplazamiento del sistema PMAA.



Figura 12. Espacio fase de la coordenada  $\phi$ .

La figura 14 muestra el comportamiento de la velocidad angular del spiner con respecto a la velocidad del desplazamiento del PMAA, se puede apreciar que cuando su velocidad es cero, la velocidad del spiner es máxima, además de que cuando la condición inicial del sistema es mayor la misma tiene un crecimiento exponencial.



Figura 13. Velocidad angular  $\dot{\phi}$  en función de la velocidad angular  $\dot{\theta}$ .



Figura 14. Distintas vistas de la aceleración angular del spiner, en función del espacio fase.

Caso 2

Tabla 3. Condiciones iniciales utilizadas para la solución numérica del segundo caso del sistema PMAA.

| $g \left[ m/s^2 \right]$ | l [ <i>m</i> ] | m <sub>d</sub> [ <i>kg</i> ] | r <sub>d</sub> [ <i>m</i> ] | φ₀   | θ <sub>0</sub> [rad/s] | $\dot{\Phi}_0[rad/s]$ | φ   |
|--------------------------|----------------|------------------------------|-----------------------------|------|------------------------|-----------------------|-----|
| 9.781                    | 0.46           | 0.02                         | 0.1                         | 0.1° | 0                      | 15                    | 15° |

Usando las condiciones iniciales de la tabla 2 se tiene que el desplazamiento angular del spiner tiene un comportamiento lineal cuya pendiente incrementa como las condiciones iniciales crecen.



Figura 15. Desplazamiento angular en función del tiempo.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló a partir de la teoría Lagrangiana las ecuaciones de movimiento para dos casos del sistema PSMAA.

Se consideró primero un spinner y se obtuvo la relación entre la parte angular del péndulo con la parte angular del spinner.

Se consideró que la energía cinética del movimiento del péndulo, ofrece a un spinner de menor masa, el equivalente a la velocidad de caudal que hará girar una turbina eólica, se obtuvo su ecuación de movimiento y al simularla se encontró que la descripción de la cinemática rotacional es suficiente para describir el movimiento de la turbina. Este caso fue inspirado en el movimiento de los juguetes tradicionales mexicanos avión-rehilete, y nos permitimos describir su dinámica.

Se resolvieron las ecuaciones de movimiento de manera numérica por medio del método RK4.

Como perspectiva resta establecer la parte experimental, a fin de corroborar los modelos propuestos.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. Hauser W., "Introducción a los Principios de Mecánica", Uteha, 1969.
- 2. Marion J. B., "Dinámica Clásica de Partículas y Sistemas", Reverté, 2003.
- 3. Fowles G. R., Cassiday G. L., "Analytical Mechanics", Thomson Brooks/Cole, 7ma Ed., 2005.
- 4. Thornton S. T., Marion J. B., "Classical Dynamics of Particles and Systems", Thomson Brooks/Cole, 5a ed., 2004.
- 5. Taylor J. R., "Classical Mechanics", Ira ed., University Science Books, 2005.

## SISTEMA OPTOMECÁNICO PARA INTRODUCIR ABERRACIONES DE BAJO ORDEN A UNA SUPERFICIE CON ASFERICIDAD VARIABLE

Rafael Cruz Amador, Ángel S. Cruz Félix, Agustín Santiago Alvarado

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca Carretera a Acatlima Km. 2.5 Huajuapan de León, Oax., México C.P. 69000

#### RESUMEN

En los últimos años, se ha estado trabajando en la caracterización y el análisis de las superficies asféricas sintonizables hechas de PDMS con aplicaciones potenciales en el campo de las ciencias visuales, a la par se han diseñado sistemas de montaje optomecánicos para manipular dichos componentes ópticos. En este trabajo se presentará un sistema optomecánico capaz de introducir aberraciones ópticas de bajo orden a través del cambio de forma de una superficie refractiva aplicado fuerza mecánica sobre la misma. Esta superficie refractiva está basada en un modelo normalizado obtenido mediante un estudio poblacional llamado; Ojo Normal Mexicano o NME por sus siglas en inglés (Normal Mexican Eye), para el cual este estudio se concentró específicamente en la córnea. El proyecto consiste en el diseño de una montura optomecánica que facilite tener una mejor caracterización y entendimiento de la córnea humana al simular aberraciones de primer orden a través de un sensor de frente de onda ShackHartmann y un interferómetro Mach-Zehnder, así se puede obtener información valiosa para el estudio del ojo humano. Por otra parte este prototipo esta bioinspirado en el globo ocular con el objetivo de desarrollar la optimización de espacio para que la montura optomecánica en conjunto de la superficie asférica, sea similar en volumen y función al órgano natural del ser humano.

## INTRODUCCIÓN

El ojo humano cuenta con un sistema de lentes que permite generar imágenes en el cerebro, en diferentes circunstancias, este sistema puede llegar a tener alteraciones que no permite tener buen rendimiento del sentido visual. Robson (2015) afirma que: "entre un 30% y 40% de la población de Europa y Estados Unidos necesita anteojos. Y esa cifra alcanza el 90% en algunos países de Asia", aunque no existe una cifra clara para Latinoamérica a través de estas estadísticas el lector puede tener una idea de la problemática a nivel global. En diversas ramas de la ciencia se ha estudiado el ojo humano, pero este trabajo describirá de forma aislada el funcionamiento del ojo humano como un dispositivo óptico y solo se concentra en algunas alteraciones de forma en la córnea y tienen como resultado el desenfoque de las imágenes que recibe el cerebro, para el cual puede corregirse parcialmente utilizando anteojos o probablemente mediante una cirugía refractiva.

"El ojo humano es un sistema óptico positivo o convergente que forma una imagen invertida del mundo externo sobre la capa sensible de la retina, situada al fondo del globo ocular" (Marín, 2006, pág. 10). En cuanto al globo ocular (M.D. Peces Peña, 2012) afirma que "La superficie del globo ocular está formada por dos segmentos conjuntivos de diferente tamaño: uno anterior, la córnea, y otro posterior". En otras palabras, la visión es la percepción del cerebro a través del ojo, de allí parte la importancia de estudiar su funcionamiento, el siguiente diagrama se muestra de forma gráfica el concepto de ojo humano, (Figura 1).





El ojo es un sistema óptico que puede ser entendido de manera simple como un conjunto de lentes y receptores de imagen conectados al cerebro. Algunas personas necesitan usar anteojos para mejorar su vista, esto se debe a un funcionamiento no óptimo del sistema, aunque puede haber diversos factores relacionados con este mal funcionamiento, este proyecto se centra en una parte del sistema de lentes; la córnea, Marín (2006) afirma:

"La córnea, de mayor curvatura que el globo ocular, es una estructura altamente transparente en forma de menisco. Una capa muy fina de fluido lacrimal cubre normalmente la superficie anterior, pero es demasiado fina para afectar de forma apreciable a la potencia y se puede ignorar en este contexto. Vista de frente, la córnea tiene un diámetro alrededor de 12 mm, ligeramente más pequeño verticalmente que horizontalmente" (pág. 15).

El proyecto desarrolla el prototipo de un mecanismo que funciona en conjunto de una superficie refractiva, definido como sistema optomecánico.

Se entiende por optomecánica a la composición de dos palabras de origen griego; opto, que significa "visión" y la palabra; mecánica de la voz de origen griego mekhanikos y significa "relativo a la máquina". (Robledo, 2015) Afirma. "Se entiende por optomecánica la fabricación y utilización de componentes y dispositivos ópticos". Para que se entienda mejor, un ejemplo básico de un sistema optomecánico va desde un par de anteojos donde el armazón debe sostener las lentes de modo que sus puntos principales y la corrección astigmática estén posicionados y orientados correctamente con respecto a los ojos del usuario y lograr un enfoque apropiado de imagen. Otro ejemplo más complejo es un telescopio de largo alcance.

Este proyecto desarrolla técnicas de diseño útiles para la conceptualización y ejecución del prototipo propuesto para la corroboración del comportamiento de la luz en la córnea dentro del espectro visible; si el ojo humano tiene defectos en la córnea afectará la calidad de imagen hasta aproximadamente en un 70% del funcionamiento del ojo, de aquí parte la importancia de la investigación de este componente puesto que tiene repercusiones positivas en las ciencias de la salud y las especialidades relacionadas. Carpi, Frediani, Turco y Rossi (2011) afirman: "la solución de diseño es adecuada para lograr un ajuste óptico útil en dispositivos de tamaño compacto, bajo peso, operación rápida y silenciosa, tolerancia a golpes, sin sobrecalentamiento y bajo consumo de energía" (p.4157). Esto último facilitará la aplicación tecnológica de la montura en otras investigaciones relacionadas dentro de la Universidad Tecnológica de la Mixteca.

El material del cual está hecha la superficie refractiva se llama Polydimethylsiloxano (PDMS), un tipo de elastómero idóneo para simular la córnea. Osorio-Delgado et al. (2017) afirma; "Este polímero puede ser entrecruzado de forma tal que sus propiedades puedan imitar tejidos suaves" (pag.245). Para el cual el diseño de agarre del prototipo de la lente juega un papel importante en la simplificación y funcionalidad del sistema.

## TEORÍA

Fundamentalmente los requerimientos de un sistema optomecánico conducen la conceptualización y diseño de un prototipo, para el caso de este trabajo, están determinadas las aberraciones de bajo orden (figura 2), (Olarte, 2011) describe como:

El desenfoque (a); es la esfera en la refracción sobre la imagen y causa emborronamiento en todas las direcciones... el astigmatismo (b y c), que es de bajo orden, y simboliza el astigmatismo a 0° y a 45°... es el error prismático del ojo y existen dos meridianos (dos ejes) de distinto radio de curvatura en el frente de onda, focalizándose en dos planos diferentes (Pág. 112).



Figura 2. Aberraciones de bajo orden. Fuente: (Angel S. Cruz-Felix, 2015)

Inicialmente el prototipo parte de dos ejes de apoyo para la deformación no permanente de la superficie refractiva del sistema optomecánico, esto quiere decir que es un requisito que a partir de cuatro puntos simétricos colocados alrededor de la lente que soportará la montura mecánica, se apliquen diferentes cargas a cada punto o bien la misma carga en los puntos opuestos para obtener la simulación de la aberración que se pretende.

Como antecedente de este proyecto se encuentra el diseño y fabricación de lentes de distancia focal variable, a través del cambio de forma de una superficie refractiva hecha a base de elastómeros, se ha concluido que si a estas lentes se le aplica alguna fuerza mecánica pueden modificar su resultado positivamente si el proceso de diseño es el correcto. G. Beadie et al. (2008) concluyeron que: "Los perfiles de superficie experimentales de la membrana elastomérica se ajustaron a formas esféricas y bicónicas para predecir la longitud focal del objetivo y las propiedades de la imagen en función de la compresión" (pág. 11856). En la siguiente (figura 3) se esquematiza la forma de cómo se inducen los esfuerzos por compresión. El objetivo que se alcanzó en ese entonces fue tener un excelente zoom de imagen ocupando el mínimo espacio posible, este también será un propósito importante en este proyecto, la optimización del volumen para que los parámetros del sistema optomecánico sean similares a los del globo ocular.



Figura 3. Esquema del mecanismo de longitud focal variable. Al presionar un émbolo una distancia ΔL (alargamiento) hace que el elastómero deformable dentro de la lente se expanda contra la membrana externa flexible. Las líneas punteadas indican el émbolo y las ubicaciones de la superficie antes de la compresión. Poca compresión es necesaria; el máximo ΔL citado aquí es 1.28 mm. Fuente: (G. Beadie, 2008, pág. 11851)

Una de las herramientas necesarias para concebir el diseño del sistema optomecánico es el modelado de elementos finitos por sus siglas (MEF) aplicado antes en el estudio de las corneas del ojo humano, este a su vez genera un análisis de elementos finitos (AEF) que funciona a través de la división de un cuerpo en diferentes unidades llamadas elementos, y que se conectan mediante puntos denominados nodos, creando una red a la que normalmente se distingue como un conjunto de figuras geométricas unidas por los vértices de estas dando una apariencia de red o malla que envuelve al objeto que se analiza. Después a cada unidad se le es asignada propiedades materiales y estructurales específicas bajo ciertas condiciones de contorno tales como fuerzas, desplazamientos y temperaturas. La solución analítica surge del ensamble de cada elemento como respuesta global del sistema., Nejad, Foster y Gongal (2014) afirman que:

AEF es una herramienta útil para estudiar el comportamiento mecánico corneal y los mecanismos subyacentes a sus funciones. La AEF se ha utilizado ampliamente para modelar los efectos quirúrgicos en la córnea y para estudiar las enfermedades de la córnea y el trauma ocular.

De esta forma se puede corroborar el funcionamiento del prototipo antes de su fabricación y es necesaria una estructura de diseño basada en la ingeniería concurrente, de tal manera que el prototipo somático sea óptimo para su funcionamiento en el momento de la experimentación con el sensor de frente de onda Shack-Hartmann y el interferómetro Mach-Zehnder, En la (figura 4) se explica el procedimiento de diseño que se aplicó para el prototipo de este proyecto. Donde no existe un factor primordial, por el contrario la planeación de diseño es simultánea con otros procesos que complementa cada parte del desarrollo.

Dentro del análisis de producción óptica la revisión de la superficie refractiva parte de la modelación de la curva, que más tarde se desarrollaría en tres dimensiones en un software con análisis de elemento finito, esta curva se describe por medio de una combinación lineal de dos funciones exponenciales dada por la siguiente ecuación (Angel S. Cruz-Felix, 2015):

$$e(r) = 2.746 \exp(-0.685r) + 0.294 \exp(0.131r),$$

Donde r es la distancia al eje óptico. Este modelo describe la superficie anterior corneal del ojo humano para diferentes valores de diámetro.



Figura 4. Diseño y análisis detallado del proceso de un producto óptico. Fuente: (Ahmad, 2017)

A partir del modelo tridimensional basado en la curva que se explicó en el párrafo anterior, se experimentará la aplicación de fuerzas mecánicas en los cuatro puntos que se requiere para la deformación no permanente.

## PARTE EXPERIMENTAL

Se hicieron varias simulaciones en deformaciones a partir de las propiedades mecánicas del PDMS con un software de elemento finito, lo cual fue crucial para el diseño de una superficie de agarre que ensamblaría la lente con la montura mecánica para así aplicar los esfuerzos sobre la superficie refractiva, después de experimentar con varios diseños de las superficies de agarre y comprobando su funcionalidad se encontró que la forma más viable en cuanto a optimización de espacio y al aprovechamiento de la fuerza aplicada se debe ejercer en el eje tangencial de los extremos de la curva, dirigiendo esta fuerza hacia el centro de la superficie refractiva en el caso de aplicar compresión o dirigiéndola al lado contrario en caso de aplicar tensión para la deformación de la lente. En la (figura 5) se muestra un prototipo con el cual se hicieron estudios de desplazamiento y deformación, este optomecanismo no satisfacía por completo las expectativas y requisitos planteados y se siguió trabajando en otra montura que aplicase tangencialmente los esfuerzos en las extremidades de la lente.



Figura 5. Corte transversal de un prototipo optomecánico para introducir aberraciones de bajo orden.

## RESULTADOS

La optimización del ensamble lente-mecanismo se alcanzó gracias a las pruebas experimentales de otros prototipos diseñados en un software de elemento finito, esto además de generar un ahorro de tiempo y dinero, facilitó la construcción del prototipo de la lente, ya que al simplificarse el diseño de la superficie de agarre de la lente también se simplifico el proceso de fabricación del prototipo, mostrando resultados favorables en la investigación. En la (figura 6a) se muestra el croquis de la lente con la superficie de agarre que se ensamblará al mecanismo y en la (figura 6b) se muestra el prototipo hecho.



Figura 6. a) Vista superior y lateral de la lente con la superficie de agarre, b) Prototipo de PDMS.

En cuanto a las pruebas de deformación, la superficie refractiva similar a la córnea que se muestra en el círculo al centro del prototipo de la (figura 7), se entiende por mayor deformación al área iluminada de verde, los nodos de color morado en las extremidades del prototipo significa la aplicación de una fuerza de 2 N por pestaña.



Figura 7. Estudio de deformación del prototipo de la lente con la superficie de agarre (pestañas).

Finalmente se construyó el prototipo de la lente con la superficie de agarre de PDMS y actualmente se perfecciona el mecanismo que lo complementa hecho de ABS en impresión 3D de hilado de alta resolución del orden de .1 mm entre cada capa, mientras que en el plano perpendicular a este, la resolución es comparable a la de las impresoras láser convencionales donde las partículas son del orden de 0.05 mm. Actualmente se siguen haciendo pruebas para cada componente del sistema optomecánico para asegurar su correcto funcionamiento.

## CONCLUSIONES

Los resultados de este proyecto están en una fase de exhaustiva de experimentación y se han mejorado los prototipos cubriendo los requerimientos iniciales de diseño, así se garantizará un correcto funcionamiento en la última fase de este proyecto que son las pruebas a través del sensor de frente de onda Shack-Hartmann y un interferómetro Mach-Zehnder.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. Ahmad, A. (2017). Handbook of Optomechanical Engineering. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- 2. Angel S. Cruz-Felix, ,. A.-A.-J.-P.-O.-R. (2015). Manufacture and analysis of a refractive surface with variable asphericity to model the human cornea. SPIE.
- 3. Federico Carpi, G. F. (2011). Bioinspired Tunable Lens with Muscle-Like Electroactive Elastomers. Advanced Functional Materials, 4152–4158.
- 4. G. Beadie, M. L. (2008). Tunable polymer lens . OPTICS EXPRESS , 11847-11857.
- M.D. Peces Peña, J. M. (2012). El globo ocular y los anexos oculares. El sistema visual y los reflejos oculares. In C. Borobia, Valoración del daño corporal. Medicina de los seguros. (pp. 22-31). Barcelona, España: Elsevier Masson.
- 6. Marín, M. C. (2006). Óptica Fisiológica: el sistema óptico del ojo y la visión binocular. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- 7. Marlon Andrés Osorio-Delgado, L. J.-T.-C.-G.-M.-R.-G.-T.-H. (2017). Biomedical applications of polymeric biomaterials. DYNA, 241-252.
- 8. Olarte, R. V. (2011). Entendiendo e interpretando las aberraciones óptica. cien. tecnol. salud. vis. ocul, 105-122.

- 9. Robledo, M. N. (2015). Impresión 3D aplicada a la optomecánica. Madrid, España: Universidad Carlos III de Madrid.
- 10. Robson, D. (2015, Enero 19). Por qué hay tantas personas con miopía en el mundo. BBC World.
- 11. Talisa Mohammad Nejad, C. F. (2014). Finite element modelling of cornea mechanics: a review. SciELO Analytics , 60-65.

## BIOMECÁNICA: UN NOMBRE MODERNO PARA UNA DISCIPLINA ANTIGÜA

María del Rayo A. Aparicio Fernández, Viviana Matilde Mesa Cornejo, Jorge Enrique Mejía Sánchez

Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara.

#### RESUMEN

La Biomecánica es una disciplina que vincula conocimientos entre la Estática, Cinemática, Dinámica, Anatomía y Fisiología de los seres vivos, en particular del ser humano. Este tema era poco estudiado en el ámbito de las ciencias exactas e ingenierías hasta mediados del siglo pasado, ya que su desarrollo fue inicialmente aprovechado por los estudiosos de las ciencias de la salud.

En particular, el término Biomecánica fue acuñado en la segunda mitad del siglo XX, sin embargo, esta disciplina tiene sus orígenes desde tiempos remotos, incluso se tiene conocimiento de su aplicación a través de prótesis creadas en el Antiguo Egipto. Esta área comprueba la conjunción de la Física y la Biología en diferentes organismos.

La Biomecánica es una de las asignaturas que forma parte del área especializante selectiva de la licenciatura en Ingeniería Bioquímica, que se imparte en el Centro Universitario de los Lagos. En este trabajo se presenta el diseño de una herramienta didáctica que apoyará la enseñanza de la Biomecánica en el aula de clase. El objetivo de esta herramienta es propiciar inicialmente, activida-des cualitativas para que el alumno identifique las partes del cuerpo involucradas en un movimiento. En una segunda etapa, se proponen actividades para cuantificar las fuerzas involucradas en esos movimientos.

El uso de esta herramienta permitió la comprobación, por parte del estudiante, de la aplicación de los principios mecánicos a los seres vivos en general, y en particular a los humanos, relacionando los conceptos de palanca, tensión, torque, fuerza entre otros, con músculos, articulaciones, tendones, huesos, etc. De igual manera, desde el punto de vista docente, la enseñanza de estos conceptos se llevó a cabo de manera dinámica en un ambiente de participación, promoviendo el fácil aprendizaje y motivando la búsqueda de nuevas herramientas que faciliten el proceso educativo.

## INTRODUCCIÓN

La Biomecánica tiene como objetivo el estudio de las estructuras de carácter mecánico presentes en los seres vivos, en otras palabras, se puede decir que estudia el funcionamiento mecánico de los organismos biológicos; ha sido definida como el estudio de las bases mecánicas de la Biología, o cómo la aplicación de las leyes mecánicas a las estructuras vivas, también como la ciencia que examina las fuerzas internas y externas que actúan sobre el cuerpo humano [1].

La Biomecánica es considerada como un área interdisciplinaria, debido a que en ella se unen conocimientos procedentes de diversas ciencias. La Física la enriquece con los conocimientos sobre mecánica, por su parte, la anatomía y la fisiología aportan el conocimiento estructural y funcional del organismo y la ingeniería aporta la imaginación para solucionar problemas que involucran a las anteriores.

De esta manera, el engranaje entre estas diversas áreas ha enriquecido campos como la kinesiología, fisioterapia, cirugía y odontología por nombrar sólo algunos. Sin embargo, la biomecánica ha sigo más conocida por su aplicación y estudio en el área deportiva, para entender a detalle el comportamiento mecánico que presenta un determinado individuo al realizar actividades específicas y lograr mejorar su rendimiento físico, mediante el desarrollo de nuevas estrategias de entrenamiento o la creación de nuevos equipos.

Con el fin de diversificar las aplicaciones de la Biomecánica, se ha unido también a la ergonomía, por ejemplo, debido a la necesidad de suplir la función natural de las diferentes partes del cuerpo, bajo la forma de órtesis o prótesis que se convertirán en parte del individuo; en este punto es donde entra el papel de la ergonomía. Mientras la biomecánica estudia parámetros como el flujo sanguíneo, la cantidad de esfuerzo que realizan los músculos, el cómo conectar un aparato al cuerpo y que este funcione, etc., la ergonomía ayuda en el diseño del aparato, en que éste no lastime la piel, se ajuste a la medida, etc.

## JUSTIFICACIÓN

El perfil de egreso de los Ingenieros Bioguímicos del Centro Universitario de los Lagos, tiene como base fundamental el potenciar las habilidades y aptitudes de los estudiantes para que desarrollen un pensamiento crítico y se desempeñen de manera eficiente y de forma multidisciplinaria, con actitudes para liderar, trabajar en equipo con ética y responsabilidad social y ambiental, por tal razón, el plan de estudios está diseñado para cubrir los conocimientos obligatorios inherentes a la parte de la Ingeniería y de la Bioquímica, sin embargo, tomando en cuenta al futuro egresado como un ser integral que deberá desempeñarse en un ambiente globalizado, el plan de estudios cuenta con un grupo de asignaturas llamadas especializantes que tienen como propósito brindar información más fina y puntual en temas de vanguardia que estén en constante actualización, como es el caso de Biomecánica, que forma parte de las materias del área Biomédica y pretende, junto a las demás asignaturas de la orientación (Biomateriales, Bioingeniería, Morfología, Fisiología, Transductores Biomédicos, Genética. Tecnología de Materiales, Circuitos Eléctricos y Sensores e Instrumentación), brindar la información mínima requerida para aquellos que deseen laborar o continuar estudiando en los ambientes biomédicos. Para lograr lo anterior, se requiere de herramientas didácticas que faciliten la adquisición del conocimiento de manera que el estudiante desarrolle y fortalezca el saber ser y el saber hacer de forma lúdica y práctica, por esta razón el objetivo de esta herramienta es propiciar inicialmente, actividades cualitativas para que el alumno identifique las partes del cuerpo involucradas en un movimiento. En una segunda etapa, se proponen actividades para cuantificar algunos parámetros involucrados en esos movimientos.

## DESARROLLO

La herramienta está conformada por tres actividades que permitan la comprobación, por parte del estudiante, de la aplicación de los principios mecánicos, relacionados con los conceptos de palanca, tensión, torque, fuerza en músculos, articulaciones, tendones, huesos, etc. Dos de las actividades fueron de carácter cualitativo y una cuantitativa, las cuales se describen a continuación:

En la actividad 1, el objetivo era reconocer al cuerpo humano como un sistema de elementos independientes donde se pueden aplicar las leyes de la mecánica; para lograrlo se propuso trabajar en equipo de 3 a 5 estudiantes, cada equipo debía elegir tres movimientos o habilidades motoras humanas con las cuales todos estuvieran familiarizados (por ejemplo, salto vertical). Para cada movimiento, realizaron una lista de al menos tres preguntas generales y al menos tres específicas que un observador pudiese elegir para responder.

A continuación dos miembros del grupo realizaron el movimiento varias veces a un grupo de observadores y compararon ambos movimientos o habilidades para elaborar una lista con las diferencias y similitudes detectadas, por ejemplo, ¿Cuáles de estas son importantes para el propio movimiento y cuales son más un asunto de estilo personal?

Para la actividad 2, se pretendía identificar cómo afecta la perspectiva de la visión a un análisis del movimiento y reconocer las diferencias intrínsecas del movimiento. Para esta actividad desarrollada de manera grupal, se solicitó a los miembros de cada equipo elegir a una persona que seria observada y analizada en el momento de ejecutar, dos similares pero diferentes versiones de un movimiento en particular (por ejemplo, dos formas de lanzar o dos maneras de andar). Posteriormente los observadores explicaron la perspectiva y distancia de visión seleccionada para recolectar los datos de cada movimiento, comparando la cinemática de los dos movimientos. Esta actividad puede enfocarse, en diferentes ámbitos específicos como el deporte y el arte, y tan comunes como escribir o leer un libro.

Y en la actividad 3, de carácter cuantitativo, se describió el movimiento de la flexión del codo humano sin carga, a través de la medición de dos parámetros cinemáticos, para ser comparada con la flexión del codo cuando la mano sostiene una masa de 3 kg. Los productos entregables de esta actividad consistieron en: tomar fotografías estroboscópicas del movimiento de flexión de un brazo, medir el ángulo entre cambios de posición del antebrazo, calcular velocidades angulares del movimiento utilizando el ángulo medido y la frecuencia del estroboscópio, y analizar los datos obtenidos para identificar las posiciones de la velocidad angular máxima, la aceleración y desaceleración máxima.

# RESULTADOS

Se muestra un ejemplo de las respuestas dadas por los estudiantes del grupo de Biomecánica.

|                               | Actividad 1: Habilidad SENTADILLAS                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Preguntas Ge-<br>nerales      | ¿En qué posición deben de estar los brazos?<br>¿Los hombres y las mujeres hacen el mismo tipo de sentadillas?<br>¿Qué tan seguido se puede realizar este tipo de ejercicio?                                                            |
| Preguntas Es-<br>pecíficas    | ¿Por qué tiene que estar la espalda recta en el momento de hacer la sentadilla?<br>¿Qué músculos se están trabajando en el momento de realizar la sentadilla?<br>¿Qué tantos grados debe de haber en el ángulo posterior a la rodilla? |
| Diferencias del<br>movimiento | No bajan al mismo nivel<br>Posición de brazos<br>Curvatura de la espalda<br>Posición de la cabeza<br>Movimiento de los brazos                                                                                                          |

| Actividad 2-a: Salto de cuerda.    |                                                                                                                                                                                                                          |  |  |  |  |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|--|--|
| Perspectiva de visión              | Frontal                                                                                                                                                                                                                  |  |  |  |  |
| Razón de la perspectiva de visión  | Para poder observar el movimiento de los pies                                                                                                                                                                            |  |  |  |  |
| Distancia de visión                | Un metro                                                                                                                                                                                                                 |  |  |  |  |
| Razón de la distancia de<br>visión | Para que la persona entre completamente en el campo de visión                                                                                                                                                            |  |  |  |  |
| Comparación cinemática             | En uno de los movimientos el cuerpo se balancea, mientras que en el otro<br>el cuerpo se mantienen rígido.<br>En uno de los movimientos se observa la flexión de las rodillas, mientras<br>que en el otro movimiento no. |  |  |  |  |

## Actividad 2-b: Movimiento seleccionado: subir y bajar escaleras

Análisis:

- No hay balanceo de brazos.
- Mantiene el cuerpo rígido en el momento de subir y/o bajar las escaleras.
- No hay una flexión en las rodillas.

Como el proceso de análisis fue diferente cuando se trabajó con el compañero:

- No hubo tanto esfuerzo sobre la rodilla.
- La fuerza la ejerció en la pierna y no en la rodilla.
- Tuvo mayor equilibrio.

| Actividad 3: Movimiento de flexión del codo.                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                            |  |  |  |  |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|--|--|--|
| Funcionamiento Persona 1                                                                                                                                                                                                       | Funcionamiento Persona 2                                                                                                                                                                   |  |  |  |  |  |
| Se observa algo de dificultad en el momento<br>de realizar el ejercicio.<br>No se marca ninguno de sus músculos en el<br>momento de realizar el ejercicio.<br>Da la impresión de que la fuerza la realiza con<br>el antebrazo. | Se puede notar una facilidad de la realización<br>del ejercicio.<br>Se puede notar que sus músculos de repente<br>se notan.<br>Se observa que la fuerza la está ejerciendo<br>en el brazo. |  |  |  |  |  |

Las mediciones se hicieron directamente sobre las fotografías estroboscópicas del movimiento de un brazo, tomadas en un ambiente de obscuridad total, utilizando un estroboscopio y una cámara fotográfica, y como masas se utilizaron 2 discos para pesas y una barra de soporte, dando una masa total de 3 kg. La frecuencia del estroboscopio se ajustó a 5 Hz; esta frecuencia permitía tener un mínimo de 7 exposiciones durante el movimiento del brazo.

La figura 1 muestra dos fotografías estroboscópicas del movimiento del brazo sin carga (fig. 1a) y del movimiento del brazo cuando la mano sostiene una masa de 3 kg (figura 1b). En las figuras 1c y 1d se resalta con líneas rojas el movimiento del antebrazo; en ambos casos el tiempo entre líneas es de 0.2 s. Sobre estas fotografías se miden los parámetros cinemáticos. El desplazamiento total,  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$  donde  $\theta_i$  es el ángulo de la posición inicial del antebrazo y  $\theta_f$  es el ángulo de la posición final, debe convertirse a radianes al igual que cualquier otro ángulo medido.

Las velocidades angulares promedio para cada intervalo entre líneas se calcula mediante la fórmula

$$\overline{w} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$



Las mediciones para cada línea se han concentrado en la tabla 1, donde la línea 1 es la de menor inclinación.

| Tabla 1. Resultados de los parámetros cinemáticos |            |         |        |         |        |                |        |  |
|---------------------------------------------------|------------|---------|--------|---------|--------|----------------|--------|--|
| Sin carga                                         |            |         |        |         |        | Con carga      |        |  |
| Línea                                             | Tiempo (s) | Θ (rad) | Δθ     | Θ (rad) | Δθ     | $\overline{W}$ |        |  |
| 1                                                 | 0.0        | 0.0     | 0.0    |         | 0.0    |                |        |  |
| 2                                                 | 0.2        | 0.2618  | 0.2618 | 1.309   | 0.2792 | 0.2792         | 1.396  |  |
| 3                                                 | 0.4        | 0.5236  | 0.2618 | 1.309   | 0.6467 | 0.3665         | 1.8325 |  |
| 4                                                 | 0.6        | 0.7854  | 0.2618 | 1.309   | 1.2391 | 0.5934         | 2.967  |  |
| 5                                                 | 0.8        | 1.1015  | 0.3141 | 1.5705  | 1.5532 | 0.3141         | 1.5705 |  |
| 6                                                 | 1.0        | 1.1456  | 0.3141 | 1.5705  | 1,7451 | 0.3141         | 1.5705 |  |
| 7                                                 | 1.2        | 1.6602  | 0.2446 | 1.223   | 1.9021 | 0.2446         | 1.223  |  |

De los resultados se observa que la velocidad angular del antebrazo es prácticamente constante para el movimiento sin carga, mientras que para el movimiento con carga la velocidad angular máxima la tienen entre la línea 4 y la línea 5.

# CONCLUSIONES

- El estudiante comparó las partes de su cuerpo con arreglos mecánicos, donde visualizó los conceptos de vectores, carga, tensión, velocidad ángular y torque.

- Además, se tomaron los conceptos adquiridos previamente en el curso de mecánica y su aplicaicon al entendimiento del movimiento de los seres humanos.

- La herramienta utilizada cumplio con el objetivo de que el estudiante comprobara la dinámica del movimiento humano, de manera dinámica, lúdica y colaborativa; fomentando la creatividad y el acercamiento al uso del equipo de laboratorio de física.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1. Hay G, "The Biomechanics of Sports Techniques", Prentice Hall, Inc., 2 ed. 1978.
- 2. Le Veau B, "Biomecánica del Movimiento Humano", Trillas, 1 ed. 2008.
- 3. Hall S, "Basic Biomechanics", Mc Graw Hill, 4 ed.2004.
- 4. Sears, Zemansky "Física Universitaria" Addison-Wealey, 12 ed. 2009.

## ESTIMACIÓN DE LA VELOCIDAD Y FUERZA TERMOFORÉTICA EN ATRAPAMIENTO DE MI-CROPARTÍCULAS: POSIBLE APLICACIÓN PARA ANÁLISIS DE CONTAMINANTES EN LU-BRICANTES

Edy Flores Flores<sup>1</sup>, Azucena López Casique<sup>1</sup>, Mirna Patricia Juárez Varela<sup>1</sup>, José Eladio Flores Mena<sup>2</sup>, Omar Mauricio Moreno Guzmán<sup>1</sup>, Marco Antonio Betanzos Torres<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Tecnológica de Puebla, División de Sistemas Automotrices, <sup>2</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica.

# RESUMEN

Termoforesis es la migración de partículas coloidales en una solución en respuesta a un gradiente de temperatura, la velocidad adquirida por las partículas se conoce como velocidad termoforética, dato relevante que nos da estimación de la fuerza termoforética necesaria para atrapar partículas. Por ejemplo, en el análisis de partículas contaminantes en lubricantes automotrices, las partículas de silicio circulan dañando cojinetes, bujes, etc. en cada paso por el motor. Con la estimación de la fuerza termoforética sabríamos la potencia necesaria para atraparlas, estudiarlas y obtener información de éstos contaminantes. En este trabajo hacemos una estimación de la fuerza termoforética involucrada en el atrapamiento de partículas con corrientes convectivas y termoforesis generadas por la absorción de radiación láser en un substrato absorbente. Modelar la fuerza termoforética no es fácil, su amplitud está determinada por el volumen, propiedades físicas y naturaleza microscópica de la micropartícula e interfaz del disolvente. No obstante, tenemos la posibilidad de medir experimentalmente la velocidad termoforética promedio como función de la potencia de entrada, además con ayuda de COMSOL podemos obtener un gradiente de temperatura y así lograr estimación de la fuerza termoforética. Encontramos que los valores de la velocidad termoforética experimental y teórica no concuerdan, pues la expresión de la velocidad termoforética es para gases, en cuanto a líquidos, existe dificultad para obtener expresiones analíticas para la difusión térmica, lo que implica que no hay un modelo unificador. Sin embargo, a pesar de la física, ambos comportamientos son similares y muestran que la velocidad es directamente proporcional a la potencia. De acuerdo a los resultados, la fuerza termoforética alcanza valores de hasta 20 pN cuando se usa una potencia máxima de 12 mW, la cual es mucho mayor que la que sienten las partículas debido a la convección, esto está en concordancia con los experimentos.

## INTRODUCCIÓN

Existen muchos dispositivos de confinamiento de micropartículas y están orientados a un tipo de objeto, sin embargo algunos de ellos tienen sus limitaciones respecto al tamaño de la partícula a manipular (dimensiones abajo de 20 µm), forma (esféricas) y al índice de refracción de las partículas Actualmente existen diversas técnicas para el atrapamiento de partículas como pinzas ópticas [1], dielectroforesis [2], optodielectrofóresis [3], etc. Recientemente se ha mostrado que se puede hacer atrapamiento individual y colectivo de partículas grandes por medio de flujos convectivos inducidos por láser usando un substrato absorbente [4]. Los gradientes de temperatura en el agua creados por la absorción láser generan flujos de convección termocapilares. Estos flujos de corriente son usados para realizar el atrapamiento. La absorción de luz en el agua puede alcanzar una variedad de efectos que se usan para el atrapamiento de partículas, como la convección Rayleigh-Bérnard y la termo-fóresis.

La termofóresis se define como la migración de partículas en una solución en respuesta a un gradiente de temperatura [5]. Para mezclas moleculares de gases existe una descripción teórica muy bien establecida, no obstante para líquidos no se ha formulado satisfactoriamente una teoría.

Modelar la fuerza termoforética no es una tarea fácil, particularmente en medios densos ya que su amplitud no solo está determinada por el volumen general de la partícula o las propiedades físicas superficiales (tamaño, densidad del material, conductividad térmica, o carga superficial total) sino que parece estar sutilmente relacionada con el detallado de la naturaleza microscópica de la micro-partícula e interfaz del disolvente. La velocidad termoforética es una cantidad relevante puesto que la podemos medir experimentalmente y así obtener una estimación de la fuerza termoforética, cantidad relacionada con el tipo y tamaño de una partícula para poder atraparla y desplazarla.
Aunque la gran mayoría de aplicaciones de micromanipulación está orientada a ciencias como medicina y biología (en donde se usan éstas técnicas pasa estudiar células, ADN, virus, etc.), la micromanipulación no está restringida solo a estas áreas. Una posible aplicación sería la del análisis de contaminantes en lubricantes automotrices, con la cual se podría obtener valiosa información para diagnosticar el fallo en maquinaria industrial o en partes automovilísticas, pues el tipo y tamaño de partícula está relacionado con la posible fuente del problema [6]. Por ejemplo, las partículas de aluminio pueden deberse a fallos en pistones, cojinetes y bombas, el hierro a ejes, rodamientos y cilindros, y la presencia de silicio es señal de polvo en el lubricante y al agotamiento de aditivo antiespumante [6], éste aditivo es el encargado de evitar el proceso de oxidación en el lubricante.

Algunas partículas mayores a 10 µm son detectadas y retenidas mediante filtros, pero las menores a 5 µm, solo se detectan mediante un análisis de lubricante.

Existen métodos para el análisis de lubricante como la espectrometalografía, Espectrometría de emisión, espectrometría por infrarrojos, ferrografia analítica, contador de partículas, entre otros. Algunas de estos métodos no permiten la detección de partículas mayores a 10 µm, otros tienen alto coste de operación, o simplemente requieren de mucho tiempo y de la habilidad del analista.

Un primer paso para poder analizar diversos contaminantes en lubricantes por micromanipulación, es comenzar por el elemento más fácil, el silicio. En éste trabajo presentamos una estimación de la velocidad y fuerza termoforética necesaria para atrapar partículas de silicio. El tipo de atrapamiento para la obtención de datos (velocidad termoforética) es de tipo óptico por medio de flujos de convección y termoforesis, con el cual es posible atrapar partículas grandes y pesadas, además se usa un material económico y un láser de baja potencia, lo cual le da ventajas a nuestra técnica sobre las comúnmente ligadas al análisis de lubricantes. Aunado a esto, se realizó simulación numérica por el método de elementos finitos en COMSOL, se han obtenido valores aproximados del gradiente de temperatura para finalmente obtener una estimación de la fuerza termoforética.

# TEORÍA

El efecto de la termofóresis fue descubierto experimentalmente en 1870 por Tyndall [7]. Este fenómeno puede verse de la siguiente manera: un cuerpo inmerso en un fluido con una temperatura no uniforme mantenida por una fuente exterior al sistema, sufre una fuerza que lo acelera y lo mueve de la región más caliente a la más fría en la dirección del flujo de calor, con una velocidad proporcional al gradiente de temperatura.



Figura 1. Principio de la termofóresis: una partícula esférica ideal es calentada por radiación desde el lado izquierdo resultando un gradiente de temperatura en la dirección de la luz incidente.

Para una mejor explicación observemos la figura 1 en donde una partícula esférica ideal es calentada por radiación desde el lado izquierdo resultando un gradiente de temperatura en la dirección de la luz incidente. Para conservar el momento la partícula tiene que balancear su desajuste y es acelerada fuera de la región caliente. En la actualidad la termofóresis se define como la migración de partículas coloidales en una solución en respuesta a un gradiente de temperatura macroscópico [7]. El efecto inverso, es decir, la formación de un gradiente de temperatura como resultado de la mezcla de diferentes especies moleculares, es referida como el efector Dufour [8]. La fuerza causada por la presencia de un gradiente de temperatura es conocida como fuerza termoforética. El coeficiente de Soret es definido como la razón del coeficiente de difusión térmica y el coeficiente de difusión normal [9]; esto es una medida del grado de separación de las especies. Estos conceptos son los mismos para una mezcla molecular.

La razón del flujo de masa  $J_m$  de unas especies o partículas coloidales como resultado de un gradiente térmico  $\nabla T$  en un fluido está dado en [5]

$$\mathbf{J}_m = -\rho D \nabla C - \rho D_T C (1 - C) \nabla T, \tag{1}$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido, **D** es el coeficiente de difusión, **D**<sub>T</sub> es el coeficiente de difusión térmico, y **C** es la concentración de las partículas o especies en términos de fracción de masa. El primer término del lado derecho es la ley de difusión de Fick [10], mientras que el segundo término describe la migración debido al gradiente térmico.

En un estado estacionario el flujo de masa se desvanece (es decir  $J_m = 0$ ), y el coeficiente de Soret  $S_T$  es dado por

$$S_T \equiv \frac{D_T}{D} = -\frac{1}{C(1-C)} \frac{\nabla_C}{\nabla T},\tag{2}$$

aquí, la eficacia de separación es dada por el coeficiente Soret, mientras que la razón de separación es determinada por la difusividad. En general el coeficiente de difusión térmico  $D_T$  está en función de la temperatura y la concentración, lo cual complica la descripción de la termofóresis.

La termofóresis como se definió anteriormente ocurre en fluidos. Para mezclas moleculares de gases, existe una descripción teórica, pero para líquidos no se ha formulado satisfactoriamente una teoría.

Para termofóresis en gases, ésta puede ser descrita usando la teoría de Chapman-Enskog [11], asumiendo una distribución Maxwell- Boltzmann para la velocidad de las moléculas, con correcciones. Esta aproximación es solo válida cuando el cambio relativo de la temperatura comparado con el camino libre medio molecular es pequeño. Usando el teorema de Onsager, la ecuación de transporte puede ser derivada de la producción de entropía, la cual es descrita por De Groot [12].

Para líquidos no existe aún una descripción teórica satisfactoria, a pesar de más de 150 año de investigación, puesto que la primera descripción de termofóresis fue dada a conocer por Ludwig y Soret [13]. Las descripciones teóricas fallan en predecir los valores correctos del coeficiente de Soret y algunas veces incluso fallan en predecir el signo correcto. Por lo tanto, la termofóresis aún se mantiene como un área activa de investigación, en ambos casos teórico y práctico.

La velocidad termoforética es la velocidad que adquiere la partícula micrométrica debido a que está inmersa en un fluido donde existe un gradiente de temperatura  $\nabla T$ , y está definida como sigue [5],

$$\boldsymbol{v}_T = -\boldsymbol{D}_T \nabla \boldsymbol{T}. \tag{3}$$

El signo menos en la ecuación (3) se debe a que la partícula se moverá de la región más caliente hacia la región más fría, y el coeficiente de difusión térmica,  $D_T$  es una medida de que tan fácil se mueve la partícula en dicho fluido como consecuencia del gradiente de temperatura, la cual depende de las propiedades del fluido y de las características de la partícula. Como ya comentamos la velocidad termoforética es una cantidad relevante ya que la podemos medir experimentalmente y nos da una estimación de la fuerza termoforética.

Una definición fenomenológica de la fuerza termoforética es como la fuerza de arrastre de Stokes, por ejemplo para una partícula micrométrica esférica, ésta fuerza se define como [5]:

$$\mathbf{F}_T = 6\pi\eta R \boldsymbol{v}_T,\tag{4}$$

donde R es el radio de la partícula y  $\eta$  es el coeficiente de fricción del fluido. Sustituyendo la expresión (3) en (4) se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{F}_T = -6\pi\eta R D_T \nabla T. \tag{5}$$

Como puede verse de las expresiones (2) y (4), el conocimiento del coeficiente de difusión térmica ( $D_T$ ) es esencial para determinar la velocidad y fuerza termoforetica. Como se mencionó anteriormente ésta cantidad depende de las características del fluido, temperatura y de las características de la partícula. Por lo tanto los esfuerzos teóricos se centran en la determinación de éste coeficiente. Se debe enfatizar la dificultad de obtener expresiones analíticas para difusión térmica en líquidos lo que implica que no hay un modelo unificador, por ello en este trabajo se presenta solo una estimación.

### PARTE EXPERIMENTAL

A fin de realizar los experimentos, se preparó un dispositivo simple el cual consta de una celda que contiene una solución coloidal de micropartículas de vidrio silica inmersas en agua, éstas micropartículas tienen 2.5 µm de diámetro. Dicha celda está constituida por dos placas de vidrio que emparedan la solución coloidal como se muestra en la figura 2. En la placa inferior (espesor de 1mm) está depositada una película delgada de silicio amorfo hidrogenado (a-Si:H) de 1 µm de espesor (substrato absorbente), la segunda placa es sencillamente un cubreobjetos adherido a un espaciador plástico de 100 µm de espesor para así formar la celda contenedora.

En nuestro arreglo experimental, la fuente usada para provocar el calentamiento y el gradiente de temperatura en el agua es un láser CW Nd:YAG, con una potencia de 40 mW y 532 nm de longitud de onda.



Figura 2. Arreglo óptico enfocando un haz Gaussiano para el atrapamiento de micropartículas, con una longitud de onda λ=532 nm del láser, el substrato absorbe casi toda la luz incidente calentándose y dando lugar a las corrientes de convección y termoforesis.

Como se muestra en la figura 2, la potencia del láser es controlada con un atenuador variable y monitoreada usando un medidor de potencia óptico. Enseguida el láser es expandido y colimado por medio de un objetivo de microscopio 5x y una lente de 15 cm. Posteriormente se colocaron dos espejos planos a 45° para direccionar el haz hacia un espejo dicroico 50/50, la luz reflejada entra a un objetivo de microscopio 60x (la entrada de éste objetivo se monitorea la potencia del láser), la cual es enfocada sobre el substrato absorbente. El tamaño del haz enfocado es de aproximadamente 10 µm de diámetro. Por debajo de la celda contenedora se ha colocado una fuente de luz blanca para poder observar las micropartículas. La imagen de la celda contenedora se observa a través de una cámara CCD, la cual envía la señal a una computadora. Para evitar saturación en la cámara CCD se ha colocado un filtro a la entrada de la cámara, como se muestra en la figura

Debemos mencionar que a la longitud de onda del láser ( $\lambda$ =532 nm) el substrato (a-Si:H) absorbe una gran parte de la luz incidente ( $\alpha_{aSiH}$ ~2.77 × 10<sup>4</sup> cm<sup>-1</sup>), el resultado es un calentamiento el cual

es entonces transferido a la solución de agua generando un gradiente de temperatura  $\nabla T$ , el cual genera las corrientes de convección y termoforesis provocando el arrastre de partículas alrededor y fuera de la zona del spot para dar lugar al atrapamiento. Se han usado potencias desde 6 hasta 15 mW, pues a potencias más altas el calentamiento es tan fuerte que se forman burbujas de vapor.

### RESULTADOS

El movimiento de partículas de 2.5 µm de diámetro en agua se muestra en la figura 3, la potencia usada para el atrapamiento es de 6 mW y se ha marcado con un círculo rojo la posición del spot.



Figura 3. Atrapamiento masivo de micropartículas con una potencia de entrada de 6 mW.

Para un tiempo t=0 segundos (láser apagado) no existen partículas dentro o alrededor del spot, las micropartículas están en reposo debido a que el láser se encuentra apagado y no existe  $\nabla T$ , pero cuando el láser se enciende se genera un calentamiento en el agua y un  $\nabla T$ , como consecuencia todas las micropartículas emigran a zonas menos calientes. Por otro lado las corrientes convectivas arrastran a las partículas hacia el spot lográndose así atrapamiento debido a una lucha de fuerzas entre convección y termoforesis.

El atrapamiento es muy rápido como se ve en las imágenes, para un tiempo de apenas 3 segundos existen ya varias micropartículas atrapadas que se concentran alrededor del spot.

Para la determinación de la velocidad termoforética se colocaron varias partículas en el centro de la imagen (figura 4), posteriormente se encendió el láser y se observó que la fuerza termoforética mueve a las partículas fuera de la región más caliente (spot), aunque también están presentes las corrientes convectivas para logrando el confinamiento, domina la fuerza termoforetica.



Figura 4. Expulsión de micropartículas debido a termofóresis para una potencia de 11 mW.

En la figura 4 también se ha remarcado con un círculo rojo la posición del spot, vemos que en (a) las partículas se encuentran por toda el área y aquí el láser está apagado, en (b) y (c) ya se han desplazado a una zona más fría debido al fenómeno de termoforesis.



Figura 5. Velocidad termoforética para diferentes potencias.

Se muestra en la figura 5 que la velocidad de desplazamiento de las partículas depende de la potencia de láser. Se hicieron experimentos con potencias desde 5 hasta 12 mW. Es evidente que la velocidad a la cual estas partículas son desplazadas de la región más caliente depende de la potencia del láser. Si la potencia aumenta la velocidad también aumenta. Las velocidades obtenidas son bastante grandes, alcanzando hasta valores de más de 42 µm/s para una potencia de 12 mW.

La velocidad presentada en la figura 5 es una velocidad media. La velocidad termoforética se determina haciendo un rastreo de la partícula expulsada cuando el láser es encendido (se aleja del spot). Se mide el tiempo y la distancia que recorre la partícula hasta el punto en donde se observa que empieza a retornar hacia el spot debido a las corrientes de convección, en éste rango de retorno la partícula no es monitoreada ya que la velocidad corresponde a la de arrastre y la cual es menor que la velocidad termoforética.

En la figura 6 se muestran las curvas correspondientes a la velocidad termoforética experimental (figura 5) y la obtenida de la simulación numérica.



#### Velocidad Resultante para varias potencias

Figura 6. Velocidad termoforética teórica vs experimental.

En la figura 6 los valores de la velocidad termoforética y experimental no concuerdan, pues la expresión de la velocidad termoforética es para gases, en cuanto a líquidos, existe dificultad para obtener expresiones analíticas para la difusión térmica, lo que implica que no hay un modelo unificador. Sin embargo, a pesar de la física el comportamiento es muy similar ambos comportamientos muestran que la velocidad es directamente proporcional a la potencia. La dependencia de la velocidad en función de la potencia es una función lineal, la cual está en concordancia con otros resultados como aquel obtenido por Ohta *et al.* [14].

Las velocidades promedio obtenidas en nuestro experimento permiten ver el atrapamiento en tiempo real, el cual es una ventaja para efectos de manipular micropartículas. Aunque no presentamos valores para la fuerza termoforética experimental, con los datos obtenidos en COMSOL es posible obtener el gradiente de temperatura ( $\nabla T$ ) y a través de la ecuación 5, es posible tener una estimación de la fuerza termoforética teórica. En la gráfica 7 presentamos los resultados.



Figura 7. Estimación de la fuerza termoforética a diferentes potencias.

Para éste caso el coeficiente de difusión que hemos usado en los cálculos es  $D_T = 22 \ \mu m^2 / sK$  [15]. De acuerdo a la gráfica la fuerza termoforética alcanza valores de hasta 20 pN cuando se usa la potencia máxima antes de la formación de la burbuja de vapor. Con la estimación de la fuerza termoforetica, ahora podemos afirmar que partículas contaminantes de silicio en lubricantes son necesarias fuerzas de pN para atraparlas y poder estudiarlas.

### CONCLUSIONES

La técnica usada para el atrapamiento es termoforesis y corrientes convectivas activadad ópticamente por la absorción laser de un substrato absorbente. La velocidad a la cual las partículas pueden ser transportadas es dependiente de la intensidad de la fuente de láser, debido a que el incremento en la temperatura (y consecuentemente las corrientes de convección) es directamente proporcional a la intensidad del láser. Esta velocidad se encuentra en el orden de µm/s y la fuerza que sienten las partículas al ser arrastradas es del orden de pN.

Los resultados muestran que las velocidades alcanzadas por las partículas son de hasta 42  $\mu$ m/s. Con éstos datos y con el gradiente de temperatura obtenido por simulación numérica, se estima que para atrapar contaminantes de silicio de alrededor de 2  $\mu$ m es necesaria una fuerza de aproximadamente 20 pN.

El presente trabajo abre la posibilidad de poder atrapar y estudiar partículas contaminantes de diversos tamaños, formas y composición química.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. K. V, Sepúlveda, I. R. Vargas, y R. Ramos García, "Pinzas ópticas: Las delicadas manos de la luz," Ciencia, 58, 18 (2007).
- 2. A. Ashkin, "Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers," Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 94(10), 4853–4860 (1997).
- 3. R. Pethig, "Review Article Dielectrophoresis: Status of the theory, technology, and applications," Biomicrofluidics 4(2), 022811 (2010).
- A. T. Ohta, A. Jamshidi, J. K. Valley, H. Y. Hsu, and M. C. Wu, "Optically actuated thermocapillary movement of gas bubbles on an absorbing substrate," Appl. Phys. Lett. 91(7), 074103 (2007).
- 5. R. Piazza and A. Parola, "Thermophoresis in colloidal suspensions," J. Phys. Condens. Matter 20(15), 153102 (2008).
- Montoro Moreno, L. (2005). Contribución al desarrollo y mejora de técnicas para la detección y análisis de partículas metálicas y contaminantes en aceites lubricantes usados [Tesis doctoral no publicada]. Universitat Politècnica de València. doi:10.4995/Thesis/10251/1875.
- 7. J. Tyndall, "On dust and disease," Proc. R. Inst., 6(1) (1870).
- 8. R. G. Mortimer, and H. Eyring, "Elementary transition state theory of the Soret and Dufour effects," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 77(4), 1728-1731 (1980).
- 9. S. Duhr and D. Braun, "Why molecules move along a temperature gradient," PNAS 103(52), 19678–19682 (2006).
- 10. A. Fick, "On liquid diffusion," Poggendorffs Annalen, 94, 33-38 (1855).
- 11. S. R. de Groot, "Thermodynamics of irreversible processes,". J. Phys. Chem., 55 (9), 1577– 1578 (1951).
- 12. K. Platten, "The Soret effect: a review of recent experimental results," J. Appl. Mech., 73, 5-15 (2006).
- 13. Y. Sone, "Molecular gas dynamics, theory, techniques and applications," Ed. Birkhauser, Boston (2007).
- 14. P. Y. Chiou, A. T. Ohta, and M. C. Wu, "Massively parallel manipulation of single cells and microparticles using optical images," Nature 436(7049), 7049 (2005).
- 15. R. T. Schermer, C. C. Olson, J. P. Coleman, and F Bucholtz, "Laser-induced thermophoresis of individual particles in a viscous liquid", Opt. Express, 19(11), 10571 (2011).

# ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA VARIABLE ALGEBRÁICA VISTA COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA, NÚMERO GENERAL Y RELACIÓN FUNCIONAL

Marco Antonio Gálvez Torres<sup>1</sup>, Olga Leticia Fuchs Gómez<sup>1</sup>, osé Antonio Juárez<sup>2</sup>, Eugenia Érica Vera Cervantes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, <sup>2</sup>Facultad de Ciencias de la Computación BUAP

#### RESUMEN

Introducción: El tema de interés en este trabajo es el desarrollo de estrategias para pasar del pensamiento aritmético al algebraico porque es uno de los "tránsitos más difíciles dentro del desarrollo gradual de los contenidos matemáticos". Realizado de manera adecuada, es uno de los factores que permiten comprobar el paso del estadio de operaciones concretas al del pensamiento formal. Método: se diseña una estrategia didáctica basada modelo 3UV para comprender el concepto de variable y sus distintos usos, a partir de modelos concretos para acceder al pensamiento algebraico a partir del aritmético. Se aplica en grupos de primer grado de secundaria general, uno de control y los otros experimentales. Al término de la intervención didáctica se comparan resultados encontrándose un mejor resultado con el uso de este modelo. Como conclusión parcial se observa que los estudiantes que no han utilizado este modelo entienden las letras de las fórmulas geométricas como etiquetas y no reconocen que las letras puedan representar valores numéricos.

# **INTRODUCCIÓN**

La palabra ÁLGEBRA tuvo su origen en el siglo XVI y se deriva del árabe "Al Jabr". Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi lo introdujo en su libro "Reglas de Integración y Reducción" que trata sobre la resolución de ecuaciones. Actualmente el álgebra abarca diferentes áreas dentro de las matemáticas como pueden ser el álgebra elemental, álgebra lineal o el álgebra superior.

Se puede definir como "la rama de las matemáticas que trata con reglas generales de relaciones que involucran letras y otros símbolos para representar diferentes conjuntos de números, valores, vecto-res, etc. en la descripción de dichas relaciones". (Dictionary.reference.com (2012). Existen muchas definiciones pero en general el álgebra tiene que ver con:

- La expresión de generalizaciones, es decir, usar letras para representar números u otros objetos matemáticos con el fin de mostrar relaciones o patrones., con teoremas y cálculos, etc.
- El establecimiento de relaciones que pueden ser entre números o cantidades por medio de palabras, gráficos tablas o fórmulas.
- La solución de problemas que involucran incógnitas relacionadas con operaciones en ecuaciones o inecuaciones.
- La exploración de propiedades de operaciones definidas por medio de reglas formales.
- La demostración de teoremas que pueden ser geométricos o deductivos.
- Efectuar cálculos.

El aprendizaje de las matemáticas ha sido un problema relevante para los estudiantes mexicanos. Se tienen muchas evidencias de esto, tales como los resultados de las pruebas diseñadas por la SEP: la prueba Enlace y la que actualmente conocemos como Planea. Las siglas de dicha evaluación significan Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes. Y aunque Planea 2017 no es perfectamente comparable con las ediciones previas, "el desastre en matemáticas queda bien ejemplificado en los resultados válidos para el nivel nacional. Según el primer reporte, del total de estudiantes evaluados únicamente el 2.5 por ciento alcanza el nivel de competencias que deberían de lograr si se alcanzaran los propósitos curriculares de secundaria y bachillerato", Campus Milenio (2017). Según la Dra. Lidia Hernández (TEMBI 2017), los estudiantes no pueden utilizar las ecuaciones para plantear un problema, ni tampoco pueden interpretar una ecuación. Solamente el 2.5 por ciento alcanza el nivel, un pensamiento que logre transformar un problema de la vida real a una ecuación, un modelo matemático y aplicar algoritmos.

Esto es evidenciado en el trabajo diario de los docentes de matemáticas en el nivel de secundaria. Se puede observar que los alumnos tienen serias complicaciones para resolver problemas utilizando

el planteamiento y resolución de ecuaciones, o bien, resuelven algunos de ellos por medio del llamado "tanteo" o con procedimientos aritméticos, dejando completamente de lado la aplicación de procesos algebraicos, mismos que les permitirían resolverlos de una manera más eficiente.

Por otra parte, la manera en que por lo general, se han estado enseñando los temas algebraicos, ha propiciado que se les dé una importancia exagerada a los procesos netamente algorítmicos. Por tanto, la enseñanza resulta ser extremadamente mecanizada y sin ninguna orientación a aplicar los contenidos a su contexto. Basta que los alumnos puedan resolver una ecuación usando ciertos pasos preestablecidos y respetando su orden, para pensar que están desarrollando el pensamiento algebraico y comprendiendo conceptos matemáticos, mismos que son clave para comprender otros que se les presentarán poco después. Esto propicia que el tránsito entre la aritmética al álgebra se origine en condiciones totalmente desfavorables, o, en el peor de los casos, que no ocurra. De igual manera lo señala Velázquez (2003), al exponer dos factores que coinciden con lo anteriormente descrito, la especial complejidad y concisión del modelo comunicativo y del lenguaje matemático (debido a su elevado grado de conceptualización); y una experiencia aritmética previa alejada de contextos familiares o de modelización matemática dificultan a la vez un aprendizaje comprensivo de los números y el desarrollo del entusiasmo necesario para aprender, aplicar y apasionarse por el trabajo matemático.

Con tal panorama no resulta una gran sorpresa que los alumnos que continúan con sus estudios perciban a la matemática como una ciencia demasiado complicada y tengan problemas serios para comprender conceptos que se estudian en el nivel medio superior o superior.

Es por tal motivo que el presente trabajo está orientado en aplicar una estrategia didáctica que se diseñará con base en el modelo 3UV para iniciar la comprensión integral del concepto de variable al identificar y manipular sus distintos usos. De esta manera, se pretende utilizar material o actividades con las que estén familiarizados los estudiantes, es decir, que sean actividades concretas orientadas a desarrollar lo abstracto, ingrediente indispensable para el pensamiento algebraico.

# TEORÍA

La investigación en didáctica del álgebra comenzó a finales de los años 70, cuando se presenta en el ICME3 un informe titulado "Investigación relacionada con el proceso de aprendizaje de las matemáticas" de Bauersfeld y Skowronek (1976), en el que establecen que "no deberíamos comenzar desde una teoría del aprendizaje matemático..., [más bien deberíamos] empezar [desde] procesos de aprendizaje específicos de un contenido" (Bauersfeld y Skowronek 1976, p. 244), citado en Kieran y Filloy (1989). A partir de esto se dejaron de lado las investigaciones generales y se desencadenaron una serie de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Algunos de los temas principales de investigación han sido: "el marco de referencia aritmético; variables, expresiones y ecuaciones; resolución de ecuaciones; funciones y sus gráficas; enfoques que usan computadoras" (Kieran y Filloy, 1989: 229).

A grandes rasgos según Martín Socas las investigaciones en pensamiento algebraico en los últimos treinta años se han orientado a:

- Al análisis de las características esenciales del pensamiento algebraico, niveles de organización y problemas que ocasionan en la enseñanza y en el aprendizaje.
- La descripción y estudio de respuestas y procesos de solución de estudiantes y profesores en tareas específicas en pensamiento algebraico. (Socas, 2011: 6).

Continuando con la clasificación que hace Martín Socas los contenidos tratados en las investigaciones se pueden agrupar en tres grandes núcleos:

- 1. La transición del pensamiento numérico al algebraico, analizando los aspectos del primero que son la base para los conocimientos de la aritmética generalizada.
- 2. Los procesos específicos del pensamiento algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelación.
- 3. La búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria. (Socas, 2011:6).

#### El Concepto de Variable.

El concepto de variable es una de las ideas más fundamentales en matemáticas desde la escuela primaria hasta la universidad (Davis 1964, Hirsch y Lappan 1989), citado en Philipp (1992). Por consiguiente el concepto de variable es de especial interés, "porque es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del álgebra" (Juárez, 2011:84). Sin embargo, la investigación indica que los estudiantes experimentan dificultades con el concepto de variable, una dificultad que podría explicarse parcialmente por el hecho de que dentro de las matemáticas las variables pueden usarse de muchas maneras diferentes (Rosnick 1981, Schoenfeld y Arcavi, Wagner 1983) citado en Philipp (1992).

Como el aprendizaje del álgebra parte de las nociones que el estudiante tiene de la aritmética, se deberá tomar en cuenta el marco de referencia aritmético que señala Kieran y Filloy (1989) detallando aspectos como: a) forma de ver el signo igual, b) dificultades con la concatenación y con algunas de las convenciones de notación de álgebra, y c) su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas. También da cuenta, en gran medida, de su interpretación de las variables.

En Kieran y Filloy (1989), establecen que:

Para los estudiantes el signo igual es "señal de hacer algo, antes que un símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación" (Kieran, 1980). En las dificultades con la concatenación, "extender la generalización sobre la base de lo que era correcto en aritmética puede conducir a los alumnos que empiezan con el álgebra a malinterpretar el sentido de los términos algebraicos y con las dificultades sobre las convenciones Kieran (1979) menciona que incluso cuando se les introduce el uso de paréntesis los estudiantes no los consideran necesarios para denotar el orden en que se efectúan las operaciones. "De la misma manera, la jerarquía convencional de las operaciones parece ser un conjunto innecesario de reglas para los estudiantes que comienzan el álgebra". Y en su falta de habilidad para expresar formalmente métodos y procedimientos, "los estudiantes no logran darse cuenta de que el procedimiento es a menudo la respuesta". En lo concerniente a la interpretación de las variables, señalan que el primer acercamiento que tienen los niños en la primaria con letras como ecuaciones es en las fórmulas para el cálculo de áreas y como relaciones entre unidades de medida.

Una de las diferencias más obvias entre la aritmética y el álgebra, por supuesto, está en el uso posterior de letras para representar valores, ya que en álgebra la atención se centra en la derivación de procedimientos y relaciones y la expresión de estos en general, forma simplificada (Booth, 1988). Los estudiantes tienden a ver el uso de letras en ecuaciones como etiquetas que se refieren a entidades concretas y estos conceptos erróneos que tienen los estudiantes sobre el uso de letras en ecuaciones contribuyen significativamente a esta dificultad, por lo tanto, los estudiantes deben desarrollar una mejor comprensión de los conceptos básicos de variable y ecuación. (Rosnick, 1981). El concepto de variable es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria. Comprender el concepto proporciona la base para la transición de la aritmética a un álgebra y es necesaria para el uso significativo de todas las matemáticas avanzadas (Schoen-feld & Arcavi, 1988).

La noción de una variable que representa una cantidad variable fue introducida por primera vez por los inventores del cálculo infinitesimal, Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) y Sir Isaac Newton (1643-1727), Philip (1992). Una distinción típica es la definición dada por Osborne (1909), citado en Philip (1992): "Una cantidad que puede asumir un número ilimitado de valores se denomina variable". En respuesta a la búsqueda de conceptos unificadores en el currículo de matemáticas, el concepto de variable se enseñó en su forma más general desde el principio, dando como resultado que todos los símbolos literales se denominan variables (Kieran, 1989). La definición de una variable en los libros de texto escritos durante los últimos treinta años se encuentra en Dolciani et al. (1967), en el que la variable se define como "un símbolo que puede representar cualquiera de los miembros de un conjunto específico, llamado el conjunto o dominio de reemplazo de la variable" (p.26), citado en Philipp (1992).

De acuerdo con Usiskin (1988), la variable se puede concebir de las siguientes cuatro maneras:

- como una generalización de la aritmética
- > como un desconocido en los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas

- > como una relación entre cantidades
- ➢ como miembro de un sistema abstracto

Küchemann (1981) clasificó las interpretaciones de las letras algebraicas en dos divisiones principales:

> La letra se ignora, se le da un valor arbitrario, o se usa como el nombre de un objeto.

> La letra se usa como un número específico desconocido o número generalizado.

Del mismo modo concluyó que la mayoría de los niños de 13 a 15 años no pueden lidiar con letras algebraicas como números desconocidos o números generalizados. Si este es el caso, entonces los enfoques actuales para el álgebra como un lenguaje para expresar las relaciones entre dos variables, ya sea a través de la computadora o con lápiz o papel, no son apropiados.

En MacGregor & Stacey (1997), demostraron que los estudiantes frecuentemente basan sus interpretaciones de letras y expresiones algebraicas en intuición y adivinanza, en analogías con otros sistemas de símbolos que conocen, o en una base falsa creada por materiales de enseñanza engañosos. A menudo desconocen la consistencia general de la notación matemática y el poder que esto proporciona. Sus interpretaciones erróneas llevan a dificultades para dar sentido al álgebra y pueden persistir durante varios años si no se reconocen y corrigen. Sugieren que las interpretaciones erróneas de los estudiantes más jóvenes no son indicadores de bajos niveles de desarrollo cognitivo; son intentos cuidadosos de dar sentido a una nueva notación o son causados por la transferencia de significado de otros contextos. Presentando evidencia de que las dificultades para aprender a usar la notación algebraica tienen varios orígenes, que incluyen:

- suposiciones intuitivas y razonables, razonamiento pragmático sobre un sistema de notación desconocido
- analogías con el sistema de símbolos utilizado en la vida cotidiana, en otras partes de las matemáticas o en otras materias escolares
- interferencia del nuevo aprendizaje en matemáticas

De acuerdo a lo expuesto hay diversas maneras de clasificar a la variable y de igual modo muchas dificultades que se presentan para comprenderla, pero dichas diferencias deben de considerarse para que la enseñanza-aprendizaje del álgebra sea mejor comprendida y aplicada por los estudiantes, como señala Philipp (1992):

No sería productivo redefinir las variables, pero los educadores deben aceptar las diferentes formas en que se utilizan las variables en los contextos matemáticos, de modo que los estudiantes puedan tener la oportunidad de reflexionar sobre estos muchos usos diferentes. El álgebra es sintácticamente fuerte pero semánticamente débil. Quizás una forma de fortalecer el rol semántico de álgebra para los estudiantes sería incluir discusiones sobre las diferentes maneras en que se usan los símbolos literales en las matemáticas, una discusión generalmente omitida de los libros de texto de matemáticas.

Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996), consideran que definir el concepto de variable es complejo, debido a sus múltiples significados de acuerdo al contexto en que se aplique. Por lo cual nos enfocaremos según Ursini, Trigueros, Escareño & Montes (2005) a los 3 usos de la variable (3UV) en álgebra elemental, como incógnita específica, número general y en relación funcional. Sus tres usos están íntimamente relacionados entre sí, pero como se va intentar pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico por primera ocasión, se pondrá más detalle en el uso de la variable como incógnita, tratando de no encajonar a los estudiantes exclusivamente en este uso, sino propiciando la oportunidad de que también se analicen los otros dos usos, como señala Philipp (1992), los estudiantes no solo deben aprender a trabajar con muchos tipos de símbolos literales en un problema, ..., sino que también deben aprender que un símbolo literal dado puede asumir más que un solo rol dentro de un problema dado.

En Ursini et al. (2005) se establece que para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran la variable como incógnita es necesario:

11. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

12. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

13. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. 14. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Como número general:

G1. Reconocer patrones y percibir regla y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Como relación funcional:

F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables. Dado el intervalo de variación de la otra.

F6. Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema. Con lo expuesto es muy importante considerar lo que señala Rosnick (1981):

Estemos al tanto de las dificultades que nuestros estudiantes están teniendo para entender las etiquetas, variables, constantes, parámetros y todo el resto de los usos de las letras. Es igualmente importante que tomemos conciencia de todos los peligros conceptuales a los que nuestros estudiantes pueden sucumbir. Después de todo, si no podemos ayudar a nuestros alumnos a comprender las x y las y, nunca conocerán la alegría de comprender las cosas de sí y las de antes. Y lo que es más importante, abandonarán o serán ineptos en matemáticas, un tema que se ha convertido en un requisito previo para más y más carreras en el mundo de hoy en día.

Y un modo de orientar a nuestros estudiantes hacia el interés por la Matemática en el inicio de su educación secundaria, es introduciéndolos de la mejor manera en temas algebraicos, considerando sus conocimientos previos para llegar al nuevo por medio de un aprendizaje significativo, y esto se puede lograr al comenzar el estudio del álgebra elemental con el concepto de variable, comprendiéndola de manera integral mediante el diseño de estrategias de enseñanza basadas en el modelo 3UV, considerando ideas y conocimientos previos de los estudiantes, lo que permitirá llegar al pensamiento algebraico a partir del aritmético.

#### METODOLOGÍA

La población en la cual se realizó el trabajo de investigación consta de tres grupos de primer grado de una secundaria general ubicada en un municipio perteneciente a la región de Ciudad Serdán del estado de Puebla. La muestra fue de un total de 64 alumnos entre 12 y 14 años de edad, repartidos de la siguiente manera, en el grupo "A" 20 y en los grupos "B" y "C" 22 cada uno. Se trabajó con dos grupos experimentales, siendo estos el "A" y "C" y uno de control el "B", para comparar resultados al término de la intervención. En los grupos experimentales se aplicó la secuencia didáctica diseñada a partir del modelo 3UV, que tomó como tema para desarrollar las actividades, las fórmulas geométricas para calcular el perímetro de figuras como el cuadrado, rectángulo y triángulo equilátero. El grupo control se dejó con lo que ya ha estudiado de álgebra elemental de manera tradicional, es decir, los temas se analizan como una receta, como una secuencia de pasos ya determinados.

Para finalizar, a los tres grupos se les aplicó un test evaluativo referido a los distintos usos que tiene la variable, dicho test se diseñó considerando algunos de los aspectos de la variable que el modelo 3UV considera, esto para comparar el aprendizaje obtenido de cada grupo con respecto a las capacidades de los distintos usos de la variable y determinar el grado de eficiencia de la intervención didáctica en los grupos experimentales.

### RESULTADOS



1. ¿Qué es lo que harías para calcular el perímetro de estos triángulos equiláteros?



En los grupos experimentales, "A" y "C" se obtuvo un mejor resultado en reconocer patrones y deducir reglas y métodos generales para resolver el problema (G1,G3). En lo concerniente a llegar a simbolizar sus

reglas o métodos generales (G5) únicamente un alumno de cada grupo pudo llegar a una expresión algebraica como L + L + L o bien 3xL para calcular el perímetro de los triángulos equiláteros presentados. El estudiante del grupo de control (1°"B") escribió 3xL explicando que los lados s deben sumar y después multiplicar por 3, lo cual indica que se le dificulta interpretar la fórmula geométrica propuesta, aunque esta sea correcta. Para los grupos experimentales explicaron que se suman los lados o se mide uno y se multiplica por 3, coincidiendo con la fórmula geométrica que propusieron.



5. ¿Cuántos valores puede tomar la letra D en la fórmula P = 4D?

Esta pregunta tiene la intención que los alumnos identifiquen a la variable D como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor (G2), mediante una expresión analítica. En los grupos experimentales poco más de la mitad de los alumnos identificó esta característica de la variable D, con expresiones como "muchos valores" "cualquier valor" "infinidad de valores". Mientras que en el grupo de control la gran mayoría de los alumnos se refirieron a "no recono-

cer valores en las letras" y "determinar el número de valores" y, un sólo estudiante identifica que la variable puede tener cualquier valor.



8. La siguiente imagen representa cualquier pentágono regular ¿cuáles son los valores posibles de la letra L?

Esta pregunta al igual que la anterior refiere a identificar que la variable puede asumir cual-

quier valor (G2) pero de manera gráfica. En los grupos experimentales se dio el caso que en uno de ellos aumenta un poco el número de alumnos que se per-

catan de esto, pero en el otro disminuye considerablemente, expresando que la variable L tiene determinados valores o que significa lados. En el grupo de control ningún alumno identifica que la variable

puede tener cualquier valor, sino que la interpretan como lado y no reconocen valores en las letras.



3. Escribe una fórmula que represente que el perímetro de un rectángulo es 29 con un largo de 7 y un ancho que no se conoce.

Para esta pregunta la variable se presenta como incógnita específica, pidiendo a los alumnos que simbolicen la cantidad desconocida y la utilicen para plantear una ecuación (I5). En los grupos experimentales menos de la mitad de los jóvenes pudieron establecer la ecuación, en un caso faltó escribir el signo positivo y en otros sustituir el valor del perímetro, lo cual evidencia dificultad para transferir datos conocidos y desconocidos en forma de ecuación,

pero en el grupo de control no se estableció la ecuación, los jóvenes confundieron el perímetro con el largo, indicaron operaciones con los valores dados, expresaron calcular áreas de triángulos, lo más cercano fue la expresión P = A + 7.



6. El patio de cierta casa tiene forma rectangular con un área de  $10m^2$  y con un largo de 5m ¿qué símbolo utilizarías para representar la medida desconocida y cuántos valores puede tener?

En esta pregunta a diferencia de las demás que hacen referencia al perímetro esta lo hace al área, pero no pide calcular nada, sino reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido (I1) e interpretar la variable simbólica como la presencia de valores específicos (I2). En el grupo de control no identifican el dato

desconocido e intentan operar con los valores dados, confundiendo el área con el largo. En un grupo experimental 14 alumnos identificaron la presencia de algo desconocido y la simbolizaron con una variable, pero solo dos de ellos reconocieron que dicha variable solo tiene un valor específico, en el otro grupo 9 de los 14 en cada categoría se trata de los mismos alumnos.



7. ¿Cuántos valores puede tomar la letra A en la fórmula 28 = 4A?

Se expresa una ecuación y se espera que los estudiantes, interpreten la variable simbólica que aparece en la ecuación como la presencia de valores específicos. Lo cual en los dos grupos experimentales prácticamente la mitad de los estudiantes puede interpretar que la variable A únicamente puede tener un solo valor es específico, con expresiones como "un solo valor" "uno" "de todos los posibles solo uno puede tener". Y en el grupo de control la variable la

denotan como ancho, área, lado, realizan operaciones con los valores dados, no reconoce valores en las letras.



2. En la fórmula P = 4L ¿Cuál es la relación entre los valores posibles de las letras P y L?

Se pretende que los estudiantes reconozcan la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (F1), en este caso la representación utilizada fue una expresión analítica. En este uso de la variable los alumnos de los grupos experimentales menos de la mitad o una cuarta parte de ellos pudieron expresar la relación entre las variables, con expresiones "una es la que manda y la otra obedece" "una es la independiente y la otra dependiente" o especificando "L manda y P obedece" "P dependiente de L". Y en el grupo control identificaron a las variables como etiquetas, es decir, P para perímetro y L para lado.



4. Una máquina puede cortar losetas de forma cuadrada. Si se programa para que las losetas tengan un perímetro entre 80 y 200cm entonces, ¿entre qué medidas se encuentran los lados de las posibles losetas que se pueden formar?

Con esta pregunta se pretende que los alumnos, determinen los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente (F3) y que determinen los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra (F5). Con la misma respuesta se identifica

cada aspecto del uso de la variable, es decir, si la respuesta del estudiante es, sus valores son 20cm y 50cm se toma en cuenta solo para F3, pero si su respuesta es, sus valores están entre 20 y 50 cm se toma en cuenta para ambos aspectos F3 y F5. En esta pregunta en el grupo control en relación con un grupo experimental un poco más de alumnos cumplen con el aspecto F3 y uno cumple con ambos, una explicación de esto es que la pregunta se presenta como un problema verbal y con esto no se presentan variables o se pide escribir una fórmula geométrica, sino solo trabajar con los datos ofrecidos, y el grupo experimental se confundió representando el perímetro y lados de las posibles figuras en una sola. Mientras que en el otro grupo experimental poco más de la mitad cumple con el aspecto F3 y solo dos con ambos.

### CONCLUSIONES

A pesar de que los grupos de primer grado con quienes se trabajó han estudiado contenidos algebraicos que involucran a la variable como número general (sucesiones de números y figuras, significado de fórmulas geométricas) y como incógnita específica (ecuaciones de primer grado), en el primer y tercer bimestre respectivamente, no dieron muestra de ello al aplicarles la secuencia didáctica, sino que conforme realizaban las actividades manifestaban que era la primera vez que estudiaban este contenido matemático.

Al contrastar los resultados de los grupos, de control y los experimentales, es notoria la gran diferencia entre ellos. Mientras que los estudiantes de los grupos experimentales se inician en la comprensión integral del concepto de variable, es decir, como establece Ursini et. al. (2005), entendiendo y manejando adecuadamente sus distintas facetas y dando la posibilidad de pasar de una a otra de manera dinámica y flexible, los jóvenes del grupo control manifiestan ciertas dificultades, por ejemplo, interpretan a la variable como una etiqueta, no reconocen que las letras representen valores numéricos, confunden magnitudes y fórmulas geométricas.

De éstos se concluye que el Modelo 3UV mejora considerablemente los resultados de la enseñanza tradicional del álgebra que hasta el momento habían tenido los estudiantes, llevándolos a comprender el concepto de variable de una mejor manera e identificar sus diferentes usos, a partir de aplicarlo a fórmulas geométricas para calcular el perímetro de figuras conocidas para los alumnos.

En el uso de la variable como relación funcional se obtuvieron menores puntajes con respecto al uso como número general y como incógnita específica, por lo tanto se debe dar continuidad a la introducción del álgebra elemental mediante el modelo 3UV aplicado a temas con los cuales los estudiantes estén relacionados, por ejemplo, a fórmulas geométricas para calcular áreas o problemas referentes al contexto de los jóvenes. Con esto se contribuirá a fomentar y mejorar el tránsito del pensamiento aritmético al algebraico y contribuir al aprendizaje significativo por parte de los estudiantes.

### **BIBLIOGRAFÍA**

1. Campus milenio (2017). Recuperado de:<u>http://www.educacionfutura.org/planea-2017-prime-ros-resultados</u>

- Dictionary.reference.com (2012) Algebra. Definition 1.Collins English Dictionary-Complete & Unabridged Digital Edition. <u>http://dictionary.reference.com/browse/linear+algebra. (consultado</u> el 12 febrero 2017)
- 3. Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12, 19,* 20-32.
- 4. Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, *4*, 33-56.
- 5. Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- 6. Küchemann, D. (1981). Algebra. Children's understanding of mathematics, 102-119.
- 7. MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NO-TATION: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.
- 8. Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561.
- 9. Rosnick, P. (1981). Algunos conceptos erróneos sobre el concepto de variable. *The Mathematics Teacher*, *74* (6), 418-450.
- 10. Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher*, *81*(6), 420-427.
- 11. Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.
- 12. TEMBI (2017). Recuperado de: <u>http://www.diariopuntual.com/universita-</u> rios/2017/11/13/66627
- 13. Ursini, S., Trigueros, M., Escareño, F., & Montes, D. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa.* México: Trillas.
- 14. Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12, 8,* 19.
- 15. Velázquez, F. (2003). Una propuesta de transito gradual de la aritmética al álgebra. *X JAEN. Ponencia P74*, 669-688.

# ERITROCAOS: SIMULADOR QUE REPRODUCE CAOS EN LA FORMACIÓN DE ERITROCITOS

Sheng-li Chilián Herrera<sup>1</sup>, Marleni Reyes Monreal<sup>1</sup>, Miguel Pérez Escalera<sup>1</sup>, María Eugenia Pérez Bonilla<sup>2</sup> y Arturo Reyes Lazalde<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Escuela de Artes Plásticas y Audiovisuales, <sup>2</sup>Facultad de Ciencias Biológicas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

#### RESUMEN

Los glóbulos rojos son esenciales para la vida, se encargan de suministrar oxígeno a las células. El número de eritrocitos está determinado por su producción y destrucción. En un trabajo previo se realizó un simulador de control de la cantidad circulante en sangre. En este proyecto se presenta la implementación de una ecuación diferencial de retardo con parámetros que permiten mostrar la generación de caos en la producción eritrocitaria. Esto sugiere alteraciones fisiológicas, llamadas enfermedades dinámicas, donde se presentan cambios en sus características dinámicas.

Se diseñó y desarrolló un simulador del caos en el número de eritrocitos en sangre, basado en el modelo matemático de Mackey-Glass. La solución del modelo se realizó por medio de métodos numéricos y la implementación de un algoritmo computacional para el retardo. El simulador fue desarrollado en Visual Basic 6.0 para ambiente Windows®, desde XP a Windows 10, en color verdadero y orientado a objetos y eventos. La interfaz del simulador muestra por un lado, la producción de eritrocitos en el tiempo, hasta 120 días; y por otro, la gráfica de maduración de eritrocitos (relacionada con el retardo) -vs- la cantidad de eritrocitos sanguíneos (plano de fases). De lado derecho, se encuentra el módulo de ingreso de datos: (1) eritrocitos en sangre, (2) días de liberación del eritrocito (maduración), (3) velocidad de producción, (4) velocidad de eliminación y los parámetros de retroalimentación (5) m y  $\Theta$ , (6) producción inicial en médula (retardo). La combinación de valores de las variables permite al usuario generar oscilaciones en la cantidad de eritrocitos en sangre. Para ciertos valores la ecuación diferencial de retardo produce caos. Este simulador permite a los alumnos de biofísica, medicina, biología y ciencias afines, comprender cómo una alteración fisiológica conduce a una enfermedad dinámica.

### INTRODUCCIÓN

Existen varias enfermedades hematológicas que se caracterizan por oscilaciones, donde la cantidad de células sanguíneas está variando. Por ejemplo: leucemia mieloide crónica, neutropenia, policitemia vera, anemia aplástica [1]. Debido al comportamiento oscilatorio de estas enfermedades se les clasifica dentro de las enfermedades dinámicas [2, 3].

Los eritrocitos son células muy importantes para sostener la vida, debido a que transportan el oxígeno necesario para el metabolismo celular. Su producción se lleva a cabo en el hígado (en edades tempranas) y en la médula ósea (posteriormente). En el riñón se encuentran los sensores que detectan una disminución del oxígeno. En este caso, en el mismo riñón, se produce la hormona eritropoyetina (Epo) que estimula la maduración de las unidades formadoras de brote eritroide y de colonias eritroides. Cuando las células madre entran en contacto con esta hormona, se decide su linaje y entran a la población de precursores. Se cree que la eritropoyetina también puede tener el efecto de acelerar el proceso de maduración de células precursoras [4].

La hormona eritropoyetina tiene una vida corta (6 h), produce una respuesta rápida a cambios que se originan en la disminución grave de eritrocitos; como una hemorragia profusa, o en cambios de presión parcial de oxígeno en el medio ambiente, como sucede al subir a grandes alturas. En este sentido, en un proceso de aclimatación a las alturas se presentan modificaciones anatómicas y fisio-lógicas: incremento en la capacidad del tórax, incremento en la presión arterial pulmonar e incremento en la producción de eritropoyetina, y en consecuencia en la producción de eritrocitos.

Esquemáticamente, se pueden distinguir cuatro etapas: (1) Una inicial, donde el progenitor eritroide megacariocito (PEM) pasa a constituir unidades formadoras de brote eritroide (BFU-E), (2) la segunda etapa, corresponde al paso de BFU-E a unidades formadoras de colonias eritroides (CFU-E), se estima que esta etapa tiene una duración de 8 horas, (3) una tercera etapa en la que participan varias células precursoras, y va de CFU-E a proeritroblastos (PE), eritroblastos basófilos (EB), eritroblastos policromatófilos (EPC), eritroblastos ortocromáticos (EO) y reticulocitos (RET), para después formar los eritrocitos; se estima una duración de 6 días y (4) maduración de los eritrocitos (Figura 1).



Fig. 1. Modelo del proceso eritropoyético. En la médula ósea se lleva a cabo la generación y el desarrollo de los eritrocitos a partir de células precursoras que dependen de la eritropoyetina. Después se presenta un proceso de maduración hasta llegar a la formación final de eritrocitos maduros. El tiempo que tarda se ha estimado de 6 días. Una vez maduros los eritrocitos, pasan al torrente sanguíneo. En el humano, los eritrocitos tienen una vida media de 120 días.

### Modelo matemático de eritropoyesis

Existen varios modelos matemáticos que tratan el estudio del proceso hematopoyético. La dinámica de las células hematopoyéticas fue introducida por Mackey [4], Lajtha [5], Burns and Tannock [6]. Sin embargo, los mecanismos del inicio de las oscilaciones es desconocido [7]. Haurie y sus colaboradores proponen como mecanismo posible el papel de la retroalimentación negativa sobre la proliferación y diferenciación de las células sanguíneas dentro de la médula ósea, junto al retraso del ciclo celular y la maduración [7].

Este trabajo se apoyó en el modelo matemático propuesto por Mackey [8]. En este modelo, las células iniciales en el tronco dependen de la eritropoyetina y matemáticamente se representa como una función de la eritropoyetina:

$$S_o(E)$$
 (1)

Donde: So = células iniciales E = eritropoyetina Las condiciones iniciales son representadas por la siguiente función:

$$p(t,\mu) \tag{2}$$

Donde: p = células precursoras t = tiempo μ = maduración Las condiciones de frontera son:

$$S_o = V(E) \cdot p(\mathbf{t}, \mathbf{0}) \tag{3}$$

Donde:

V(E) = velocidad de maduración que depende de la hormona eritropoyetina Aquí:  $\mu$  = 0

La tasa de natalidad neta está en función de la maduración y de la eritropoyetina  $\beta(\mu, E)$ En la región de desarrollo la cantidad de células precursoras dependen del tiempo y de la maduración [9]:

$$\frac{dp}{dt} + V(E)\frac{dp}{d\mu} = \beta(\mu, E)p - V(E)H(\mu)p \qquad (4)$$

Donde:

 $H(\mu)$  = tasa de desaparición

En la región de maduración, la cantidad de células maduras se determina con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dm}{dt} + W\frac{dm}{dv} = -\gamma(v)m \tag{5}$$

Donde:

### MATERIAL Y MÉTODO

Se diseñó y desarrolló un simulador para el estudio de la oscilación y producción de caos en la concentración de eritrocitos en sangre. El simulador fue diseñado y desarrollado en Visual Basic® versión 6.0, para ambiente Windows® desde XP a Windows® 10. Se utilizó el modelo matemático de Mackey (1996), que fue resuelto numéricamente. En términos de una ecuación diferencial con retardo, el número de eritrocitos en sangre es calculado según la siguiente ecuación [8]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta \left( E(t-\tau) \right) - \gamma E(t) \tag{6}$$

Donde:

E(t-τ) implica todo el proceso de desarrollo de células progenitoras y de maduración del eritrocito.

### RESULTADOS

Para iniciar el programa, simplemente se selecciona el archivo "ERITROCAOS" y se abre la pantalla de interfaz (Figura 2). En ésta se distinguen dos secciones: la de graficado a la izquierda y la sección de ingreso de datos a la derecha. Se presentan dos gráficas, una superior para visualizar el número de eritrocitos contra el tiempo, y una inferior que presenta el plano de fases (cantidad de eritrocitos en función de tiempo de maduración (retardo) contra la concentración de eritrocitos). Los datos que se ingresan son: la concentración de eritrocitos en sangre, los días para la liberación de eritrocitos a la sangre, la velocidad de producción de eritrocitos, la producción inicial en médula, la velocidad de eliminación, el coeficiente de Hill, y el parámetro theta. Al lado de cada variable se proponen valores de referencia que puede modificar el usuario.



Fig. 2. Interfaz de usuario del simulador ERITROCAOS. Se muestra una simulación utilizando los valores mayores propuestos. El coeficiente de Hill fue colocado en 3, la producción inicial en 5, y la velocidad de eliminación fue la menor (0.5). Esta velocidad de eliminación permite al sistema que se estabilice rápidamente.

En la figura 3 se muestra un proceso oscilatorio. Este se logró con un coeficiente de Hill de 4, el tiempo de liberación de los eritrocitos a la circulación sanguínea fue de 6 días (tiempo de retardo), la velocidad de producción fue de 20, la velocidad de eliminación se aumentó a 3 y la producción inicial se incrementó a 5.



Fig. 3. Simulación que presenta el caso de aumentar la producción y la eliminación de manera simultánea. Se observa una oscilación de la concentración de los eritrocitos con respecto del tiempo. En el plano de fase inferior se observa un ciclo límite.

En la figura 4 se muestra una simulación en la que se logra producir caos. En este caso se destaca un fuerte incremento en los días de liberación de los eritrocitos al la sangre. El valor fue llevado a 20, y un incremento en la velocidad de producción y una pequeña disminución en la eliminación, valor puesto a 2.



Fig. 4. Simulación de eritropoyesis caótica. Se logra con un retardo mayor en el tiempo y una velocidad de producción incrementada.

En la figura 5 se muestra cómo el proceso de eritropoyesis puede caer en caos con un tiempo de retardo de 10 días; sin embargo, se tiene que mantener alta la velocidad de producción (20 células/Kg/día).



Fig. 5. Simulación con un retardo de 10 días y una velocidad de producción de 20. Se observa cómo el sistema cae en caos.

# CONCLUSIONES

El simulador "ERITROCAOS" permite a los usuarios modificar cada una de las variables y observar los cambios que se producen en la concentración sanguínea de eritrocitos. Con el programa se puede estudiar la dinámica de la eritropoyesis y observar puntos fijos, bucles, ciclos límite y caos. De manera que el usuario puede descubrir cuáles son las variables asociadas con cada uno de estos comportamientos dinámicos. El programa es ejecutable en ambiente Windows® y no se requiere de otro programa para su uso. El usuario no necesita contar con conocimientos especiales de computación.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. I. Drobnjak, A. C. Fowler, M. C. Mackey, "Oscillations in a maduration model of blood cell production", SIAM J. Appl. Math., Vol. 66, 6, 2006, pp. 2027-2048.
- 2. H.A. Reimann, "Periodic Diseases", F. A. Davis, Philadelphia, 1963.
- 3. M. C. Mackey, L. Glass, "Oscillation and chaos in physiological control systems", Science, Vol. 197, 1977, pp. 287-289.
- 4. M. C. Mackey, "Unified hypothesis of the origin of aplastic anaemia and periodic hematopoiesis", Blood, Vol. 51, 1978, pp. 941-956.
- L. G. Lajtha, "On DNA labeling in the study of the dynamics of bone marrow cell populations", in: Stohlman, Jr., F. (Ed), The Kinetics of Cellular Proliferation, Grune and Stratton, New York, 1959, pp. 173-182.
- 6. F. J. Burns, I. F. Tannock, "On the existence of a G0 phase in the cell cycle". Cell Tissue Kinet. Vol. 19, 1970, pp. 321-334.
- C. Haurie, D. C. Dale, M. C. McKey, "Cyclical Neutropenia and Other Periodic Hematological Disorders: A Review of Mechanisms and Mathematical Models". Blood, Vol. 92, 8, 2018, pp. 2629-2640.
- M. C. Mackey, "Mathematical models of hematopoietic cell replication and control", in H. G. Othmer, F. R. Adler, M. A. Lewis, J. C. Dallon, Case Studies in Mathematical Modeling Ecology, Physiology, and Cell Biology, Prentice-Hall, New Jersey, 1997, Cap. 8, pp. 151-181.
- 9. J. Bélair, J.M. Mahaffy, "Variable maturation velocity and parameter sensitivity in a model for hematopoiesis, IMA", J. Math. Appl. Med. Biol. Vol. 18, 2001, pp. 193-211.

# INTERACCIÓN DE DOS CADENAS CAÓTICAS ACOPLADAS POR UN ELEMENTO NO CAÓ-TICO PERTURBADO ARMÓNICAMENTE

Karla Ivonne Serrano Arévalo, Gabriel Arroyo Correa

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH.

#### RESUMEN

En trabajos recientes hemos analizado numéricamente la interacción entre cadenas caóticas acopladas por elementos no caóticos, en diferentes configuraciones. Los elementos de acoplamiento fueron de tres tipos: (a) Duffing, (b) van der Pol y (c) Dixon modificado. Los estudios de estos trabajos contemplaron a los elementos no caóticos en condiciones autónomas, no sujetos a perturbación alguna, en donde su estado dinámico está caracterizado por un ciclo límite (Duffing, van der Pol) ó por un estado irregular (Dixon modificado). En este trabajo se explora numéricamente el efecto que tiene el elemento de acoplamiento entre las cadenas cuando está sujeto a una perturbación armónica. Se considera el caso de cadena abierta-cadena abierta. La perturbación armónica hace más variada la dinámica del elemento de acoplamiento, al disponer de la amplitud y de la frecuencia de la perturbación como parámetros adicionales de control. Los resultados obtenidos permiten identificar diferentes mecanismos para controlar el estado de sincronización de las cadenas inter-actuantes en función de la amplitud y de la frecuencia de la perturbación armónica. En particular se identifican las configuraciones que preservan la sincronización simultánea de las dos cadenas ó de solo una de ellas, enfatizando las similitudes y diferencias con respecto al caso no perturbado. Se agradece el apoyo a través del proyecto CIC-UMSNH 2018.

#### INTRODUCCIÓN

El circuito de Chua es el sistema dinámico autónomo más simple que puede ser utilizado para estudiar la dinámica no lineal en circuitos eléctricos. La importancia de este circuito radica en que manifiesta una amplia variedad de las características comunes a otros sistemas no lineales, tales como bifurcaciones, caos y sincronización [1], [2]. Las ecuaciones que describen al sistema de Chua están dadas por [1]:

$$\dot{x} = C (y - bx - 0.5(b - a)(|x + 1| - |x - 1|))$$
  

$$\dot{y} = x - y + z$$
  

$$\dot{z} = -Dy$$
(1)

En este trabajo se toman los valores C=7, D=10, a=-0.28 y b=0.56, que definen el estado caótico del doble atractor de Chua (AC).

Un problema relevante en la dinámica no lineal de sistemas caóticos es la sincronización de caos entre sistemas idénticos y no idénticos. En este trabajo estaremos interesados en estudiar la dinámica de la interacción entre dos cadenas formadas por cuatro elementos del tipo de Chua, cada una, y en donde el acoplamiento entre estas se hace con un sistema no caótico perturbado armónicamente. Los sistemas de acoplamiento serán de tres tipos: Dixon modificado (DX), Duffing (CD) y van der Pol (CP). Las ecuaciones que describen a estos sistemas están dadas, respectivamente, por [3]:

$$\dot{u} = \frac{uv}{0.0001 + u^2 + v^2} - 0.3 u$$

$$\dot{v} = \frac{v^2}{0.000001 + u^2 + v^2} - 0.7 v - 0.3 + A\cos(\omega t)$$
(2)

$$\dot{u} = v$$

$$v = u - u^3 A \cos(\omega t)$$
(3)

$$\dot{u} = v$$

$$\dot{v} = -u - 0.8(u^2 - 1)v + A\cos(\omega t)$$
(4)

En las Ecs. (2)-(4), *A* es la amplitud de la perturbación armónica y  $\omega$  su frecuencia. En la Fig. 1 se muestran los estados dinámicos de los sistemas de acoplamiento descritos por las Ecs. (1)-(4), para distintos valores en la amplitud y frecuencia de perturbación. En la secuencia de gráficos a la izquierda de la línea central, la amplitud de perturbación es fija (A=1) y se varía la frecuencia. En este caso se puede notar que los tres sistemas DX, CD y DP son sensibles a la variación de la frecuencia. De manera similar, en la secuencia de gráficos a la derecha de la línea central, la frecuencia de perturbación es fija ( $\omega$ =1) y se varía la amplitud. En este caso, los sistemas DX y CD son sensibles a la variación de la amplitud de la perturbación, a diferencia del sistema CP que permanece prácticamente en el mismo ciclo límite.



Figura 1. Estados dinámicos, en el espacio fase *uv*, para los elementos de acoplamiento, para diferentes valores de la amplitud y frecuencia de perturbación. (a), Sistema de Dixon (DX), Ec. (2); (b), sistema de Duffing (CD), Ec. (3); (c), sistema van der Pol (CP), Ec.(4).

### TEORÍA

En este trabajo se analiza la interacción entre dos cadenas formadas por cuatro elementos del tipo AC, cada una, y en donde el elemento de acoplamiento puede ser cualquiera de los elementos DX, CD o CP, en alguno de los estados perturbativos mostrados en la Fig. 1. En la Fig. 2 se presenta de forma gráfica el sistema analizado en este trabajo, en donde el acoplamiento se hace entre los circuitos extremos de las dos cadenas (circuitos 4 y 5). La dinámica está descrita por 26 ecuaciones diferenciales que se resuelven numéricamente con el paquete DynPac [4]. La nomenclatura  $kx_{12}$  en la Fig. 2, significa agregar en la ecuación diferencial para  $x_1$  (Ec. (1)) el término de acoplamiento  $kx_{4u}$  ( $x_{2}$ - $x_1$ );  $kx_{4u}$  significa agregar en la ecuación diferencial para  $x_4$  el término de acoplamiento  $kx_{4u}$  (u- $x_4$ );  $kx_{u4}$ , que no se muestra en la Fig. 2 para no saturar el gráfico, significa agregar en la ecuación diferencial para u, Ecs. (2)-(4), el término de acoplamiento  $kx_{u4}$  ( $x_4$ -u). Este proceso se hace para el resto de los términos.



Figura 2. Representación gráfica del sistema estudiado.

Se resolvió numéricamente el sistema representado gráficamente en la Fig. 2, usando el programa libre DynPac escrito en el lenguaje Mathematica [4]. Se supone que las cadenas  $C_1$  y  $C_2$  están individualmente sincronizadas, en conexión unidireccional ( $kx_{12}=kx_{23}=kx_{34}=kx_{56}=kx_{67}=kx_{78}=100$ ), en el atractor caótico de Chua AC. Se considera que el estado inicial del elemento de acoplamiento puede corresponder a cualquiera de los estados DX, CD o CP, mostrados en la Fig. 1. Para identificar la dinámica del sistema estudiado, se analizaron las señales de sincronización entre los circuitos extremos de cada cadena ( $x_1$ - $x_4$  y  $x_5$ - $x_8$ ), entre los circuitos extremos del sistema ( $x_1$ - $x_8$ ), así como el cambio dinámico del elemento central (u-v), para diferentes esquemas de conexión entre las cadenas y el elemento de acoplamiento. Se considera solo el caso en que el sistema de la Fig. 2 tiene los canales de acoplamiento que, en la ausencia de perturbación, preservan la sincronización individual de cada cadena y entre ellas como lo mostramos en un trabajo reciente [5]:  $kx_{4u}=kx_{u5}=ky_{v4}=ky_{v5}=100$ .

#### RESULTADOS

Los resultados obtenidos muestran que el estado original de la cadena permanece prácticamente insensible a las características de la perturbación, tanto en variaciones de amplitud y frecuencia. En la Fig. 3 se muestra el estado típico que guardan en todos los casos mostrados en la Fig. 1, los distintos estados de sincronización. Nótese como el elemento central (en el plano uv) adquiere la dinámica del doble atractor de Chua. En este sentido, estos resultados enriquecen más los posibles mecanismos que mantienen una buena sincronización entre las cadenas, lo cual puede ser importante en esquema de encriptación de información.



Figura 3. Representación gráfica del estado dinámico del sistema sujeta a una perturbación armónica.

### CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este trabajo permiten concluir que el estado dinámico de las cadenas permanece insensible a la perturbación armónica. Estos resultados son sorprendentes, ya que uno esperaría que la brusca modificación de la dinámica del elemento central de acoplamiento debido a la perturbación armónica se, vería reflejada en el estado de sincronización de las cadenas. Esto demuestra la robustez de la sincronización de la cadena mientras se mantengan las condiciones de acoplamiento indicadas arriba (kx<sub>4u</sub>=kx<sub>u5</sub>=ky<sub>v4</sub>=ky<sub>v5</sub>=100). En síntesis, nuestros resultados proporcionan esquemas específicos en donde se puede perturbar el sistema sin alterar sus características de sincronización, lo cual puede ser de utilidad en esquemas de encriptación de información.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. G. Arroyo Correa et al., "Estudio de caos y sincronización con el Circuito de Chua", *Ciencia Nicolaita,* Vol. 51, 2009, pp. 195-205.
- 2. T. Kapitaniak, "Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control", Second Ed. (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2000), pp. 120-127.
- 3. J. C. Sprott, *Elegant chaos: Algebraically simple chaotic flows* (World Scientific Publishing Co., Singapore, 2014), pp. 41-43, 44-47, 109-112.
- 4. A. Clark, "DynPac: A dynamical systems package for Mathematica", disponible en: http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html. Fecha de consulta: enero de 2018.
- A. Campos Hernández, G. Arroyo Correa, "Estudio de la dinámica no lineal de la interacción entre dos cadenas de osciladores caóticos acopladas por un elemento no caótico", 12<sup>vo</sup> Congreso Estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación, 2017, Morelia, Mich.

# GENERACIÓN DE VORTICES ANULARES MEDIANTE UN ELEMENTO DE FASE

Ulises Ruiz Corona<sup>1</sup>, Víctor Arrizon Peña<sup>1</sup>, Dilia Aguirre Olivas<sup>2</sup> y Gabriel Mellado Villaseñor<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, <sup>2</sup>Universidad Nacional Autónoma de México.

#### RESUMEN

Un fenómeno importante en óptica es la focalización de la luz, la cual es regularmente efectuada por una lente. Aunque en teoría es posible obtener un punto infinitamente pequeño en el plano de enfocamiento, esto no es posible experimentalmente debido a la extensión finita tanto del campo óptico a ser enfocado y la lente [1]. En este trabajo analizamos la focalización de un haz de luz monocromático en un campo focal anular, asumiendo que es modulado por una fase azimutal de un entero q arbitrario. La presencia de la carga topológica (q) transforma el campo focal en un vórtice anular (VA). Este tipo de estructuras son muy útiles en varias aplicaciones como atrapamiento óptico con transferencia de momento angular [2], microscopia de alta resolución [3].

Se demuestra que para la conversión óptima de un campo óptico a un VA, el campo óptico debe presentar simetría radial en su amplitud. Con lo que se determina el elemento de fase adecuado para la generación del VA en propagación libre a una distancia definida. Se muestra mediante simulaciones numéricas y experimentalmente la generación de VA generados por un haz gaussiano. Un resultado interesante es que las intensidades pico y el ancho de las VAs generados con la técnica propuesta, presentan poca variación si el ancho del haz gaussiano es fijo y la carga topológica cambia en un rango de valores. El radio y el ancho transversal relativo de los VAs son controlados por los parámetros de la transmitancia del elemento de fase y el ancho del haz gaussiano incidente.

# INTRODUCCIÓN

De manera similar al enfocamiento convencional, la generación de un VA [4-7] infinitamente delgado no es posible. Por lo que es importante establecer una aproximación de este campo físicamente realizable. Considerando que un VA óptimo, generado por un haz óptico dado, es aquel con la máxima intensidad posible. La máxima intensidad en un VA tiene asociados otros atributos tales como, una delgada sección transversal y un gradiente de intensidad alto, los cuales pueden ofrecer ventajas en diferentes aplicaciones. Recientemente ha sido reportada la generación de un VA óptimo en el dominio de Fourier de un elemento de fase difractivo, el cual es iluminado con un haz gaussiano [8]. En este trabajo se presenta la técnica más simple para efectuar enfocamiento anular con carga topológica de orden entera arbitraria. Este método emplea una placa de fase como única componente óptica, la cual modula la amplitud compleja del haz incidente. El VA es obtenido por propagación libre del haz modulado a una determinada distancia.

# TEORÍA

Consideramos un campo formado por un haz incidente de simetría radial,  $g(\rho, \phi)$ , sobre una placa de fase,  $p(\rho, \phi)$ , con la cual se genera el VA. Este campo puede escribirse mediante  $f(\rho, \phi) = g(\rho, \phi)p(\rho, \phi)$ . Expresando el haz incidente como una función separable en amplitud y fase

$$g(\rho,\phi) = a(\rho) \exp[i\alpha(\rho,\phi)]. \tag{1}$$

Para determinar la transmitancia compleja de la placa de fase,  $p(\rho, \phi)$ , se considera que el haz transmitido por la placa debe tener una forma separable dada por

$$f(\rho,\phi) = a(\rho) \exp[i\beta(\rho)] \exp(iq\phi), \tag{2}$$

donde la amplitud  $a(\rho)$  es una función no negativa y  $\beta(\rho)$  es una función de fase radial, la cual determinará la posición donde será generado el VA. De acuerdo a las Ecs. (1) y (2), la transmitancia de la placa de fase puede escribirse como

$$p(\rho,\phi) = \exp[i\beta(\rho)]\exp[-i\alpha(\rho,\phi)]\exp(iq\phi).$$
(3)

La amplitud compleja de un VA, con carga topológica entera q, se expresa por

$$h(r,\theta) = F(r)\exp(iq\theta),\tag{4}$$

el cual es generado por porpagación libre a una determinada distancia de la placa de fase. Realizando la propagación de Fresnel del campo  $f(\rho, \phi)$  (Ec. (2)) a una distancia z, se obtiene el campo  $h(r, \theta)$ , donde el factor radial F(r) está dado por

$$F(r) = \exp\left(i\frac{kr^2}{2z}\right)\int_0^\infty \rho a(\rho) \exp\left[i\left(\beta(\rho) + \frac{k\rho^2}{2z}\right)\right] J_q\left(2\pi\frac{r}{\lambda z}\rho\right) d\rho,$$
(5)

donde  $J_q$  denota la función Bessel de *q-esimo* orden y  $k=2\pi/\lambda$  es el número de onda. Aunque el haz incidente puede tener una forma arbitraria  $g(\rho, \phi) = a(\rho) \exp[i\alpha(\rho, \phi)]$ , en este análisis suponemos un haz Gaussiano incidente, cuya amplitude compleja puede escribirse como

$$g(\rho,\phi) = \exp(-\rho^2 / w^2) \exp(ik\rho^2 / 2R),$$
(6)

donde *w* es el radio del haz determinado por el factor de amplitud,  $a(\rho) = \exp(-\rho^2 / w^2)$ , y R es el radio de curvatura de la fase cuadrática,  $\alpha(\rho, \phi) = k\rho^2/2R$ . El objetivo es transformar el haz Gaussiano en un VA con radio  $r_0$ , carga topologica *q* y el valor máximo de intensidad posible,  $|F(r_0)|^2$ . Considerando las Ecs. (5) y (6), la transmitancia de la placa que alcanza la intensidad óptima está dada por [8]

$$p(\rho,\phi) = \exp\left\{-i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z}\right)\rho^2\right\} \operatorname{sgn}\left\{J_q\left(2\pi\frac{r_0}{\lambda z}\rho\right)\right\} \exp(iq\phi).$$
(7)

#### RESULTADOS

Para ilustrar el método desarrollado se realizaron algunas simulaciones numéricas, en las cuales se asumió que la cintura del haz Gaussiano incidente (w) está relacionada con el radio  $r_0$  del VA a través de la relación w=Q( $\lambda z/r_0$ ), para diferentes valores de Q. Adicionalmente, por simplicidad consideramos un radio de curvatura infinito en la fase cuadrática del haz Gaussiano, esto significa que el término de fase es despreciable en Ec. (6). Las intensidades pico normalizadas de los VAs generados con Q=5 and 10 y diferentes cargas topológicas, son mostrados en las figuras 1 (a) and (b), respectivamente. De manera similar los anchos a la mitad de la máxima intensidad (FWHM) en VAs obtenidos para diferentes valores de Q y q se muestran en las Figs. 1 (c) y (d) para Q= 5 y Q=10, respectivamente. Las intensidades pico para diferentes valores de q y un Q fijo son normalizadas respecto a la intensidad pico para q=0, y los FWHMs están normalizados respecto a  $r_0$ .



Figura 1. Intensidades pico normalizadas para diferentes cargas topológicas, generadas con un haz Gaussiano de ancho w=Q( $\lambda z /r0$ ), con parámetro Q igual a (a) 5, (b) 10. FWHMs con parámetro Q igual a (c) 5, (d)10.

Para la generación de un VA, con la aproximación descrita, utilizamos el arreglo experimental mostrado en la Fig. 2. En este arreglo, la luz incidente de un láser He-Ne es uniformizada y expandida por un filtro espacial (SF), posteriormente colimada por una lente (L) de distancia focal f=5 cm. El haz Gaussiano expandido incide sobre un modulador espacial de luz (SLM) de sólo fase reflectivo (Holoeye PLUTO). En el SLM es desplegado el elemento de fase para la generación del VA, con una modulación de fase lineal unidimensional adicional, cuyo propósito es separar el campo focal de la fracción de luz no modulada por la luz reflejada del SLM. La intensidad de los VAs es capturada por una cámara CCD.



Figura 2. Arreglo experimental utilizado para la generación de los VAs.

En la Fig. 3 se muestra el VA obtenido experimentalmente a una distancia z=60 cm del SLM, para los parámetros Q=3, w=1mm,  $r_0$ =1.13mm.



Figura 3. Imagen experimental de un VA con parámetros z=60cm, λ=633nm, Q=3, w=1mm.

# CONCLUSIONES

En resumen, en este trabajo se mostró tanto numéricamente como experimentalmente la generación de VAs óptimos considerando un haz Gaussiano incidente. Un resultado interesante es que las intensidades pico y los anchos de los VAs generados con la técnica propuesta, muestran poca variación si el ancho del haz Gaussiano es fijo y la carga topológica es cambiada en un rango de valores. El radio y el acho transversal relativo de los VAs son controlados por los parámetros de la transmitancia de la placa de fase y el ancho del haz Gaussiano.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. M. Born and E. Wolf, Principles of optics, (Cambridge University Press, 2003).
- 2. H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, "Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity," Phys. Rev. Lett. 75, 826–829 (1995).
- 3. V. Westphal and S.W. Hell, "Nanoscale resolution in the focal plane of an optical microscope," Phys. Rev. Lett. 94, 143903 (2005).
- 4. A. S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao, V.Arrizón, "Generation of the 'perfect' optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator," Opt.Lett.38, 534–536 (2013).
- 5. M. Chen, M. Mazilu, Y. Arita, E. M. Wright, K. Dholakia, "Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam, Opt. Lett. 38, 4919–4922 (2013).
- 6. J. García-García, C.Rickenstorff-Parrao, R. Ramos-García, V.Arrizón, and A. S. Ostrovsky, "Simple technique for generating the perfect optical vortex, Opt. Lett. 39, 5305–5308 (2014).
- 7. P. Vaity and L.Rusch, "Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam," Opt. Lett. 40, 597–600 (2015).
- 8. V. Arrizón, U. Ruiz, D. Aguirre-Olivas, and G. Mellado-Villaseñor, "Optimal focusing of a beam in a ring vortex," Optics Communications 356, 170-174 (2015)

# RESPUESTA ÓPTICA DE UN CF2D FINITO CON SUPERFICIES LISAS Y ALEATORIAMENTE RUGOSAS QUE CONTIENEN METAMATERIAL DISPERSIVO

Luis Eduardo Puente Díaz, Víctor Castillo Gallardo, Héctor Pérez Aguilar, Alberto Mendoza Suárez.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas *"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"* de la UMSNH, Morelia, Mich.,e-mail: <u>fmatpuente@gmail.com</u>, <u>victor1\_1@hotmail.com</u>, <u>hiperezag@yahoo.com</u>, <u>amen-dozas777@yahoo.com.mx</u>

### RESUMEN

Los cristales fotónicos (CFs), actualmente son un tema de investigación novedoso debido a que presentan un alto potencial para muchas aplicaciones, tales como el desarrollo de los circuitos fotónicos integrados. Los CFs están compuestos de estructuras dieléctricas periódicas que afectan a la propagación de las ondas electromagnéticas (EM) del mismo modo que el potencial periódico en un semiconductor afecta el movimiento de los electrones, definiendo análogamente bandas fotónicas permitidas y prohibidas. En este trabajo presentamos un método integral que permite calcular la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia, como función del ángulo de incidencia de sistemas finitos como son los cristales fotónicos bidimensionales (CF2Ds) compues-tos de inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de metamaterial (LHM) en una celda unitaria cuadrada. La influencia de la rugosidad afecta considerablemente las propiedades reflectivas y transmitivas de un cristal fotónico real. Estos resultados son muy importantes, ya que nos indican que este aspecto es importante a tomar en cuenta en el proceso de fabricación de un CF2D finito.

# **INTRODUCCIÓN**

En el campo de las telecomunicaciones, los conductores de cobre han sido substituidos por fibras ópticas para la transmisión de señales. Sin embargo, la velocidad de envío de la señal vía Internet es lenta y se debe en gran parte a que al ingresar la señal óptica en los dispositivos de proceso electrónicos, ésta debe convertirse en señal eléctrica. Por esta razón, un interés en la investigación de los CFs es buscar el control totalmente óptico de la información en un circuito, con la idea de desarrollar nuevas aplicaciones tecnológicas que tendrían grandes ventajas sobre los dispositivos electrónicos convencionales en la miniaturización de circuitos. Así pues, el estudio de circuitos fotónicos y particularmente de CFs se hace necesario. Los CFs son sistemas que a veces involucran simetrías complicadas y propiedades físicas muy novedosas, como las correspondientes a los metamateriales. Estos materiales artificiales, conocidos también como materiales izquierdos (LHMs), han atraído un gran interés de investigación entre los investigadores de diferentes campos. Este entusiasmo se puede atribuir principalmente a sus características electromagnéticas únicas, debido al hecho de que los vectores de la luz (E, H, k) forman una tríada de vectores ortogonales con orientación izquierda para una onda que se propaga a través de estos medios [1]. Aunque los experimentos fundamentales con metamateriales se han desarrollado para la región de microondas del espectro electromagnético, existen resultados que indican que los LHMs están ahora disponibles en las regiones visible e infrarrojo [2]. Puesto que estos materiales tienen un índice de refracción negativo dentro de un rango dado del espectro electromagnético, algunos de los fenómenos ópticos presentan variaciones que los hacen potencialmente útiles para nuevas aplicaciones tecnológicas, como por ejemplo la refracción negativa, la invisibilidad y la transmisión de información [3,4,5]. Como consecuencia, la comunidad científica ha comenzado a estudiar una variedad de sistemas ópticos que incluven LHMs como componentes principales.

El estudio de la propagación de la luz en CFs se basa en métodos numéricos, algunos de los cuales se aplicaron primero en física del estado sólido para el estudio de estructuras de bandas electrónicas. El más citado puede ser el método de ondas planas [6] que permite calcular las estructuras de bandas fotónicas que implican materiales sin dispersión y absorción. Una de las desventajas de este método es cuando los bordes afilados están presentes en las inclusiones de la celda unitaria y la expansión de la función dieléctrica, en términos de una serie de Fourier truncada, presenta problemas de convergencia aumentando los requisitos de memoria. Además de un alto contraste entre las propiedades de los materiales que componen, también el método produce cierta inestabilidad en las

soluciones. Bajo este contexto, el método integral que estamos considerando en este trabajo [7], presenta algunas ventajas en comparación con el método de ondas planas y otros métodos, ya que tiene la capacidad de estudiar diferentes aspectos de estos sistemas que tienen geometrías complicadas y propiedades físicas muy novedosas, como las correspondientes a los LHMs. Como veremos, el formalismo propuesto ha sido considerado como una alternativa a los métodos existentes en el sentido de que da buenos resultados a diferencia de otros donde suelen fallar.

Este trabajo está desarrollado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta el sistema a estudiar y un método numérico riguroso para resolver el problema planteado. En la sección 3 se muestran resultados numéricos preliminares de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia, como función del ángulo de incidencia de CF2Ds finitos compuestos de inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM. Finalmente, en la sección 4 se dan las conclusiones de este trabajo.

# TEORÍA

El presente trabajo tiene como finalidad hacer un estudio teórico y numérico de la respuesta electromagnética de un CF2D finito compuesto de inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM en una celda unitaria cuadrada mediante la aplicación de un método numérico conocido como el Método de la Ecuación Integral basado en la segunda identidad de Green para resolver la ecuación de Helmholtz. El sistema correspondiente a un CF2D finito truncado se muestra en la Fig. 1, donde se ha supuesto que el medio incidente tiene las propiedades ópticas dadas por la permeabilidad magnética  $\mu_0$  y permitividad eléctrica  $\varepsilon_0$ , el medio que contiene a las inclusiones tiene las propiedades dadas por  $\mu_1$ ,  $\varepsilon_1$ , las inclusiones consideradas igua-



Figura 1. Diagrama de un CF2D finito, formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM. Los contornos de integración se indican por las curvas discontinuas.  $R_0$  y  $R_q$  representan las regiones que encierran los medios de incidencia y transmisión, respectivamente.

les tienen las propiedades dadas por  $\mu_{\Box}$ ,  $\varepsilon_{\Box}$ , y el medio de transmisión tiene las propiedades dadas por  $\mu_3$ ,  $\varepsilon_3$ .

Las propiedades ópticas de un LHM están dadas por la función dieléctrica [8,9]

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^{2'}} \tag{1}$$

y permeabilidad magnética

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$
 (2)

Estas funciones permiten determinar la región donde el LHM presenta un índice de refracción negativo, el cual está dentro del rango de frecuencia  $\omega_0 < \omega < \omega_{LM}$  con  $\omega_{LM} = \omega_0 / \sqrt{1 - F}$ . Los parámetros empleados en estas funciones son  $\omega_p = 10c/D$ ,  $\omega_0 = 4c/D$  y F = 0.56 [8,9].

La técnica numérica que se describe brevemente se le conoce como el Método de la Ecuación Integral y ha sido desarrollado por Mendoza y sus colaboradores [7,9,10].

Método de la Ecuación Integral

Como sabemos, si asumimos una dependencia armónica del tiempo  $e^{-i\omega t}$  para los campos electromagnéticos, la ecuación de onda es transformada en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi_i(\vec{r}) + k_i^2 \Psi_i(\vec{r}) = 0.$$
(3)

En la Ec. (3),  $\Psi_j(\vec{r})$  representa el campo eléctrico  $E_z$  en el caso de la polarización TE, y el campo magnético  $H_z$  en el caso de la polarización TM, ambos en el *j*-ésimo medio (ver Fig. 1). Se considera que el campo electromagnético  $\Psi_j(\vec{r})$  satisface las condiciones de frontera para cada polarización. La magnitud del vector de onda está dado por:

$$k_j = n_j(\omega) \frac{\omega}{c},\tag{4}$$

donde el índice de refracción  $n_j(\omega) = \pm \sqrt{\mu_j(\omega)\varepsilon_j(\omega)}$  que involucra las propiedades de los materiales está dado en términos de la permeabilidad magnética  $\mu_j(\omega)$  y la permitividad eléctrica  $\varepsilon_j(\omega)$ , ambas funciones dependientes de la frecuencia  $\omega$ . La velocidad de la luz está indicada por *c*. El signo que aparece en la ecuación del índice de refracción debe ser tomado como negativo cuando se considere un LHM y positivo cuando el medio sea un material dieléctrico.

Ahora introducimos una función de Green  $G_i(\vec{r}, \vec{r}')$ , la cual es una solución de la ecuación:

$$\nabla^2 G_j(\vec{r},\vec{r}') + k_j^2 G_j(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \qquad (5)$$

donde  $G_j(\vec{r},\vec{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j|\vec{r}-\vec{r}'|)$  siendo  $H_0^{(1)}(\zeta)$  la función de Hankel de primera clase y de orden cero. Primeramente, aplicando la segunda identidad de Green a las funciones  $\Psi_j(\vec{r})$  y  $G_j(\vec{r},\vec{r}')$  para la región incidente del vacío (j = 0) con una onda incidente (ver Fig. 1), se obtiene el campo total [7,11]:

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_{inc}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left[ \frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_1'} \Psi_0(\vec{r}') - G_0(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Psi_0(\vec{r}')}{\partial n_1'} \right] ds',$$
(6)

donde  $\Gamma_1$  representa el contorno cerrado que delimita la superficie  $S_1$ . Las funciones fuente  $\Psi_0(\vec{r}')$ y  $\partial \Psi_0(\vec{r}')/\partial n'_1$ , que representan los valores del campo electromagnético y su derivada normal evaluadas sobre el contorno  $\Gamma_1$  pueden ser obtenidas a partir de la Ec. (6). Para esto, se hace una aproximación del punto de observación sobre los contornos que delimitan la región correspondiente. En la Ec. (6) se tienen dos integrales de contorno las cuales, al dividir en *n* pequeños segmentos de longitud de arco  $\Delta s$ , las integrales pueden ser expresadas como:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} G_0(\vec{r},\vec{r}') \frac{\partial \Psi_0(\vec{r}')}{\partial n_1'} ds' \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^0 \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_0(\vec{r},\vec{r}') ds' ,$$
<sup>(7)</sup>

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \Psi_0(\vec{r}') \frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_1'} ds' \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^0 \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_1'} ds', \qquad (8)$$

donde se han definido las funciones

$$\Phi_n^0 = \frac{\partial \Psi_0(\vec{r}')}{\partial n_1'} \bigg|_{\vec{r}' = \vec{r}_n'} \qquad y \qquad \Psi_n^0 = \Psi_0(\vec{r}') \bigg|_{\vec{r}' = \vec{r}_n'}.$$
(9)

En las Ecs. (7) y (8) se ha considerado que  $\Delta s$  es lo suficientemente pequeño para que podamos tener un muestreo fino y así poder considerar que el campo  $\Psi_0(\vec{r}')$  y su derivada normal  $\partial \Psi_0(\vec{r}')/\partial n'_1$  son aproximadamente constantes.

Ahora, evaluando las integrales de las Ecs. (7) y (8) en el punto de observación  $\vec{r} = \vec{r}_m$ , se obtienen los elementos de matriz definidos por

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_0(\vec{r}_m, \vec{r}') ds',$$
(10)

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_0(\vec{r}_m, \vec{r}')}{\partial n'_1} ds', \qquad (11)$$

donde el subíndice m indica el punto de observación y el subíndice n el punto de integración. Estos elementos de matriz, ya calculados, están dados por las expresiones [7]:

$$L_{mn}^{(0)} = \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}(k_0 R_{mn})(1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}\left(k_0 \frac{\Delta s}{2e}\right)\right] \delta_{mn} ,$$
 (12)

$$N_{mn}^{(0)} = \frac{i\Delta s}{4} k_0 H_1^{(1)}(k_0 R_{mn}) \hat{n}_n \cdot \frac{\vec{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{n}_n \cdot \hat{t}'_n\right] \delta_{mn} ,$$
(13)

donde

$$\hat{n}_n \cdot \vec{R}_{mn} = -y'(s)(x_m - x_n) + x'(s)(y_m - y_n), \qquad (14)$$

$$\hat{n}_{n} \cdot \hat{t}_{n}' = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s),$$

$$R_{mn} = \sqrt{(x_{m} - x_{n})^{2} + (y_{m} - y_{n})^{2}}.$$
(15)

Ahora al aplicar la Ec. (6) para cada región sobre los contornos que componen el sistema propuesto, se puede obtener un conjunto de ecuaciones integrales acopladas para  $\Psi_j(\vec{r}')$  y  $\partial \Psi_j(\vec{r}')/\partial n'_1$ , que bajo las condiciones de frontera a lo largo de los diferentes contornos  $\Gamma_e$  dadas por

$$\Psi_{n(e)}^{(j)} = \Psi_{n(e)}^{(j+1)}, \qquad \Phi_{n(e)}^{(j+1)} = \pm \frac{f_{j+1}}{f_j} \Phi_{n(e)}^{(j)}, \qquad (16)$$

donde la cantidad  $f_i$  está dada por

$$f_{j} = \begin{cases} \mu_{j}(\omega) & \text{para polarizaci on TE} \\ \varepsilon_{j}(\omega) & \text{para polarizaci on TM'} \end{cases}$$
(17)

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraico para el sistema del CF2D finito truncado propuesto

 $\overline{n=1}$ 

$$\sum_{n=1}^{N_1} \left( \delta_{mn(1)} - N_{mn(1)}^{(0)} \right) \Psi_{n(1)}^{(1)} + \frac{f_0}{f_1} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(0)} \Phi_{n(1)}^{(1)} = \Psi_m^{inc} ,$$
(18)

$$-\sum_{n=1}^{N_{1}} N_{mn(1)}^{(1)} \Psi_{n(1)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_{1}} L_{mn(1)}^{(1)} \Phi_{n(1)}^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_{2}} N_{mn(2)}^{(1)} \Psi_{n(2)}^{(1)}$$

$$-\sum_{n=1}^{N_{2}} L_{mn(2)}^{(1)} \Phi_{n(2)}^{(1)} + \dots - \sum_{n=1}^{N_{q}} N_{mn(q)}^{(1)} \Psi_{n(q)}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_{q}} L_{mn(q)}^{(1)} \Phi_{n(q)}^{(1)} = 0$$
(19)

 $\overline{n=1}$ 

$$\sum_{n=1}^{N_2} \left( \delta_{mn(2)} - N_{mn(2)}^{(2)} \right) \Psi_{n(2)}^{(1)} - \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(2)} \Phi_{n(2)}^{(1)} = 0 , \qquad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{N_3} \left( \delta_{mn(3)} - N_{mn(3)}^{(2)} \right) \Psi_{n(3)}^{(1)} - \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)}^{(2)} \Phi_{n(3)}^{(1)} = 0, \qquad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{N_{q-1}} \left( \delta_{mn(q-1)} - N_{mn(q-1)}^{(2)} \right) \Psi_{n(q-1)}^{(1)} - \frac{f_2}{f_1} \sum_{n=1}^{N_{q-1}} L_{mn(q-1)}^{(2)} \Phi_{n(q-1)}^{(1)} = 0,$$
(22)

$$\sum_{n=1}^{N_q} \left( \delta_{mn(q)} - N_{mn(q)}^{(3)} \right) \Psi_{n(q)}^{(1)} + \frac{f_3}{f_1} \sum_{n=1}^{N_q} L_{mn(q)}^{(3)} \Phi_{n(q)}^{(1)} = 0.$$
(23)

El signo que aparece en la ecuación (16) referente a la derivada normal, correspondiente a las condiciones de frontera, debe ser tomado como negativo cuando se considere una frontera entre dos medios dieléctrico-LHM y positivo cuando los medios sean dieléctrico-dieléctrico.

. . .

Las Ecs. (18)-(23) determinan un sistema de ecuaciones lineal e inhomogéneo de  $2\sum_{p=1}^{q} N_p$  que se puede resolver numéricamente para determinar los campos y su derivada normal a lo largo de los diferentes contornos. En consecuencia, el campo electromagnético en cualquier punto del espacio (dado por  $\vec{r}$ ) se puede determinar utilizando la Eq. (6) al utilizar los campos y su derivada normal obtenidos.

# Reflectancia y transmitancia de un CF2D

El método de la ecuación integral también puede ser aplicado para determinar la reflectancia y transmitancia de un CF2D finito truncado. Una vez que se obtienen las fuentes  $\Psi_n^{(j)}$  y  $\Phi_n^{(j)}$ , ahora se puede calcular el campo en cualquier punto dentro de las regiones que constituyen el sistema mediante las mismas ecuaciones integrales.

Considerando que la amplitud del campo lejano está dada por [7]:

$$A(\theta_s,\omega) = \oint_{\Gamma_a} \left[ -i\frac{\omega}{c} (\hat{n}'_a \cdot \hat{r}) \Psi_a(\bar{r}') - \frac{\partial \Psi_a(\bar{r}')}{\partial n'_a} \right] \times \exp\left(-i\frac{\omega}{c} (\bar{r}' \cdot \hat{r})\right) ds',$$
(24)

con  $\hat{n}'_a = (-y'(s), x'(s)), \hat{r} = (\sin(\theta_s), \cos(\theta_s)) y \hat{r}' = (x(s), y(s)).$  En esta expressión  $\hat{n}'_a$  representa el vector normal unitario correspondiente al contorno cerrado  $\Gamma_a$  que encierra los medios de incidencia y transmisión mientras que  $\theta_s$  corresponde al ángulo de esparcimiento.

Así pues, los coeficientes diferenciales de reflectancia y transmitancia pueden ser obtenidos por

$$\frac{\partial R}{\partial \theta_s} = h_r \left| A(\theta_s, \omega) \right|^2, \tag{25}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_s} = h_t |A(\theta_s, \omega)|^2, \qquad (26)$$

donde  $h_r$  y  $h_t$  son factores de normalización que dependen de la onda incidente y de la longitud del perfil  $\Gamma_a$  en la dirección de x. En este trabajo se considera un haz gaussiano como onda incidente ya que, al ser el tamaño del sistema finito, éste permite evitar efectos de borde. Los factores de normalización correspondientes son:  $h_r = (2(2\pi)^{3/2} g k_1 \cos(\theta_1))^{-1}$  para ambas polarizaciones, mientras  $h_{t} = \left(2(2\pi)^{3/2} \left(\sqrt{\varepsilon_{1}/\mu_{1}}/\sqrt{\varepsilon_{2}/\mu_{2}}\right) k_{2}g\cos(\theta_{1})\right)^{-1} \text{ para}$ que la polarización ΤE у  $h_{t} = \left(2(2\pi)^{3/2} \left(\sqrt{\mu_{1}/\varepsilon_{1}}/\sqrt{\mu_{2}/\varepsilon_{2}}\right) k_{2}g\cos(\theta_{1})\right)^{-1}$  para la polarización TM. En estas expresiones las propiedades ópticas de los medios incidente y trasmitido están expresadas por  $\varepsilon_1, \mu_1$  y  $\varepsilon_2, \mu_2$ , respectivamente, mientras que  $k_1$ y  $k_2$  corresponden a los vectores de onda en cada medio. El parámetro gcorresponde al semi-ancho del haz gaussiano y  $\theta_1$  corresponde al ángulo de incidencia del haz. Por lo tanto, la reflectancia y transmitancia en función de la frecuencia se obtiene al integrar sobre todos los ángulos de dispersión en la región incidente; es decir:

$$R(\omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial R}{\partial \theta_s} d\theta_s , \qquad (27)$$

$$T(\omega) = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\partial T}{\partial \theta_s} d\theta_s .$$
<sup>(28)</sup>

#### RESULTADOS

Como un ejemplo de aplicación se consideran los CF2Ds finitos compuestos de inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contiene medios de LHM en una celda unitaria cuadrada. Estos sistemas corresponden a las fracciones de llenado de f = 0.04 y f = 0.06. Los CF2Ds están compuestos de 515 inclusiones (103 inclusiones en dirección del eje X y 5 inclusiones en dirección del eje Y). En las Figs. 2(a) y (c) y las Figs. 3(a) y (c) se muestran los resultados obtenidos de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y transmitancia como función del ángulo de incidencia para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana) con longitud de onda de 1.25  $\mu$ m (correspondiente a  $\omega_r = 0.80$ ) para los CF2Ds finitos con inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas con fracciones de llenado de f = 0.04 y f = 0.06 para las polarizaciones TE y TM, respectivamente. En las Figs. 2(b) y (d) y las Figs. 3(b) y (d) se muestran los resultados obtenidos de la respuesta óptica para un haz de luz incidente (Onda Gaussiana) con longitud de onda de 1.17  $\mu$ m (correspondiente a  $\omega_r = 0.85$ ) para los CF2Ds finitos con inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas con fracciones de llenado de f = 0.04 y f = 0.06 para las polarizaciones TE y TM, respectivamente. Para modelar la rugosidad sobre la superficie de las inclusiones, se consideró un perfil de superficie aleatoria sobre la inclusión cilíndrica. Este perfil está definido por una realización de un proceso aleatorio de correlación Gaussiana que obedece una función de densidad de probabilidad de exponencial negativa [12].


Figura 2. Reflectancia y Transmitancia para los CF2Ds finitos con inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas (con parámetros a = 0.05235 y  $\delta = 0.02$ ) con fracciones de llenado de ((a), (b)) f = 0.04 y ((c), (d)) f = 0.06 para la polarización TE, mediante cálculo numérico. Los sistemas son iluminados con un haz Gaussiano de ((a), (c))  $\lambda = 1.25 \mu m y$  ((b), (d))  $\lambda = 1.17 \mu m$ .

Para estudiar los efectos de la rugosidad sobre la superficie de las inclusiones cilíndricas de los CF2Ds finitos se consideró un perfil que tiene rugosidad aleatoria con una longitud de correlación a = 0.05235 y una desviación estándar de las alturas  $\delta = 0.02$ .

En los sistemas correspondientes a los CF2Ds el medio de incidencia, el medio que contiene a las inclusiones y el medio de transmisión, tienen las propiedades ópticas dadas por el índice de refracción n = 1 (aire). En cambio, el medio que contienen las inclusiones tiene las propiedades ópticas dadas por los índices de refracción n = -1.25 (correspondiente al sistema iluminado con  $\omega_r$  =



Figura 3. Reflectancia y Transmitancia para los CF2Ds finitos con inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas (con parámetros a = 0.05235 y  $\delta = 0.02$ ) con fracciones de llenado de ((a), (b)) f = 0.04 y ((c), (d)) f = 0.06 para la polarización TM, mediante cálculo numérico. Los sistemas son iluminados con un haz Gaussiano de ((a), (c))  $\lambda = 1.25 \mu m y$  ((b), (d))  $\lambda = 1.17 \mu m$ .

0.80) y n = -0.8308 (correspondiente al sistema iluminado con  $\omega_r = 0.85$ ). Los parámetros utilizados para los CF2Ds finitos son: una longitud de interfaces  $l = 103 \mu m$ , una distancia entre las interfaces  $d = 6 \mu m$  y un semi-ancho del haz gaussiano de  $g = 1.989 \mu m$  para  $\lambda = 1.25 \mu m$  y  $g = 1.87 \mu m$  para  $\lambda = 1.17 \mu m$ .

Al comparar los resultados de los diferentes sistemas de los CF2Ds finitos con inclusiones cilíndricas de superficie lisa con sus correspondientes sistemas de superficie aleatoriamente rugosa, tratados en este trabajo, podemos observar que las propiedades reflectivas y transmitivas se ven considerablemente afectadas para ambas polarizaciones (TE y TM) al incluir una rugosidad aleatoria sobre la superficie de la inclusión cilíndrica. Este es un resultado importante a considerar en la fabricación de un CF2D real ya que, a pesar de la existencia de una tecnología bien desarrollada para su fabricación, los cristales fotónicos tienen defectos.

#### CONCLUSIONES

Se aplicó un método numérico, conocido como el método de la ecuación integral, para calcular la respuesta electromagnética de CF2Ds finitos compuestos de inclusiones cilíndricas de superficies lisas y aleatoriamente rugosas que contienen medios de LHM en una celda unitaria cuadrada. Al comparar los resultados de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia y de la transmitancia, como función del ángulo de incidencia de los CF2Ds finitos con superficies lisas y aleatoriamente rugosas compuestos por medios de LHM, se llega a concluir que la rugosidad aleatoria sobre las superficies de las inclusiones cilíndricas afecta considerablemente las propiedades reflectivas y transmitivas del CF2D finito. Estos resultados son muy importantes, ya que nos indican que este

aspecto es importante a tomar en cuenta en el proceso de fabricación de un CF2D finito.

#### REFERENCIAS

- 1. V. G. Veselago, "The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of  $\varepsilon$  and  $\mu$ ," Sov. Phys. Usp. Vol. 10, 509-514 (1968).
- 2. H. J. Lezec, J. A. Dionne, and H. A. Atwater, "Negative refraction at visible frequencies," Science Vol. 316, 430-432 (2007).
- Zhang X., Yao J., Liu Z., Liu Y., Wang Y., Sun C., Bartal G., and Stacy A. M., "Optical Negative Refraction in Bulk Metamaterials of Nanowires". Science. Vol. 321, No. 5891: 930 (2008).
- 4. Ni X., Wong Z. J., Mrejen M., Wang Y., and Zhang X. "An ultrathin invisibility skin cloak for visible light", Science Vol. 349, 1310-1314 (2015).
- 5. N. Engheta, "Circuits with light at nanoscales: optical nanocircuits inspired by metamaterials," Science Vol. 317, 1698-1702 (2007).
- R. Archuleta-García, M. B. Manzanares-Martínez y J. Manzanares-Martínez, "Una descripción del método de ondas planas para el cálculo de bandas fotónicas," Rev. Boliviana de Fis. Vol. 13,79-85 (2007).
- A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, and J. A. Gaspar-Armenta, "Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two- dimensional photonic crystals," J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 23, 2249-2256 (2006).
- 8. D. Bria, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, L. Dobrzynski, J. P. Vigneron, E. H. El Boudoti, and A. Nougaoui, "Band structure and omnidirectional photonic band gap in lamellar structures with left-handed materials," Phys. Rev. E Vol.69, 066613 (2004).
- F. Villa-Villa, J. A. Gaspar-Armenta, and A. Mendoza-Suárez, "Surface modes in one dimensional photonic crystals that include left handed materials," J. Electromagn. Waves Appl. Vol.21, 485–489(2007).
- A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, J. A. Gaspar-Armenta, "Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive left-handed materials and dielectrics in the unit cell" J. Opt. Soc. Am. B Vol.24, 3091-3098 (2007).
- 11. A. Mendoza-Suárez and E. R. Méndez, "Light scattering by a reentrant fractal surface," Appl. Opt. 36, 3521-3531 (1997).
- 12. A. A. Maradudin, T. Michel, R. A. McGurn y E. R. Méndez, "Enhancedbackscattering of light from a randomgrating," Ann. Phys. (N.Y.), 203(2): 255-307 (1990).

## MODELO MATEMÁTICO DE DIFUSIÓN EN LA NEFRONA: PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA CON IMPACTO BIOLÓGICO

Sanvicente Tapia Omar Alfonso, Rafael Zamorano Ulloa

Escuela Superior de Física y Matematicas – Instituto Politecnico Nacional.

#### RESUMEN

Las nefronas son la unidad fundamental de los riñones, y estos son la parte más importante del aparato urinario pues en ellos se llevan a cabo todas las tareas de este sistema: mediar el PH sanguíneo, presión arterial, glucosa sanguínea y la excreción. Las nefronas son capilares en donde toma lugar la filtración glomerular, la cual se lleva a cabo por fenestración. Dado que se trata de un capilar su geometría es muy próxima a un cilindro, es factible modelar la filtración como un fenómeno de difusión. Partiendo de la ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas modelamos la unidad de filtrado principal del riñón, es decir la nefrona. Por el método de separación de variables hallamos 3 soluciones espaciales y una temporal, empleamos condiciones a la frontera para determinar la solución particular de este sistema. Las soluciones del modelo son: Bessel para la parte radial, solución periódica (solución trigonométrica) para la parte azimutal y una solución no periódica para el eje Z, en la parte temporal tenemos función decreciente. La importancia de la solución temporal radica en que esta gobierna el tiempo en que se lleva a cabo el filtrado, en los valores podríamos identificar patologías en la nefrona.

#### INTRODUCCIÓN

Los riñones son la parte más importante del aparato urinario. Este último está compuesto por las venas renales, las arterias renales, los riñones, los ureteros, la vejiga urinaria y la uretra. Por otra parte los riñones se componen de las nefronas, las cuales son la unidad fundamental del filtrado. Es aquí donde se llevan a cabo las distintas tareas que tiene este sistema, pues los ureteros, la vejiga y la uretra son casi conductos de paso una vez realizado el trabajo. Para producir la orina las nefronas y los túbulos colectores desarrollan 3 procesos básicos: filtración, reabsorción y secreción.



En este trabajo nos centraremos en la filtración glomerular.

## TEORÍA

La filtración glomerular: Es el primer paso en la producción de la orina. El agua y la mayor parte de los solutos atraviesan la pared de los capilares glomerulares, donde se filtran e ingresan en la

capsula de Bowman (dejar claro que es la capsula de Bowman con referencia a una figura), esto se hace por osmosis (la osmosis consiste en una pared semipermeable la cual deja pasar ciertos compuestos) y luego pasa por el túbulo renal. (Ilustración 3)



Ilustración 2 Las nefronas en conjunto son las encargadas de la filtración y estas mismas son las que conforman el riñón

El principio de filtración, es el uso de presión para obligar a los líquidos y los solutos a que atraviesen una membrana, es el mismo en los capilares glomerulares que en el resto de los capilares del cuerpo sin embargo, el volumen de líquido filtrado por el corpúsculo renal (ilustración 3)es mucho mayor que en otros capilares, debido a tres razones:



Ilustración 3 Capsula de Bowman

1. Los capilares glomerulares tienen una gran superficie para la filtración porque son largos y extensos 30-40 mm y su radio es variable correspondiente a cada sección.

2. La membrana de filtración es delgada y porosa. A pesar de tener varias capas, su espesor

es solo de 0,1  $\mu m$ . Los capilares glomerulares también son 50 veces más permeables que los capilares de la mayor parte de los tejidos, principalmente, debido a sus grandes fenestraciones.



Ilustración 4 Proceso de filtración por fenestración.



Ilustración 5 Diagrama que ilustra las etapas del filtrado glomerular.

3. La presión en el capilar glomerular es alta. Debido a que el diámetro de la arteriola eferente es menor que el de la arteriola aferente, la resistencia al flujo sanguíneo fuera del glomérulo es elevada (Ilustración 5). Como resultado, la presión sanguínea en los capilares glomerulares es bastante más alta que en los capilares de cualquier otro sitio del cuerpo.



Ilustración 6Trayecto en el túbulo renal haciendo énfasis en las distintas propiedades de todo el túbulo renal (como cambio de permeabilidad, cambio del ancho de los poros, etc).

## PARTE EXPERIMENTAL

Buscamos aprovechar la geometría de los capilares la cual es muy próxima a una geometría cilíndrica y aplicar un modelo matemático basado en la ecuación de difusión precisamente aprovechando la geometría de dicho órgano.

Recordando la ecuación diferencial de difusión es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\nabla^2 U(\vec{r}, \vec{t})$$

Donde  $\nabla^2 U(\vec{r}, \vec{t})$  es el Laplaciano en coordenadas cilíndricas:

Por otra parte  $U(\vec{r}, \vec{t})$  representa la concentración de iones, glucosa y demás compuestos (nos centraremos solo en la glucosa) que serán absorbidos por el cuerpo.

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Tomando una sección de la nefrona parte del túbulo renal proximal, denotándola con una longitud L, y radio r. La cual aproximaremos a una sección cilíndrica.



Ilustración 7. Visualización matemática del túbulo renal.

Cuya solución la proponemos de la forma; utilizando separación de variables:  $U = R(r)\Phi(\phi)Z(z)T(t)$ 

Dónde:

$$u = u(r, \phi, z) \ y \ T = T(t)$$

Con la función T(t), que depende únicamente del tiempo con el que el fluido pasa por la nefrona. La ecuación de difusión toma la forma:

$$\frac{\partial u * T}{\partial t} = D\nabla^2 u * T$$

Expresando la solución general de la forma:

$$U = u(r, \phi, z)T(t) = \sum_{n} [A * J_m(Kr) + B * Y_m(Kr)] * [C * sin(m\phi) + D * cos(m\phi)] * \\ * [E * sinh(k_z z) + F * cosh(k_z z)] * G * e^{-(Dk_T * t)}]$$

Aplicamos separación de variables, de derecha a izquierda, comenzando por el tiempo y obtenemos que:

$$\frac{1}{u}\nabla^2(u) = -k_T$$

Igualando a la parte temporal:

$$\frac{1}{D} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = -k_T$$

Reescribiendo la ecuación anterior tenemos que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -D * k_T * T$$

Cuya solución es:

$$T(t) = G * e^{-(Dk_T * t)}$$

Para la solución en Z se tiene:

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = Z(z)k_z^2$$

Por lo que la solución para Z debe ser tal que:

$$Z(z) = E * senh(k_z^2 z) + F * \cos h(k_z^2 z)$$

Ahora para la parte en  $\theta$  lo que tenemos por el método de separación de variables es:

$$\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -k_{\theta}^2 \Theta(\theta)$$

Por lo que la solución angular queda como:

$$\Theta(\theta) = [C * sen (m\theta) + D * cos(m\theta)]$$

Esta solución es debido a que comenzamos suponiendo que simetría azimutal y nombramos

$$(k_{\theta})^2 = m$$

En la parte radial del problema se presenta de modo "natural" (en el sentido matemático) la ecuación diferencial modificada de Bessel, de orden  $k_{\theta}$  en este modelo.

$$\frac{r^2\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r\partial R(r)}{\partial r} + \left(r^2 k_r^2 - k_\theta^2\right) R(r) = 0$$

Cuya solución esta dada de la forma:

$$R(r) = [A * J_m(r) + B * Y_m(r)]$$
  
Y tenemos la solución general de la forma:

$$U(r,\theta,z,t) = \sum \left[ \left[ A * J_m(r) + B * Y_m(r) \right] * \left[ C * sen(m\theta) + D * cos(m\theta) \right] \right]$$
$$* \left[ E * senh(z) + F * cosh(z) \right] * \left[ G * e^{-kt} \right] \right]$$

#### RESULTADOS

Para este modelo se tiene la solución general tomando en cuenta algunas condiciones de fronteras muy básicas como son:

- La difusión en las paredes de los capilares son distintas de cero.
- Simetría azimutal  $U(r_0, \theta_0, z_0, t_0) = U(r_0, \theta_1, z_0, t_0)$
- La concentración de solutos o compuestos en Z = 0 es diferente de la concentración en  $Z = Z_0$ , es decir la concentración decrece conforme avanza en la dirección de Z

Así obtenemos una solución general como:

$$U(r,\theta,z,t) = \sum \left[ \left[ A * J_m(r) + B * Y_m(r) \right] * \left[ C * sen(m\theta) + D * \cos(m\theta) \right] \right]$$
$$* \left[ E * senh(z) + F * \cosh(z) \right] * \left[ G * e^{-kt} \right] \right]$$

Las soluciones temporales de esta ecuación son de la forma



Ilustración 5 Familia de curvas de la solución temporal, podemos observar que al variar la constante k lo que obtenemos son curvas muy distintas entre si, correspondiendo al aspecto biológico como una nefrona que funciona de modo optimo (curvas de en medio) una nefrona que funciona muy rápido (primera curva de izquierda a derecha) y una curva que se aproxima a una curva, esta última estaría caracterizando a una nefrona que tarda demasiado en filtrar (posibles obstrucción de esa nefrona).

Esta solución nos permite visualizar toda una familia de curvas las cuales podrían indicar alguna

patología dentro de la nefrona

## CONCLUSIONES

La solución temporal de la ecuación diferencial de difusión nos invita a pensar en cómo es que esta nefrona está actuando. Es decir, para algunos valores lo que tendremos es que la nefrona está funcionando de modo correcto y para otro conjunto de valores la nefrona estará funcionando de modo incorrecto.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1. D. G. Zill, M. R. Cullen (2006) Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. International Thomson.
- 2. Gerard J. Tortora, Bryan Derrickson (2013) Principios de Anatomía y Fisiología 13a Ed. Editorial Medica Panamericana Sa de.

## EXCITACIÓN DE PLASMONES DE SUPERFICIE EN UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FO-TÓNICO QUE CONTIENE METAMATERIAL DISPERSIVO

José Eduardo Medina Magallón, Héctor Pérez Aguilar, Petr Zhevandrov Bolshakova, Alberto Mendoza Suárez

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" de la UMSNH, Morelia, Mich.

## RESUMEN

La plasmónica es un área de investigación de gran desarrollo dentro del campo de la nanofotónica que se caracteriza principalmente en el estudio de los procesos de interacción de la luz con los electrones de conducción en interfaces metal-dieléctrico o en nanoestructuras metálicas. Esta manipulación de la luz está basada en las propiedades de los plasmones de superficie (SPs) que son oscilaciones colectivas del gas de electrones en un metal. De esta manera, al acoplarse las ondas de luz con las oscilaciones electrónicas forman una nueva cuasipartícula llamada polaritón de plasmón superficial (SPP) que se propaga a través de la superficie de la estructura de tamaño nanométrico. En este trabajo se presenta un estudio numérico de una guía de ondas de cristal fotónico (PCW) que contiene inclusiones cilíndricas con superficies lisas de metamaterial dispersivo. Los cálculos numéricos se realizaron mediante la técnica conocida como el Método de la Ecuación Integral. Primeramente, se ilustran los resultados numéricos de una PCW de longitud infinita que contiene inclusiones de metamaterial dispersivo, mostrando que se tiene la presencia de un modo SP a la frecuencia  $\omega_r = 0.7506$ . Posteriormente, cuando consideramos la PCW de longitud finita, el resultado de la reflectancia muestra la presencia del posible modo superficial alrededor de  $\omega_r = 0.7510$ , para ambas polarizaciones. Estas ondas de superficie en la guía de ondas propuesta permiten ser otra alternativa de desarrollo de innumerables aplicaciones en diversos campos de la ciencia y la tecnología que abarcan desde la biomedicina hasta las telecomunicaciones.

## INTRODUCCIÓN

El reciente desarrollo de guías de onda de cristal fotónico ha creado interés entre científicos de diferentes campos [1]. Los Cristales Fotónicos (CFs) constituyen arreglos periódicos de diferentes materiales con una celda unitaria de dimensión del orden de la longitud de onda, tienen el potencial de desarrollar una nueva tecnología de circuitos ópticos integrados. Otros tipos de materiales estructurados que han atraído recientemente mucho interés son los metamateriales o materiales izquierdos (LHMs), que deben su nombre al hecho de que los vectores E, H y k forman un sistema izquierdo para una onda que se propaga a través de estos medios.

Este artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 presentamos el sistema en estudio e introducimos un método integral el cual es utilizado para el cálculo de los modos electromagnéticos, así como la respuesta óptica de nuestro sistema [2]. En la Sec. 3 presentamos algunos resultados numéricos preliminares del cálculo de la función determinante ( $Det(\omega)$ ) de una PCW que contiene inclusiones con superficies lisas de LHM dispersivo, los cuales exhiben la presencia de un modo SPP en el sistema propuesto para la polarización TE. También, mostramos los resultados correspondientes a la PCW de tamaño finito que está compuesta por LHM, estos advierten la presencia de un modo SPP para ambas polarizaciones; es decir, tanto en TE como en TM. Finalmente, se presentan las principales conclusiones de este trabajo en la Sec. 4.

# TEORÍA

El interés de este trabajo se refiere a la excitación de modos SPP en una guía de onda de cristal fotónico (PCW) de superficies planas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de metamaterial dispersivo mediante la aplicación de un método numérico basado en la segunda identidad de Green para resolver la ecuación de Helmholtz. La celda unitaria está compuesta de dos medios distintos,  $\varepsilon_1(\omega)$  y  $\varepsilon_2(\omega)$ , como se ve en la Fig. 1.



Fig. 1. Celda unitaria cuadrada de longitud *D* está compuesta de dos materiales diferentes con constantes dieléctricas  $\varepsilon_1(\omega)$  y  $\varepsilon_2(\omega)$ .

En caso de que alguno de los materiales que componen la PCW se trate de un medio conductor, el comportamiento de este al interactuar con la luz se hará a través del Modelo de Drude, ya que este modelo describe de manera adecuada las características de los medios conductores [3].

En este modelo, existe una frecuencia crítica llamada frecuencia de plasma, por debajo de la cual la permitividad eléctrica es negativa y en consecuencia la propagación de ondas electromagnéticas está prohibida. Por encima de la frecuencia de plasma la permitividad es positiva, el medio es transparente y permite la propagación de ondas electromagnéticas. El índice de refracción del medio conductor está dado por

$$u^2 = 1 - \left[\frac{\omega_p}{\omega^2 + i\omega\gamma}\right],$$

donde  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$  es la frecuencia de plasma. Considerando  $\varepsilon(\omega) = n(\omega)^2$ , tenemos que la función dieléctrica para medios conductores está dada por

r

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega) = n(\omega)^2 = \left(1 - \frac{\omega_p}{\omega^2 + \gamma^2}\right) + i\left(\frac{\omega_p^2\gamma}{\omega^3 + \omega\gamma^2}\right).$$
(2)

Observamos que ya no es constante ya que depende de la frecuencia de la radiación que se utiliza para iluminar el material.

Por otro lado, cuando se tiene un medio de LHM dispersivo, las propiedades ópticas del metamaterial están dadas por  $\varepsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$  que se expresan en la forma [4]

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad y \quad \mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{3}$$

con la frecuencia de plasma  $\omega_p$  y la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ . Estas funciones nos permiten determinar la región donde el metamaterial presenta un índice de refracción negativo dentro de la gama de frecuencias  $\omega_0 < \omega < \omega_{LM}$  con los parámetros  $\omega_p = 10/2\pi$ ,  $\omega_0 = 4/2\pi$ , F = 0.56 y  $\omega_{LM} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-f}} = 0.9597$  [5].

À continuación se describe brevemente el método numérico utilizado, el cual es conocido como Método de la Ecuación Integral [2, 6, 7].

El Método de la Ecuación Integral

Suponiendo la dependencia temporal  $e^{-i\omega t}$  para los campos electromagnéticos, la ecuación de onda puede ser transformada a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi_i(\mathbf{r}) + k^2 \Psi_i(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

En esta ecuación  $\Psi_j(\mathbf{r})$  representa el campo eléctrico  $E_z$ , en el caso de polarización TE en el (4) *j*-ésimo medio (Fig. 2) y  $\mathbf{r} = \mathbf{x}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\hat{\mathbf{j}}$  es el vector de posición en el plano X-Y. La magnitud del vector de onda viene dada por  $\mathbf{k}_j = \mathbf{n}_j(\omega)\omega/c$  siendo  $\mathbf{n}_j(\omega) = \pm \sqrt{\mu_j(\omega)\varepsilon_j(\omega)}$  el índice de refracción que implica las propiedades de los materiales que se dan en términos de la permeabilidad magnética  $\mu_j(\omega)$  y de la permitividad eléctrica que está dada por  $\varepsilon_j(\omega)$ , ambas funciones dependen de la frecuencia  $\omega$ . La velocidad de la luz es indicada por *c*. El signo que aparece en la ecuación del índice de refracción debe ser tomado como negativo cuando se considera un metamaterial y positivo cuando el medio es el vacío o un material dieléctrico o conductor. Consideramos una PCW superficies planas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de metamaterial dispersivo (Fig. 2).



Fig. 2. Descripción gráfica de la PCW con superficies conductoras planas y una disposición periódica de inclusiones cilíndricas de LHM dispersivo. La región descrita por los contornos Γ define la celda unitaria del sistema con la periodicidad en la dirección horizontal en el caso de la guía de tamaño infinito.

En la Fig. 2, *P* es el período del sistema en la dirección *X*, *b* es la distancia entre las superficies planas y la región encerrada por las curvas  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_5$  se puede considerar como una celda unitaria del sistema. El conjunto de un número infinito de celdas unitarias es una guía de ondas de longitud infinita representada por un cristal perfecto.

Debido a la periodicidad en la dirección X y la forma de la Ec. (4), el teorema de Bloch se puede aplicar para tal dirección. De esta manera se puede obtener la condición de periodicidad  $\Psi(x - P, y) = e^{-ikP}\Psi(x, y)$ , donde *k* es el vector de Bloch unidimensional.

Para determinar los modos tenemos que encontrar la relación de dispersion  $\omega = \omega(k)$ . Por lo que, consideramos una función de Green para una geometría bidimensional que puede ser utilizada para resolver la ecuación de Helmholtz, la cual es considerada como  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ , donde  $H_0^{(1)}(z)$  es la función de Hankel de primera clase y orden cero. Teniendo en cuenta la geometría de la celda unitaria que se muestra en la Fig. 2 y aplicando el segundo teorema de Green bidimensional para las funciones  $\Psi$  y *G*, se obtiene la expresión

$$\frac{1}{4\pi}\oint\left[\frac{\partial \mathsf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}}\Psi(\mathbf{r}')-\frac{\partial \mathsf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}}\Psi(\mathbf{r}')\right]ds'=\theta(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}),$$

donde  $\theta(\mathbf{r}) = \mathbf{1}$  si r está en el interior de la celda unitaria y  $\theta(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  si no lo está, *ds*' es el <sup>(5)</sup> diferencial de longitud del arco,  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector normal hacia el exterior para  $\Gamma_j$ , y el punto de observación r se separa infinitesimalmente del contorno exterior  $\Gamma_i$  a la celda unitaria.

Haciendo una discretización de los contornos  $\Gamma_j$  podemos representar numéricamente la Ec. (5), a través de un sistema lineal algebraico  $M(\omega)F(\omega) = 0$  que tiene una matriz representativa asociada, M, que depende de la frecuencia  $\omega$  y el vector de Bloch k. Dado que el sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución no trivial puede obtenerse si el determinante de tal matriz es cero. Para determinar la frecuencia,  $\omega$ , definimos la función

$$Det(k, \omega) = \ln(|\det(M)|)$$

Numéricamente esta función presenta puntos mínimos locales que nos darán la relación de dispersión numérica  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  que determina la estructura de bandas y podemos reconocer que este sistema es un cristal fotónico. (6)

Respuesta óptica de una guía de onda de cristal fotónico

Ahora, consideremos el problema de calcular la reflectancia de una guía de ondas de cristal fotónico con longitud finita que se ilumina con un campo incidente  $\Psi_{inc}(\mathbf{r}, t) = \Psi_{inc}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  (Fig. 2). El sistema formado por dos placas paralelas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas se considera como un sistema de *M* cuerpos. La región 0 se caracteriza por un índice de refracción  $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$  (real),

y las regiones 1 a *M* están definidas por las curvas  $\Gamma_j$  y se caracteriza por los correspondientes índices de refracción  $n_j$  o, alternativamente, por las constantes dieléctrica  $\varepsilon_j(\omega)$ . Las curvas que describen los perfiles se pueden escribir en términos de un solo parámetro  $t_j$  como  $\mathbf{r}_j = [\xi(t_j), \eta_j(t_j)]$ . De manera análoga al caso de una guía de ondas infinita, empleando la Ec. (4), el segundo teorema integral de Green y haciendo una aproximación del punto de observación en la región 0 a la superficie de la región *j*, se obtienen las siguientes ecuaciones integrales acopladas

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi^{(0)}_{inc}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} \right] ds, \tag{7}$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[ \frac{f_j}{G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} \right] \delta_{\tau_j} ds$$

 $\mathbf{0} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[ \frac{f_j}{f_0} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{f_{ij}}{\partial \mathbf{n}} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{f_{ij}}{\partial \mathbf{n}} \right] \delta_{ij} ds, \tag{8}$ donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r})$  representa el campo incidente y la suma de las integrales el campo esparcido, con i = 1 hasta M y las expresiones  $f_{0,j} = \varepsilon_{0,j}(\omega)$  para polarización TE y  $f_{0,j} = 1, \mu_{0,j}(\omega)$  para polarización TM, dependiendo de que material sea el j-ésimo medio.

Las Ecs. (7) y (8) constituyen un conjunto de 2M ecuaciones integrales inhomogéneas acopladas que pueden resolverse numéricamente para obtener los valores límite del campo y su derivada normal sobre la superficie de los cuerpos esparcidores. El campo incidente se puede expresar en términos de su espectro angular

$$\Psi_{inc}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} A(q,k_y) e^{i[qx-\alpha_0(q)y]} dq,$$

 $\cos \alpha_0(q) = [(\omega/c)^2 - q^2], A(q, k_y) = \psi_0 \sqrt{\pi} e^{-g^2(q-k_y)^2/4 + i\alpha_0(q)d} \text{ y } k_y = n_0 \sin \theta_0.$ (9) Con las consideraciones anteriores se tiene que la potencia incidente a través del plano  $L_x L_y$  está dada por

$$P_{inc}(k_y) = L_z \frac{\pi}{2} g \alpha_0(k_y) \frac{c^2}{8\pi\omega},$$
(10)

donde se supuso que  $(\omega/c)g \gg 1$ . La potencia esparcida es

$$P_{sc}(k_{y}) = L_{z} \frac{c^{2}}{8\pi\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-n_{0}(\omega/c)}^{n_{0}(\omega/c)} \alpha_{0}(q) |S(q, k_{y})|^{2} dq$$
(11)

donde

$$S(q, k_y) = -\frac{i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \left[ \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\partial \Psi^{(0)}(t_j)}{\partial n_j} \right) e^{i[qx(t_j) - \alpha_0(q)y(t_j)]} d(t_j) \right].$$
(12)

Finalmente utilizando las Ecs. (10) y (11), se obtiene la reflectancia R como

$$R(k_y) = \frac{P_{inc}(k_y)}{P_{sc}(k_y)}.$$
(13)

#### RESULTADOS

A continuación presentamos el análisis numérico de la respuesta óptica de una guía de ondas de cristal fotónico, de tamaño infinito o finito que está compuesta por dos superficies planas y un arreglo de inclusiones cilíndricas de LHM dispersivo; mediante el cálculo de la función determinante (Ec. (6)) para cuando la PCW sea de tamaño infinito y mediante el cálculo de la reflectancia R (Ec. (13)) para la PCW finita.

Como el objetivo de este trabajo es estudiar la excitación de SPPs por medio de metamateriales dispersivos, vamos a considerar ahora una PCW formada con dos superficies planas perfectamente conductoras y un arreglo periódico de inclusiones cilíndicas de LHM dispersivo.

Tomamos como referencia los resultados obtenidos por Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar en el 2015 [8], que muestran la presencia de un modo plasmónico (SPP) en una PCW de longitud infinita para posteriormente hacer una generalización. En la Fig. 3(a) se presentan los resultados de la función determinante  $D(k_r, \omega_r)$  (Ec. (6)) como una función de la frecuencia. La posición del extremo mínimo

identifica la frecuencia del modo con el valor  $\omega_r = 0.7519$ . Además, en la Fig. 3(b) se ilustra la intensidad del campo eléctrico dentro de la celda unitaria que contiene la inclusión de LHM dispersivo para esta frecuencia. Este modo particular que existe en la interfaz LHM-vacío, se le conoce como un modo de SPP con una frecuencia  $\omega_r^{PSW} = \omega_0 \sqrt{2/(2-F)} = 0.7502$  [9]. Este resultado fue obtenido para el caso de una celda unitaria con los parámetros geométricos:  $b = 4\pi$ ,  $P = 2\pi$  y f = 0.05 la fracción de llenado.



Fig. 3. (a) Función  $D(0, \omega_r)$  para una PCW formada con dos superficies planas perfectamente conductoras y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de LHM dispersivo. (b) Distribución de campo eléctrico a la frecuencia  $\omega_r = 0.7519$ .

Dado que nuestro objetivo también se centra en estudiar la excitación de SPPs en guías de onda de cristal fotónico de tamaño finito que contengan metamaterial dispersivo, procedemos a considerar una PCW truncada que está formada con dos superficies planas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de LHM dispersivo en la dirección *X* (ver Fig. 2).

Para abordar este caso vamos a considerar primero la teoría usada por el grupo de Ricardo A. Depine en su trabajo del 2011 [10] donde mostraron las características de la propagación de los polaritones de plasmones superficiales (modos propios superficiales) en sistemas ATR (configuración de Kretschmann) con metamateriales que a diferencia del caso convencional, donde los polaritones superficiales tienen velocidad de fase positiva y aparecen en una de las superficies de una guía metálica. En este caso los polaritones superficiales se propagan a lo largo de una de las superficies de una guía de metamaterial. Dependiendo de la elección de los parámetros constitutivos del metamaterial, pueden tener velocidades de fase tanto positivas (progresivas) como negativas (regresivas) [10].

En las Figs. 4(a), (b), (c) y (d) se muestran las Reflectancias *R* como función dela frecuencia  $\omega_r$  bajo polarización TE de las PCWs de tamaño finito con inclusiones de superficie lisa. La PCW tiene una separación entre las placas de  $b = \pi$  para todos los casos. En la Fig. 4(a) mostramos los resultados que bajo incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) hemos obtenido para R variando el número de periodos (NP) de la guía de ondas con una fracción de llenado, f = 0.005, para todos los casos. Tomando en consideración los resultados mostrados en la Fig. 4(a), elegimos que el número de periodos de la PCW sea 6, ya que el mínimo que presenta está más cerca de  $\omega_r^{PSW} = 0.7502$ , que es el valor de frecuencia que nos interesa. En la Fig. 4(b) mostramos los resultados de *R* obtenidos de la PCW de 6 periodos para distintos anchos de la abertura b. Posteriormente, de los resultados mostrados en la Fig. 4(b) elegimos el ancho de la abertura de  $b = \pi$ , ya que para este tenemos mejor definición en el mínimo que aparece en la reflectancia, y procedemos a hacer el cálculo de *R* con diferentes fracciones de llenado para la PCW de 6 periodos. En la Fig. 4(c) se presentan estos resultados. Por último, al considerar los resultados de la Fig. 4(c) elegimos a la fracción de llenado f = 0.005 y hacemos el cálculo de *R* a diferentes ángulos de incidencia ( $\theta_0$ ) para la PCW de 6 periodos. Estos son mostrados en la Fig. 4(d).



Fig.4. Reflectancia bajo polarización TE de las PCWs, correspondientes (a) a diferentes números de periodos (NP) de la guía de ondas, (b) de una guía de 6 periodos y distintas aberturas b, (c) para la PCW de abertura  $b = \pi$  con distintos tamaños de f, y (d) para la PCW del caso anterior con inclusiones de fracción de llenado f = 0.005 a distintos ángulos de incidencia  $\theta_0$ .

De los resultados mostrados en la Fig. 5(a) observamos la presencia de un mínimo en la frecuencia  $\omega_r = 0.72978$ , que es muy marcado en la reflectancia. La profundidad del valle donde se encuentra el mínimo se hace más o menos pronunciada, dependiendo del número de periodos de la PCW, teniendo que para la guía de 6 periodos el mínimo se encuentra a una reflectancia más baja. Ahora, analizando los resultados mostrados en la Fig. 5(c), observamos que la posición del mínimo no se ve afectada al considerar distintos tamaños de la inclusión cilíndrica; es decir, la reflectancia es prácticamente igual de baja para las distintas fracciones de llenado de la inclusión. Por último, de los resultados mostrados en la Fig. 5(d) notamos que tal mínimo cambia de posición dependiendo del ángulo de incidencia  $\theta_0$ , encontrando que para un ángulo de  $\theta_0 = 10^\circ$  tenemos mayor transmisión de la luz que interactúa con la PCW. Más aún, para un ángulo de alrededor de  $\theta_0 = 25^\circ$  obtuvimos que el mínimo en la reflectancia se da a la frecuencia de  $\omega_r = 0.7510050$ , haciéndonos pensar que se trate de la posible existencia de un modo SPP en la PCW bajo estudio; ya que esta frecuencia tiene buena correspondencia a la encontrada para el modo SPP que se excita en la PCW infinita que contiene LHM.

De manera similar, consideramos iluminación bajo polarización TM. En las Figs. 5(a), (b), (c) y (d) se muestran las Reflectancias *R* como función de la frecuencia  $\omega_r$  de las PCWs de tamaño finito con inclusiones de superficie lisa. La PCW tiene una separación entre las placas de  $b = \pi$  para todos los casos. En la Fig. 5(a) mostramos los resultados que bajo incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) hemos obtenido para *R* variando el número de periodos (NP) de la guía de ondas con una fracción de llenado, f = 0.005, para todos los casos. Tomando en consideración los resultados mostrados en la Fig. 5(a), y de manera análoga al caso de la polarización TE, elegimos que el número de periodos de la PCW sea 6. En la Fig. 5(b) mostramos los resultados de *R* obtenidos de la PCW de 6 periodos para distintos valores de *b*. Posteriormente, elegimos el ancho de la apertura de  $b = \pi$ , y procedemos a hacer el cálculo de *R* con diferentes fracciones de llenado para la PCW de 6 periodos. En la Fig. 5(c) se presentan los resultados. Por último, elegimos a la fracción de llenado f = 0.005 y hacemos el cálculo de *R* a diferentes ángulos de incidencia ( $\theta_0$ ) para la PCW de 6 periodos. Estos son mostrados en la Fig. 5(d).



Fig.5. Reflectancia bajo polarización TM de las PCWs, correspondientes (a) a diferentes números de periodos (NP) de la guía de ondas, (b) de una guía de 6 periodos y distintas aberturas b, (c) para la PCW de abertura  $b = \pi$  con distintos tamaños de f, y (d) para la PCW del caso anterior con inclusiones de fracción de llenado f = 0.005 a distintos ángulos de incidencia  $\theta_0$ .

Similarmente al caso de la polarización TE, encontramos que hay un mínimo para la frecuencia muy marcado en la reflectancia cuando consideramos iluminación a incidencia normal. De igual manera, la profundidad del valle donde se encuentra el mínimo se hace más o menos pronunciada, dependiendo del número de periodos de la PCW, teniendo que para la guía de 6 periodos el mínimo se encuentra a una reflectancia más baja, para una frecuencia de  $\omega_r = 0.731181$ . De la Fig. 5(c), podemos observar que la posición del mínimo no se ve afectada al considerar distintos tamaños de la inclusión cilíndrica; es decir, la reflectancia es prácticamente igual de baja para las distintas fracciones de llenado de la inclusión. También notamos que el mínimo cambia de posición dependiendo del ángulo de incidencia  $\theta_0$ , encontrando que para un ángulo de  $\theta_0 = 10^\circ$  tenemos mayor transmisión de la luz que interactúa con la PCW. Más aún, para un ángulo de alrededor de  $\theta_0 = 25^\circ$  obtuvimos que el mínimo en la reflectancia se da a la frecuencia de  $\omega_r = 0.7510140$ . Esto nos hace pensar en que se trata de la posible existencia de un modo SPP en la PCW bajo estudio; ya que esta frecuencia tiene buena correspondencia a la encontrada para el modo SPP que se excita en la PCW infinita que contiene LHM.

Teniendo en mente los resultados de la Figs. 4 y 5(d) para la reflectancia, procedemos a encontrar *R* como función de  $\theta_0$  para ambas polarizaciones. Para hacer este cálculo, procedemos a dejar la frecuencia como una constante, que en este caso será:  $\omega_r = 0.7510050$  para la polarización TE y  $\omega_r = 0.7510140$  para la polarización TM. Esto es porque en estos valores tienen mejor aproximación a la frecuencia de interés  $\omega_r = 0.7502$ . En la Fig. 6(a) y (b) presentamos los resultados del comportamiento encontrado de *R* como función de  $\theta_0$  para polarización TE y TM, respectivamente.



Fig. 6. Reflectancia R como función de  $\theta_0$ , calculada bajo polarización (a) TE para la frecuencia  $\omega_r = 0.7510050$  y (b) TM para la frecuencia  $\omega_r = 0.7510140$ .

Finalmente, en la Fig. 7 mostramos una comparación de la reflectancia obtenida para una u otra polarización de una guía de ondas de 6 periodos con inclusiones de fracción de llenado de f = 0.005.



Fig. 7. Comparación de las Reflectancias obtenidas bajo polarización TE y TM para la PCW de LHM con inclusiones de fracción de llenado, f = 0.005, a incidencia normal.

Se observa de los resultados obtenidos para la PCW de tamaño finito, que la respuesta óptica es prácticamente idéntica para ambas polarizaciones, en el caso de que la guía esté constituida completamente de LHM, como se ve en la Fig.7. Sin embargo, de acuerdo a la teoría utilizada, las características que adquiere la luz que se logra transmitir por la guía de ondas de LHM es diferente para ambas polarizaciones; es decir, las velocidades de fase son positivas (progresivas) para la polarización TM o negativas (regresivas), para cuando se trate de la polarización TE.

#### CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos aplicado dos métodos numéricos integrales para estudiar una PCW que contiene metamaterial, la cual puede ser da tamaño infinito o finito. La guía de ondas está formada por dos placas planas perfectamente conductoras (guía de tamaño infinito) o de metamaterial (guía finita) planas que contienen un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de metamaterial. Con uno de los métodos integrales se determinó la intensidad de campo de la frecuencia y modos. Así, hemos encontrado un modo de SPP en la interfaz de vacío-metamaterial del sistema propuesto. Para el caso de una PCW de longitud finita que está formada por dos placas planas y que contienen un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de superficie lisa de metamaterial, el resultado de la reflectancia muestra la presencia del posible modo alrededor de  $\omega_r = 0.75$ , para ambas polarizaciones. Observamos que, al analizar los resultados obtenidos en este trabajo, podemos decir que hay una posible existencia de un modo SPP en la guía de ondas estudiada, ya que a un ángulo de incidencia de alrededor,  $\theta_0 = 25^\circ$ , obtuvimos que el mínimo de la reflectancia *R* se da una frecuencia de  $\omega_r = 0.7510$ , para ambas polarizaciones. Esta tiene una gran correspondencia con la frecuencia del modo encontrado en la guía infinita.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. Y. A. Vlasov, M. O'Boyle, H. F. Hamann and S. J. McNab, "Active control of slow light on a chip with photonic crystal waveguides", Nature, Vol 438, 2005, pp. 65-69.
- 2. A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa and J. A. Gaspar-Armenta, "Plasmonic modes in a dispersive left handed material optical fiber," Rev. Mex. Fis., Vol. 54, 2008, pp. 82-86.
- 3. G. R. Fowles, Introduction to modern optics (Dover Publications, Inc., New York, 2th edition, 1968).
- 4. J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, "Low frequency plasmons in thin-wire structures", Journal of Physics: Condensed Matter, Vol. 10, 1998, pp. 4785-4809.
- 5. R. Ruppin, "Surface polaritons and extinction properties of a left-handed material cylinder," J. Phys.: Condens. Matter, Vol. 16, 200, pp. 5991-5998.
- A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, and J. A. Gaspar-Armenta, "Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two-dimensional photonic crystals", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 23, 2006, pp. 2249-2256.
- A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, and J. A. Gaspar-Armenta, "Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive left-handed materials and dielectrics in the unit cell", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 24, 2007, pp. 3091-3098.
- A. Mendoza-Suárez and H. Pérez-Aguilar, "Numerical integral methods to study plasmonic modes in a photonic crystal waveguide with circular inclusions that involve a metamaterial", Opt. Mater, Vol. 28, 2015, pp. 1156-1159.
- 9. Ruppin, R., "Surface polaritons and extinction properties of a left-handed material cylinder", J. Phys. Condens. Matter, Vol. 16, 2004, pp. 5991-5998.
- 10. R. A. Depine, M. Cuevas y M. A. Zeller, "Polaritones superficiales plasmónicos en sistemas ATR con metamateriales: problema homogéneo", Anales AFA, Vol. 22, 2011, pp. 11–18.

## OSCILACIÓN DE PÉNDULO SUJETO A UN OBJETO EN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO.

María Guadalupe Hernández Morales, Rodolfo Espindola Heredia, Gabriela Del Valle Díaz Muñoz, Damian Muciño Cruz, Pedro Jesus Diaz Tecanhuey, Rubith Rubio Romero, Santiago Guijosa Guadarrama, Ángel Omar De Luna Gallardo y Flor Carmina Sánchez García.

Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco rodolfoespiher@yahoo.com.mx

## RESUMEN

En este trabajo acoplamos un péndulo de longitud (*I*) y masa (*m*) a un objeto de masa (*M*) que se mueve en dirección horizontal con Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA). El péndulo pivotea en un punto sobre el objeto de masa *M*. Por medio de la mecánica de Newton y Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento teóricamente, las cuales se resuelven, para caracterizar el movimiento pendular, analíticamente se estudian las pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio. Elaboramos el prototipo experimental al desplazar un objeto sobre un riel con el péndulo de las características mencionadas para corroboran los resultados analíticos con el prototipo experimental. Numéricamente verificamos tanto las expresiones teóricas como los resultados experimentales, todo ello para encontrar la relación entre el periodo del péndulo (*T*) y la frecuencia (*ω*) con la aceleración (*a*) del MUA.

## INTRODUCCIÓN

La dinámica vectorial es un tema de interés en el estudio de la mecánica clásica, en este trabajo presentamos un sistema que en principio puede suponerse simple como es el caso de un móvil con un Movimiento Acelerado (MA), al cual se le ha acoplado un péndulo. Para dicho sistema consideramos la formulación Lagrangiana para establecer las ecuaciones de movimiento. En la literatura se encuentran una variedad de problemas similares a éste, los cuales son resueltos de manera teórica por medio de la formulación newtoniana, con condiciones muy específicas. En nuestro caso se obtuvieron las ecuaciones de movimiento que rigen al sistema móvil-péndulo por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, obteniendo 2 ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales, las cuales se resuelven de manera numérica por medio del Método Runge-Kutta de orden 4 (RK4), que nos permitiré observar el comportamiento a través de los planos fase del sistema.

## TEORÍA

El sistema a estudiar es: un móvil (carrito) de masa *M* que se desplaza en línea recta sobre un riel. En la parte inferior media, se acopla un péndulo de masa *m* y longitud *l*, como lo indica la figura 1.



Figura 1: Sistema móvil-péndulo(carrito-péndulo).

Nuestro sistema de referencia lo ubicamos en la posición inicial del carrito, de manera tal, que cuando el móvil se desplaza una cierta distancia  $\vec{x}$ , el péndulo se habrá desplazado de la vertical un ángulo

 $\theta$ , por lo que resulta necesario trazar un nuevo vector que desde el centro inferior del carro donde está sujetado el péndulo inicialmente, a la posición de la masa *m*, un determinado tiempo posterior en el cual el carro se ha acelerado y por lo que ha desplazado una cierta distancia  $\vec{x}$ . Es posible formar un polígono triangular de vectores distancia, que relacione el desplazamiento del carro con la oscilación del péndulo y desplazamiento. Dicho polígono de vectores es mostrado en la figura 2.



Figura 2: Polígono triangular de vectores distancia.

Las componentes del triángulo son:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{l} \tag{1}$$

$$\vec{x} = x \, i \tag{2}$$

$$\vec{l} = l \, Sen(\theta) \, i - l \, Cos(\theta) \, j \tag{3}$$

Para obtener los valores de las energías cinéticas para cada objeto se utilizan las expresiones de la rapidez:

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}Cos(\theta) + \dot{\theta}^2 l^2$$
(4)

$$K_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}Cos(\theta) + \dot{\theta}^2l^2)$$
(5)

$$K_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{6}$$

En nuestro sistema referencia, la energía potencial para el carro será igual con cero, para el caso del péndulo la energía potencial de la masa *m* será:

$$U_m = -lmgCos(\theta) \tag{7}$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L_m = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}Cos(\theta) + \dot{\theta}^2 l^2) + lmgCos(\theta)$$
(8)

$$L_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{9}$$

$$L = L_m + L_M \tag{10}$$

$$L = \frac{1}{2} \left( m \dot{x}^2 + 2m l \dot{x} \dot{\theta} Cos(\theta) + m \dot{\theta}^2 l^2 + M \dot{x}^2 \right) + lmg Cos(\theta)$$
(11)

Donde  $L_m$  es el lagrangiano para la partícula m y  $L_M$ , es el correspondiente a la masa M, la suma de ambos nos proporciona el lagrangiano total. La ecuación de movimiento es obtenida de acuerdo con la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L - \frac{\partial}{\partial q}L = 0$$
(12)

Por lo que es necesario derivar primero con respecto a x, y después con respecto a  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 Cos(\theta) + M\dot{x}$$
(14)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + ml\left(\ddot{\theta}Cos(\theta) - \dot{\theta}^2Sen(\theta)\right) + M\ddot{x} = 0$$
(15)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}Sen(\theta) - lmgSen(\theta) + mlSen(\theta)(\dot{x}\dot{\theta} + g)$$
(16)

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L = m l \dot{x} Cos(\theta) + m l^2 \dot{\theta}$$
(17)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}L = ml\ddot{x}Cos(\theta) - ml\dot{x}\dot{\theta}Sen(\theta) + ml^{2}\ddot{\theta}$$
(18)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}L - \frac{\partial}{\partial\theta}L = \ddot{x}Cos(\theta) + gSen(\theta) + \ddot{\theta}l = 0$$
(19)

Obteniendo las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$m\ddot{x} + ml\left(\ddot{\theta}Cos(\theta) - \dot{\theta}^{2}Sin(\theta)\right) + M\ddot{x} = 0$$
<sup>(20)</sup>

$$\ddot{x}Cos(\theta) + g\,Sen(\theta) + \ddot{\theta}l - ml\dot{x}\,Cos(\theta) - ml^2\dot{\theta} = 0$$
(21)

Se tiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas, por lo que es importante despejar  $\ddot{x}$  de la ecuación (21) y sustituirla en (20), para obtener una ecuación sólo para  $\theta$  que será resuelta de manera numérica.

$$\ddot{x} = -\frac{m}{(m+M)} l \left( \ddot{\theta} Cos(\theta) - \dot{\theta}^2 Sin(\theta) \right)$$
(22)

$$\ddot{\theta} - ml\dot{\theta} + \frac{g}{l}\,Sen(\theta) = -\frac{\ddot{x}}{l}Cos(\theta) + m\dot{x}\,Cos(\theta)$$
(23)

## **ANÁLISIS NUMÉRICO**

El intervalo de integración se propuso desde  $a = -3\pi/4$  hasta  $b = 3\pi/4$  tal intervalo fue subdividido en 200 partes obteniendo un paso en el tiempo de simulación de  $\delta h = 0.0236$ , por lo que el error es  $err = \delta h^4 = 3.10 \times 10^{-7}$ . Realizamos 100 corridas con diferente condiciones iniciales, las cuales fueron obtenidas de manera aleatoria.

Dado que el sistema se encuentra acoplado fue necesario resolverlo simultáneamente, es decir, se programó en un código la solución para x y para  $\theta$  de manera simultánea en Mathematica Wolfram

11.0 y con uso del método RK4 se obtuvo la solución del sistema. Se requirió indicar las condiciones iniciales, las cuales se encuentran en la Tabla 1.

| Variable | Valor                 |  |  |  |
|----------|-----------------------|--|--|--|
| Xo       | 0.30 m                |  |  |  |
| Vo       | 0.10 m/s              |  |  |  |
| М        | 0.300 kg              |  |  |  |
| 1        | 0.25 m                |  |  |  |
| т        | 0.500 kg              |  |  |  |
| g        | 9.77 m/s <sup>2</sup> |  |  |  |
|          | 45°                   |  |  |  |

Los resultados de simulación corresponden a las variables:  $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$  y adicionalmente  $\ddot{x}$ , con las que construimos los espacios fases del sistema y podemos caracterizar el tipo de movimiento.

#### RESULTADOS

La figura 3 muestra el comportameineto tanto de x como de  $\theta$ en función del tiempo. La Figura 3a muestra el comportamiento angular, la cual exhibe el comportamiento armónico que se observa para el péndulo, sin embargo, dicho movimiento es afectado por la aceleración del carrito. La Figura 3b presenta el comportamiento de la componente x del carro exhibiendo de igual manera el acoplamiento del péndulo, pues lo que se obtiene si no hubiera un péndulo es una recta con cierta pendiente que correspondería a la rapidez del carrito, en la figura se aprecian ondas pendulares como efecto del péndulo acoplado al carro.





La figura 4 muestra el comportamiento de las velocidades, tanto lineal para el carrito como angular para el péndulo. La Figura 4a muestra un comportamiento armónico como era de esperarse. Sin embargo, se observa que el trazo de la gráfica es semejante al de un diente de sierra, y esto ocurre para todas las condiciones iniciales estudiadas. La Figura 4b muestra la velocidad traslacional con respecto al tiempo, el comportamiento mostrado también corresponde al efecto del acoplamiento del péndulo, por lo que hace que se aprecie un movimiento semi-armónico.



Figura 4. a) Variación de la velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto al tiempo y b) Variación de la velocidad traslacional  $\dot{x}$  con respecto al tiempo.

La Figura 5 presenta los diagramas fases tanto para el comportamiento del péndulo Figura 5a, como del carrito Figura 5b. Se observa que los planos fases del péndulo tienen un alargamiento y achatamiento con respecto al plano fase del péndulo matemático o péndulo simple, y desde luego esto es correcto debido a que la rapidez del carro afecta el comportamiento de la rapidez del péndulo, esto es tal vez el efecto observado en el comportamiento de la velocidad angular comentado en la Figura 4<sup>a</sup>. En una primera vista pareciera que el diagrama fase de ( $x vs. \dot{x}$ ) es similar a la figura 4b. Sin embargo, no es así, pues aunque son similares, no son las mismas debido a la oscilación en la velocidad lineal del carrito, dado que es pequeña parece que el efecto en el plano fase es solo compactar la velocidad.



Figura 5. a) Plano fase del péndulo y b) Plano fase del carrito.

La figura 6 muestra la relación de las interacciones entre el comportamiento del péndulo y del carrito. La posición x como función de  $\theta$ , Figura 6a, la velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto a x, Figura 6b, velocidad traslacional  $\dot{x}$  en función de  $\theta$ , Figura 6c, y la velocidad traslacional  $\dot{x}$  en función de la velocidad angular  $\dot{\theta}$  Figura 6d.



Figura 6. a) La posición x en función de  $\theta$ , b) la velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto a x, c) la velocidad traslacional  $\dot{x}$  en función de  $\theta$  y d) la velocidad traslacional  $\dot{x}$  en función la velocidad angular  $\dot{\theta}$ .

Como la aceleración del carrito resulta ser una función que sólo depende del comportamiento del ángulo y su velocidad, dentro de la simulación también posible evaluar para las distintas corridas el comportamiento de la aceleración como función del tiempo, mostrado en la Figura 7a, así como construir el diagrama fase en el espacio de celeridades, mostrado en la Figura 7b, éste último exhibe un comportamiento interesante al presentar una especie de "atractor".



Figura 7. a) Aceleración del carrito en función del tiempo y b) Plano fase en el espacio de velocidades.

Finalmente presentamos en la Figura 8 los resultados relacionados de la superficie para la aceleración  $\ddot{x}$  como función de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ , la cual permite entender mucho mejor el comportamiento del sistema y caracterizarlo adecuadamente.



Figura 8 Distintas vistas de la aceleración del carro como función de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .

## CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró el análisis teórico de un sistema formado por un móvil con un péndulo acoplado.

Se obtuvo el Lagrangiano del sistema acoplado a partir de las energías cinética y potencial, por medo de la ecuación de Euler Lagrange se obtuvieron las dos ecuaciones del movimiento una para el movimiento angular del péndulo y otra para el movimiento lineal del carrito, ambos movimientos se encuentran acoplados.

Se resolvieron de manera numérica las ecuaciones por medio del método RK4 obteniendo resultados para  $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta} \vee \ddot{\theta}$ .

Con los resultados numéricos obtenidos se construyeron los diagramas fases, se muestra la dependencia entre las variables de movimiento. Se presenta el efecto que tiene el desplazamiento del carrito sobre el movimiento del péndulo, así como el efecto que presenta la oscilación del péndulo sobre la rapidez y aceleración del carrito.

Como perspectiva resta implementar la parte experimental del sistema para verificar y corroborar los resultados de simulación.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. Hauser W., "Introducción a los Principios de Mecánica", Uteha, 1969.
- 2. Marion J. B., "Dinámica Clásica de Partículas y Sistemas", Reverté, 2003.
- 3. Fowles G. R., Cassiday G. L., "Analytical Mechanics", Thomson Brooks/Cole, 7ma Ed., 2005.
- 4. Thornton S. T., Marion J. B., "Classical Dynamics of Particles and Systems", Thomson Brooks/Cole, 5a ed., 2004.
- 5. Taylor J. R., "Classical Mechanics", Ira ed., University Science Books, 2005.

# SIMULACIÓN Y MODELADO DEL FENÓMENO COOPERACIÓN: MECANISMO DE RECIPRO-CIDAD INDIRECTA POR REPUTACIÓN

Mario Ignacio González Silva, Ricardo Armando González Silva, Héctor Alfonso Juárez López

Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de los Lagos.

#### RESUMEN

¿Por qué la gente coopera o deja de cooperar?, ¿Por qué deberías ayudar a un competidor?, ¿Por qué contribuirá alguien a un bien público si los demás obtienen beneficios de su generosidad? La cooperación es fundamental en la evolución de las sociedades, esta hace que se tengan múltiples desarrollos (tecnológicos, sociales, culturales, etc.) y la selección natural se opone a la evolución de la cooperación a menos que existan mecanismos específicos de trabajo. Uno de estos es el mecanismo de "Reciprocidad Indirecta", el cual está basado en que la conducta de uno a otro depende de cómo el otro se comportó con alguien más en el pasado (Martin A. Nowak & Sigmund, 1998). Nuestro modelo agregamos el individualismo, estudiamos todos los posibles escenarios en la proporción de agentes, su reputación y pagos. Mostramos que la cooperatividad no se establece salvo caso especiales y que ser un agente discriminante es una predisposición de la sociedad.

## INTRODUCCIÓN

Los seres humanos estamos dispuestos a ayudar y que nos ayuden, logrando así uno de los pilares en la evolución de las sociedades. La cooperación se define como el resultado de un trabajo de varias personas, instituciones u organismos enfocados a un objetivo en común. La cooperación es un dilema social donde hay continuos encuentros de individuos entre lo que es bueno para él y lo que es bueno para la sociedad. Si en una población los individuos cooperan es mejor para todos, aunque para cada individuo siempre existe una tentación de no cooperar (delatar). Las teorías de cooperación se basan en la selección grupal (dependiente de la relación genética), la selección grupal y el altruismo recíproco. Aunque la selección natural favorece a los delatores que solo reciben los beneficios sin retribuir. En una población donde existen cooperadores y delatores, los delatores siempre ganan más que los cooperadores y por lo tanto se reduce la población de cooperadores hasta que la población se compone en la mayoría de delatores (Rand & Nowak, 2013).

De acuerdo con Alexander los sistemas morales se describen como sistemas de reciprocidad indirecta, que existen debido a historias de conflictos de intereses y que surgen como resultados de la complejidad de las interacciones sociales en grupos de individuos longevos con conflictos variados y confluencias de interés e interacciones sociales iteradas indefinidamente. Aunque la moralidad se define comúnmente como que implica justicia para todas las personas, o consistencia en el tratamiento social de todos los humanos, puede haber surgido por razones inmorales, como una fuerza que conduce a la cohesión dentro de grupos humanos, pero específicamente excluye y dirige contra otros grupos humanos con diferentes intereses. La reciprocidad indirecta, que "involucra reputación y estatus, y hace que todos en el grupo sean continuamente evaluados y reevaluados", es importante en las sociedades humanas. Alexander interpreta los sistemas morales como sistemas de reciprocidad indirecta. La reciprocidad indirecta presupone jugadores bastante sofisticados y, por lo tanto, es probable que se vean afectados por la anticipación, la planificación, el engaño y la manipulación (Alexander, 1985).

Para que emerja la cooperación, se necesita un mecanismo para que la cooperación se mantenga lo más posible. Tal mecanismo es una estructura de interacciones que se plantean de tal forma que les favorece a los cooperadores sobre los delatores. El mecanismo de reciprocidad indirecta se dice que es la base de la evolución de las sociedades. Este determina como los individuos de una población interactúan para recibir recompensas y coexistir. La reciprocidad indirecta prevalece en las comunidades humanas, Uno no espera un retorno del destinatario, sino de otra persona, de acuerdo con los principios de 'dar, y se le dará'. La reciprocidad indirecta funciona en sociedades o poblaciones con varios encuentros entre individuos, habiendo terceros individuo observando estos encuentros (Rand & Nowak, 2013). La información sobre los encuentros se esparce a través de la comunicación y así afectando la reputación de los individuos que participaron en los encuentros. En estas interacciones los individuos pueden adoptar condiciones estratégicas en la cual basan su toma de decisiones dependiendo de la reputación del receptor, esto es, la forma en que yo me comporto

contigo depende de cómo te has comportado con otros o conmigo en el pasado. Cooperar cuesta, más te hace tener buena reputación ante la sociedad y por tanto aumenta tu probabilidad de recibir ayuda de otros. La reciprocidad indirecta favorece la evolución de la cooperación si la probabilidad de conocer la reputación de alguien más es visible.

La reciprocidad indirecta no requiere que los mismos individuos vuelvan a interactuar, es una buena estrategia para quien coopera, porque está creando una reputación como miembro valioso de la sociedad y en dado caso de necesitar ayuda, habrá otros diferentes individuos dispuestas a ayudarle, ya que ha cooperado en el pasado. De esta manera, parece que en la evolución de las sociedades humanas la reciprocidad indirecta constituye un paso decisivo.

La dinámica del replicador de la reciprocidad directa e indirecta de manera concisa con una seria de diagramas simples es planteada por (Brandt & Sigmund, 2006). Consideran interacciones repetidas entre donantes y receptores, y analizan la relación entre tres estrategias básicas para el donante: cooperación incondicional, deserción total y cooperación condicional. Investigan la competencia de altruistas discriminatorios e indiscriminados con desertores. Aquí los discriminadores y desertores forman una comunidad biestable.

En el estudio de modelos evolutivos de reciprocidad indirecta estudiado por Hoffman, Rand y Nowak en (Yoeli, Hoffman, Rand, & Nowak, 2013), muestran que la selección natural favorece la cooperación cuando la observabilidad es suficientemente alta. Complementan su trabajo teórico con experimentos donde la observabilidad promueve la cooperación entre pequeños grupos que juegan.

Mediante análisis matemáticos y simulaciones informáticas individuales (Suzuki & Kimura, 2013), demuestran que la selección natural nunca favorece la cooperación recíproca indirecta en presencia del costo de la construcción de la reputación, independientemente de la relación costo-beneficio de las normas de cooperación o evaluación moral (normas sociales). Sus resultados resaltan la importancia de considerar el costo de las habilidades cognitivas de alto nivel en estudios de la evolución del comportamiento social de humanos y animales

Si alguien es bueno con usted, se siente bien y puede sentirse inclinado a ser amable con otra persona. Esta experiencia cotidiana se ve confirmada por los juegos experimentales: los receptores de un acto de bondad son más propensos a ayudar a su vez, incluso si la persona que se beneficia de su generosidad es otra persona.

El estudio de la 'reciprocidad ascendente', ayudas a alguien porque alguien más te ha ayudado , parece ser un acto de gratitud mal dirigido esto es parte de lo concluyen Nowak y Roch en (M. A Nowak & Roch, 2007). Muestran que la reciprocidad ascendente, sola no conduce a la evolución de la cooperación, pero puede evolucionar e incrementar el nivel de cooperación si está vinculada a la reciprocidad directa o espacial. Calculan las caminatas aleatorias de actos altruistas que son inducidos por la reciprocidad ascendente. Su análisis muestra que la gratitud y otras emociones positivas, que aumentan la disposición a ayudar a los demás, pueden evolucionar en el competitivo mundo de la selección natural.

En este trabajo se analizó mediante simulaciones computacionales el mecanismo de cooperación de Reciprocidad Indirecta con individualismo. En la sección de Teoría se describen de manera introductoria el protocolo ODD, los Modelos Basados en Agentes y el Software NetLogo, con los cuales se modelará y simulará el fenómeno. En la sección "Parte experimental", se realiza la aplicación sistemática de las metodologías mencionadas. La sección de resultados muestra los resultados de las simulaciones computacionales y un análisis descriptivo. Luego en la sección Análisis y Discusión, se exponen los patrones fundamentales de las relaciones entre los diversos factores del modelo que muestran en las simulaciones. Finalmente, en la sección de conclusiones se muestra una visión global de esa investigación además de futuros trabajos a realizar.

# TEORÍA

## ODD Protocol (Overview, Design concepts, and Details)

El protocolo el ODD (Overview, Design concepts, and Details) (Descripción general, los conceptos de diseño y los detalles) es una metodología estándar para modelar fenómenos con múltiples agentes. Consta de siete elementos, los primeros tres elementos proporcionan una visión general, el cuarto elemento explica los conceptos generales subyacentes al diseño del modelo y los tres elementos restantes proporcionan detalles (Grimm et al., 2006). Este protocolo garantiza la actualidad

de los conceptos e ideas y evita las ambigüedades que existían en el protocolo propuesto (Grimm et al., 2010) y (Railsback & Grimm, 2012) es la base para la descripción del fenómeno de estudio.

| Elementos del protocolo ODD actualizado  |                                                             |  |  |  |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--|--|--|
|                                          | 1. Branásita                                                |  |  |  |
|                                          |                                                             |  |  |  |
| Descripción general                      | 2. Entidades Variables de estado y escalas                  |  |  |  |
| (Overview)                               |                                                             |  |  |  |
|                                          | <ol> <li>Descripción del proceso y planificación</li> </ol> |  |  |  |
| Diseño de conceptos<br>(Design concepts) | 4. Diseño de conceptos                                      |  |  |  |
|                                          | <ul> <li>Principios básicos</li> </ul>                      |  |  |  |
|                                          | Emergencia                                                  |  |  |  |
|                                          | Adaptación                                                  |  |  |  |
|                                          | Objetivos                                                   |  |  |  |
|                                          | Aprendizaie                                                 |  |  |  |
|                                          | Predicción                                                  |  |  |  |
|                                          | Detección                                                   |  |  |  |
|                                          | Interacción                                                 |  |  |  |
|                                          | Aleatoriedad                                                |  |  |  |
|                                          | Colectividad                                                |  |  |  |
|                                          | Observación                                                 |  |  |  |
| Detalles                                 | 5. Inicialización                                           |  |  |  |
| Detailes                                 | 6. Entradas                                                 |  |  |  |
| (Details)                                | 7. Sub modelos                                              |  |  |  |

# ESTRUCTURA GENERAL DEL PROTOCOLO ODD

Tabla 4 Protocolo ODD, adaptado de (Railsback & Grimm, 2012).

## Agent Based Model (Modelado basado en agentes)

El modelado basado en agentes es una metodología relativamente novedosa en el campo de las ciencias sociales, en la sociología computacional (Flaminio, 2012), (Cioffi-Revilla, 2014), la economía computacional basada en agentes (Hamill & Gilbert, 2016) y la teoría computacional de las organizaciones (Michael Prietula, Carley, & Gasser, 1998) (Carley & Prietula, 2014). En el libro Growing artificial societies, de Joshua M. Esptein y Robert Axtell (1996), trabajo icónico que abrió las puertas a toda una nueva generación de modeladores de fenómenos sociales y mostró el camino que se ha de seguir en la construcción de "mundos artificiales". Un agente es una entidad computacional (esto es un código de computadora) con inteligencia artificial, capaz de tener interfaces que le permitan interaccionar con su medio ambiente y con otros agentes. Los agentes pueden ser pensados de muchas maneras. Un agente podría ser una persona; podría ser una hormiga, podría ser un organismo celular (como un virus, un hongo), o podría ser una empresa o corporación; o podría ser un estado o nación. En el estudio de los Sistemas Complejos Adaptativos, los agentes de todas estas diversas formas comparten en común que tienen la capacidad para interactuar con su medio ambiente y con otros agentes. Pueden seguir instrucciones o reglas. Un agente puede "responder a lo que sucede a su alrededor y puede hacer las cosas más o menos a propósito (Aquilera Ontiveros & Marta. 2017).

## NetLogo

NetLogo es un entorno de modelado programable para simular fenómenos naturales y sociales. Fue escrito por Uri Wilensky en 1999 y ha estado en continuo desarrollo desde entonces en el Centro de Aprendizaje Conectado y Modelado Basado en Computadora (Wilensky, 2018). Es especialmente utilizado para modelar sistemas complejos que se desarrollan con el tiempo. Los modeladores pueden dar instrucciones a cientos o miles de "agentes" que operan independientemente. Esto permite explorar la conexión entre el comportamiento a nivel micro de los individuos y los patrones de macro nivel que surgen de su interacción (Aguilera Ontiveros & Marta, 2017).

# PARTE EXPERIMENTAL

#### El modelo

El mecanismo de cooperación de reciprocidad indirecta que consideraremos además detener la condición de que los agentes pueden ver el comportamiento de otro agente en el pasado (su reputación), los agentes tienen la actitud "individualista" esto es si un agente tuvo beneficios con su estrategia, entonces la mejora, e.d. si era cooperador, va a aumentar su índice de cooperación y si era delator aumentará su índice de delator.

Descripción General de protocolo ODD del fenómeno de cooperación con el mecanismo de Reciprocidad indirecta "individualista"

1. Propósito.

Investigar y explicar la evolución de la cooperación a través del mecanismo de reciprocidad indirecta usando modelos basado en agentes (ABM). Esto es que los agentes saben información acerca del comportamiento pasado del receptor en interacciones de una sola vez.

2. Entidades, variables de estado y escalas

Hay una población de agentes n agentes de dos tipos, un donante potencial y un receptor potencial que se eligen aleatoriamente. Todos los agentes tienen variable de reputación *s*, que variara de -5 a 5, y estrategia *k*, que varía de -5 a 6. La estrategia k = -5 representa cooperadores incondicionales, mientras que la estrategia k = +6 representa delatores severos. Los valores de *k* menores a 0 corresponden a agentes con diversos grados de cooperar y los de mayor a 0 a delatores con diversos grados. *k* = **0** representan agentes discriminates.

Los agentes interactúan de la siguiente forma, un donante debe decidir donar o no. Un donante *i* coopera si el valor de su estrategia  $k_i$  es menor o igual que la reputación  $s_j$  del receptor, esto es  $k_i \leq s_j$ . Cuando el donante *i* coopera, el puntaje de su reputación aumenta en una unidad, y si no lo hace, disminuye en una unidad.

Cuando ocurre la cooperación el donante paga un costo, c, y el receptor obtiene un beneficio, b. No hay recompensa en ausencia de cooperación.

3. Descripción general del proceso y planificación

Cada generación consiste en un número fijo de m rondas o interacciones. Al comienzo de cada generación, todos los jugadores tienen una puntuación de reputación **0**. En cada generación se eligen pares de donante y receptor.

Cada jugador tiene, en promedio, 2m/n interacciones. Al final de la generación, todos producen una cantidad proporcional al pago total.

- 4. Diseño de conceptos
- Principios básicos. Un donante solo ayuda a aquellos que hayan ayudado a otros, si se puede saber la información sobre las acciones del pasado del receptor.
- Emergencia. Se muestra la emergencia y el mantenimiento de la cooperación basada en la condición de los valores de *k*, cuando los agentes cooperarán y aparecerán a lo largo del tiempo.
- Objetivos. Tienen una opción simple de cooperar o de delatar basándose en la comparación entre su propia estrategia y el puntaje de la reputación del receptor.
- Aprendizaje. Fortalecen su estrategia en base a los beneficios generados en la iteración anterior.
- Predicción. El puntaje de la reputación proporciona información sobre si el agente al azar cooperará.
- Detección. Los donantes perciben el puntaje de la reputación de los destinatarios.
- Interacción. En cada ronda, dos agentes seleccionados al azar interactúan; uno es un donador potencial y el otro es un receptor potencial. El posible donante coopera si el puntaje de la reputación del receptor no es menor que su estrategia. La cooperación cuesta al donante *c* y le da beneficio *b* a los receptores.
- Aleatoriedad. Dos agentes se seleccionan al azar de toda la población; uno es donador potencial y el otro es receptor potencial.
- Colectividad. No hay
- Observación. Para observar la evolución de la cooperación, debemos observar la frecuencia de la estrategia que va de -5 a 6.

#### 5. Inicialización.

Se crea una población de *n* agentes. La puntuación de la reputación de todos los agentes se establece en 0, y la estrategia *k* se selecciona al azar del rango de -5 a 6.

6. Entrada.

Valores de parámetros: b = 1, c = 0.1 (para evitar pagos negativos agregamos 0.1 al inicio de cada interacción).

7. Sub-modelos

En el modelo, supone que el puntaje de la reputación de cada individuo es conocido por todos los demás miembros de la población. Esto debe verse solo como un escenario idealizado. Es más realista suponer que una interacción entre dos individuos es observada por un subconjunto de la población. Solo los agentes que observan la interacción y el receptor actualizan la puntuación de la reputación del donante. Los agentes que pueden observar la interacción se eligen al azar para cada interacción en particular.

#### Diseño del experimento y ecuaciones del modelo.

Se realizó un diseño de experimentos de simulación para determinar la influencia de los factores, s, b y c. A cada configuración de los parámetros se le llama escenario, se diseñaron 5, un para cada valor de b. A continuación, se muestra el escenario con b = 1 los de mas son similares, solo cambia b de 2 hasta 5.

| S | b | с   | b | с   | b | с   | b | с   | b | с   |
|---|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|
| 0 | 1 | 0.1 | 1 | 0.2 | 1 | 0.3 | 1 | 0.4 | 1 | 0.5 |
| 1 | 1 | 0.1 | 1 | 0.2 | 1 | 0.3 | 1 | 0.4 | 1 | 0.5 |
| 2 | 1 | 0.1 | 1 | 0.2 | 1 | 0.3 | 1 | 0.4 | 1 | 0.5 |
| 3 | 1 | 0.1 | 1 | 0.2 | 1 | 0.3 | 1 | 0.4 | 1 | 0.5 |
| 4 | 1 | 0.1 | 1 | 0.2 | 1 | 0.3 | 1 | 0.4 | 1 | 0.5 |
| 5 | 1 | 0.1 | 1 | 0.2 | 1 | 0.3 | 1 | 0.4 | 1 | 0.5 |

| Tabla 5. Tabla de experimentos |  |
|--------------------------------|--|
|--------------------------------|--|

En las simulaciones los agentes solo cooperan con otros cuando  $k_i \leq s_j$ . La población consta de n = 100 agentes. Al principio la reputación (*s*) de los agentes es de 0, esto significa que están en un estado neutro. Las puntuaciones de reputación se distribuyen de manera aleatoria uniforme entre -5 y 5. Los valores de la estrategia (*k*) desde el principio inician aleatoriamente en un rango de -5 a 6. Las estrategias *k* con valores negativos representa a los cooperadores, mientras que los valores de las *k* positivos son los delatores, los agentes que tienen el valor de k = 6 son delatores severos. En cada iteración de tiempo *t*, se eligen dos agentes al azar, uno como donante y el otro como receptor. El donante coopera si la puntuación de reputación (*s*) del receptor es mayor o igual que el valor *k* del donante. Cooperación significa que el donante paga un costo, *c*, y el receptor obtiene un beneficio, *b*. No hay recompensa en ausencia de cooperación. La posibilidad de que un agente determinado se encuentre con el mismo agente nuevamente, es casi nula.

Los elementos de cada uno de los agentes son: su estrategia k, reputacion s, beneficio b y costo c. Al desarrollar las simulaciones se considerará la proporción de agentes con dada una de las estrategias k, Los valores de k van de -5 a 6, los valores de s van de 0 a 5. Aunque los vales de b y ctambién pueden tener rangos de valor, estos no hacen modificaciones altamente diferenciadoras, solo en la velocidad de cambio de los indicadores.

Tomando en consideración como se definió el mecanismo de cooperación de reciprocidad indirecta individualista, tenemos cada agente fortifica su estratega considerando como fue su pago en el tiempo anterior, con lo cual tenemos, que:

$$k_{i}(t+1) = \begin{cases} k_{i}(t) & si \quad \begin{pmatrix} (k_{i}(t) = 6 \ y \ p_{i}(t) < p_{i}(t+1)) \ 0 \\ (k_{i}(t) = 6 \ y \ p_{i}(t) < p_{i}(t+1)) \end{pmatrix} \\ k_{i}(t) + 1 & si \quad \begin{pmatrix} (p_{i}(t) < p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) \ge 0) \ 0 \\ (p_{i}(t) > p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) \le 0) \ 0 \\ (p_{i}(t) > p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) = -5) \end{pmatrix} \\ k_{i}(t) - 1 & si \quad \begin{pmatrix} (p_{i}(t) < p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) \le 0) \ 0 \\ (p_{i}(t) > p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) \ge 0) \ 0 \\ (p_{i}(t) > p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) \ge 0) \ 0 \\ (p_{i}(t) > p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) \ge 0) \ 0 \\ (p_{i}(t) > p_{i}(t+1) \ y \ k_{i}(t) \ge 0) \end{pmatrix} \end{cases}$$



## RESULTADOS

Para analizar el comportamiento de los agentes, se presentan los gráficos de las evoluciones temporales de las simulaciones para el caso base s = 0, b = 1 y c = 0.1, para los tiempos t = 0, t = 10, t = 20 y t = 150. Después se muestran los casos cuando s = 1, 2, 3, 4 y 5. Y para analizar en valore extremos el comportamiento de los agentes se considera el caso con 300 agentes cooperadores y 3 agentes delatores.

Simulaciones

En las simulaciones por computadora en este modelo de reciprocidad indirecta (individualista), muestran que la cooperación se suprime, esta solo se establece cuando la totalidad de los agentes son cooperadores.

La postura discriminante es una de las regularidades más comunes en todas las simulaciones. En la generación, t = 0, inicia con una distribución aleatoria de estrategias. Después de t = 20 generaciones, las estrategias k = 0 han aumentado alrededor de la tercera parte de la población (Gráfico 1). Después de t = 150 generaciones, la población consiste casi por completo en la estrategia k = 0 y un casi el resto esta en las estrategias  $-1, 1 \ge 6$  que son estrategias opuestas a ser cooperativo.



Grafico 1. Esta imagen muestra por columna la evolución de la estrategia, el promedio de pagos y la reputación en los tiempos 0, 10, 20 y 150. Se puede ver que la final se establece predomina la estrategia de ser delator. Que los promedios de pagos crecen muy lentamente y que al final la reputación promedio es negativa.

Las simulaciones para los valores de s = 1, 2, 3, 4 y 5, muestran que son emergentes los estados de discriminante y delator (severo). ... que la reputación de los agentes decrece a partir de la mitad de las iteraciones.



Grafico 2. En este grafico se muestra que las evoluciones finales son muy similares, aunque se haya partido de reputaciones cada vez más grandes. Los patrones muestran que predomina la estrategia de ser discriminante y la de ser delator.

Los siguientes gráficos exhiben los resultados de las simulaciones para valores extremos, **300** cooperadores, 3 delatores muestran que al final se establece la actitud de delator.



Gráfico 3. La evolución de la coopera-delatar con 300 agentes cooperadores y 3 delatores, muestra que se estabiliza gana la estrategia ser delator después de miles de iteraciones.

## ANALISIS Y DISCUSIÓN

Por los indicadores de las simulaciones, siempre se establece en un estado de predomino de los discriminadores (agentes con k = 0) a excepción de cuando hay exceso de delatores, en el cual este es el que se establece o cuando la población es completamente conformada por cooperadores ( $k \le 0$  para todos los agentes).

Uno de los patrones que podemos puntualizar es que no es posible que se establezca la cooperación (más del 50% de agentes cooperadores), a menos que toda la sociedad sea cooperadora, pues con solo existir al menos 3 agentes, la sociedad deja de ser cooperativa en su mayoría (después de muchas iteraciones).

Cuando existe un porcentaje al rededor del 50% de delatores, la sociedad rápidamente se establece como delatora.

Existe una transición en la que el promedio de pagos se frena o alentan, esto es cuando existe una distribución casi homogénea de estrategias la reputación es mayor que cero. Pero como siguen incrementándose el número de agentes delatores, estos empiezan a sobresalir y la reputación decae, esto marca el cambio del incremento de promedio de pagos. Aunque

En general el determinismo emerge en cierta media, ya que en todas las simulaciones hay al menos el 20% de estos agentes, aunque en las sociedades con reputación 0, son más del 30%.

Por las variantes de las simulaciones podremos decir que la causa fundamental de que se establezca las estrategias delatoras son las ecuaciones del modelo. Ya que de la psicología es que el agente reforzó su estrategia si esta le ha generado beneficios.

## CONCLUSIONES

Se propuso un nuevo modelo de cooperación con el mecanismo de reciprocidad indirecta y se analizó realizando simulaciones en el software NetLogo. El software NetLogo es una gran herramienta para entender algunos patrones de comportamiento de los agentes (de los sistemas complejos).

Este es un modelo que refleja de una medida un tipo de cooperación con reciprocidad indirecta e individualista, esto es, los agentes quieren cooperar, pero tiene una exigencia a que sea como ellos más les conviene

La metodología ODD muestra de manera precisa los elementos esenciales del fenómeno de cooperación para generar el modelo computacional.

Después de un número fijo de no más de 100 iteraciones se estabiliza la simulación (para a los más 100 agentes). Cuando la población tiene la mayor proporción en discriminadores (agentes con estrategia k = 0), el promedio de los pagos crece muy lentamente. Las simulaciones muestran que es difícil establecer la cooperación ya que con unos pocos agentes y con cientos de iteraciones surgen proporciones de discriminadores y de delatores.

Podemos decir que este es una investigación paralela a los citados en la introducción, pues en nuestro caso particular estudiamos la no cooperatividad en la reciprocidad indirecta con agentes que son muy individualistas en sus acciones.

Un futuro trabajo es, hacer la variante de que cada jugador tenga una percepción específica del puntaje de la reputación de los otros jugadores. El mismo jugador puede tener diferentes puntajes de reputación a los ojos de diferentes personas. La información está contenida en una matriz cuyos elementos  $S_{ij}$  denotan la puntuación de la reputación del jugador *i* tal como la ve el jugador *j*. En una interacción donador-receptor entre *j* e *i*, el jugador j cooperará si  $S_{ij} > k_j$ . Si *j* no tiene información sobre *i*, entonces  $S_{ij} = 0$ .

Otra variante del modelo es incluir estrategias que consideren el puntaje de la reputación tanto del receptor como del donante. Se exploran dos tipos de estrategias. Las estrategias involucran cooperación si el puntaje de la reputación del receptor es mayor que un cierto valor y el puntaje de la reputación del donante es menor que cierto valor. La idea es que, si una persona ya tiene una puntuación de reputación alta, no es necesario apuntar a una puntuación de reputación aún mayor (ayudando a otros). Las estrategias resultan en cooperación si el puntaje de la reputación del receptor es mayor que un cierto valor o el puntaje de la reputación del donante es menor que cierto valor. Aquí, la idea es que, si un individuo tiene una puntuación baja de reputación, puede ser ventajoso aumentar el puntaje ayudando a otros, independientemente de cuán baja sea la puntuación de su reputación.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Aguilera Ontiveros, A., & Marta, P. C. (2017). *Introducción al modelado basado en agentes Una aproximación desde Netlogo*. San Luis Potosi.

- Alexander, R. D. (1985). A BIOLOGICAL INTERPRETATION OF MORAL SYSTEMS, 20(1), 3–20.
- 3. Brandt, H., & Sigmund, K. (2006). The good, the bad and the discriminator Errors in direct and indirect reciprocity. *Journal of Theoretical Biology*, *239*(2), 183–194. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.08.045
- 4. Carley, K. M., & Prietula, M. J. (2014). Computational organization theory. Nueva York.
- 5. Cioffi-Revilla, C. (2014). Introduction to Computational Social Science Principles and Applications.
- 6. Flaminio, S. (2012). Agent-Based Computational Sociology.
- Grimm, V., Berger, U., Bastiansen, F., Eliassen, S., Ginot, V., Giske, J., ... DeAngelis, D. L. (2006). A standard protocol for describing individual-based and agent-based models. *Ecological Modelling*, *198*(1–2), 115–126. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.04.023
- Grimm, V., Berger, U., DeAngelis, D. L., Polhill, J. G., Giske, J., & Railsback, S. F. (2010). The ODD protocol: A review and first update. *Ecological Modelling*, *221*(23), 2760–2768. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2010.08.019
- 9. Hamill, L., & Gilbert, N. (2016). Agent-Based Modelling in Economics.
- 10. Michael Prietula, Carley, K., & Gasser, L. (1998). Simulating Organizations: Computational Models of Institutions and Groups. *Jasss*, 262–66108.
- 11. Nowak, M. A., & Roch, S. (2007). Upstream reciprocity and the evolution of gratitude. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, *274*(1610), 605–610. https://doi.org/10.1098/rspb.2006.0125
- 12. Nowak, M. A., & Sigmund, K. (1998). Evolution of indirect reciprocity by image scoring. *Nature*, *393*(6685), 573–577. https://doi.org/10.1038/31225
- 13. Railsback, S. F., & Grimm, V. (2012). Agent-Based and Individual-Based Modeling A Practical Introduction (p. 352).
- 14. Rand, D. G., & Nowak, M. A. (2013). Human cooperation. *Trends in Cognitive Sciences*, *17*(8), 413–425. https://doi.org/10.1016/j.tics.2013.06.003
- 15. Suzuki, S., & Kimura, H. (2013). Indirect reciprocity is sensitive to costs of information transfer. *Scientific Reports*, *3*, 1–5. https://doi.org/10.1038/srep01435
- 16. Wilensky, U. (2018). *The NetLogo 6.0.3 User Manual*. Retrieved from https://ccl.northwestern.edu/netlogo/docs/
- 17. Yoeli, E., Hoffman, M., Rand, D. G., & Nowak, M. A. (2013). Powering up with indirect reciprocity in a large-scale field experiment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *110*(Supplement\_2), 10424–10429. https://doi.org/10.1073/pnas.1301210110

# FOTOCATALIZADORES TIO\_2-NI-FE ACTIVADOS CON LUZ VISIBLE Y UV UTILIZANDO RODA-MINA B

L. V. Piña Morales<sup>1</sup>; M. Villicaña Mendez<sup>1</sup>; Ma. Guadalupe Garnica-Romo<sup>2</sup>; J.F. Pérez-Robles<sup>3</sup>

 <sup>1</sup>Maestría en Ciencias en Ingeniería Ambiental, PIQ. UMSNH. Morelia, México.
 <sup>2</sup>Facultad de Ingeniería Civil, UMSNH, Morelia, México.
 <sup>3</sup>CINVESTAV-Querétaro. Libramiento Norponiente #2000, Fracc. Real de Juriquilla. C.P. 76230. Santiago de Querétaro, México.

# INTRODUCCIÓN

El dióxido de titanio (TiO<sub>2</sub>) cuyas estructuras polimórficas en las que cristaliza pueden realizar en tiempos cortos la fotocatálisis debido al dopaje con metales de transición en forma de lones tales como Pt, Au, Pd, Rh, Ni, Cu, Ag, Co, Cr, Fe, Mo, V y W (Jiefang et al.[1], Pang et al. [2], M. C. Katherine [3], Hernández E. J. M., et al. [4-5]) los cuales modifican el bandgap en una foto-respuesta hacia la región visible a través de la formación de niveles de impurezas. Dado que los metales tienen un nivel menor que el del TiO<sub>2</sub>, los electrones fotoexcitados pueden ser transferidos desde TiO<sub>2</sub> a las partículas metálicas en la superficie mientras que el hueco está contenido en la banda de valencia. Esta estrategia se ha convertido en una de las más efectivas para cambiar la estructura intrínseca del "band gap" del TiO<sub>2</sub> y puede promover la actividad fotocatalítica incrementando la sensibilidad del óxido al espectro visible (B. Jordana et al [6], Katoh R., et al [7]). En el presente trabajo se sintetizaron fotocatalizadores dopados con Ni y Fe vía microondas para modificar su ancho de banda (bandgap) obteniendo su activación en una banda de menor energía como es el visible. (Hernández R. [8]) y la fase anatasa sin tratamiento térmico.

## METODOLOGÍA

El Dióxido de Titanio dopado con Níquel y Hierro fue sintetizado en un reactor de microondas. Se obtuvieron las muestras Sol-gel de Dióxido de titanio dopadas con tres porcentajes; 1.0%, 0.25 % y 0.5% w de Níquel y Hierro con tres porcentajes; 0.05%, 0.10 % y 1.4245%. Se aplicó tratamiento térmico a diferentes temperaturas 400°C, 500°C, 600°C y 700°C. Posteriormente son tamizados y los catalizadores se caracterizaron en esta primera etapa mediante la medición de Difracción de Rayos X (*XRD*, por sus siglas en inglés).

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

## Difracción de RX

Para todas las muestras analizadas, el pico más grande se localiza entre  $2\theta$ = 25.3° y 2 $\theta$ = 25.4°, el cual coincide con el doble del ángulo de difracción representativo de la fase anatasa (Luu C. L et al., Caudillo-Flores U. [9,10]). Fig. 1.
(ren) Aisuaju 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 2theta (degree)







En el trabajo de Y. Zhang et al. [11] se observa que la fase rutilo se empieza a formar a partir de anatasa a los  $500^{\circ}$ C y  $511.77^{\circ}$ C para TiO<sub>2</sub> puro y para el TiO<sub>2</sub>NiFe (0.5, 0.10%), solo se presenta la fase anatasa sin temperatura de calcinación. [11].

Al observar la Fig. 1 puede apreciarse que para la muestra de TiO<sub>2</sub> puro sin calcinado tienen definición los picos, indicando que la muestra presenta una buena cristalinidad; asimismo, se observa un aumento de altura en el pico de la fase anatasa conforme aumenta la temperatura de calcinación, Fig. 2, evidenciando la diferencia en el tamaño de cristal en estas muestras (Caudillo Flores U. [10]). En los difractogramas de la Fig. 2 puede verse que los catalizadores sintetizados a diferente concentración de Níquel (0.05, 0.25 y 1.0 %)y misma concentración de Hierro (1.4245 %) obtiene la fase anatasa sin aplicar ningún cambio de temperatura, por lo que puede afirmarse que el dopaje con Níquel y hierro ayudan en la formación de la fase anatasa, se observa que se tiene un atraso considerable en la formación de rutilo debido principalmente al *método de síntesis*, no tanto a la presencia de los metales (níquel y hierro) como agente dopante.



Fig. 3.- Actividad Fotocatalitica con lámpara UV, de muestras TiO<sub>2</sub>, TiO<sub>2</sub>-Fe0.10Ni0.5 TiO<sub>2</sub>-Fe1.4245Ni0.25 S/TT.





Fig 5.- TiO<sub>2</sub>-Fe-Ni-1.4245-1.0 Luz Visible.

La Figura 3, muestran la actividad fotocatalítica de los Catalizadores dopados con Fe-Ni sin Tratamiento térmico y activados con luz UV, muestran un 25% de degradación en 70 min, y el catalizador puro el 95% de degradación en 125 min. Las figuras 4-5, presentan el efecto fotocatalítico, con luz UV y luz visible su máxima degradación es alrededor de un 25% la primera y un 20% la segunda.



Fig. 6.- TiO<sub>2</sub>-Fe-Ni-0.10-0.25% C/TT.

La figura 6, pr4snta el mejor efecto fotocatalitico obtenido hasta esta etapa, alcanzando un 40% de degradación en 100 min, con luz UV. Lo importante es que se puede activar este catalizador con la luz visible para contaminantes de agua de la industria textil.

#### CONCLUSIONES

Los fotocatalizadores sintetizados con 0.10% Fe y 0.25% Ni calcinado a distintas temperaturas y activados con lámpara UV. Presentan la mejor actividad catalítica con un 40% de degradación en 100 min.

 Se observó que está presente la fase anatasa sin tratamiento térmico. La presencia de níquel y hierro a una cierta concentración presenta una menor cristalinidad producto de la diferencia de los radios iónicos del Ti<sup>4+</sup> y del Ni<sup>2+</sup> que forman una solución sólida.

## REFERENCIAS

- 1. Zhu Jiefang, Sheng Qiaorong, Zheng Wei, He Bin, Zhang Jinlong, Masakazu Anpo. *Characterization and photocatalytic reactivity of Fe-TiO*<sub>2</sub> *photocatalysts synthesized by hydrothermal method.* www.paper.edu.cn, (2003).
- 2. Yean Ling Pang, Ahmad Zuhairi Abdullah. *Effect of low Fe3+ doping on characteristics, sonocatalytic activity and reusability of TiO<sub>2</sub> nanotubes catalyst for removal of Rhodamine B from water*. Journal of hazardous, (2012). 235-236, 326-335.
- 3. Katherine Villa Gómez. Uso de TiO<sub>2</sub> dopado con nitrógeno para la generación de hidrógeno bajo irradiación con luz visible. (2010). U. A. B.
- 4. Hernández E.J.M., R. García Alamilla, A. Cueto Hernández. Síntesis y caracterización de nanopartículas de N-TiO2-anatasa, Sociedad mexicana de ciencia y tecnología de superficies y materiales. (2008). 21(4), 1-5.
- 5. Hernández E.J.M., R. García Alamilla, L. A. García Serrano, A. Cueto Hernández. *Síntesis, caracterización y actividad fotocatalítica de óxido de titanio modificado con nitrógeno*. Boletín de la sociedad española de cerámica y vidrio. (2011). 50, 5, 245-252.
- 6. Hashil C. L. B. J. Desarrollo de un método de eliminación de Escherichia coli en agua usando un proceso avanzado de oxidación. (2009). U. D. L. A. P.
- Katoh Ryuzi, Akihiro Furube, Ken-ichi Yamanaka, Takeshi Morikawa. Charge separation and trapping in N-doped TiO<sub>2</sub> photocatalysts: a time-resolved microwave conductivity study. The journal of physical chemistry letters. (2010). 1, 3261-3265.
- Hernández R.I. Tratamiento fotocatalítico de aguas residuales utilizando TiO<sub>2</sub> como catalizador. (2003). U. V.
- Luu C. L., Q. T. Nguyen, S. T. Ho, Adv. Nat. Sci.: Nanosci. Nanotechnol. 1(2010) 015008 (5 pp), http: stacks.iop.org/ANSN/1/015008.
- 10. Caudillo-Flores U. *Estudio comparativo de la síntesis de TiO<sub>2</sub>, por los métodos sol-gel convencional y sol-gel catalizado por microondas.* Tesis de Licenciatura en Ingeniería Química, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. (2011).
- 11.Y. Zhang, S. G. Ebbinghaus, A. Weidenkaff, T. Kurz, H-A K. v. Nidda, P. J. Klar, M. Güngerich, A. Reller, Chem. Mater. 15 (2003) 4028-4033.

## ANÁLISIS DE LA RESOLUCIÓN LATERAL EN HOLOGRAFÍA DIGITAL EN CONFIGURACIO-NES LIGERAMENTE FUERA DE EJE Y FUERA DE EJE

<sup>1</sup>Miguel León-Rodríguez, <sup>2</sup>Juan A. Rayas, <sup>1</sup>Orlando Medina-Cázarez, <sup>1</sup>J. A. Guel-Tapia, Mayda L. Ramírez-López, <sup>2</sup>Amalia Martínez García

<sup>1</sup>Universidad Politécnica de Guanajuato, Av. Universidad Sur 1001, C.P. 38483, Cortazar, Gto. México

<sup>2</sup>Centro de Investigaciones en Óptica, A.C. Loma del Bosque 115, C.P. 37150, León, Guanajuato, México

### RESUMEN

En la configuración fuera de eje se ha determinado que el ancho de banda del sensor es reducido a un cuarto de todo el sensor. Por otro lado, al usar configuraciones ligeramente fuera de eje se ha determinado que el aprovechamiento del ancho de banda del sensor es de un 50%. Con la propuesta del interferómetro de divisor de haz el aprovechamiento del sensor es 20% mayor que el que se tiene con la configuración fuera de eje.

### INTRODUCCIÓN

La metrología óptica representa a un conjunto de pruebas no-invasivas (o no-destructivas) y es ampliamente utilizada para determinar el valor de diversas magnitudes (longitud, masa, temperatura, desplazamientos, modos de vibración, etc.) en objetos iluminados con luz coherente o incoherente [1]. Un haz de luz es una onda electromagnética que puede ser descrita por su amplitud, frecuencia, por su fase, polarización y su dirección de propagación. Cuando este haz de luz ilumina a un objeto, la luz reflejada o esparcida, v/o transmitida, contiene información del objeto [2]. Las técnicas de Metrología Óptica tienen diversas ventajas en el estudio de un objeto, por citar algunas: visualización de campo completo, se consideran pruebas no destructivas, no es necesario una preparación especial del objeto, la visualización de los resultados del estudio se pueden dar en tiempo real. De las técnicas en Metrología Óptica la que nos compete en esta propuesta es aquella conocida como HOLOGRAFÍA DIGITAL (DH) que hoy día es una herramienta de medición clave en diversas disciplinas tanto de Ciencia e Ingenierías como en ambientes Industriales. A diferencia de la holografía tradicional inventada por Dennis Gabor en 1948 [3], la DH toma ventaja del procesamiento numéricodigital, en lugar de utilizar un proceso químico y de interpretación subjetiva de resultados. Este cambio en el proceso ha permitido obtener la fase y la amplitud del objeto directamente a partir de un holograma digital en tiempo cuasi-real. La microscopía holográfica digital (DHM) es una variante de la DH que se ha convertido en una nueva herramienta para el estudio de muestras microscópicas, produciendo principalmente información cuantitativa del frente de onda transmitido o reflejado a través de objetos 3D. Debido a la naturaleza Interferométrica de la DH es posible alcanzar una resolución de sub-longitud de onda a lo largo de la dirección axial en imágenes de fase, [4]. Su resolución lateral está limitada por la difracción, como ocurre en los microscopios clásicos. Algunas de estas aplicaciones incluyen el análisis y caracterización de sistemas micro-electro-mecánicos (MEMS) y sistemas micro-opto-electro-mecánicos (MOEMS), el estudio de muestras biológicas, donde la distancia de reconstrucción, una característica única de la holografía digital, juega un papel importante. Grandes esfuerzos se han realizado por alcanzar la súper-resolución óptica en la DHM. Por ejemplo, Yann Cotte et al. han reportado una resolución lateral de 90 nm. Sin embargo, para aplicaciones biológicas, desarrollo de nano-litografía o para el estudio de propiedades de materiales nano-estructurados, es necesario tener resoluciones laterales atómicas; ¡2 ordenes de magnitud menos!. En este trabajo se presenta una comparación de resultados de simulaciones numéricas en configuraciones fuera de eje y ligeramente fuera de eje en DH.

# TEORÍA

El principio de la DH es mostrada en la Figura 1 donde un arreglo óptico es utilizado para generar hologramas digitales. La luz reflejada, esparcida o transmitida, por un objeto O llega a un plano en dirección al eje óptico llamado plano del holograma. Por otro lado, otra onda de luz R (referencia) se superpone en el mismo plano holograma (x', y'). La superposición de las ondas genera un patrón de

(5)

interferencia (holograma) cuyas franjas son registradas por un sensor digital tipo cámara CCD o CMOS. El resultado de la intensidad registrada está dada por:

$$I(x', y') = |O(x', y') + R(x', y')|^{2} = O^{2}(x', y') + R^{2}(x', y') + O(x', y')R^{*}(x', y') + O^{*}(x', y')R(x', y'),$$
(1)

Los primeros dos términos de la Ec. (1) son los términos de orden de difracción cero, su suma se conoce como el término de dc. Los dos términos finales son la onda objeto real y su conjugado.



Figura 1.- Proceso holográfico. a) Registro de holograma digital, b) proceso de reconstrucción.

Si aplicamos algún método para eliminar el orden cero y el orden conjugado, por ejemplo, el método de filtrado de Fourier (Takeda), entonces podemos tener la distribución compleja del objeto. Con esto podemos ahora reconstruir el objeto original. Una onda de referencia sintética ( $R_D$ ), en dirección opuesta a la referencia original, ilumina el holograma filtrado y entonces la luz transmitida está definida por:

$$U_0(x', y') = R^{*}(x', y')O(x', y')R_D(x', y') = O(x', y'),$$
(2)

El último paso de la reconstrucción es propagar la amplitud compleja resultante U(x', y') para tener un objeto enfocado en el plano (*X*,*Y*). Se aplica un método numérico para propagar el frente de onda en el espacio, en este caso, el método del espectro angular [5]. Por tanto, la amplitud compleja resultante es:

$$U(X,Y;z) = \Im^{-1} \left\{ U_0(fx,fy) \exp\left[ikz\sqrt{(1-fx\lambda-fy\lambda)}\right] \right\}_{(X,Y)},$$
(3)

Donde  $U_0(fx,fy)$  es la transformada de Fourier de  $U_0(x',y')$ , k es el número de onda, *z* es la distancia de reconstrucción y  $\lambda \square$  es la longitud de onda.

Debido a que U(X, Y;z) es una matriz de números complejos, podemos obtener la imagen de amplitud y de fase.

$$Int(X,Y) = \left[ \text{Re}[(U(X,Y))^2] + \text{Im}[(U(X,Y))^2] \right]^{\frac{1}{2}},$$
(4)

$$\phi(X,Y) = \tan^{-1} \{ \operatorname{Im}[U(X,Y)] / \operatorname{Re}[U(x,Y)] \}.$$

Del mapa de fase obtenido de la Ec. (5) se puede calcular el espesor físico o la topografía de la superficie del objeto.

Dos frentes de onda son utilizados para la generación de un holograma. Uno de estos frentes (onda objeto "O") hace interferencia con otra onda de referencia "R". Para reconstruir el holograma se hace incidir nuevamente sobre la película de registro nuevamente el frente "R".

Se implementó simulación numérica con dos configuraciones, fuera de eje y ligeramente fuera de eje. La diferencia está en el ángulo que existe entre los dos frentes de onda que generan el holograma. En la configuración fuera de eje el ángulo es mayor. En esta propuesta se realiza un análisis de comparación entre estas dos configuraciones para tener una caracterización de un interferómetro de un solo divisor de haz que se ha utilizado en la técnica de holografía digital. La reconstrucción es obtenida mediante el método de filtrado de Fourier.

En el método ligeramente fuera de eje se elimina el término de DC mediante la sustracción de los dos hologramas desplazados  $\pi$  rad. De lo anterior se tiene la siguiente expresión:

$$H_{F}(x_{1}, y_{1}, z) = \left[\frac{H_{1}(x_{1}, y_{1}, z) + H_{1}(x_{1}, y_{1}, z)}{2}\right]$$
$$= R_{1}^{*}O_{1} + R_{1}O_{1}^{*}$$

(6).

Donde  $H_F$  es el holograma filtrado,  $\phi$  es la fase.

## SIMULACIONES NUMÉRICAS

El trabajo que se presenta está orientado en la simulación numérica de las condiciones experimentales que la Figura 2 presenta. Se tiene un frente de onda, proveniente de un LED de alta brillantez, el cual es dividido en dos replicas iguales por el divisor de haz (BS1) y posteriormente un haz se hace pasar a través del objeto y el otro por una placa compensadora (DP) de camino óptico. Posteriormente se tiene que estos frentes de onda se hacen nuevamente recombinar para generar interferencia uno con otro por medio de un segundo divisor de haz (BS2). A la salida de este BS2 se tienen dos patrones de interferencia desplazados en fase uno del otro en  $\pi$  rad. llamados hologramas y que son grabados por una cámara CCD. Esta cámara CCD tiene un tamaño de pixel cuadrado de 3.4 µm de lado y una profundidad de 8 bits en niveles de gris. La cantidad de pixeles es de 1024 x 3500.





Un holograma con los parámetros y características mencionados anteriormente es presentado en la Figura 3. El objeto de reconstrucción son barras rectangulares depositadas sobre un sustrato de vidrio de amplitud y fase. Las barras tienen dimensiones de 5x10 pix y de 100x200 pix. La distancia del objeto al plano del sensor CCD es de 20cm. Cuando la fuente de iluminación tiene alta coherencia es posible generar un patrón de franjas moduladoras con alta densidad; para el caso de una fuente de coherencia baja, como es el caso de un LED, la densidad de franjas es muy baja. En la Figura 2b) se presenta un interferograma experimental utilizando un LED. En la etapa de reconstrucción se utilizaron 3 técnicas donde la reconstrucción de Phase-Shifting es usada como referencia por tener un mayor nivel de resolución. Las técnicas que se comparan son en la configuración off-axis y lige-ramente fuera de eje. Se utiliza el método de Fourier para obtener la amplitud compleja del objeto.



Figura 3.- Holograma generado con simulaciones numéricas.

#### RESULTADOS

En la configuración fuera de eje se ha determinado que el ancho de banda del sensor es reducido a menos de un cuarto de todo el sensor [6]. Se calcula una diferencia de 6/7 de r<sup>2</sup>, donde r es la mitad del lado de un cuadrante en el espacio de frecuencias. Por otro lado, al usar configuraciones ligeramente fuera de eje se ha determinado que el aprovechamiento del ancho de banda del sensor es de un cuarto completo, esto es un 20% más de aprovechamiento del ancho de banda del sensor que su contraparte fuera de eje.

En la primer fila de la Figura 4 se muestran las distribuciones de frecuencias de los hologramas generados. Por una parte se tiene la distribución de frecuencias de la Ec.(1) y por otra se tiene la distribución de la Ec. (6) donde el término de DC ha sido removido. Se aplica la técnica de Fourier con un tamaño de máscara binaria circular de 25 pix de radio.



Figura 4.- Proceso de reconstrucción del holograma en configuraciones fuera de eje y ligeramente fuera de eje.

En la segunda fila de la Figura 4 se muestra las distribuciones de amplitud reconstruida del objeto utilizando configuraciones fuera de eje, ligeramente fuera de eje y Phase-Shifting de izquierda a derecha respectivamente. Se puede destacar que la configuración ligeramente fuera de eje tiene mejor resolución lateral que su contraparte fuera de eje.

En la tercer fila de la Figura 4 se muestra las distribuciones de fase envuelta reconstruida del objeto utilizando configuraciones fuera de eje, ligeramente fuera de eje y Phase-Shifting de izquierda a derecha respectivamente. Se puede destacar que la configuración ligeramente fuera de eje tiene mejor resolución axial que su contraparte fuera de eje.

## CONCLUSIONES

Con la propuesta del interferómetro de divisor de haz el aprovechamiento del sensor es 10% mayor que el que se tiene con la configuración fuera de eje según los resultados obtenidos con las simulaciones numéricas realizadas.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. M. Bass, OSA, *Handbook of Optics-Optical Society of America*, D. Malacara, Z. Malacara, Vol 2, Chapter 29, *Optical Metrology*, McGraw-Hill, (2001).
- 2. A. Asundi, Digital Holography for MEMS and Microsystem Metrology, John Wiley Ltd., (2011).
- 3. D. Gabor, "A new microscopic principle," Nature, 161, 777–778(1948)
- 4. F. Dubois, "Border processing in digital holography by extension of the digital hologram and reduction of the higher spatial frequencies," Appl. Opt, 41, 2621-2626(2002)
- 5. J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, New York, 1996
- 6. Peng Gao, Baoli Yao, Junwei Min, "Parallel two-step phase-shifting point-diffraction interferometry for microscopy based on a pair of cube beamsplitters", Opt. Express 19(3), (2011)

## **ISOCELL: UN SIMULADOR PARA MEDIR LA CONSTANTE DE TIEMPO**

Marleni Reyes Monreal<sup>1</sup>, Sheng-li Chilián Herrera<sup>1</sup>, Jessica Quintero Pérez<sup>1</sup>, María Eugenia Pérez Bonilla<sup>2</sup> y Arturo Reyes Lazalde<sup>2</sup>

> <sup>1</sup>Escuela de Artes Plásticas y Audiovisuales, <sup>2</sup>Facultad de Ciencias Biológicas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

#### RESUMEN

Desde el punto de vista electrofisiológico, una neurona sin dendritas (por ejemplo, la neurona ganglionar), se puede considerar como una célula isopotencial. Esto significa que su interior es considerado como un punto, en consecuencia se puede representar por un circuito eléctrico RC en paralelo. La respuesta de esta célula a un estímulo de corriente genera cambio en su voltaie. El registro obtenido, curva de carga, presenta una región transitoria hasta llegar a una región estable. La amplitud máxima depende de la capacitancia. La constante de tiempo ( $\tau$ ) corresponde al tiempo en el que se alcanza el 63% de la amplitud ( $\tau = R_m^*C_m$ ). Midiendo  $\tau$  del registro y suponiendo una capacitancia de  $1\mu$ F/cm<sup>2</sup> para la membrana biológica (C<sub>m</sub>), se calcula la resistencia de la membrana (R<sub>m</sub>). Los canales iónicos que están normalmente abiertos en reposo determinan Rm. Se diseñó y desarrolló un simulador que reproduce la curva de carga en una célula isopotencial. Fue programado en lenguaje Visual Basic 6.0 para ambiente Windows<sup>®</sup>, desde XP a Windows 10 en color verdadero y orientado a objetos. El simulador cuenta con una interfaz donde se presentan, de lado izquierdo dos osciloscopios, uno muestra el trazo de la curva de carga y otro muestra el pulso de estímulo. De lado derecho: (1) se encuentra el módulo de ingreso del estímulo de corriente (nA) y un setup con un botón para cambiar de célula, y (2) En la parte media, se presentan las coordenadas del cursor. Manualmente el usuario puede determinar  $\tau$  moviendo el cursor al 63% de la amplitud. En la región inferior, se localizan botones para determinar la constante de tiempo y el voltaje de manera digital. Con este simulador se pueden realizar prácticas de laboratorio virtuales con diferentes células, determinar  $\tau$  y calcular R<sub>m</sub>.

### INTRODUCCIÓN

Las neuronas son células excitables que responden a estímulos eléctricos y mecánicos. Se les pueden estimular eléctricamente con pulsos de voltaje o de corriente. Cuando se estimula con un pulso de corriente, ésta se distribuye por toda la neurona. Una corriente sináptica también se distribuye por la neurona. Si la sinapsis está localizada en la parte distal de una dendrita, la corriente fluye por la dendrita y va disminuyendo hasta llegar al soma. Una sinapsis localizada en el soma produce una corriente sináptica directamente en el soma.

1. Distribución pasiva de la corriente en una neurona con dendritas o en un axón.

Las propiedades pasivas de una neurona son la respuesta eléctrica de una neurona a un estímulo de corriente subumbral. En este caso, el estímulo no abre canales dependientes de voltaje y la corriente aplicada se distribuye por su interior y carga la membrana [1]. Cuando la estructura de la neurona presenta dendritas o un axón con un diámetro considerable, como el axón gigante de calamar, la corriente se distribuye, una parte por su interior, y otra va saliendo por la membrana y la va cargando. En este caso, el citoplasma ofrece resistencia al paso de la corriente, de manera que el citoplasma y sus componentes se representan por resistencias en serie; en tanto que, cada segmento de la membrana está representado por una resistencia y un capacitor conectados en paralelo: la resistencia corresponde a las proteínas que atraviesan la membrana y el capacitor son los fosfolípidos de la membrana.

2. distribución de la corriente en una neurona sin dendritas (isopotencial)

Una neurona isopotencial carece de dendritas y su axón tiene un diámetro tan pequeño, que la corriente que circula por ahí, puede despreciarse. En consecuencia, cuando se le aplica un estímulo de corriente, se puede decir que toda la corriente carga la membrana. Su interior es isopotencial, se puede pensar como un punto (nodo) del circuito. La respuesta electrofisiológica al estímulo de corriente es una curva de carga: las cargas se acumulan a los lados de la membrana (tanto dentro, como fuera), primero rápidamente y después lentamente hasta llegar a un máximo.

3. Transformación experimental de una neurona con dendritas a una isopotencial

Existen condiciones experimentales y probablemente fisiológicas, donde una neurona con dendritas puede pasar a ser funcionalmente isopotencial. Por ejemplo, con el bloqueo con bario de canales de K<sup>+</sup>, que se encuentran normalmente abiertos en el reposo, la neurona disminuye su longitud electrotónica hasta cero [2]. Esto significa, que una entrada sináptica en un punto distal de una dendrita, equivaldría a una entrada sináptica en el soma; "desapareció, funcionalmente, la dendrita", la neurona se hizo isopotencial.

#### 4. Integración sináptica

Durante muchos años se creyó que la integración sináptica en las neuronas dependía solamente de las propiedades pasivas en las dendritas [3]. Así la cantidad de corriente sináptica que llega al soma dependía de la resistencia de la membrana. A mayor resistencia, menor fuga de corriente y en consecuencia, prácticamente toda la corriente sináptica llega al soma. Por lo contrario, a menor resistencia de membrana (que significa mayor número de canales abiertos) muy poca de la corriente sináptica llega al soma. Un neuromodulador que abra o cierre estos canales, podría hacer que llegue más o menos corriente al soma, dependiendo del número de canales abiertos. Funcionalmente, se puede imaginar que la sinapsis se acercar o aleja del soma. Las propiedades pasivas de la dendrita incluyen su estructura, es diferente la trayectoria de la corriente en una dendrita recta al soma, que en una dendrita arborizada con múltiples divisiones. Con el avance de la tecnología, hoy en día, se pueden hacer registros directamente en las dendritas de algunas neuronas [4]. Estos estudios han demostrado la presencia de propiedades activas en las dendritas; como por ejemplo, la presencia de corrientes de calcio [5].

#### 5. Neuronas ganglionares de invertebrados

En neuronas ganglionares de invertebrados, prácticamente las dendritas no están presentes; son neuronas isopotenciales, la integración neuronal es directa [6]. La respuesta eléctrica a un pulso de corriente es una curva de carga. A la curva de carga se le pueden distinguir una parte transitoria y una estacionaria. El tiempo que tarda en alcanzarse el 63% de la amplitud de la curva se le llama constante de tiempo ( $\tau$ ). Entre más grande sea la constante de tiempo, la resistencia de membrana es mayor. Siempre que se considere fija a la capacitancia de membrana (digamos 1  $\mu$ F), cambios en  $\tau$  se deberán a cambios en la resistencia de la membrana.

Modelo matemático

Cuando se aplica un pulso de corriente a una neurona isopotencial, la corriente se distribuye por la capacitancia y por la resistencia de la membrana (ecuación 1) [7, 8].

(1)

 $Im = I_{Cm} + I_{Rm}$ 

I<sub>m</sub> es la corriente en la membrana

I<sub>Cm</sub> es la corriente en el capacitor

IRm es la corriente en la resistencia

Desarrollando la ecuación para la corriente en el capacitor y en la resistencia, la ecuación queda expresada como una ecuación diferencial (ecuación 2).

$$Im = Cm \, \frac{dVm}{dt} + \frac{Vm}{Rm} \quad (2)$$

Donde:

V<sub>m</sub> es el voltaje de membrana

La solución de la ecuación 2, determina el cambio en el voltaje de membrana, la función solución corresponde a la curva de carga (ecuación 3).

$$Vm = Im Rm \left(1 - e^{\left(\frac{t}{Rm Cm}\right)}\right) \qquad (3)$$

Por definición, la constante de tiempo  $\tau$  es igual a la resistencia por el capacitor de la membrana (ecuación 4).

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{C}\boldsymbol{m} \tag{4}$$

## **MATERIAL Y MÉTODO**

Se diseñó y desarrolló un simulador para la enseñanza-aprendizaje de las propiedades pasivas de una neurona isopotencial. Se utilizó el lenguaje de programación Visual Basic versión 6.0 para ambiente Windows® con una resolución de color verdadero. El programa fue compilado para ser ejecutable en Windows® desde XP a Windows 10. El modelo matemático utilizado corresponde a la solución de la ecuación diferencial mostrada arriba (ecuación 2). El programa puede generar al azar neuronas con propiedades pasivas diferentes. Para el análisis de la curva de carga, se implementaron dos algoritmos: (1) Para que el cursor dentro del osciloscopio de registro indique las coordenadas de todo el osciloscopio. (2) Se programó una puesta a cero en el punto donde se inicia la curva de carga y corresponde al cruce de dos ejes que se trazan con esta opción; de manera que la curva de carga queda en el cuadrante superior derecho, de manera que el cursos marca el tiempo y el voltaje propios de la curva de carga.

## RESULTADOS

El simulador es ejecutable en ambiente Windows® y corre directamente desde el archivo ISOPO-TENCIAR. Una vez abierto el simulador, se presenta una pantalla de inicio (Figura 1). Con el botón <Entrar al laboratorio> se ingresa al simulador propiamente dicho.



Figura 1. Pantalla de inicio del simulador ISOPOTENCIAR

En la figura 2 se muestra la interfaz del simulador; está dividida en dos secciones: izquierda para los registros y derecha para los datos de estímulo y de análisis de la constante de tiempo ( $\tau$ ).



Figura 2. Interfaz de usuario del simulador. A la izquierda, osciloscopios de registro. A la derecha, módulo de estímulo y análisis.

La sección de registro presenta dos osciloscopios: uno superior donde se muestra la curva de carga y uno inferior donde se muestra el pulso de estímulo. En la parte superior de la sección de estímulo v análisis, se muestra un recuadro con una ventana para el ingreso de la amplitud del estímulo (nA) y un botón que inicia la simulación. A un lado, se encuentra un "setup", con un microscopio y una jaula de Faraday. Un círculo en el microscopio representa la neurona isopotencial que se está registrando. El botón <<NUEVA CÉLULA>> permite sustituir la neurona por otra con características pasivas diferentes. Debajo de estos recuadros, se encuentra un botón <<PONER CERO>> que sirve para colocar el origen de los ejes en el inicio de la curva de carga (tiempo = 0 y voltaje = 0). A los lados, en franjas verdes se muestra el valor del tiempo y el voltaje (coordenadas) del cursor dentro del osciloscopio de registro de la curva de carga. Debajo, se encuentra la levenda "Constante de tiempo", en seguida una franja donde se muestra el valor de la constante de tiempo (en segundos) dada por el cursor en el punto adecuado (cálculo de  $\tau$  de manera manual). Debajo se encuentra un botón <<CONSTANTE DE TIEMPO MEDIDA DIGITAL>> y un recuadro verde para mostrar el valor calculado de τ de manera automática (en segundos). Al lado, se encuentra otro recuadro con el botón <<CÁLCULO DEL VOLTAJE AL 63%>> y un recuadro verde con el valor del voltaje calculado. En la figura 3 se muestra el valor del voltaje cuando el cursor es colocado en el potencial de membrana. En este caso -80.16 mV.



Figura 3. Ejemplo de simulación. La flecha en negro marca el potencial de membrana (PM). La flecha en rojo muestra el valor del PM.

Ejemplo de simulación (determinación manual de  $\tau$ )

1. Determinar si la  $\tau$  depende o no de la amplitud del estímulo.

A una misma neurona se le estimuló con pulsos cuadrados con amplitudes de 10, 15 y 20 nA y la misma duración. Las curvas de carga se registraron en el osciloscopio de memoria, de manera que se muestran las tres curvas al mismo tiempo. Después de cada simulación se coloca el cursor en la región estacionaria de cada trazo y se mide el voltaje correspondiente: -70.2, -66.4 y 60.3 mV (Figura 4).



Figura 4. Simulaciones para determinar la constante de tiempo de forma manual. Cada valor de voltaje (flechas rojas) se resta del potencial de membrana para obtener la amplitud de cada curva de carga. Se obtiene el 63% de cada amplitud.

Una vez obtenido el 63% de la amplitud de cada trazo, se mueve el cursor sobre el trazo correspondiente y se coloca en este valor de voltaje. El simulador permite poner el inicio de la curva de carga a ceros. Así se obtiene directamente el valor de la amplitud de cada curva y el tiempo a partir de su inicio. En estas condiciones, al colocar el cursor en el voltaje que corresponde al 63% de la amplitud, se obtiene la constante de tiempo en segundos. En la figura 5 se muestra la constante de tiempo de la curva de carga para un estímulo de 20 nA.



Figura 5. Simulación con un estímulo de 20 nA. El 63% de la amplitud fue de 12.6 mV. Se busca este valor con el cursor en el trazo correspondiente. Se ha puesto a cero el inicio del trazo, aparece una cruz en verde dentro del osciloscopio. Las coordenadas del cursor son: 0.076 segundos y - 12.46 mV. La constante de tiempo fue de 0.076 s. El cálculo de τ de manera digital es de 0.075 s.

Para la misma neurona se obtiene la  $\tau$  para estímulos de 15 y 10 nA. Se realiza el mismo procedimiento y se obtuvo de manera manual 0.076 y 0.072 s respectivamente. Se trata de valores aproximadamente iguales. Cuando se calcula la constante de tiempo de manera digital (automática) se obtuvo 0.075 en los dos casos. Las pequeñas diferencias entre el procedimiento manual y el automático, se explican porque en el procedimiento manual, el cursor tiene una menor resolución. Como puede observarse las constantes de tiempo de cada trazo son iguales. Esto significa que  $\tau$  no depende de la amplitud del estímulo. En la figura 6 se muestra la simulación y el análisis para el estímulo de 15 nA. La figura 7, muestra la simulación para un estímulo de 10 nA.



Figura 6. Curva de carga con un estímulo de 15 nA. Simulación para determinar  $\tau$  en la misma neurona registrada anteriormente. En este caso, se puso a ceros el inicio de la curva de carga.



Figura 7. Curva de carga ante un estímulo de 10 nA. Simulación para determinar τ en la misma neurona registrada anteriormente. En este caso, no se puso a cero el trazo. La amplitud de cada curva se obtuvo de restar el voltaje del potencial de membrana menos el alcanzado en el estado estable. El tiempo se obtuvo de restar el tiempo marcado (0.272 s) cuando se alcanza el 63% del voltaje, menos la duración del tiempo de reposo (0.207 s).

Ejemplo de constantes de tiempo en diferentes neuronas

Cuando se oprime el botón <<NUEVA CÉLULA>> se genera internamente una nueva neurona con características pasivas diferentes. En este caso, por cada nueva neurona se registra una curva de carga diferente (Figura 8).



Figura 8. Simulaciones de diferentes neuronas. En todos los casos se estimuló a la neurona con un pulso de 15 nA y la misma duración. En el osciloscopio se muestran los trazos correspondientes. Se observa que el transitorio es diferente. La flecha roja indica el trazo de la neurona con una resistencia de membrana mayor.

## CONCLUSIONES

Se diseñó y desarrolló un simulador para el estudio de la constante de tiempo en neuronas ganglionares de invertebrados. El simulador permite generar curvas de carga para diferentes características pasivas de las neuronas isopotenciales. Una vez obtenida  $\tau$  se puede calcular la resistencia de membrana (Rm). En esta versión del simulador, en todos los casos el capacitor de membrana es de 1  $\mu$ F. El simulador es ejecutable y corre en ambiente Windows®. Para su uso no es necesario tener conocimientos especiales de computación.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. A. Reyes-Lazalde, M.E. Pérez-Bonilla, O. L. Fuchs-Gomez, M. Reyes-Monreal, "Interactive simulators to study the passive properties of the axon and the dendritic tree", Rev. Mex. Ing. Biomed. Vol. XXXIII, 1, 2012, pp. 29-40.
- 2. A. Reyes, E. Galarraga, J. Flores-Hernández, D. Tapia, J. Bargas. "Passive properties of neostriatal neurons during potassium conductance blockade", Exp Brain Res, Vol. 120, 1, 1998, pp. 70-84.
- 3. N. Spruston, D. Johnston, "Dendritic attenuation of synaptic potentials and currents: the role of passive membrane properties", Trends in Neurosciences, Vol. 17, 4, 1994, pp. 161-166.
- 4. J.T. Davie, M.H. Kole, J.J. Letzkus, N. Spruston, G.J. Stuart, M. Hausser, "Dendritic patchclamp recording", Nat Protoc, Vol. 1, 3, 2006, pp. 1235-1247.
- T. Blackmer, S.P. Kuo, K.L. Bender, P.F. Apostolides, L.O. Trussell, "Dendritic calcium channels and their activation by synaptic signals in auditory coincidence detector neurons", Vol. 102, 2, 2009, pp. 1218-1226.
- 6. F. Clarac, E. Pearlstein, "Invertebrate preparations and their contribution to neurobiology in the second half of the 20<sup>th</sup> century. Brain Research Reviews. Vol. 54, 2007, pp. 113-161.
- 7. D. Johnston, S. M-S. Wu, "Foundations of cellular neurophysiology". MIT Press, USA, 1994, pp. 60-62.
- T. F. Weiss, "Cellular biophysics, Electrical properties". MIT Press, USA, Vol. 2, 1996, pp. 94-97.

## ESTADOS ELECTRÓNICOS CUÁNTICOS SUPERSIMÉTRICOS DEL GRAFENO BAJO TEN-SIÓN UNIAXIAL

Yajaira Concha Sánchez<sup>1</sup>, Adolfo Huet Soto<sup>2</sup>, Alfredo Raya Montaño<sup>3</sup> y David Sebastián Valenzuela Díaz<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, <sup>2</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, <sup>3</sup>Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, <sup>4</sup>Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile.

## RESUMEN

Estudiamos el grafeno tensado uniaxialmente bajo la influencia de campos magnéticos no uniformes perpendiculares a la muestra de material con un tensor de tensión independiente de coordenadas. Para ese propósito, resolvimos la ecuación de Dirac con la velocidad de Fermi anisotrópica y exploramos las condiciones en las que dicha ecuación posee una estructura supersimétrica en el sentido de la mecánica cuántica a través de ejemplos. Trabajando en una norma tipo Laudau, las funciones de onda y los valores propios de la energía fueron encontrados analíticamente en términos de la intensidad del campo magnético, las escalas de anisotropía y otros parámetros relevantes que dan forma a los perfiles del campo magnético.

### **INTRODUCCIÓN**

La ciencia de materiales moderna, particularmente conectada con materiales bidimensionales (véase, por ejemplo [1] para una revisión reciente), ha sido impulsada desde el primer momento por membranas de grafeno [2]. Este material icónico consta de una lámina de átomos de carbono caracterizado por tener un solo átomo de espesor. Los átomos están enlazados en una red hexagonal que tiene forma de panal de abeia, con propiedades sobresalientes para aplicaciones tecnológicas y el desarrollo de la física fundamental [3]. Entre otras características, es notable el comportamiento de sus portadores a bajas energías, estos se mueven ¡como si no tuvieran masa! y la relación resultante entre la energía y su momento es lineal, dando así lugar a una relación de dispersión lineal en el cuasi-momento, válida a bajas energías, donde la velocidad de la luz es reemplazada por la velocidad de Fermi,  $v_F \approx 10^{-3}c$ . Esto implica que las ecuaciones de movimiento para estas cuasipartículas es una ecuación de Dirac en lugar de la ecuación ordinaria de Schrodinger con una relación de dispersión parabólica típica. Los estudios teóricos del grafeno, sin embargo, se remontan al trabajo seminal de Wallace [4] en el que se señaló la naturaleza pseudo-relativista de los portadores de carga a baja energía. Este es un primer ejemplo de la abundante colección de materiales Dirac-Weyl que hoy en día abre la posibilidad de conectar la dinámica de la física de altas energías en sistemas de materia condensada a través de las propiedades matemáticas de las ecuaciones de movimiento. En particular, es bien sabido que la ecuación de Dirac en algunos potenciales electromagnéticos puede ser factorizada de acuerdo a una estructura supersimétrica en el sentido de la mecánica cuántica [5, 6]. Este hecho ha sido explotado para estudiar varias propiedades del grafeno relacionadas con la influencia de los campos magnéticos externos [7, 8, 9, 10, 12], así como las impurezas de carga que inducen el efecto del colapso atómico cuando se alcanza un régimen supercrítico [11]. Curiosamente, considerando un campo magnético no uniforme perpendicularmente alineado a una membrana de grafeno, en la Ref. [8] la supersimetría de la ecuación de Dirac fue explorada para estudiar los estados magnéticos de los portadores de carga en grafeno para varios perfiles del campo magnético que aún permiten una solución analítica de dicha ecuación. El estudio de los estados electrónicos bajo tensión [13], se ha convertido en el estudio de las deformaciones mecánicas de las membranas de grafeno para modificar sus propiedades electrónicas (ver Ref. [14] para una revisión reciente). Un modelo ampliamente implementado para incorporar la influencia de la tensión es a través de un potencial pseudo-vector cuyos componentes incluyen los efectos del tensor de tensión. Este punto de vista preserva la naturaleza de las ecuaciones de movimiento de Dirac y explica en una manera natural las observaciones de los niveles pseudo-Landau en el grafeno tensado, como se predice en las bases teóricas [15]. El caso de deformación espacialmente uniforme merece una atención especial, va que es el caso límite de cualquier deformación general. Además, el caso es soluble y tiene un entendimiento directo al representar las correcciones reticulares en términos de un espacio recíproco tensado, que conduce a una velocidad de Fermi anisotrópica que

no produce ningún campo pseudo-magnético en absoluto [16]. La ruptura de la isotropía de la velocidad de Fermi es también observada en la deformación uniaxial [13], junto con un desplazamiento de los puntos de Dirac de alta simetría de la primera zona Brillouin del conjunto de panal de abejas seguido de una pequeña inclinación de los conos de Dirac. Todas estas observaciones han encontrado una explicación natural en términos de una variante anisotrópica de la ecuación de Dirac con la velocidad de Fermi dependiente de la posición [17]. La estructura de la ecuación de Dirac resultante todavía permite una solución analítica que incluye la influencia de un campo magnético uniforme externo [17], donde la tensión uniaxial es vista para inducir una contracción del espectro de los niveles de Landau si la tensión es a lo largo de los bordes Zig-Zag o Arm-Chair de la membrana de grafeno. Uno de los objetivos de este trabajo es generalizar los hallazgos de [17], cuando se considera una tensión uniaxial uniforme, bajo la influencia algunos perfiles de campo magnético considerados en [8]. Exploramos las condiciones en las que se conserva la estructura supersimétrica de la ecuación de Dirac anisotrópica. Presentamos la teoría que elegimos para trabajar en la sección "teoría". Trabajamos en detalle los ejemplos de un campo magnético uniforme, un pozo hiperbólico (o barrera), un pozo singular trigonométrico y un campo magnético en decaimiento exponencial en la sección "el papel de la tensión mediante ejemplos". Finalmente daremos las conclusiones de este trabajo en la sección "conclusiones".

#### TEORÍA

En la mecánica cuántica supersimétrica, el punto de partida suele ser un par de ecuaciones de Schrödinger unidimensionales

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)\right]\psi_1(x) \equiv H_1\psi_1 = \varepsilon_1\psi_1(x),$$
  
$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x)\right]\psi_2(x) \equiv H_2\psi_2 = \varepsilon_2\psi_2(x),$$
 (1)

cuyos potenciales se expresan en términos de la llamada función superpotencial W(x) en la forma

$$V_1(x) = W^2(x) + W'(x), \qquad V_2(x) = W^2(x) - W'(x),$$
 (2)

 $V_1(x)$  y  $V_2(x)$  se denominan "potenciales supersimétricos asociados". Definiendo  $L^{\pm} = \mp \frac{d}{dx} + W(x)$ , uno encuentra directamente que estos hamiltonianos pueden ser factorizados como  $H_1 = L^-L^+$  y  $H_2 = L^+L^-$ , respectivamente. A partir de esta factorización, se siguen propiedades importantes conocidas, una de ellas es que tanto  $H_1$  como  $H_2$  tienen el mismo espectro excepto, tal vez, para un estado base diferente.

Es bien sabido que la ecuación (2 + 1) dimensional de Dirac en la presencia de un campo magnético estático, perpendicular -incluso de un perfil espacial no trivial- puede ser factorizada en el espíritu de la mecánica cuántica supersimétrica en un par de sistemas correspondientes a las componentes del bi-espinor de Dirac, cada una bajo la influencia de un potencial supercompañero. Este hecho fue explotado en la Ref. [8] para explorar los espectros de cuasipartículas de grafeno que se mueven bajo la influencia de varios campos magnéticos estáticos alineados perpendicularmente con diferentes perfiles espaciales. Comienzan con la ecuación estacionaria de Dirac

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Pi_x - i\Pi_y \\ \Pi_x + i\Pi_y & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1(x, y) \\ \boldsymbol{\psi}_2(x, y) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1(x, y) \\ \boldsymbol{\psi}_2(x, y) \end{pmatrix},$$
(3)

donde  $\vec{\Pi} = \vec{p} + e\vec{A}$  y  $\vec{A}$  representa el vector potencial que describe el campo magnético externo. El sistema resultante de ecuaciones acopladas para  $\psi_1(x, y)$  y  $\psi_2(x, y)$  puede desacoplarse de manera estándar, siendo equivalente al sistema desacoplado de ecuaciones

$$(\Pi_x^2 - i[\Pi_x, \Pi_y] + \Pi_y^2) \psi_1 = \frac{E^2}{v_F^2} \psi_1,$$

$$(\Pi_x^2 + i[\Pi_x, \Pi_y] + \Pi_y^2) \psi_2 = \frac{E^2}{v_F^2} \psi_2,$$
(4)

Trabajando en la norma de Landau, tomamos

$$A_x = \mathbf{0}, \quad A_y = A_y(x), \quad \left[\Pi_x, \Pi_y\right] = -ie\hbar \frac{dA_y(x)}{dx} \equiv -ie\hbar B(x).$$
(5)

Así, definiendo

$$\varepsilon = \left(\frac{E}{\hbar v_F}\right)^2, \ \psi_j(x, y) = e^{iky}\psi_j(x), \qquad j = 1, 2, \tag{6}$$

el sistema de ecuaciones en (4) puede ser escrito en la forma

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)\right]\psi_1(x) \equiv H_1\psi_1 = \varepsilon_1\psi_1(x),$$
  
$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x)\right]\psi_2(x) \equiv H_2\psi_2 = \varepsilon_2\psi_2(x),$$
(7)

donde

$$V_{j}(x) = \left(k + \frac{eA_{y}(x)}{\hbar}\right)^{2} + (-1)^{j-1} \frac{eB(x)}{\hbar}, \qquad j = 1, 2.$$
(8)

Esto nos lleva a ser equivalente al sistema (7) con  $W(x) = k + \frac{eA_y(x)}{\hbar}$ . Nuestro objetivo en este trabajo es verificar hasta qué punto se modifica la estructura anterior suponiendo que la membrana de grafeno está sujeta a una tensión uniaxial homogénea.

Si bien es considerado ampliamente que los efectos de la tensión en el grafeno se introducen por campos pseudo-magnéticos efectivos en la ecuación de Dirac correspondiente, también se puede adoptar el punto de vista en el que las distorsiones de la red correspondientes a la deformación pueden ser explicadas por el desplazamiento y deformando la relación de energía en el espacio recíproco. Bajo estas consideraciones, la ecuación estacionaria de Dirac bajo tensión es

$$\boldsymbol{v}_F \begin{pmatrix} \mathbf{0} & a\Pi_x - b\Pi_y \\ a\Pi_x + b\Pi_y & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1(x, y) \\ \boldsymbol{\psi}_2(x, y) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1(x, y) \\ \boldsymbol{\psi}_2(x, y) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

donde las cantidades  $\Pi_{x,y}$  y  $A_{x,y}$  son las mismas como en el caso sin tensión, pero a y b son, en general, funciones de las coordenadas que describen la distorsión de la retícula. Para simplificar, consideramos que estas funciones son meramente constantes y representan pequeñas deformaciones de las membranas de grafeno. De la ecuación (9), el sistema resultante de ecuaciones acopladas, a través de un procedimiento estándar, puede ser expresado como

$$(a^{2}\Pi_{x}^{2} - iab[\Pi_{x},\Pi_{y}] + b^{2}\Pi_{y}^{2})\psi_{1} = \frac{E^{2}}{v_{F}^{2}}\psi_{1}, (a^{2}\Pi_{x}^{2} + iab[\Pi_{x},\Pi_{y}] + b^{2}\Pi_{y}^{2})\psi_{2} = \frac{E^{2}}{v_{F}^{2}}\psi_{2},$$
 (10)

Por lo tanto, adoptando la norma tipo Landau para expresar el campo magnético externo y definiendo

$$\psi_j(x,y) = e^{\frac{iky}{\zeta}} \psi_j(x), \qquad \zeta = \frac{b}{a}, \quad j = 1, 2,$$
(11)

el sistema de ecuaciones (10) es equivalente a

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+V_1^{\zeta}(x)\right]\psi_1(x)\equiv H_1\psi_1=\varepsilon_{a,1}\psi_1(x),$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_2^{\zeta}(x)\right]\psi_2(x) \equiv H_2\psi_2 = \varepsilon_{a,2}\psi_2(x).$$
(12)

donde

$$V_j^{\zeta}(x) = \zeta^2 \left(k + \frac{eA_y(x)}{\hbar}\right)^2 + (-1)^{j-1} \zeta \frac{eB(x)}{\hbar}, \quad \varepsilon_{a,j} = \frac{\varepsilon_j}{a^2}, \quad j = 1, 2.$$
(13)

Se puede observar que, al igual que en el caso ideal, el sistema de las Ecs. (12) ha sido desacoplado en un sistema supersimétrico. Observamos además que el efecto de la tensión en el potencial se parametriza únicamente por  $\zeta$ . Además, al considerar el perfil del campo magnético externo tendremos que

$$A_{y}(x) = \frac{B_{0}}{\alpha}F(\alpha x), \qquad \overrightarrow{B}(x) = \left(0, 0, B_{0}\frac{d}{dx}F(\alpha x)\right),$$
(14)

con  $B_0$  constante y F alguna función suave, el sistema de Ecs. (12) puede ser escrito en forma explícita como

$$\begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left( \mathbf{k} + \frac{\beta}{\alpha} F(\alpha s) \right) + \left( \mathbf{k} + \frac{\beta}{\alpha} F(\alpha s) \right)^2 \end{bmatrix} \psi_1(x) = \varepsilon_{a,1} \psi_1(x)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left( \mathbf{k} + \frac{\beta}{\alpha} F(\alpha s) \right) + \left( \mathbf{k} + \frac{\beta}{\alpha} F(\alpha s) \right)^2 \end{bmatrix} \psi_2(x) = \varepsilon_{a,2} \psi_2(x), \quad (15)$$

 $\cos \beta = \zeta e B_0 / \hbar$ , que es idéntico a las Ecs. (12) y (8), identifiquemos

$$B_0 \rightarrow \zeta B_0, \qquad k \rightarrow \zeta k, \qquad \varepsilon_j \rightarrow \varepsilon_{a,j}.$$
 (16)

A continuación, explotamos esta identificación para explorar el papel de la tensión en los valores propios de la energía correspondientes a varios ejemplos trabajados en la literatura [8].

#### EL PAPEL DE LA TENSIÓN MEDIANTE EJEMPLOS

En esta sección revisamos algunos ejemplos considerados en la Ref. [8] de la solución de la ecuación de Dirac bajo varios campos magnéticos estáticos pero no uniformes, con el ingrediente agregado de la tensión. Nos enfocamos en el impacto del parámetro  $\zeta$ , a y b en los valores propios de energía para un perfil de campo magnético dado.

El campo magnético constante

Primero consideramos el caso de un campo magnético uniforme

$$A_y = B_0 x, \qquad \vec{B} = (0, 0, B_0),$$
(17)

que se sabe que da lugar a los niveles de Landau. Los correspondientes potenciales supercompañeros, de acuerdo con la Ec. (13) son

$$V_{j}^{\zeta}(x) = \zeta^{2}(k + Dx)^{2} + (-1)^{j-1}\zeta D, \qquad j = 1, 2,$$
(18)

con  $D = eB_0/\hbar$ . Este corresponde a un potencial de oscilador armónico desplazado y se muestra en la Fig. 1 para diferentes valores del parámetro de deformación. De este potencial se deduce que el espectro es

$$\varepsilon_{2,a}^{0} = 0, \qquad \varepsilon_{2,a}^{n} = \varepsilon_{1,a}^{n-1} = \zeta(2D)n, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$
(19)

0

$$E_{2,a}^{0} = \mathbf{0}, \qquad E_{2,a}^{n} = E_{1,a}^{n-1} = \hbar v_{F} \sqrt{ab(2D)n}, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$
(20)

Al igual que en el caso sin tensión, los niveles de energía dependen directamente de D pero no dependen de k. En este caso, al aumentar a o b aumentarán los niveles de energía.



Figura 16: Variación de V<sub>1</sub>(x) para el campo magnético constante con respecto a  $\zeta$ . Hemos fijado D = 0.5 y k = 1.

*El pozo hiperbólico o barrera* El campo magnético para este caso es

$$A_{y}(x) = -\frac{B_{0}}{\alpha} \tanh \alpha x, \qquad \vec{B}(x) = \left(0, 0, \frac{B_{0}}{(\cosh \alpha x)^{2}}\right).$$
(21)

Para apreciar mejor el efecto de la tensión, fijamos  $\alpha = 1$ . Entonces, los superpotenciales ( $V_1$  se muestra en la Fig. 2) son ahora

$$V_{j}^{\zeta}(x) = \zeta^{2}(k^{2} + D^{2}) + 2k\zeta^{2}D\tanh(x) - \zeta D(\zeta D + (-1)^{j})(\operatorname{sech}(x))^{2},$$
(22)



Figura 17: Variación de  $V_1(x)$  para el pozo hiperbólico (o barrera) con respecto a  $\zeta$ . Hemos fijado D = 4 y k = -2.

Para este tipo de campo magnético, las ecuaciones (12) asumen la forma:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \zeta^2 (k^2 + D^2) + 2k\zeta^2 D \tanh(x) - \zeta D(\zeta D + (-1)^j)(\operatorname{sech}(x))^2 - \varepsilon_a\right]\psi_j(x) = 0,$$
(23)

con

$$A \equiv \zeta D, \qquad B \equiv \zeta^2 k D, \qquad \varepsilon_{ab} \equiv \varepsilon_a - \zeta^2 (k^2 + D^2), \qquad (24)$$

obtenemos el sistema

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - 2B\tanh(x) + A(A + (-1)^j)\left(\operatorname{sech}(x)\right)^2 - \varepsilon_{ab}\right]\psi_j(x) = 0.$$
 (25)

Poniendo en la forma Sturm-Liouville obtenemos el siguiente espectro

$$\varepsilon_{1,ab}^{n} = -(A-n)^{2} - \frac{B^{2}}{(A-n)^{2}}, \qquad \varepsilon_{2,ab}^{n} = \varepsilon_{1,ab}^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3$$
(26)

Entonces,

$$\varepsilon_{1,a}^{n} = \zeta^{2}(k^{2} + D^{2}) - (\zeta D - n)^{2} - \frac{\zeta^{4}k^{2}D^{2}}{(\zeta D - n)^{2}}, \qquad \varepsilon_{2,a}^{n} = \varepsilon_{1,a}^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$
(27)

Tomando  $u = \tanh(x)$ ,  $s_1 = \zeta D - 1$ ,  $s_2 = s_1 + 1$ ,  $a_1 = \frac{\zeta^2 kD}{\zeta D - n + 1}$  y  $a_2 = \frac{\zeta^2 kD}{\zeta D - n}$ , las funciones propias correspondientes son

$$\psi_j^n(u(x)) = (1-u)^{\frac{s_j - n + a_j}{2}} (1+u)^{\frac{s_j - n - a_j}{2}} P_n^{(s_j - n + a_j, s_j - n - a_j)}(u), \qquad j = 1, 2$$
(28)

donde  $P_n^{(\alpha,\beta)}(u)$  son los polinomios de Jacobi comenzando con  $\alpha, \beta > 1$ . Entonces, los valores propios son

$$E_1^n = \hbar v_F \sqrt{b^2 (k^2 + D^2) - (bD - an)^2 - \frac{b^4 k^2 D^2}{(bd - an)^2}},$$
(29)

$$E_2^n = \hbar v_F \sqrt{b^2 (k^2 + D^2) - (bD - a(n-1))^2 - \frac{b^4 k^2 D^2}{(bd - a(n-1))^2}},$$
(30)

para un entero n y comenzando con n = 1 implica que  $E_2^0 = 0$ . Notemos que, para un valor de k fijo, tal que k < D y, habiendo establecido  $\alpha = 1$ , el cociente de D y a determina el número de niveles discretos, lo que significa que la tensión depende de este número. Si fijamos estos parámetros, el número de niveles incrementa o decrece por k pero el papel del número de onda puede disminuir o aumentar mediante el parámetro de tensión b.

El pozo singular trigonométrico

Analizamos el potencial siguiente:

$$A_{y}(x) = -\frac{B_{0}}{\alpha}\cot(\alpha x), \qquad \overrightarrow{B}(x) = \left(0, 0, \frac{B_{0}}{(\cot \alpha x)^{2}}\right),$$
(31)

Para apreciar mejor el efecto de la tensión, tomamos nuevamente  $\alpha = 1$ . Esto nos conduce a los potenciales

$$V_{j}^{\zeta}(x) = \zeta^{2}(k^{2} - D^{2}) - 2\zeta^{2}kD\cot(x) + \zeta D(\zeta D + (-1)^{j-1})(\csc(x))^{2},$$
(32)

donde  $D = \frac{eB_0}{\hbar \alpha}$ . Estos potenciales son pozos infinitos que restringen el problema al intervalo  $0 < x < \pi \alpha$ . El efecto del parámetro de deformación sobre el potencial se muestra en la Fig. 3. Para este tipo de campo magnético, las ecuaciones (12) asumen la forma

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \zeta^2 (k^2 - D^2) - 2\zeta^2 k D \cot(x) + \zeta D (\zeta D + (-1)^{j-1}) (\csc(x))^2 - \varepsilon_a\right] \psi_{1,2}(x) = 0.$$
(33)

#### Usamos la notación



Figura 18: Variación de  $V_1(x)$  para el pozo singular trigonométrico con respecto a  $\zeta$ . Hemos fijado D = 0.5 y k = 8.

obteniendo el sistema

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2B\cot(x) - A(A + (-1)^{j-1}(\csc(x))^2 - \varepsilon_{ab})\right]\psi_{1,2}(x) = 0.$$
(35)

Nuevamente, se puede poner en la forma de Sturm-Liouville y obtenemos el siguiente espectro:

$$\varepsilon_{1,ab}^n = (A+n)^2 - \frac{B^2}{(A+n)^2}, \qquad \varepsilon_{2,ab}^n = \varepsilon_{1,ab}^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$
(36)

que finalmente resulta en

$$E_{1,n} = \hbar v_F \sqrt{b^2 (k^2 - D^2) + (bD + an)^2 - \frac{b^4 k^2 D^2}{(bD + an)^2}},$$
(37)

$$E_{2,n} = \hbar v_F \sqrt{b^2 (k^2 - D^2) + (bD + a(n-1))^2 - \frac{b^4 k^2 D^2}{(bD + a(n-1))^2}},$$
(38)

para un entero *n* y comenzando con n = 1 implica que  $E_2^0 = 0$ . Observamos que, independientemente de la tensión, este potencial produce un número infinito de estados ligados para cualquier valor real de k. El efecto de la tensión en los valores propios de la energía (que son positivos) es que estos se incrementan cuando a o b son mayores que uno, por el contrario las energías se reducen cuando cualquiera de estos parámetros son menores que uno.

El campo magnético en decaimiento exponencial s

$$A_{y}(x) = -\frac{B_{0}}{\alpha}(e^{-\alpha x} - 1), \qquad B(x) = B_{0}e^{-\alpha x}.$$
 (39)

Esta elección de  $A_v$  asegura que para  $\alpha = 0$  recuperamos los resultados del campo magnético uniforme. Definiendo  $D = \frac{eB_0}{a\hbar}$ , los potenciales tienen la forma:

$$V_{j}^{\zeta}(x) = \zeta^{2}(k+D)^{2} + \zeta^{2}D^{2}e^{-2\alpha x} + \zeta\left((-1)^{j-1}\alpha - 2\zeta(k+D)\right)De^{-\alpha x}.$$
(40)

Considerando  $V_2(x)$ , la segunda ecuación en (12) queda escrita como:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+\zeta^2(k+D)^2-\varepsilon_a+\zeta(\alpha-2\zeta(k+D))De^{-\alpha x}+\zeta^2D^2e^{-2\alpha x}\right]\psi_2(x)=0.$$
(41)

Sea  $u = (2D/\alpha)e^{-\alpha x}$ . Entonces, la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{1}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d}{du} - \frac{s^2}{u^2} + \frac{v}{2u} - \frac{1}{4} \psi_2(x) = \mathbf{0},$$
(42)

donde

$$s^{2} = \frac{1}{\alpha^{2}} (\zeta^{2} (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{D})^{2} - \boldsymbol{\varepsilon}_{a}), \qquad \boldsymbol{\nu} = \frac{2\zeta}{\alpha} (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{D}) - 1.$$
(43)

Con el ansatz

$$\psi_2 = e^{-\frac{u}{2}} u^s F(u), \tag{44}$$

la ecuación (42) es equivalente a

$$u\frac{d^{2}F}{du^{2}} + (2s+1-u)\frac{dF}{du} - \left(s + \frac{1-v}{2}\right)F = 0,$$
(45)

que tiene como solución la función hipergeométrica confluente

$$F(u) =_{1} F_{1}\left(s + \frac{1-v}{2}; 2s + 1; u\right),$$
(46)

para que sea normalizable exige que

$$s + \frac{1-v}{2} = -n,$$
  $n = 0, 1, 2$ 
(47)

Así, los valores propios en este caso son

$$\varepsilon_a^n = \zeta^2 (k+D)^2 - \left(-\alpha(n+1) + \zeta(k+D)\right)^2.$$
(48)

Un análisis similar se sigue para  $V_1(x)$ , donde reemplazamos  $n \rightarrow n - 1$  en las expresiones finales. En consecuencia,

$$E_1^n = \hbar v_F \sqrt{b^2 (k+D)^2 - (-\alpha a n + b(k+D))^2},$$
  

$$E_2^n = \hbar v_F \sqrt{b^2 (k+D)^2 - (-\alpha a (n+1) + b(k+D))^2}.$$
(49)

En el límite  $\alpha = 0$ ,

$$E_1^n|_{\alpha=0} = \hbar v_F \sqrt{2abB_0(n+1)} = E_1^{n+1}|_{\alpha=0},$$
(50)

de acuerdo con los valores propios para el caso del campo magnético uniforme. Al igual que en el caso sin tensión, el número permitido de energías en el espectro discreto depende de k, pero ahora también está controlado por el parámetro  $\zeta$ . Además, la elección de la norma ha hecho que los valores propios de energía dependan explícitamente de la intensidad del campo magnético dado por D. Esto está en contraste con la elección de norma de la Ref. [8].



Figura 19: Variación de  $V_1(x)$  para el campo magnético en decaimiento exponencial con respecto a  $\zeta$ . Hemos fijado D = 0.5y k = 8.

### CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos estudiado estados electrónicos cuánticos para el grafeno uniformemente tensados bajo la influencia de campos magnéticos no homogéneos que apuntan en la dirección transversa al plano de la membrana, con una dependencia explícita de sus coordenadas. Para este fin, hemos tomado en cuenta las correcciones anisotrópicas de la velocidad de Fermi que representan aún la ecuación de Dirac en una forma tratable. La estructura de la mecánica cuántica supersimétrica de esta ecuación permite resolverla en estos casos de campos magnéticos no homogéneos disponibles en la literatura [8]. El efecto de la tensión en el nivel de los superpotenciales se codifica exclusivamente en el parámetro  $\zeta$ , que mide el cociente de tensión entre los coeficientes a y b a lo largo de cada dimensión espacial, respectivamente. Con respecto a los niveles de energía, nuestro análisis muestra que los efectos de la tensión dependen de a y b por separado en general y que cada uno de los parámetros puede tener un efecto diferente dependiendo del tipo de potencial. Solo en el campo magnético uniforme se normaliza la intensidad del campo por  $B_0 \rightarrow \sqrt{ab}B_0$  en el espectro de nivel de Landau [17]. Además, hemos demostrado que para algunos potenciales que permiten un número finito de niveles de energía en el espectro discreto, la tensión puede desempeñar un papel en la determinación del número de niveles. Para el caso de campo magnético en decaimiento exponencial, demostramos que una elección cuidadosa de norma es importante para obtener el límite del campo magnético uniforme cuando el factor de amortiguación  $\alpha$  en la Ec. (39) desaparece. Nuestros resultados corresponden a un caso límite de la tensión uniaxial dependiente de coordenadas más general, que ahora se está estudiando y los resultados se discutirán en otra parte.

### **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. Yan B and Felser C 2017, Annu. Rev. Cond. Matt. Phys. 8, 337.
- 2. Novoselov K S, Geim A K, Morozov S V, Jiang D, Zhang Y, Dubonos S V, Grigorieva I V and Firsov A A 2004, Science 306, 666.
- Novoselov K S, McCann E, Morozov S V, Falko V I, Katsnelson M I, Zeitler U, Jiang D, Schedin F and Geim A K 2006, *Nat. Phys.* 2, 177; Katsnelson M I 2007, *Materials Today* 10, 20; Novoselov K S, Jiang Z, Zhang Y, Morozov S V, Stormer H L, Zeitler U, Maan J C, Boebinger G S, Kim P and Geim A K, *Science* 315, 1379; Geim A K and Novoselov K S 2007, *Nat. Mater.* 6, 183.
- 4. Wallacs P R 1947, Phys. Rev. 71, 622.
- 5. Cooper F, Khare A and Sukhatme U 2001 *Supersymmetry in Quantum Mechanics* (Singapore: World Scientific).
- 6. Cooper F, Khare A and Shukatme U 1995, Phys. Rep. 251, 267.
- 7. Gamboa J and Zanelli J 1985 Phys. Lett. B 165, 91.
- 8. Kuro S, Negro J and Nieto L M 2009, J. Phys. Cond. Matt. 21 455305.

- 9. Milepas E, Torres M and Murguia M 2011, arXiv:1102.5298.
- 10. Hernández-Ortiz S, Murguia G and Raya A 2012, J. Phys.: Condens. Matter 24, 015304.
- 11. Valenzuela D, Hernández-Ortiz S, Loewe M and Raya A 2016, J. Phys. A49, 495302.
- 12. Roy P, Ghosh T K and Bhattacharya K 2012, J. Phys. Cond. Matt. 24, 055301.
- 13. Pereira V M, Castro Netto A H and Peres N M R 2009, Phys. Rev. B80, 045401.
- 14. García-Naumis G, Barraza-Lopez S, Oliva-Leyva M and Terrones H 2017, *Rep. Prog. Phys.* 80, 096501.
- 15. Guinea F, Katsnelson M I and Geim A K 2010, *Nat. Phys.* 6, 30; Guinea F, Geim A K Katsnelson M I and Novoselov K S 2010, *Phys. Rev B*81, 035408.
- 16. Oliva-Leyva M and García-Naumis G 2013 Phys. Rev. B88, 085430.
- 17. Betancur-Ocampo Y, Cifuentes-Quintal M E, Cordourier-Maruri G and de Coss R 2015, *Ann. Phys.* 359, 243.
- 18. Compean C B and Kirchbach M 2006, J. Phys. A: Math. Gen 39, 547.

## ESTUDIO DE LA RELACIÓN DE PHILLIPS PARA SUPERNOVAS TIPO IA EN GALAXIAS CER-CANAS

Ramona Núñez-López, Diana Laura Pacheco-Cabanillas

Universidad de Sonora

#### RESUMEN

Una supernova es una violenta explosión que marca el fin de la vida de una estrella. El material que la compone sale expulsado al espacio a grandes velocidades y enriquece el gas interestelar con los átomos que fabricó durante toda su existencia. Este evento no es solo uno de los más espectaculares del Universo, sino que representa la herramienta más precisa para determinar grandes distancias astronómicas; en particular las llamadas Supernovas tipo la. Dada la naturaleza homogénea y la alta luminosidad de estas supernovas, es posible utilizarlas como candelas estandarizables para la determinación de parámetros cosmológicos.

M.M. Phillips, estudiando una muestra de 9 supernovas, determinó una relación lineal entre el máximo de luminosidad de las Supernovas la y su tasa de declinación. Dicha relación es conocida como relación de Phillips y fue crucial en los estudios que llevaron al descubrimiento de la expansión acelerada del Universo y de la energía oscura. En este trabajo se estudió un grupo de 24 supernovas en galaxias cercanas, observadas con los filtros b, v, i y g, con el fin de verificar si la relación de Phillips se sigue cumpliendo para muestras más grandes y mejor observadas, encontrando que dicha relación se mantiene si bien con algunos cambios en los coeficientes. En el caso del filtro g de Sloan, el cual no fue incluido en el trabajo de Phillips, también se encuentra una relación de tipo lineal.

### INTRODUCCIÓN

Una supernova es una explosión estelar que puede ocurrir en la etapa final de evolución de la estrella o como el resultado de la interacción entre las estrellas en un sistema binario (ver por ejemplo Stevenson 2014, Mobberley 2007). La actual clasificación de supernovas (SNs) sigue el orden histórico en el cual estos eventos fueron observados. Inicialmente, las supernovas fueron divididas en dos grupos: tipo I y tipo II, de acuerdo a la presencia (tipo II) o ausencia (tipo I) de líneas de emisión de hidrógeno en su espectro. Después, la observación de supernovas con diferentes características espectrales llevó a la división del tipo I en los subtipos Ia, lb y lc; las de tipo la presentan líneas de silicio, las de tipo Ib de helio, mientras que las de tipo Ic no presentan líneas ni de silicio ni de helio. Se cree ahora que las supernovas tipo Ib y lc se producen debido al colapso gravitacional de estrellas masivas (más de 8 veces la masa del Sol), que tiene como resultado final una estrella de neutrones o un agujero negro. Por otro lado, se cree que las supernovas tipo la son explosiones termonucleares en las cuales la estrella es completamente destruida.

Las "supernovas termonucleares" (o tipo la) se forman a partir de estrellas de baja masa en un sistema binario. La estrella más masiva del sistema evoluciona más rápidamente alcanzando su etapa de enana blanca; mientras que la menos masiva evoluciona más lentamente y cuando atraviesa su etapa de gigante roja invade el campo gravitacional de su compañera. De esta forma, parte del material de la gigante roja pasa a la enana blanca, haciendo que aumente su masa hasta alcanzar el límite de Chandrasekhar, desencadenando un estallido termonuclear que en segundos la destruye completamente, sin dejar ningún remanente estelar compacto. Otra posibilidad es que las estrellas del sistema binario tengan masas similares y lleguen juntas a la etapa de enana blanca, quedando inmersas en una capa gaseosa común y que entre ambas alcancen juntas la masa límite, sobreviniendo la explosión. La supernova brillará intensamente, incrementando su brillo los primeros días, para irse apagando durante las siguientes semanas o meses.

# **IMPORTANCIA DE LAS SUPERNOVAS**

Cuando las supernovas explotan afectan de manera importante a sus alrededores. Con la explosión se liberan al espacio los elementos químicos producidos en el interior de la estrella a lo largo de toda su vida. Estos nuevos elementos se esparcen en el medio gaseoso circundante, enriqueciéndolo. De esta forma, las generaciones de estrellas posteriores a la supernova contendrán elementos más pesados que las generaciones previas. El Sol, por ejemplo, una estrella de segunda o alguna gene-

ración posterior, se formó a partir de gas enriquecido con los elementos necesarios (oxígeno, carbono, calcio, hierro, etc.) para dar surgimiento a la vida en al menos uno de sus planetas. Además de ser uno de los principales motores de la evolución química de las galaxias, las supernovas se convierten en un factor desencadenante de formación estelar ya que la inmensa energía liberada durante la explosión presiona y comprime el gas circundante, llevándolo al colapso y a la formación de nuevas estrellas.

Por otro lado, las supernovas revisten una gran importancia para la cosmología, en especial las de tipo la. La naturaleza homogénea de este tipo de supernovas las convierte en excelentes "candelas estándar" (objetos de luminosidad constante y conocida por lo que se puede deducir la distancia a la que se encuentran a partir de la cantidad de luz que llega a nuestros detectores). Por otra parte son eventos extremadamente luminosos, que se pueden detectar y observar a distancias considerables. A fines de los 90s, las observaciones de supernovas tipo la en galaxias muy lejanas pusieron de manifiesto que el Universo se encuentra en un estado de expansión acelerada (Riess y col. 1998, Perlmutter y col. 1999), descubrimiento que fue reconocido con el Premio Nobel de Física en 2011.

### **CURVAS DE LUZ**

Una curva de luz es una representación gráfica del brillo de una estrella en función del tiempo. El sistema para medir el brillo de las estrellas se debe al astrónomo griego Hiparco, que vivió en el siglo II a.C. Para él todas las estrellas se encontraban en la bóveda celeste, a la misma distancia de la Tierra. Basándose en ese criterio, Hiparco clasificó las estrellas más brillantes perceptibles a simple vista como de primera magnitud y las más débiles como de sexta magnitud. Actualmente, este sistema se ha ampliado a objetos más débiles (visibles solo con telescopio) pero la regla es la misma: cuanto más débil es un objeto, mayor es su magnitud. Los objetos celestes muy brillantes tienen magnitudes negativas, el Sol por ejemplo tiene una magnitud de -26.8. Hoy sabemos que los objetos astronómicos están a diferentes distancias, por lo que una estrella aparentemente brillante por estar muy cerca, puede ser en realidad intrínsecamente débil; o bien, una estrella muy lejana e intrínsecamente luminosa puede parecer débil. Necesitamos entonces establecer una propiedad común que podamos usar para comparar diferentes estrellas y para realizar análisis estadísticos. Esta propiedad es la magnitud absoluta *M*, que se define como la magnitud que tendría una estrella si fuera colocada a 10 parsecs de la Tierra (1 parsec =  $3.086 \times 10^{13}$  km). En forma de ecuación tenemos:

$$M = m - 5log_{10}d + 5 - A$$

(1)

(2)

donde m es la magnitud aparente, d la distancia de la estrella a la Tierra y A la extinción interestelar que cuantifica la disminución del brillo de la estrella debido a que parte de su luz es absorbida y/o dispersada por el gas y polvo presente entre las estrellas. En la actualidad, las estrellas pueden ser observadas a través de filtros que solo dejan pasar una parte de toda la luz que llega al telescopio, por lo que la ecuación (1) puede ser escrita como:

## $M_{\lambda} = m_{\lambda} - 5 \log_{10} d + 5 - A_{\lambda}$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz que deja pasar el filtro.

En la figura 1 se muestra la representación esquemática de la curva de luz de una supernova la típica: el brillo aumenta rápidamente durante las primeras dos semanas, hasta que alcanza un máximo, y a partir de ahí empieza a disminuir. Puesto que las SNs la son el resultado de explosiones del mismo tipo de estrellas, con masas y evoluciones similares, se espera que tengan curvas de luz homogéneas con un máximo de luminosidad similar; sin embargo, estas no son exactamente iguales sino que presentan una dispersión intrínseca de unas ~0.35 mag (Childress y col. 2013) alrededor de un valor medio de -19.35 mag. Esto las convierte en "candelas estandarizables" más que "cande-las estándar".



Figura 1. Representación esquemática de la curva de luz de una supernova la típica. Se simula la magnitud en el filtro B (luz azul) en función del tiempo medido a partir del máximo. El parámetro Δm<sub>15</sub>(B) mide la diferencia (en magnitudes) entre la luminosidad máxima y la luminosidad 15 días después del máximo. Imagen tomada de http://astronomy.swin.edu.au/cosmos.

## **RELACIÓN DE PHILLIPS**

Existen algunos procedimientos para "estandarizar" las curvas de luz de las SNs la, con el objetivo de reducir la dispersión de sus magnitudes en el máximo de luz y hacer así las medidas más precisas a la hora de determinar parámetros cosmológicos. Uno de estos procedimientos se basa, en la relación entre la anchura de la curva de luz y la luminosidad alcanzada, conocida como "relación de Phillips" y se utiliza para proporcionar medidas precisas de la magnitud absoluta a partir de la magnitud aparente y de su curva de luz.

Phillips (1993) encontró una relación lineal entre la magnitud absoluta alcanzada en el máximo de luminosidad en el filtro B (luz azul), y la diferencia entre ésta y la correspondiente 15 días después, denotada por  $\Delta m_{15}(B)$ . De este modo se puede estimar la distancia a estos objetos, mediante el mero estudio de la curva de luz. Esta calibración permitió a los proyectos de cosmología de SNs la descubrir que el Universo se expande de forma acelerada.

Phillips trabajó con un total de nueve supernovas que en ese tiempo tenían valores de distancia y extinción conocidos (obtenidos por distintos investigadores y mediante técnicas de análisis diferentes) y extendió su estudio a los filtros V (luz visible) e l (luz infrarroja), siempre en función de  $\Delta m_{15}(B)$ .

### PARTE EXPERIMENTAL

Con el fin de contar con una muestra de supernovas lo más homogénea posible, se tomaron solo datos de un grupo de investigación; el Carnegie Supernova Project (CSP) que en su página web (http://csp.obs.carnegiescience.edu/) muestra la información fotométrica y espectroscópica obtenida para 310 supernovas observadas a partir de 2004, de las cuales, 148 son tipo la. Se seleccionó este grupo porque sus instrumentos y lugar de observación (Observatorio "Las Campanas", Chile) son de los mejores a nivel mundial y sus datos están accesibles a la comunidad científica y al público en general.

De las 148 supernovas tipo la registradas en CSP se tomó una muestra teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Curvas de luz bien muestreadas. Se seleccionaron las supernovas que contaran con observaciones en el máximo e incluso desde antes, y que continuasen por lo menos unos 20 días después. La curva de luz debe haber sido lo suficientemente bien muestreada con el fin de evitar grandes interpolaciones.
- 2. Extinción provocada por la galaxia anfitriona. Con el fin de contar con una buena estimación de la extinción extra e intergaláctica, se seleccionaron supernovas con suficiente información reportada en la literatura.

Aplicando estos criterios, se obtuvo una muestra de 24 supernovas. Las supernovas utilizadas así como sus principales parámetros se presentan en las tablas 1 y 2. Los datos obtenidos de la página de CSP fueron: coordenadas (declinación y ascensión recta) de la supernova, nombre de la galaxia anfitriona, magnitudes aparentes (filtros B, V, g, i) y Δm<sub>15</sub>(B).

| Supernova | A. R.*  | Declinación  | Galaxia        | Rv  | E(B-V) |  |  |
|-----------|---------|--------------|----------------|-----|--------|--|--|
| SN2004ef  | 42:10.0 | +19:59:40.40 | UGC 12158      | 2.7 | 0.158  |  |  |
| SN2004eo  | 32:54.2 | +09:55:42.70 | NGC 6928       | 0.9 | 0.128  |  |  |
| SN2004ey  | 49:07.8 | +00:26:39.20 | UGC 11816      | 3.1 | 0.019  |  |  |
| SN2004gu  | 46:24.7 | +11:56:56.10 | FGC 175A       | 2.1 | 0.096  |  |  |
| SN2005al  | 50:00.3 | -30:34:34.20 | NGC 5304       | 3.6 | 0.022  |  |  |
| SN2005el  | 11:48.7 | +05:11:39.40 | NGC 1819       | 3.5 | 0.015  |  |  |
| SN2005hc  | 56:47.9 | -00:12:49.40 | MCG +00-06-003 | 3.8 | 0.049  |  |  |
| SN2005iq  | 58:32.5 | -18:42:33.00 | MCG -03-01-008 | 3.6 | 0.040  |  |  |
| SN2005kc  | 34:07.3 | +05:34:06.30 | NGC 7311       | 2.5 | 0.310  |  |  |
| SN2005ki  | 40:28.2 | +09:12:08.40 | NGC 3332       | 3.4 | 0.016  |  |  |
| SN2005na  | 01:36.6 | +14:07:59.70 | UGC3634        | 2.5 | 0.061  |  |  |
| SN2006D   | 52:33.9 | -09:46:30.80 | MCG -01-33-34  | 2.5 | 0.134  |  |  |
| SN2006ax  | 24:03.5 | -12:17:29.20 | NGC 3663       | 2.9 | 0.016  |  |  |
| SN2006bh  | 40:16.1 | -66:29:06.30 | NGC 7329       | 3.8 | 0.037  |  |  |
| SN2006et  | 42:45.8 | -23:33:30.40 | NGC 232        | 1.9 | 0.254  |  |  |
| SN2006kf  | 41:50.5 | +08:09:25.00 | UGC 2829       | 4.1 | 0.032  |  |  |
| SN2006ob  | 51:48.1 | +00:15:48.30 | UGC 1333       | 4.2 | 0.045  |  |  |
| SN2007A   | 25:16.7 | +12:53:12.50 | NGC 105        | 2.5 | 0.259  |  |  |
| SN2007af  | 22:21.0 | -00:23:37.60 | NGC 5584       | 2.1 | 0.178  |  |  |
| SN2007bd  | 31:33.3 | -01:11:58.00 | UGC 4455       | 2.1 | 0.058  |  |  |
| SN2007le  | 38:48.4 | -06:31:21.30 | NGC 7721       | 1.7 | 0.388  |  |  |
| SN2007on  | 38:50.9 | -35:34:30.00 | NGC 1404       | 3.5 | 0.007  |  |  |
| SN2008bc  | 38:31.2 | -63:58:25.60 | KK 1524        | 3.1 | 0.019  |  |  |
| SN2008gp  | 23:00.7 | +01:21:42.80 | MCG +00-9-74   | 0.7 | 0.098  |  |  |

| Tahla 1     | Parámetros  | de las | supernovas | seleccionadas   |
|-------------|-------------|--------|------------|-----------------|
| 1 4 5 4 1 . | i ulullouoo |        | Jupernovuo | 30100010110000. |

\*Ascensión Recta

Tabla 2. Magnitudes aparentes

| Supernova | ∆m15(B) | Δm <sub>15</sub> (g) | m <sub>B</sub> | mv    | mg    | mi    |
|-----------|---------|----------------------|----------------|-------|-------|-------|
| SN2004ef  | 1.379   | 1.080                | 16.82          | 16.72 | 16.74 | 17.31 |
| SN2004eo  | 1.365   | 1.130                | 15.05          | 15.00 | 14.97 | 15.54 |
| SN2004ey  | 0.930   | 0.782                | 14.69          | 14.76 | 14.68 | 15.47 |
| SN2004gu  | 0.890   | 0.750                | 17.43          | 17.25 | 17.33 | 17.98 |
| SN2005al  | 1.166   | 0.923                | 14.86          | 14.90 | 14.83 | ND    |
| SN2005el  | 1.348   | 1.050                | 14.81          | 14.82 | 14.73 | 15.42 |
| SN2005hc  | 0.912   | 0.740                | 17.29          | 17.29 | 17.24 | ND    |
| SN2005iq  | 1.250   | 1.030                | 16.77          | 16.79 | 17.72 | 17.39 |
| SN2005kc  | 1.200   | 0.930                | 15.49          | 15.38 | 15.38 | 15.65 |
| SN2005ki  | 1.371   | 1.026                | 15.54          | 15.55 | 15.50 | 16.19 |
| SN2005na  | 0.940   | 0.750                | 15.97          | 16.00 | 15.94 | ND    |
| SN2006D   | 1.388   | 1.088                | 14.13          | 14.04 | 14.03 | 14.50 |
| SN2006ax  | 1.016   | 0.765                | 14.99          | 15.05 | 14.96 | 15.72 |
| SN2006bh  | 1.428   | 1.094                | 14.34          | 14.38 | 14.30 | 14.92 |
| SN2006et  | 0.847   | 0.702                | 15.96          | 15.78 | 15.85 | 16.33 |
| SN2006kf  | 1.583   | 1.110                | 15.78          | 15.81 | 15.76 | 16.35 |
| SN2006ob  | 1.450   | 1.200                | 18.24          | 18.19 | 18.18 | ND    |
| SN2007A   | 0.924   | 0.853                | 15.68          | 15.46 | 15.54 | 15.96 |
| SN2007af  | 1.203   | 0.893                | 13.29          | 13.10 | 13.06 | 13.65 |
| SN2007bd  | 1.234   | 0.770                | 16.55          | 16.52 | 16.55 | 17.08 |
| SN2007le  | 0.971   | 0.840                | 13.87          | 13.58 | 13.67 | 14.12 |
| SN2007on  | 1.860   | 1.563                | 13.00          | 12.94 | 12.91 | 13.37 |
| SN2008bc  | 0.823   | 0.677                | 14.59          | 14.63 | 14.56 | 15.45 |
| SN2008gp  | 0.970   | 0.840                | 16.44          | 16.41 | 16.36 | 17.13 |

Para determinar la magnitud absoluta a partir de su magnitud aparente, de acuerdo a la ecuación (2), necesitamos conocer la distancia y la extinción. La distancia fue calculada con la siguiente fórmula (Folatelli 2010):

$$d = \frac{1+z_{helio}}{1+z_{CMB}} \frac{c}{H_0} \left[ z_{CMB} + \frac{1}{2} \left( \Omega_A - \frac{\Omega_M}{2} + 1 \right) z_{CMB}^2 \right]$$
(3)

donde  $\Omega_{\rm M}$  y  $\Omega_{\Lambda}$  son parámetros relacionados con la constante cosmológica (factor al que se le atribuye la aceleración de la expansión del Universo) y con la densidad de materia del Universo, respectivamente; *c* es la velocidad de la luz,  $H_0$  la constante de Hubble,  $z_{helio}$  el corrimiento al rojo de la luz respecto al Sol y  $z_{CMB}$  el corrimiento al rojo respecto al fondo cósmico de microondas (CMB por sus siglas en inglés).

En cuanto a la extinción  $A_{\lambda}$ , ésta tiene dos componentes: una debida a nuestra galaxia y otra debida a la galaxia donde se encuentra la supernova. La primera se reporta en la página de CSP, mientras que la segunda se determinó de la siguiente manera:

$$A_{\lambda} = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_V}\right)^{-p} A_V \tag{4}$$

donde  $\lambda_j$  es la longitud de onda en el filtro j ( $\lambda_B$  = 4350.6 Å,  $\lambda_V$  = 5375.2 Å,  $\lambda_g$  = 4765.1Å,  $\lambda_i$ = 7609.2 Å), p = 2.2 es un coeficiente de ajuste (Burns y col. 2014) y  $A_V$  se calcula como:

$$A_V = R_V E(B - V) \tag{5}$$

donde (B - V) es conocido como el exceso de color y  $R_V$  es la razón entre la absorción total y la selectiva. Los valores de  $R_V$  y E(B - V) para cada supernova fueron tomados de Burns y col. (2014) y se muestran en la tabla 1.

#### RESULTADOS

Las magnitudes absolutas en el máximo encontradas en cada filtro para las 24 supernovas se muestran en la tabla 3, y en las figuras 2-6 se grafican en función de la tasa de declinación (representada por  $\Delta m_{15}(B)$  y por  $\Delta m_{15}(g)$ ). Puede verse que efectivamente existe una variación en las magnitudes máximas de las supernovas tipo la, y que ésta depende del parámetro  $\Delta m_{15}(B)$ . Se tiene que conforme aumenta la luminosidad máxima (recordemos que mayor luminosidad implica menor magnitud) la tasa de declinación disminuye, es decir, las supernovas más luminosas brillarán durante más tiempo, mientras que las más débiles, rápidamente disminuirán su brillo. Esto coincide con lo obtenido por Phillips para su muestra de 9 supernovas. En el filtro i se utilizó una muestra de 20 supernovas ya que no se reportó información para 4 de las SNs de la muestra en este filtro. En todos los casos los puntos pueden ser ajustados a una relación lineal del tipo:

$$M_{max} = a + b\Delta m_{15}(B)$$

(6)

Los valores de a y b para cada filtro se muestran en la tabla 4. Se observa que el filtro con un coeficiente de correlación menor es el infrarrojo, algo que también encontró Phillips en su análisis; es posible que esto se deba a que habría que refinarse la estimación de los valores de extinción en este caso. Otro resultado en el que coincidimos con Phillips es que entre mayor es la longitud de onda del filtro, la recta de ajuste presenta una pendiente menor, lo que implica que los colores intrínsecos de las SNs la en el máximo están en función de la tasa de declinación en el filtro B, con las supernovas más rojas correspondiendo a las intrínsecamente más débiles. Se observa además en la gráfica correspondiente a este filtro, indicios de una relación doble entre los datos, lo que indicaría que los valores se agrupan en dos líneas rectas. Es necesario realizar nuevos estudios que incluyan más SNs para poder descartar o verificar esto. Sin embargo, en caso de que exista una relación doble, se podrían estudiar las propiedades de las SNs (y de sus galaxias anfitrionas) que se agrupan en cada una de las rectas. Con esto se podría observar si existen diferencias entre unas y otras, obteniendo quizás nuevas relaciones.

| Supernova | MB            | Mv            | Mg            | Mi            |
|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| SN2004ef  | -18.78(0.020) | -18.92(0.020) | -18.87(0.034) | -18.48(0.161) |
| SN2004eo  | -18.99(0.035) | -19.05(0.041) | -19.09(0.049) | -18.68(0.094) |
| SN2004ey  | -19.30(0.031) | -19.23(0.039) | -19.32(0.065) | -18.61(0.092) |
| SN2004gu  | -19.18(0.051) | -19.43(0.046) | -19.35(0.134) | -18.97(0.274) |
| SN2005al  | -18.93(0.033) | -18.89(0.021) | -18.97(0.051) | ND            |
| SN2005el  | -19.22(0.033) | -19.20(0.019) | -19.30(0.080) | -18.68(0.079) |
| SN2005hc  | -19.25(0.052) | -19.27(0.033) | -19.32(0.118) | ND            |
| SN2005iq  | -19.06(0.054) | -19.05(0.031) | -19.13(0.112) | -18.67(0.175) |
| SN2005kc  | -19.21(0.037) | -19.90(0.52)  | -19.05(0.037) | -21.12(0.093) |
| SN2005ki  | -19.17(0.044) | -19.17(0.018) | -19.21(0.065) | -18.60(0.111) |
| SN2005na  | -19.41(0.077) | -19.39(0.040) | -19.46(0.115) | ND            |
| SN2006D   | -18.79(0.031) | -18.81(0.031) | -18.93(0.046) | -18.92(0.062) |
| SN2006ax  | -19.43(0.043) | -19.41(0.019) | -19.48(0.076) | -18.78(0.098) |
| SN2006bh  | -18.97(0.038) | -18.92(0.018) | -19.03(0.052) | -18.61(0.064) |
| SN2006et  | -19.16(0.033) | -19.36(0.032) | -19.33(0.061) | -19.52(0.123) |
| SN2006kf  | -19.03(0.016) | -19.00(0.044) | -19.07(0.027) | -18.66(0.089) |
| SN2006ob  | -18.91(0.052) | -18.98(0.109) | -18.99(0.081) | ND            |
| SN2007A   | -18.93(0.036) | -19.23(0.055) | -19.17(0.041) | -19.65(0.093) |
| SN2007af  | -18.88(0.038) | -19.20(0.051) | -19.16(0.030) | -19.09(0.047) |
| SN2007bd  | -19.19(0.044) | -19.25(0.032) | -19.21(0.044) | -18.85(0.044) |
| SN2007le  | -18.78(0.032) | -19.24(0.030) | -19.07(0.123) | -19.54(0.057) |
| SN2007on  | -18.60(0.008) | -18.69(0.007) | -18.72(0.013) | -18.30(0.021) |
| SN2008bc  | -19.56(0.007) | -19.51(0.013) | -19.59(0.028) | -18.78(0.054) |
| SN2008gp  | -19.34(0.053) | -19.47(0.052) | -19.43(0.103) | -18.75(0.192) |

Tabla 3. Magnitudes Absolutas

Tabla 4. Regresión lineal para diferentes filtros

| Filtro | Tasa de declinación | а              | b            | R de Pearson |
|--------|---------------------|----------------|--------------|--------------|
| В      | Δm15(B)             | -20.157(0.101) | 0.837(0.074) | 0.924        |
| V      | Δm15(B)             | -20.044(0.082) | 0.732(0.055) | 0.943        |
| q      | ∆m15(B)             | -19.981(0.093) | 0.674(0.062) | 0.919        |
| i      | ∆m₁₅(B)             | -19.962(0.207) | 0.883(0.138) | 0.834        |
| g      | ∆m₁₅(g)             | -19.885(0.081) | 0.760(0.067) | 0.925        |



Figura 2. Relación entre la luminosidad máxima y la tasa de declinación para nuestra muestra de 24 supernovas. La magnitud absoluta en B es graficada contra  $\Delta m_{15}(B)$ .



Figura 3. Igual que la figura 2, pero para la magnitud absoluta en V.



Figura 4. Igual que la figura 2, pero para la magnitud absoluta en g.



Figura 5. Igual que la figura 2, pero para la magnitud absoluta en i. La muestra aquí es de 20 supernovas (ver texto).



Figura 6. Igual que la figura 4, pero usando  $\Delta m_{15}(g)$  en lugar de  $\Delta m_{15}(B)$ .

Se observa una diferencia entre las pendientes encontradas con las 24 SNs y las dadas por Phillips. Con nuestra muestra se presenta una pendiente menor, lo cual indica que las SNs que se utilizaron en este trabajo presentan una menor variación alrededor de la magnitud absoluta máxima. En su artículo, Phillips no hace una estimación de la parte correspondiente de la extinción provocada por la galaxia anfitriona. Esta puede ser la razón por la cual las luminosidades de sus supernovas son más variadas. Por otra parte, él utiliza los datos fotométricos de diversos observadores, mientras que en este trabajo sólo se utilizaron valores proporcionados por el equipo de CSP, lo cual se hizo con el propósito de disminuir la incertidumbre que provoca el manejo de diferentes fuentes de datos. Además de utilizar el valor de  $\Delta m_{15}(B)$ , se quiso ver si había diferencia en utilizar la tasa de declinación correspondiente al filtro con el que se hace la observación. Se tomó como ejemplo el filtro g, cuya gráfica  $(M_g$  en función de  $\Delta m_{15}(g))$  se muestra en la figura 6. Puede observarse que la relación lineal se mantiene, con valores (mostrados en la última fila de la tabla 4) muy similares para los coeficientes de ajuste encontrados al utilizar  $\Delta m_{15}(B)$ , por lo que no habría diferencia entre usar uno u otro.

#### CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió una muestra de 24 supernovas bien observadas con el fin de verificar si la relación lineal entre el brillo máximo y la tasa de declinación del mismo, conocida como relación de Phillips, se mantiene para muestras mayores y considerando aspectos no incluidos en el trabajo de Phillips (1993), como por ejemplo, la extinción debida al medio interestelar en la galaxia anfitriona; y extendiendo el análisis al filtro g del SDSS (Sloan Digital Sky Survey).

Una suposición básica de la mayoría de los modelos de SNs la es que los progenitores de estos eventos son enanas blancas de 1.4 masas solares. Sin embargo, la existencia de una importante dispersión en la luminosidad máxima implica que la masa del progenitor puede no ser exactamente la misma o bien que puede haber diferencias en el mecanismo de explosión. Más y mayores estudios se vuelven necesarios con el fin de estudiar estos objetos, teniendo en cuenta tanto las características de las estrellas como las de la galaxia anfitriona, como pudiera ser por ejemplo la metalicidad. Algo importante a tener en cuenta es que estos estudios han sido realizados para supernovas relativamente cercanas; para supernovas muy lejanas habría que estudiarse una posible evolución tem-

tivamente cercanas; para supernovas muy lejanas habria que estudiarse una posible evolución temporal, es decir, determinar si las SNs producidas en el pasado son iguales o diferentes a las que se producen actualmente y analizar cómo impacta esto en la determinación de parámetros cosmológicos.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- Burns, C.R., Stritzinger, M., Phillips, M.M., Hsiao, E.Y., Contreras, C., Persson, S.E., Folatelli, G., Boldt, L., Campillay, A., Castellón, S., Freedman, W.L., Madore, B.E., Morrell, N., Salgado, F. and Suntzeff, N.B. 2014. The Carnegie Supernova Project: Intrinsic Colors of Type Ia Supernovae. The Astrophysical Journal. 789: 32-51.
- Childress, M., Aldering, G., Antilogus, P., Aragon, C., Bailey, S., Baltay, C., Bongard, S., Buton, C., Canto, A., Cellier-Holzem, F., Chotard, N., Copin, Y., Fakhouri, H.K., Gangler, E., Guy, J., Hsiao, E.Y., Kerschhaggl, M., Kim, A.G., Kowalski, M., Loken, S., Nugent, P., Peach, K., Pain, R., Pecontal, E., Pereira, R., Perlmutter, S., Rabinowitz, D., Rigault, M., Runge, K., Scalzo, R., Smadja, G., Tao, C., Thomas, R.C., Weaver, B.A. and Wu, C. 2013. Host Galaxy Properties and Hubble Residuals of Type Ia Supernovae from the Neraby Supernova Factory. The Astophyscal Journal. 770: 108-125.
- Folatelli, G., Phillips, M.M., Burns, C.R., Contreras, C., Hamuy, M., Freedman, W.L., Persson, S.E., Stritzinger, M., Suntzeff, N.B., Krisciunas, K., Boldt, L., González, S., Krzeminski, W., Morrell, N., Roth, M., Salgado, F., Madore, B.E., Murphy, D., Wyatt, P., Li, W., Filippenko, A. and Miller, N. 2010. The Carnegie Supernova Project: Analysis of the First Sample of Low-Redshift Type-Ia Supernovae. The Astronomical Journal. 139: 120-144.
- 4. Mobberley, M. 2007. Supernovae and how observe them. Springer. New York.
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R.A., Nugent, P., Castro, P.G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D.E., Hook, I.M., Kim, A.G., Kim, M.Y., Lee, J.C., Nunes, N.J., Pain, R., Pennypacker, C.R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R.S., Irwin, M., McMahon, R.G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Filippenko, A.V., Matheson, T., Fruchter, A.S., Panagia, N., Newberg, H.J.M. and Couch, W.J. 1999. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. The Astrophysical Journal. 517: 565-586.
- 6. Phillips, M.M. 1993. The Absolute Magnitudes of type Ia Supernovae. The Astrophysical Journal. 413: L105-L108.
- Riess, A.G., Filippenko, A.V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P.M., Gilliland, R.L., Hogan, C.J., Jha, S., Krishner, R.P., Leibundgut. B., Phillips, M.M., Riess, D., Schmidt, B.P., Schommer, R.A., Smith, R.C., Spyromilio, J., Stubbs, C., Suntzeff, N.B. and Tonry, J. 1998. The Astronomical Journal. 116:1009-1038.
- 8. Stevenson, D.S. 2014. Extreme Explosions. Springer. U.K.
## MODULACIÓN DE FASE PARA EL CONTROL DE LA PROPAGACIÓN DE LUZ EN MEDIOS TURBIOS: RESULTADOS PRELIMINARES.

José Omar García Medel, Samuel Mardoqueo Afanador Delgado, Roger Chiu.

Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara.

#### RESUMEN

La luz es una onda electromagnética que tiene la característica de propagarse siempre en línea recta y así seguirá hasta que encuentre un obstáculo o medio que modifique su dirección. al propagarse en un medio turbio (leche, pintura blanca, tejido humano, niebla densa, etc.) la luz experimenta dispersión, es decir, se tienen múltiples travectorias aleatorias, esto hace imposible controlar su propagación dentro de este tipo de medios, para solucionar la dispersión se tienen dos opciones; modificar las características del material o las propiedades de la luz, como la primera opción es imposible. entonces se recurre a la modificación de las características de la luz (amplitud, fase). En este trabajo se presenta un sistema para el control de la propagación de luz en medios turbios. Se implementó un arregio óptico compuesto por un láser He-Ne con  $\lambda$ =543 nm v una potencia de 0.5 mw. un modulador espacial de luz (SLM) es usado para modificar el frente de onda entrante al medio turbio y una cámara CCD es utilizada para monitorear el frente de onda saliente. Un algoritmo de control basado en la propuesta de Vellekoop es utilizado para modificar las fases locales del SLM y así controlar la propagación al interior del medio turbio. Como resultado logramos hacer converger el haz de luz a través de un medio turbio, sin embargo el software utilizado tarda aproximadamente 30 min en el proceso y en este tiempo nos agrega más variables como ruido, vibraciones, calentamiento de la muestra que disminuve el rendimiento, se continua trabajando para mejorar la estabilidad y robustez del sistema.

## INTRODUCCIÓN

Por naturaleza, la luz tiende a propagarse siempre en línea recta, pero al interactuar con un medio material modifica su dirección [1], estos medios pueden ser clasificados como medios homogéneos y medios turbios. Los medios homogéneos son aquellos que tienen su distribución molecular ordenada y simétrica, es decir, todas sus moléculas tienen las mismas propiedades ópticas [2], también tienen un índice de refracción heterogéneo [3], es decir, al propagar la luz por estos materiales solo ocurrirá un único cambio en la velocidad de la luz y este cambio puede obtenerse fácilmente usando las leyes de reflexión y refracción que ya se conocen, al salir la luz del material sigue su trayecto en línea recta sin modificar sus características originales.

A diferencia de un medio turbio, es aquel donde sus propiedades moleculares son distintas [2] y su índice de refracción es variable en el espacio, es decir cuando la luz se propaga por el medio turbio, la luz sufre distintos cambios de velocidad ocasionando múltiples trayectorias aleatorias y modificando la fase de la luz incidente, a esto se le conoce como múltiple dispersión [3]. Cuando la luz sale del medio tiende a generar un patrón de moteado, el cual lleva consigo la perdida de potencia de luz, perdida en la resolución espacial y temporal [4], lo cual es una limitante para obtener una mayor penetración de profundidad o imágenes de objetos a través de estos medios [5].

Emmett N. Leith y Juris Upatnieks demostraron que se puede revertir la dispersión de luz en medios turbios (vidrio esmerilado). Al iluminar un objeto, ubicado entre un holograma inicial y un medio turbio se obtiene un holograma resultante en base a un haz luminoso de referencia, este holograma resultante contiene implícitamente la información del objeto, pero solo se podrá obtener la imagen original correspondiente al objeto si y solo si el histograma inicial es igual o similar al histograma del medio turbio (patrón de moteado), por el contrario si dicho histograma inicial es diferente no se podrá reconstruir la imagen del objeto, debido a la múltiple dispersión ocasionada por el medio turbio [6]. Otro experimento realizado Zahid Yaqoob y algunos de sus colaboradores, a partir de la conjugación de la fase lograron revertir la dispersión múltiple en tejidos biológicos (pechuga de pollo 0.46 mm de grosor) [7].

Más tarde, Vellekoop y algunos de sus colaboradores fueron los primeros en demostrar que al usar un modulador espacial de luz y un algoritmo de optimización, se puede modificar la fase del frente de onda de un haz incidente. Si dicha modulación de fase se aproxima a la dispersión ocasionada por el medio turbio, es posible hacer converger la luz y a diferencia del método de Emmett, este método no usa un haz de referencia [8]. Uno de los puntos más importantes para lograr la modulación de luz, se basa en el uso del algoritmo de optimización, es por ello que recientemente se han registrado varios algoritmos de optimización tales como: algoritmo secuencial paso a paso, algoritmo de secuencia continua, algoritmo de particionamiento [9], algoritmo genético [10] y algoritmo microgenético [11]. Todos estos algoritmos han demostrado revertir la dispersión de luz dentro de un medio turbio, sin embargo para este experimento nosotros nos basamos en el algoritmo secuencial paso a paso de Vellekoop [8], ya que tiene cerca de 830 citas. Estos algoritmos han sido utilizados en algunos materiales como pintura blanca, cáscaras de huevo, nubes, niebla densa, tejido humano [12] y observar objetos a través paredes [13]. A partir de aquí surge un amplia gama de aplicaciones en el área de óptica física [14], telecomunicaciones [15], atrapamiento de moléculas [16], e ingeniería biomédica [17].

A continuación se presenta un breve explicación de la propagación de luz en medios turbio, el cual consta de un algoritmo de optimización, en este caso se utilizó el algoritmo de Vellekoop (secuencial paso a paso) [8].

#### TEORÍA

Algoritmo secuencial paso a paso

A partir del experimento reportado por Vellekoop [8] se obtiene la siguiente expresión para determinar el campo transmitido  $E_m$  en el objetivo (área en la cual se enfoca el campo)

$$E_m = \sum_{n=1}^{N} t_{mn} A_n e^{i\varphi_n} \tag{27}$$

Donde  $t_{mn}$  es la matriz de transmisión desconocida propia del medio turbio, tomando en cuenta que el frente de onda incidente es plano se utiliza la siguiente expresión  $A_n e^{i\varphi_n}$  haciendo referencia a la amplitud y fase respectivamente.

Partiendo de la ecuación 1, se realiza el algoritmo de optimización, el cuál agrupa varios pixeles vecinos del (SLM) para formar N segmentos. El SLM se encargara modificar la fase del frente de onda incidente (antes de pasar por la muestra), es decir, a cada segmento se le asignaran 10 fases comprendidas entre el intervalo de  $\frac{2}{3}\pi a \frac{6}{7}\pi$  (en escala de grises el intervalo es 85 a 218). Se utilizó este rango de fases, porque primero caracterizamos el SLM usando el método propuesto Zhang, Zheng [18]. Después, el haz de salida o patrón de moteado (después de pasar por la muestra) se recoge con una cámara CCD que retroalimentara al sistema, por cada cambio de fase, se captura una imagen y en el objetivo deseado se mide  $E_m$  (intensidad promedio en escala de grises). Al final en el segmento N se le asigna la fase la cual  $E_m$  fue máxima. Estos pasos se repiten con todos los segmentos del SLM y final se obtiene la fase de optimización del SLM.

A mayor número de segmentos se tendrá una mayor contribución en el objetivo, sin embargo para cada muestra, la optimización de fase o matriz de transmisión es distinta, es por ello que debemos tomar en cuenta el tiempo que tarda el algoritmo en cada iteración  $T_i$ , es decir el tiempo que tarda en encontrar  $E_m$  máximo para un solo segmento, en el caso de nuestro algoritmo  $T_i = 1.7s$ . Además de este tiempo también es importante conocer el tiempo de persistencia  $T_p$  de la muestra, es decir es el tiempo en el cual las moléculas del material se encuentran estáticas.

#### ARREGLO EXPERIMENTAL

Se implementó un arreglo experimental que consta de un láser He-Ne  $\lambda = 543 nm$ , (letra a) P = 0.5 mW, polarizado linealmente, al láser se le aplica un filtrado espacial, se colima y se expande a un diámetro de 20 mm, con la finalidad de aprovechar al máximo el área efectiva del SLM (letra b, c), marca Holoeye, con una resolución de 1280\*768 pixeles y un retardo de 0 a  $1.2\pi$  (letra e). Cada segmento del SLM contribuirá individualmente a modificar el frente de onda plano del haz incidente. Después con el arreglo de lentes (f y g) se reduce el diámetro del haz a su tamaño original, a diferencia del láser, aquí la luz ya tiene un cambio de fase, posteriormente se utilizan dos objetivos de 10x marca Olympus y en medio de ellos se coloca la muestra turbia (cinta adhesiva con un *grosor* =  $45\mu m$ ), el primero objetivo se encarga de enfocar el haz incidente en la muestra y el segundo recoge

el haz de salida, por último se utiliza una cámara CCD Thorlabs con una resolución de 1024\*768 (Figura 1).



Figura 20. Arreglo experimental usado para modular el frente fase y lograr un enfocamiento.

En Matlab® se realiza el algoritmo de optimización el cual dará retroalimentación al SLM a partir del cambio  $E_m$  detectado en cámara. En el siguiente apartado se muestran los resultados que se obtuvieron.

#### RESULTADOS

Se desarrolló una interfaz gráfica de usuario (GUI, Graphical User Interface) en Matlab® (mostrada en la Figura 2) basada en el algoritmo de Vellekoop para modular la fase y propagar la luz en medio turbio. Cuando el programa inicia, a cada uno de los segmentos del SLM les propaga una fase aleatoria, escala de grises comprendida entre 85 a 218. La segunda ventana muestra el patrón de moteado en escala de grises y cómo podemos observar la máxima intensidad registrada en escala de grises es de 85, la tercera y sexta ventana muestran la intensidad medida para todos los pixeles en *x* específicamente en la coordenada y = 384, por el contrario la sexta ventana mide la intensidad en todos los pixeles *y* específicamente en x = 512, esto se hace con la finalidad de monitorear el cambio progresivo de intensidad en el objetivo. En la cuarta ventana se monitorea el promedio de la intensidad en escala de grises a partir del número de segmentos examinados. Por último en la ventana cinto, aplicamos un zoom al patrón de moteado y queda una ventana cuadrada de 100\*100 pixeles, esto igual se hace con la finalidad de observar visualmente el enfocamiento de luz a través de un medio turbio.



rigura 21. Oor desarrollada en Mallabo, ar iniciar se propaga dha fase aleatona en el Selvi.

En Figura 3, se muestra el GUI después obtener la fase optimizada en el SLM para 1024 segmentos, también podemos notar que el patrón de moteado en el centro se ve un punto intenso. Las gráficas de las ventanas 3,5 y 6 llegan a su punto de saturación (255 en escala de grises), por lo tanto ya no existe mejora, el área del objetivo es 100 pixeles cuadrados.



Figura 22. GUI desarrollada en Matlab® después de encontrar la fase optimizada en el SLM.

Ahora el área del objetivo es de 225 pixeles cuadrados y se obtiene la Figura 4. Podemos observar que al inicio la intensidad (promedio escala de grises) es de 17, cuando se aumenta el número de segmentos a 256 se tiene una mejora de tres veces más comparado con la intensidad inicial, al

aumentar el número de segmentos la intensidad incrementa, sin embargo cuando el número de segmentos es mayor a 1024 comienza a decaer, esto se debe a que el tamaño del segmento es tan pequeño y aumenta el tiempo de ejecución del programa por lo tanto el sistema es más propenso al ruido o perturbaciones externas. A partir de aquí todos los resultados mostrados son de 1024 segmentos.



Figura 23. Intensidad promedio en el objetivo como función del número de segmentos examinados.

Después modificamos el área objetivo pero dejando constante el número segmentos N=1024. En la figura 5, podemos observar que para un á*rea de objetivo* =  $49px^2$  se alcanza un mayor promedio de intensidad en escala de grises. Ahora cuando á*rea de objetivo* =  $225px^2$  la intensidad disminuye y tiene sentido ya que cada contribución cambio de fase se distribuye en un área mayor. Posteriormente se tiene el caso para cuando á*rea de objetivo* =  $7 px^2$ , también podemos notar que se tiene una intensidad menor, esto se cree que es a causa de que se tiene un objetivo muy pequeño y por lo tanto el sistema es más sensible al ruido y perturbaciones externas.



Figura 24. Promedios de Intensidad (escala de grises), para distintas áreas del objetivo con N=1024.

Por último se muestra el patrón de moteado antes y después de utilizar el algoritmo de optimización fase. Podemos notar como la barra de color al inicio está cerca de 90 y al final logramos un enfocamiento y llegamos al punto de saturación (255 en escala de grises).



Figura 25. Reversión de dispersión en un medio turbio, usando el algoritmo de optimización de Vellekoop: antes (imagen del lado izquierdo) y después de optimizar (imagen del lado derecho).

#### CONCLUSIONES

Se logró reproducir el algoritmo de Vellekoop. Este algoritmo se retroalimento con una cámara CCD y el SLM, de tal manera que dio pauta a la búsqueda de la optimización de fase. Al tener la fase óptima se revierte la dispersión provocada por el medio, es decir se logró hacer converger la luz dentro de la muestra.

A partir de los resultados mostrados en la sección anterior, podemos llegar a la conclusión que el número ideal de segmentos (N = 1024) y el área del objetivo ( $area = 49 px^2$ ) con estos parámetros aseguráramos que la intensidad promedio en el objetivo es mayor en comparación con los demás parámetros.

De igual manera el tiempo promedio por iteración es  $T_i = 1.7s$ , es decir para el caso de N = 1024, el algoritmo tarda aproximadamente 29 min, lo cual es demasiado tiempo, ya que si N o el tiempo

aumenta, el número de variables a controlar tales como: el tiempo de persistencia de la muestra, el ruido externo, calentamiento de la muestra, etc. también aumentarían y haría casi imposible lograr hacer converger la luz. Es por ello que aún se sigue trabajando en la optimización del software.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. R. A. Serway and J. S. Faughn, *Fisica*, 5th ed. Pearson Educación, 2001.
- 2. D. Malacara, *Óptica basica*, Tercera. Mexico, 2015.
- 3. R. Horstmeyer, H. Ruan, and C. Yang, "Guidestar-assisted wavefront-shaping methods for focusing light into biological tissue," *Nat. Photonics*, vol. 9, pp. 563–571, Aug. 2015.
- 4. K. K. Bizheva and D. A. Boas, "Light scattering in turbid media: insights to optical imaging with single-scattered and multiply scattered light," 2001, vol. 4242, pp. 4215–4242.
- 5. F. Helmchen and W. Denk, "Deep tissue two-photon microscopy," *Nat. Methods*, vol. 2, p. 932, Nov. 2005.
- 6. E. N. Leith and J. Upatnieks, "Holographic Imagery Through Diffusing Media," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 56, no. 4, p. 523, 1966.
- Z. Yaqoob, D. Psaltis, M. S. Feld, and C. Yang, "OPTICAL PHASE CONJUGATION FOR TURBIDITY SUPPRESSION IN BIOLOGICAL SAMPLES," *Nat. Photonics*, vol. 2, no. 2, pp. 110–115, 2008.
- 8. I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, "Focusing coherent light through opaque strongly scattering media," *Opt. Lett.*, vol. 32, no. 16, p. 2309, 2007.
- 9. I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, "Phase control algorithms for focusing light through turbid media," *Opt. Commun.*, vol. 281, no. 11, pp. 3071–3080, 2008.
- 10.D. B. Conkey, A. N. Brown, A. M. Caravaca-Aguirre, and R. Piestun, "Genetic algorithm optimization for focusing through turbid media in noisy environments," *Opt. Express*, vol. 20, no. 5, pp. 4840–4849, Feb. 2012.
- 11.B. R. Anderson, P. Price, R. Gunawidjaja, and H. Eilers, "Microgenetic optimization algorithm for optimal wavefront shaping," *Appl. Opt.*, vol. 54, no. 6, pp. 1485–1491, Feb. 2015.
- 12.O. Katz, E. Small, and Y. Silberberg, "Looking around corners and through thin turbid layers in real time with scattered incoherent light," vol. 6, p. 549, Jul. 2012.
- 13.I. Freund, "Looking through walls and around corners," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 168, no. 1, pp. 49–65, 1990.
- 14.S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan, "Measuring the transmission matrix in optics: An approach to the study and control of light propagation in disordered media," *Phys. Rev. Lett.*, 2010.
- 15.G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, and M. Fink, "Focusing Beyond the Diffraction Limit with Far-Field Time Reversal," *Science*, vol. 315, pp. 1120–1122, Mar. 2007.
- 16.T. Čižmár, M. Mazilu, and K. Dholakia, "In situ wavefront correction and its application to micromanipulation," vol. 4, p. 388, May 2010.
- 17.H. Yu *et al.*, "Recent advances in wavefront shaping techniques for biomedical applications," *Curr. Appl. Phys.*, vol. 15, no. 5, pp. 632–641, 2015.
- 18.Z. Zhang, G. Lu, and F. T. Yu, "Simple method for measuring phase modulation in liquid crystal televisions," *Opt. Eng.*, vol. 33, 1994.

# CARACTERIZACIÓN DE POLÍTICAS ÓPTIMAS EN ALGUNOS MODELOS DE INVENTARIOS

Rubén Blancas Rivera, Hugo Adán Cruz Suárez, Fernando Velasco Luna

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

#### RESUMEN

En este trabajo estudiamos un modelo que describe el comportamiento de sistemas de inventarios con un solo producto por etapas, considerando una demanda aleatoria. Mediante la teoría de los Procesos de Decisión de Markov (PDMs) y programación dinámica se busca caracterizar a las políticas óptimas. Dicha caracterización son estrategias frecuentemente llamadas en la literatura como políticas (R, Q) o punto de reorden.

# INTRODUCCIÓN

El control y mantenimiento de los inventarios de bienes físicos es un problema común en todas las empresas en cualquier sector de una economía determinada. No solo las tiendas minoristas son las que deben administrar sus inventarios, de hecho, los inventarios prevalecen en el mundo de los negocios. El mantenimiento de los inventarios es necesario para cualquier empresa que se ocupe de productos físicos, incluidos fabricantes, mayoristas y minoristas. Por ejemplo, los fabricantes necesitan inventarios de los productos terminados en espera de envío, del mismo modo, ambos mayoristas y minoristas necesitan mantener los inventarios de los productos para estar disponibles para la compra de los clientes.

Los costos anuales asociados con el almacenamiento del inventario son muy grandes, tal vez hasta una cuarta parte del valor de inventario. Por lo tanto, los costos que se incurren para el almacenamiento de inventario en México se encuentran en los cientos de miles de millones de pesos anualmente. Reducir los costos de almacenamiento evitando inventarios innecesariamente grandes puede mejorar la competitividad de cualquier empresa.

Muchas compañías en otras partes del mundo también han estado modernizando el camino en que administran sus inventarios. La aplicación de técnicas de investigación de operaciones en esta área proporciona una herramienta poderosa para obtener una ventaja competitiva. La investigación de operaciones comprende de los siguientes pasos:

- 1. Formular un modelo matemático que describa el comportamiento del sistema de inventario.
- 2. Buscar una política de inventario con respecto a este modelo.
- **3.** Usar un sistema de procesamiento de información computarizado para mantener un registro recurrente de los niveles de inventario.
- 4. Con este registro de niveles de inventario actuales, aplicar la política de inventario óptima para indicar cuando y cuanto reponer el inventario.

La metodología para resolver el problema anterior es programación dinámica, para ello primeramente se identifica al problema de inventarios con un PDM. Los PDMs son adecuados para modelar esta clase problemas, los cuales son dinámicos y presentan incertidumbre en alguna de sus componentes. En la literatura es posible encontrar diversos trabajos que estudian sistemas de inventarios utilizando como herramienta los PDMs, y a su vez caracterizar a la política óptima del tipo (R, Q), ([4] y [5]). En este trabajo estudiamos modelos cuya producción posiblemente no es acotada y la dinámica del sistema es inducida por una caminata del tipo Lindley. En el documento se procede, en una primera etapa, a garantizar la existencia de una solución vía programación dinámica. Pero no solo basta con garantizar la existencia de la política óptima sino se requiere encontrar explícitamente tal política la cual resulta ser del tipo (R, Q), dicha caracterización brinda mayor rapidez para las soluciones numéricas del problema.

#### Modelo de inventario

Como primera aproximación para el estudio de nuestro sistema de inventarios, considere la siguiente situación.

Para cada  $t = 0, 1, ..., x_t$  denota el stock en el periodo  $t, \xi_{t+1}$  la demanda al finalizar el periodo  $t, a_t$  la cantidad de producción en el periodo  $t, y \eta_t$  la variable que determina el éxito de haber colocado en el inventario la producción  $a_t$  en el periodo t. El modelo se rige por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = (x_t + \eta_t a_t - \xi_{t+1})^+$$
(1)  
con  $x_0 = x > 0$ , donde la notación  $r^+ = max(r, 0)$ .

El sistema estocástico anterior está basado en un modelo propuesto por primera vez por David Lindley en [6], para estudiar un modelo de líneas de espera. Dicho sistema cuenta con diversas aplicaciones, ver [4] y [5], por ejemplo. En la literatura se conoce como Modelo de Control de Lindley o modelo con ventas pérdidas en el contexto de sistemas de inventarios.

De acuerdo al modelo de inventarios cada variable aleatoria,  $x_t$  y  $a_t$  se encuentran definidas sobre el conjunto  $[0, \infty)$ . Así podemos considerar al espacio de estados  $X = [0, \infty)$  y el espacio de acciones (o controles),  $A = [0, \infty)$ .

En cada tiempo t, es natural considerar los costos de producción, de almacenaje y escasez expresados en la siguiente función

Donde

- *K* > 0 es el costo fijo por producción,
- c > 0 es el costo por unidad producida,
- **h** > 0 es el costo por unidad almacenada,
- l > 0 es el costo por unidad por demanda no suplida.

La función *C* se encuentra definida en el conjunto  $[0, \infty) \times [0, \infty)$  y su regla de correspondencia es la siguiente, para cada  $x \ge 0$  y  $a \ge 0$ :

$$C(x,a) = K\mathbf{1}_{\{a\neq 0\}} + ca + hE[x + \eta a] + lE[(\xi - (x + a))^{+}].$$
(2)

Se han establecido los elementos que conforman un Proceso de Decisión de Markov [7],

$$\{X, A, \{A(x) | x \in X\}, Q, C\},\$$

donde Q es un kérnel estocástico o ley de transición que es inducido por la dinámica (1), y la colección de subconjuntos medibles  $\{A(x)|x \in X\}$  satisface que, para cada  $x \in X$ , se tiene que A(x) = A.

Función de valor óptimo y política óptima

En esta parte del trabajo se presenta el problema de decisión para producir en cada tiempo los productos suficientes para satisfacer la demanda y minimizar los costos que se generan. Para que lo anterior ocurra se necesita una política o estrategia que satisfaga lo anterior mencionado, a tal política se le llama óptima.

En general, existen diversas políticas que se pueden utilizar, pero no todas generan un costo mínimo. A continuación, se define formalmente en el contexto de los PDMs, lo que se considera como una política.

Sea *H* el espacio de historias observadas hasta un tiempo t = 0, 1, 2, ..., en el proceso estocástico (1), el cual se define como

$$H_0 = [0, \infty),$$
  

$$H_t = [0, \infty) \times [0, \infty) \times H_{t-1}$$

para cada t = 1, 2, ....

Cada  $h_t \in H_t$  es un vector de la forma  $(x_0, a_0, x_1, a_1, ..., a_{t-1}, x_t)$  donde  $x_i \ge 0$  para cada  $i = 0, 1, ..., t, y a_i \ge 0$  con j = 0, 1, ..., t - 1.

**Definición.** Una política es una sucesión  $\pi = {\pi_t}$  de kérneles estocásticos donde cada  $\pi_t$  está definida sobre  $[0, \infty)$  dado  $H_t$  y satisface que:  $\pi_t([0, \infty)|H_t) = 1$ , para cada  $h_t \in H_t$  con t = 0, 1, ... El conjunto de todas las políticas se denota por  $\Pi$ .

Como se había mencionado el problema principal a considerar es encontrar la estrategia (o la distribución de producción en cada periodo) que se debe implementar para minimizar los costos y satisfacer la demanda por periodo. Este problema optimiza la función objetivo que consiste de los costos que se generan en un horizonte de tiempo, donde se agrega un valor de descuento para llevar el costo al valor presente. Está función objetivo es la siguiente:

 $v_{\alpha}(\pi, x) = E_x^{\pi} \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \alpha t(K1\{at \neq 0\} + cat + hE[xt + \eta tat] + lE[(\xi t + 1 - (xt + \eta tat)) + ) \right],$ 

donde  $\alpha \in (0, 1)$ , llamado valor de descuento, el cual representa la traslación a tiempo actual del valor de costo. De esta manera se define la función de valor óptimo de la siguiente manera

$$V_{\alpha}^{*}(x) := \inf_{\alpha \in \Pi} v_{\alpha}(\pi, x), x \ge 0.$$

De esta manera el problema de control óptimo consiste en encontrar una política óptima  $\pi^* \in \Pi$ que cumpla,

$$V_{\alpha}^{*}(x)=v_{\alpha}(\pi^{*},x), \quad x\geq 0,$$

a tal política que satisfaga la ecuación anterior se le conoce como política óptima. La metodología básica para resolver esta clase de problemas es programación dinámica; es una técnica basado en el principio de optimalidad, en [2] resuelve el problema por etapas, es decir, si se define

$$\boldsymbol{v}^n_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{x}}[\sum_{t=0}^n \boldsymbol{\alpha}], \, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.$$

Entonces se resuelve el problema de control óptimo en la etapa *n* y se encuentra una política  $\pi_n^* = \{a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*\}$ , que satisface

$$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_\alpha^n(\boldsymbol{\pi}_n^*, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.$$

Donde  $v_n$  es el valor óptimo en la etapa n. Para demostrar la existencia de la política  $\pi^*$ , se requieren los siguientes resultados.

Lema 1. La función de costo *C* es no negativa, inf-compacta e inferiormente semicontinua.

**Demostración.** Es claro que la función de costo C es no negativa, debido a que los escalares K, c, h y l son no negativas y también por el dominio de definición de la función. Ahora, definamos las siguientes funciones:

$$H(x, a) := hE[x + \eta a] + lE[(\xi - (x + \eta a))^+],$$
  
$$a(a) = K\mathbf{1}_{(a \neq 0)} + ca.$$

De esta manera, tomando  $\{x_n\}$  y  $\{a_n\}$  sucesiones convergentes a x y a, respectivamente, se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} H(x_n, a_n) = \lim_{n \to \infty} (hp(x_n + a_n) + h(1 - p)x_n) + \lim_{n \to \infty} hp_{x_n + a_n}(s - (x_n + a_n)) dG(s)$$

$$+\lim_{n\to\infty} l(1-p) \int_{x_n}^{\infty} (s-x_n) dG(s)$$
  
=  $H(x, a)$ .

Lo anterior, utilizando Teorema de Convergencia Dominada y propiedades de límite. Por tanto se tiene la continuidad para H cuando x > 0 y a > 0, e inferiormente semicontinua cuando x = 0 o a = 0.

Para demostrar que la función *C* es inf-compacta, es necesario considerar lo siguiente. Sea  $\lambda \in R$ , entonces para  $\lambda \ge K$  se tiene que el conjunto de nivel asociado es el siguiente:

$$D_f(\lambda, A) = \{a \geq |k\mathbf{1}_{\{a\neq 0\}} + ca\} = \left[\frac{\lambda - K\mathbf{1}_{\{a\neq 0\}}}{c}\right].$$

Y si  $\lambda < K$  se tiene que:

$$D_f(\lambda.A) = \{\mathbf{0}\}.$$

Para ambos casos, los conjuntos de nivel son cerrados y acotados, por consiguiente son compactos. Así la función de costo es inf-compacta (ver [5]). ■

Lema 2. El kérnel estocástico Q, inducido por la dinámica (1), es fuertemente continua.

 $w(x,a):=\int_X u(y)Q(dy|x,a).$ 

#### Demostración.

La demostración puede ser consultada en [4].

**Lema 3.** La función de valor óptimo es acotada, es decir,  $V_{\alpha}^{*}(x) < \infty$  para cada  $x \in X$ . **Demostración.** 

Consideremos la política estacionaria de nunca ordenar. Sea f(x) = 0, tal política. Veamos que  $v_a(f, x) < \infty$ .

Denotemos por  $x^{f}$ , la dinámica (1) utilizando la política f. Sea  $x_{0}^{f} = x \ge 0$ . Entonces

$$x_{t+1}^f = (x_t - \xi_{t+1})^+$$

Consideremos el siguiente proceso de renovación

$$N(x) := \sup\{t | S_t \le x\}$$

Donde 
$$S_0 = 0$$
 y  $S_t = \sum_{j=1}^t \xi_j$ . Observe que  $E[N(x)] < \infty$  para cada  $x \ge 0$ . Luego  
 $v_{\alpha}(f, x) = E_x^f \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \alpha t \right]$   
 $= hx + lE[(\xi - x)^+] + E_x^f \left[ \sum_{t=1}^{N(x)} \alpha t \right]$   
 $+ E_x^f \left[ \sum_{t=N(x)+1}^{\infty} \alpha t \right]$   
 $\le hx + l\mu + \frac{\alpha}{1-\alpha} (hx + \mu) + \frac{1}{1-\alpha} \mu < \infty$ .

**Teorema.** Para el modelo (1), existe una política óptima estacionaria markoviana que optimiza el criterio de costo total descontado.

#### Demostración.

Por los Lemas, 1, 2 y 3 se cumplen las hipótesis del Teorema de existencia de política óptima estacionaria markoviana en [7]. Así se tiene la existencia de la política óptima estacionaria. ■

# CARACTERIZACIÓN DE LA POLÍTICA ÓPTIMA

En esta sección se busca caracterizar a la política óptima estacionaria markoviana garantizada en el Teorema principal de la sección anterior. Para lograrlo es necesario analizar el comportamiento de la funciones de iteración de valor óptimo, ya que es una herramienta útil que proporciona el método de programación dinámica para ir resolviendo el problema de control óptimo por etapas (ver [2]).

$$v_{\alpha}^{n+1}(x) = \inf_{\substack{a \ge 0 \\ a \ge 0}} \{K\mathbf{1}_{\{a \ne 0\}} + ca + hE[x + \eta a] + lE[(\xi_{(x} + \eta a))^{+}] + \int_{x} v_{\alpha}^{n}(y)Q(dy|x, a)\}$$
  
=  $\min\{K + G_{n}(x), \inf_{a \ge 0} \{G_{n}(x + a)\}\} + H_{n}(x).$ 

Donde

$$G_n(x+a) := (c+hp)(x+a) + \alpha p E[v_{\alpha}^n((x+a-\xi)^+)] + p E[(xi-(x+a))^+],$$

у

$$H_n(x) := (h(1-p)-c)x + \alpha(1-p)E[v_\alpha^n((x+a-\xi)^+)] + (1-p)E[(\xi-x)^+].$$

Realizando el cambio de variable y := x + a, el problema de optimización se reestructura de la siguiente manera:

$$V_{n+1}(x) = \min\{K + G_n(x), \inf_{\substack{y > x}} \{G_n(y)\} + H_n(x).$$

Con propiedades de funciones convexas se puede demostrar el siguiente resultado:

**Lema 4.** Para cada n = 0, 1, ..., la función  $v_{\alpha}^{n}$  cumple:

**1.**  $v_{\alpha}^{n}$  es convexa,

ł

**2.**  $limv_{\alpha}^{n}(x) = \infty$ .

**Definición.** Sean  $r_t$  y  $Q_t$  dos números reales tales que  $r_t \leq Q_t$ , t = 0, 1, ... Una política es llamara política del tipo  $(r_t, Q_t)$  en la etapa t, si se ordena hasta el nivel  $Q_t$ , siempre que  $x_t < r_t$  y no se ordena cuando  $x_t \geq r_t$ .

Así se tiene el siguiente resultado:

**Teorema.** La política óptima estacionaria markoviana con el criterio de costo total descontado a horizonte n, se encuentra caracterizada por una política del tipo  $(r_n, Q_n)$  y además se tiene que la política óptima estacionaria markoviana con horizonte infinito es del tipo (r,Q). Más aún se siguen las siguientes propiedades

1.  $G_n(Q_n) \leq G_n(y)$  para cada y, 2.  $G_n(Q_n) + K = G_n(r_n) < G(r_n)$  para cada y, 3.  $G_n(y) \leq G_n(z) + K$  para cada  $y, z \operatorname{con} r_t \leq y \leq z$ . Demostración.

Utilizando el Lema 4, y el Teorema (ver [4]), se sigue el resultado. ■

#### CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró un modelo de control de inventarios, específicamente regido por una ecuación en diferencias. Bajo algunas condiciones sobre el modelo se muestra la optimalidad de las políticas del tipo (r, Q) al modelo utilizando criterio de costo total descontado.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- R. B. Ash & C. A. Doléans-Dade, "Probability and Measure Theory", Academic Press Elsevier, San Diego 2005.
- 2. R. Bellman, "Dynamic Programming", Dover, 2003.
- 3. D. P. Bertsekas, "Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1987.

- 4. E. Feinberg, "Optimality Conditions for Inventory Control", Tutotrials in Operations Research, p.p. 14-45, 2016.
- 5. H. Daduna, P. Knopov & L. Tur, "Optimal Strategies for an Inventory Systems with Cost Functions of General Form", 1993.
- 6. D. Lindley, "The theory of Queues with Single Server", (Proc. Cambridge Philos. Soc. 48, 1952).
- 7. O. Hernández-Lerma & J. B. Lasserre, "Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes", Springer-Verlag, New York, 1999.

## RESPUESTA ÓPTICA DE UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FOTÓNICO USANDO PROGRA-MACIÓN EN PARALELO COMBINANDO MPI CON CUDA

E. Lozano Trejo, H. Pérez Aguilar, A. Mendoza Suárez.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" de la UMSNH

#### RESUMEN

El estudio de sistemas complejos en 3D o a gran escala demanda grandes recursos computacionales que hasta hace poco tiempo sólo era posible realizar con grandes y costosas computadoras (clústers). Esta situación está cambiando con la creación de las tarjetas de procesamiento gráfico (GPUs) que se pueden integrar a una computadora de escritorio e incluso a una portátil, para lograr un gran poder de cómputo a bajo costo. Las tarjetas con el protocolo CUDA (Computer Unified Device Architecture) FORTRAN permiten la programación en paralelo lo cual implica un gran ahorro de tiempo de cómputo para estudiar las diferentes propiedades y características de los sistemas complejos en diversas situaciones a gran escala. En este trabajo, como aplicación de la programación en paralelo combinando MPI (Interfaz de Paso de Mensajes) con CUDA, se presenta un estudio numérico de la respuesta óptica en guías de ondas de cristal fotónico usando un método integral riguroso en un tiempo de cómputo considerablemente pequeño. Esto permitirá implementar métodos numéricos rigurosos en una forma más avanzada bajo la paralelización combinando los procesadores de las CPUs y las tarjetas GPUs logrando una rapidez en el tiempo de cómputo a gran escala hasta más de 100 veces.

## **INTRODUCCIÓN**

Con el surgimiento de las computadoras, se comenzó una era de progresos significativos en todas las áreas sociales, que desde entonces la computadora ha sido una herramienta indispensable por su fiabilidad y rapidez operativa de datos. Una persona que tardaría horas en realizar cálculos, ahora son resueltos por una computadora en segundos. Sin embargo, actualmente existen problemas que demandan todavía mucho más tiempo de procesamiento en la computadora; por ejemplo, la simulación del clima, la simulación de mecánica de fluidos, entre otros. Solucionar estos problemas puede tardar desde minutos hasta días o meses, y es debido a este tipo de problemas que se produjo un cambio de paradigma en la forma en la que se puede resolver los problemas. A este nuevo paradigma se le conoce como Paralelización. La paralelización consiste en la subdivisión de un problema, en subproblemas: cada uno de los cuales es resuelto de forma simultánea y por separado, ofreciendo reducciones importantes en cuanto al tiempo de ejecución [1]. Sin embargo, no todos los problemas son aptos para el empleo de la paralelización, y los que sí lo son, no tienen porqué responder de forma positiva a su resolución paralela. La computación en paralelo por lo general implica dos áreas distintas de la tecnología computacional que son la arquitectura de la computadora (hardware) y la programación en paralelo (software).

El presente trabajo está enfocado en aplicar la programación en paralelo bajo el protocolo CUDA FORTRAN y C, para el estudio numérico de la respuesta óptica en guías de ondas de cristal fotónico usando un método integral riguroso, comparando su tiempo de cómputo con el mismo método pero usando programación secuencial.

#### **PROGRAMACIÓN EN PARALELO**

La computación en paralelo es una técnica de programación en la que muchas instrucciones se ejecutan simultáneamente. Se basa en el principio de que los problemas grandes se pueden dividir en partes más pequeñas que se pueden resolverse de forma concurrente.

Para poder paralelizar un problema y mejorar el rendimiento, es necesario conocer algunos conceptos fundamentales sobre paralelización y conocer el ambiente de trabajo tales como: el tipo de hardware, el soporte del sistema operativo y las herramientas de software para la implementación. Los lenguajes de programación en paralelo, las bibliotecas, las API y los modelos de programación en paralelo, han sido creados para la programación de computadoras con arquitectura en paralelo. Hay muchos lenguajes y modelos de programación en paralelo propuestos en las últimas décadas. Los que son más utilizados son: Message Passing Interface (MPI) para sistemas con memoria distribuida y OpenMP para sistemas con memoria compartida. Ambos se han convertido en las interfaces de programación estandarizadas y apoyadas por los principales vendedores de ordenadores. Sin embargo, hoy en día el protocolo CUDA, es una nueva plataforma de programación en paralelo que ofrece la memoria compartida para la ejecución en paralelo en la GPU. Ha demostrado ser muy exitoso en la programación de multihilos con cientos de núcleos. Por ejemplo, los científicos en toda la industria y el mundo académico ya están usando CUDA para alcanzar aceleraciones espectaculares sobre los códigos de producción y de investigación.

• MPI

MPI es una especificación para las operaciones de paso de mensajes diseñadas para ser usada en programas que exploten la existencia de múltiples procesadores (para más detalles ver [2]. Define cada trabajador como un proceso y proporciona enlaces de lenguaje para C, C ++ y FORTRAN. MPI ofrece un importante conjunto de bibliotecas para escribir, depurar y probar el rendimiento en programas distribuidos.

La ventaja para el usuario es que, MPI ha sido estandarizada en muchos niveles. Por ejemplo, ya que la sintaxis es estándar, se puede estar seguro de que el código MPI se ejecutará bajo cualquier aplicación de MPI. Dado el comportamiento funcional de MPI, "las llamadas" también están estandarizadas. Además las llamadas de MPI deben comportarse de la misma forma, lo que garantiza la portabilidad de sus programas paralelos. Sin embargo, los resultados pueden variar de una implementación a otra.

• OpenMP

OpenMP es una API (por sus siglas en inglés, Application Programming Interface), cuyas características pretenden facilitar el desarrollo de programas paralelos [3]. Consta de directivas de compilador, librerías en tiempo de ejecución y variables de entorno que facilitan la descripción de una o más porciones de un programa que deben ser ejecutadas por varias unidades de procesamiento de manera simultánea. Asimismo, permiten especificar los recursos a utilizar (tamaño de memoria compartida, cantidad de hilos o threads de ejecución) en cada una de estas unidades y determinar de qué manera se dividirá la carga de trabajo entre las mismas. Lejos de ser un lenguaje de programas escritos en C, C++ o FORTRAN. Una desventaja de OpenMP es el alto costo computacional (overhead) "inaceptable" presente al paralelizar aplicaciones con cantidades "relativamente grandes" de threads.

- CUDA (Arquitectura Unificada de Dispositivos de Cómputo).
   Este protocolo es una plataforma de computación en paralelo que presenta un nuevo modelo de programación y un conjunto de instrucciones, que combinados permiten utilizar la unidad de procesamiento gráfico (GPU) de NVidia; para resolver grandes problemas complejos de forma más eficiente que si se utilizase una CPU. De esta forma un nuevo nombre ha surgido para referirse a las GPUs, General-Purpose computing Graphic Processing Units también llamadas GPGPU, y la idea consiste en utilizar las altas concurrencias y el paralelismo de las tarjetas gráficas para aplicaciones de cómputo general.
- ScaLAPACK (Scalable Linear Algebra PACKage)
   Es una biblioteca de alto rendimiento diseñada para la computación heterogénea. Sus rutinas son un rediseño de LAPACK (Linear Algebra PACKage) para computadoras paralelas de memoria distribuida. Resuelve sistemas lineales densos, problemas de mínimos cuadrados, problemas de valores propios y de valores singulares entre otros; todo esto haciendo uso de la distribución cíclica en bloques y algoritmos de bloque dividido. Esto nos garantiza que el programa se ejecuta tan rápido como sea posible y que funcionará en cualquier máquina donde BLAS, LAPACK y BLACS estén disponibles [4].

#### MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

Brevemente se describirá el Método de la Ecuación Integral que para un mayor entendimiento ver la Ref. [5]. Consideremos una guía de ondas de cristal fotónico (PCW) bidimensional finita, formada por dos paredes internas planas que encierran un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares.

La geometría del sistema que se consideró para la teoría se muestra en la Fig. 1. Un sistema de M cuerpos invariantes a lo largo de z, es iluminado por un haz monocromático de luz. El plano de incidencia es el x-y. La región 0 se caracteriza por un índice (real) de refracción  $n_0 = \sqrt{\epsilon_0(\omega)}$ , y las regiones de la 1 a M definidas por las curvas  $\Gamma_i$  se caracterizan por su correspodiente índice de refracción  $n_i$ , o alternativamente por la constante diectrica  $\epsilon_i(\omega)$ .



Figura 1. Descripción esquemática de una PCW, de ancho b y longitud d con inclusiones cilíndricas circulares, iluminada por un haz Gaussiano en la región de vacío. Las regiones 1 y 2 constituyen las placas paralelas conductoras, mientras que las regiones 3, 4 y así sucesivamente constituyen las inclusiones cilíndricas conductoras.

El empleo del teorema integral de Green, en el campo de la región 0 puede expresarse como  $\int \frac{\partial G_0(\mathbf{r},t_j)}{\partial t_0} dt = dt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0$ 

$$\psi^{(0)}(r) = \psi^{(0)}_{inc}(r) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, t_j)}{\partial \hat{\mathbf{n}}_j} \psi^{(0)}(t_j) - G_0(\mathbf{r}, t_j) \chi^{(0)}(t_j) \right] dt_j.$$
(1)  
Las funciones  $\psi^{(0)}(t_j)$  y  $\chi^{(0)}(t_j)$ , que representan los valores del campo y su derivada normal eva-

luados en la superficie, se definen a través de las siguientes expresiones:  $\eta_{1}(0)(t_{1}) - \eta_{1}(0)(r)$ 

$$\begin{aligned} & \psi^{(r)}(t_j) = \psi^{(r)}(r)|_{r=r_j}, \\ & (2a) \\ & \chi^{(0)}(t_j) = \frac{\partial \psi^{(0)}(r)}{\partial \hat{n}_j}|_{r'=r_j}, \\ & (2b) \\ & \text{Similarmente,} \\ & G_0(r, t_j) = G_0(r, r')|_{r'=r_j}, \\ & (3a) \\ & \frac{\partial G_0(r, t_j)}{\partial \hat{n}_i} = \frac{\partial G_0(r, r')}{\partial \hat{n}_i'}|_{r'=r_j}. \end{aligned}$$

∂ñ′.

∂n<sub>i</sub>

(3b) Siguiendo los mismos pasos para la región *j*-ésima, el campo  $\psi^{(j)}(r)$  puede ser expresado como

$$\theta_{j}(r)\psi^{(j)}(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_{j}} \left[\frac{\partial G_{j}(\mathbf{r},t_{j})}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{j}}\psi^{(j)}(t_{j}) - G_{j}(\mathbf{r},t_{j})\chi^{(j)}(t_{j})\right]dt_{j}$$
(4)

Évaluando las Ecs. (1) y (4) en 
$$r_i + v\hat{n}_i$$
, donde  $v$  es un número positivo infinitesimal que eventual mente se hará tender a cero, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{split} \psi^{(0)}(t_{i}) &= \psi^{(0)}_{inc}(t_{i}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_{j}} \left[ \frac{\partial G_{0}(t_{i},t_{j})}{\partial \hat{n}_{j}} \psi^{(0)}(t_{j}) - G_{0}(t_{i},t_{j}) \chi^{(0)}(t_{j}) \right] dt_{j,} \\ (5) \\ 0 &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_{j}} \left[ \frac{\partial G_{j}(t_{i},t_{j})}{\partial \hat{n}_{j}} \psi^{(0)}(t_{j}) - \frac{v_{j}}{v_{0}} G_{j}(t_{i},t_{j}) \chi^{(0)}(t_{j}) \right] dt_{j,} \\ (6) \end{split}$$

con i = 0 a *M*, y donde  $v_{0,j} = \epsilon_{0,j}(\omega)$  para polarización p y  $v_{0,j} = 1$  para polarización s.

Las Ecs. (5) y (6) constituyen un conjunto de 2M ecuaciones integrales acopladas que pueden resolverse numéricamente para obtener los valores del campo y su derivada normal en la superficie de

los cuerpos esparcidores. Los detalles de la discretización de estas ecuaciones y su conversión en ecuaciones matriciales se pueden encontrar en la Ref. [6].

Por simplicidad en este trabajo únicamente se presenta el caso de la polarización s; es decir  $\psi^{(0)} = 0$ , por lo que solamente se usará la Ec. (3). En la Fig. 2 (b) se muestra la reflectancia de la PCW como función de la frecuencia reducida  $\omega_r$ . Para este caso se utilizó un ancho de la guía de  $\pi$  y de longitud de 10 períodos cuyo radio de las inclusiones cilíndricas es de 0.177. Como se observa en la Fig. 2, los máximos de la reflectancia corresponden a las bandas prohibidas de la misma PCW de longitud infinita [5]. Es decir, los modos electromagnéticos para estos intervalos de frecuencias no se van a propagar a través de la PCW de longitud finita. Esto permite tener un control de la propagación de la luz a través del sistema propuesto.



Figura 2. (a) Perfil de una PCW perfectamente conductora. (b) Reflectancia y (c) Transmitancia como función de la frecuencia reducida. (d) Balance de energía.

En la Fig. 2 (d) se ilustra el balance de la energía mostrando un error numérico menor al 1%. Esto nos indica que el método integral que hemos empleado es muy confiable.

### RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para diferentes versiones de los algoritmos tanto en su forma secuencial como en paralelo del IEM para estudiar la respuesta óptica de una PCW. En la tabla I se muestran los resultados del tiempo de cómputo en segundos para una matriz cuadrada variando el número de periodos de la PCW y utilizando cuatro distintas formas de programación. La primera es la secuencial, que es la forma tradicional de programación. Para la forma secuencial se tienen dos columnas distintas: una es usando las librerías de LAPACK y la otra es con las librerías de MKL (Intel). Las otras tres formas de programación usan el paradigma de paralelización usando distintas librerías y distintos grados de paralelización. Para MPI se usa la comunicación no bloqueante y la colectiva, que para estos casos la parte que se paraleliza es el ciclo principal que se encarga de calcular las 200 frecuencias usando el método integral. Otra de las formas de paralelización que se utilizó, fue el uso de la librería de ScaLAPACK. Para este caso se paralelizó la inversión como la construcción de la matriz. Por último, tenemos la paralelización mediante la tarjeta gráfica (GPU). En este caso se tienen 2 columnas: en una de ellas la construcción de la matriz se realiza de forma secuencial, pero la inversión de la matriz se realiza mediante el paradigma de paralelización con CUDA FORTRAN, y en la última columna, tanto la construcción de la matriz, así como la inversión se realizan con CUDA C. Como se esperaba, en la tabla I podemos notar que los tiempos de cómputo llevados a cabo por las versiones en paralelo son mucho más pequeños que las versiones en secuencial. Esto se debe a que se hace un uso más eficiente de los recursos de la máquina.

| paraiolai   |          |            |             |            |             |             |             |          |
|-------------|----------|------------|-------------|------------|-------------|-------------|-------------|----------|
| Entrada     | Num.     | Secuencial | Secuencial  | ScaLAPACK  | Paralelo    | MPI (No     | MPI         | Paralelo |
|             | Periodos | LAPACK     | MKL         | (Inv. +    | FORTRAN     | Bloqueante) | (Colectiva) | C (Inv.  |
|             |          | (S)        | (Intel) (s) | Cons.) (s) | (Inv.)(GPU) | (S)         | (S)         | + Cons.) |
|             |          |            |             |            | (S)         |             |             | (GPU)(s) |
| 2156×2156   | 10       | 766.13     | 129.66      | 79.82      | 133.48      | 23.16       | 20.19       | 35.24    |
| 3356×3356   | 50       | 2766.41    | 289.32      | 183.09     | 286.46      | 67.33       | 61.66       | 61.13    |
| 4856×4856   | 100      | 8022.10    | 614.51      | 419.27     | 566.41      | 185.29      | 165.13      | 111.93   |
| 6356×6356   | 150      | 17951.68   | 1066.49     | 776.72     | 1004.24     | 421.77      | 349.30      | 185.93   |
| 7856×7856   | 200      | 33871.93   | 1797.86     | 1278.97    | 1509.80     | 741.02      | 645.75      | 287.61   |
| 10856×10856 | 300      | 85653.91   | 3859.40     | 2930.97    | 2767.35     | 1903.44     | 1674.40     | 621.44   |
| 13856×13856 | 400      | 182620.76  | 6929.26     | 5603.89    | 4869.25     | 3930.45     | 3389.61     | 1533.31  |
| 16856×16856 | 500      | 327520.96  | 10860.07    | 9491.46    | 7055.29     | 10763.34    | 9836.16     | 2884.68  |

Tabla I. Tiempo de cómputo para calcular la respuesta óptica de una PCW finita variando el número de periodos usando algoritmos del método integral en las formas secuencial y paralela

De igual manera vamos a hacer una comparación de todas las versiones respecto a la versión secuencial LAPACK tomando en consideración la matriz de 13856×13856. Primero, con la versión secuencial usando la librería MKL de Intel se obtuvo una rapidez de 26 veces con respecto a la versión secuencial de LAPACK. Ahora haciendo la comparación con las versiones paralelas que usan la CPU, podemos observar que la versión de ScaLAPACK obtuvo una rapidez de 32 veces; así como las versiones de MPI con comunicación No bloqueante y Colectiva obtuvieron una rapidez de 46 y 53 veces más rápido, respectivamente. Finalmente para las versiones que usan la programación en paralelo en la GPU, tanto la que nada más invierte la matriz, como la que construye la matriz en la GPU y la invierte se obtuvo una rapidez de 37 y 118 veces más rápido, respectivamente. Esto nos muestra que la mejor forma de estudiar la respuesta óptica de una PCW es utilizando la GPU. Por otro lado, si nada más se quiere usar la CPU, la librería de MPI es la mejor forma. Sin embargo, tanto usando la GPU como los procesadores con MPI tienen una pequeña desventaja respecto a las versiones secuenciales y la paralela usando ScaLAPACK. la cual es el tamaño de la memoria reguerida. Para este trabajo se utilizó una tarjeta TESLA k40 con 12 GB de memoria RAM, la cual nada más permite invertir matrices complejas de un rango de 26 mil en precisión simple. Para MPI la computadora cuenta con 64 GB de memoria RAM, pero cada procesador utiliza su propia matriz del tamaño de la entrada. Por ejemplo, para la matriz más grande que se encuentra en la tabla I esta ocupará un espacio de 2.2 GB de memoria RAM por procesador, como se utilizaron 32 procesadores esto da un total de 70.4 GB de memoria RAM que sobrepasa la capacidad de la máguina. Esto hace que se tenga la necesidad de usar la memoria de intercambio (SWAP) reduciendo el rendimiento como se ve en la tabla I. De igual manera se aprecia en la Fig. 3 en el último punto de MPI (no bloqueante v colectiva) una anormalidad en el tiempo de cómputo causado por el uso de la memoria de intercambio.



Figura 3. Tiempo de cómputo en segundos para el cálculo de la respuesta óptica en forma secuencial y paralela variando el número de períodos de la PCW.

#### CONCLUSIONES

Hemos dado un gran avance para mejorar el rendimiento que se puede alcanzar utilizando librerías especializadas en el cómputo paralelo. Para lograr esto hemos utilizado el modelo de programación en paralelo bajo distintos protocolos y librerías como son: MPI, ScaLAPACK y CUDA. Las pruebas que se consideraron en este trabajo, fue tomando en cuenta la variación del número de periodos de 10 hasta 500 produciendo rangos de matrices de 2156×2156 hasta 16856×16856. En particular, para la matriz de rango 13856×13856, con la versión secuencial usando la librería MKL de Intel se obtuvo una rapidez de 26 veces más con respecto a la versión secuencial de LAPACK. En relación a las versiones paralelas con los procesadores de la CPU, usando ScaLAPACK se tuvo una rapidez de 32 veces; así como las versiones de MPI con comunicación No bloqueante y Colectiva fueron de 46 y 53 veces más rápido, respectivamente. Por otro lado, para las versiones que usan la programación en paralelo con la GPU, tanto la que nada más invierte la matriz, como la que construye e invierte la matriz se logró una rapidez de 37 y 118 veces más que la versión secuencial de LAPACK. Por lo tanto, la conclusión principal de este trabajo es que con estas técnicas de programación en paralelo bajo el protocolo de MPI y CUDA permiten modelar sistemas complejos en tiempos de cómputo relativamente muy cortos.

#### REFERENCIAS

- 1. Aguilar, J. y Leiss, E. "Introducción a la Computación Paralela". Universidad de Los Andes, Merida, Venezuela, primera edición. 246pp. (2004).
- 2. Pacheco, P. (2011). An Introduction to Parallel Programming. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- 3. Quinn, M. J. (2004). Parallel Programming, in C with MPI and OpenMP. McGraw-Hill,Inc., New York. 516 pp.
- Blackford, L. S., Choi, J., Cleary, A., D'Azeuedo, E., Demmel, J., Dhillon, I., Hammarling, S., Henry, G., Petitet, A., Stanley, K., Walker, D., and Whaley, R. C. (1997). ScaLAPACK User's Guide. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA. ISBN 0-89871-397-8.
- 5. Mendoza-Suárez, A., and Pérez-Aguilar, H. (2016). "Numerical integral methods to study plasmonic modes in a photonic crystal waveguide with circular inclusions that involve a metamaterial." *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications*, *21*, 1-12.
- 6. Pérez, H. I., Valencia, C. I., Méndez, E. R., and Sánchez-Gil, J. A. (2009). On the transmission of di\_use light through thick slits. J. Opt. Soc. Am. B, 26(4): 909-918.

## EMULACIÓN DE PATRONES DE FLUJO RUGOSO EN SUPERCONDUCTORES TIPO II Carolina Romero Salazar y Omar Augusto Hernández Flores

Ingeniería en Innovación Tecnológica, Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca, Av. Universidad s/n Col. Cinco Señores, Oaxaca de Juárez, Oax., C.P. 68120, México.

#### RESUMEN

Se emula un frente de flujo rugoso magnético y los contornos de inducción en un cilindro infinito superconductor duro tipo II, utilizando el modelo de estado crítico. Específicamente, se utiliza una densidad de corriente con periodicidad espacial para realizar cálculos numéricos y con ello se obtienen distribuciones de inducción magnética en el régimen de flujo atrapado y flujo apantallado. Se halla que sintonizando los parámetros del modelo teórico propuesto, es posible definir diferentes niveles de rugosidad del frente de flujo, crear trayectorias complejas de la corriente, formar islas o cavidades en estado de Meissner y, frentes de remagnetización.

#### **INTRODUCCIÓN**

El mecanismo físico que genera frentes de flujo rugosos es bien conocido, y contempla contaminación en los bordes de la muestra y desorden de bulto. En particular, la contaminación de bordes produce jets de flujo o bien patrones en forma de dedos, y en el umbral de la inestabilidad emergen espectaculares estructuras dendriticas como consecuencia inmediata de incontrolables avalanchas de flujo. Al sumar el desorden de bulto y alejados del umbral de estabilidad se forma un frente de flujo rugoso aparente estocástica, sin embargo, el frente presenta regularidades en su forma, lo cual es deseable emular.

Basado en un modelo no-lineal de densidad de corriente crítica, este trabajo presenta una metodología para emular los frentes de flujo magnético en un superconductor tipo II desde la perspectiva de una teoría de estado crítico. Se realizaron cálculos numéricos para describir los patrones de flujo en un cilindro superconductor y se muestran mapas coloreados de la distribución de inducción magnética. El desorden de bulto se modelo considerando una desviación de la densidad de corriente de Kim-Anderson.

#### TEORÍA

El sistema superconductor es un cilindro infinito en la denominada geometría paralela, razón por la cual el campo de demagnetizacion no se toma en cuenta. Evidentemente, la geometría sugiere utilizar las coordenadas cilíndricas y la misma lleva a que la densidad de corriente fluya en el plano  $\rho - \varphi$ . La inducción magnética tendrá dirección  $\hat{z}$  y satisface la condición a la frontera  $\mu_0 H_a = B(R, \varphi)$ . El modelo elíptico de estado critico [1] se describirá en las siguientes lineas. En esta aproximación macroscópica se resuelven las ecuaciones de Maxwell:

$$\mu_0 j_\rho = \frac{1}{\rho} \partial_\varphi B_z, \quad \mu_0 j_\varphi = -\partial_\rho B_z, \quad \partial_t B_z = -\frac{1}{\rho} [\partial_\rho (\rho E_\varphi) - \partial_\varphi E_\rho]. \tag{28}$$

Para incorporar el carácter superconductor al sistema, la ley material se escribe como sigue,  $j_i = J_{ik}E_k/E$  donde  $J_{ik} = J_i\delta_{ik}$  son los elementos de un tensor diagonal ( $\delta_{ik}$  es la delta de Kronecker con  $i, k = \rho, \varphi$ ). Una vez que el estado crítico se establece, las componentes del tensor luce como  $J_\rho = j_{c\rho}$ ,  $y J_{\varphi} = j_{c\varphi}$ . De la ley material se halla una expresión para la magnitud de la densidad de corriente,

$$\frac{1}{j_c^2} = \frac{\cos^2 \phi}{j_{c\rho}^2} + \frac{\sin^2 \phi}{j_{c\phi}^2}.$$
(29)

Aquí,  $\phi$  es el ángulo de la densidad de corriente crítica respecto al eje  $\rho$ , y como puede apreciarse los valores de la magnitud están confinados a una elipse. Las cantidades  $j_{c\rho}$ y  $j_{c\rho}$  son los valores

críticos a lo largo de las direcciones  $\rho$  y  $\phi$ , que de acuerdo a la evidencia experimental siguen el modelo de Kim-Anderson,

$$j_{c\rho} = j_{c\rho}^{KA}(B) = \frac{J_{0\rho}}{\left(1 + \frac{B}{B_{\rho}^*}\right)^{n_{\rho}}}, \qquad j_{c\varphi} = j_{c\varphi}^{KA}(B) = \frac{J_{0\varphi}}{\left(1 + \frac{B}{B_{\varphi}^*}\right)^{n_{\varphi}}}, \tag{30}$$

donde $j_{c\rho}(0) = j_{0\rho} \ y \ j_{c\phi}(0) = j_{0\phi}$ son los máximos valores de la densidad de corriente crítica,  $B_{\rho}^*, B_{\phi}^*, n_{\phi}, n_{\rho}$  son parámetros de ajuste. La magnitud del campo eléctrico se modela con la ley vertical,  $E = \breve{\rho}(j - j_c) \mathbb{H}$ , donde  $\mathbb{H} = \mathbb{H}(j - j_c)$  es la función de Heaviside y la resistividad  $\breve{\rho}$  juega el rol de un parámetro auxiliar. Es útil definir parámetros característicos del sistema para simulaciones numéricas, en particular, el campo eléctrico característico  $E_0 = \breve{\rho} j_0 \ y$  la inducción magnetica característica (campo de Bean)  $B_0 = \mu_0 j_0 R$ . Para ilustrar el modelo elíptico de estado crítico, la figura 1 muestra la distribución típica de la inducción magnética (adimensionada)  $B_z(x, y)/B_0$  bajo la influencia de un campo magnético aplicado axialmente. El flujo de enclavamiento se considera isotrópico, esto es,  $j_{c\rho} = j_{c\phi} = j_{c\phi}^{KA}$ . Se utilizaron los parámetros  $B_{\rho}^*/B_0 = B_{\phi}^*/B_0 = 0.01$ ,  $n_{\rho} = n_{\phi} = 0.05$ ,  $j_{0\rho}/j_0 = j_{0\phi}/j_0 = 1$ . Los paneles(a) y (b), corresponden a estados parcialmente penetrados, el frente de flujo esuna circunferencia y la zona negra es la zona de Meissner. Los paneles (c) y (d), corresponden a estados totalmente penetrados. Finalmente, los paneles (e) y (f) corresponde al estado remanente.

Una distribución irregular de inducción magnética es consecuencia del desorden de bulto del superconductor [6]. Por un lado la contaminación en los bordes de la muestra, y por otro la anisotropía estructural y las zonas aformas (inhomogeneidades) contribuyen a la generación frentes de flujo rugosos. En este estudio para producir una distribución irregular de inducción magnética [2,3], se modifica la densidad de corriente a lo largo de las direcciones  $\hat{\rho}$  y  $\hat{\phi}$ , que para nuestros propósitos, basta con una ligera desviación de sus valores críticos, esto es,

$$\boldsymbol{j}_{c\rho} = \boldsymbol{j}_{c\rho}^{KA} \big[ \mathbf{1} + \boldsymbol{\delta}_{\rho}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \big] \qquad \boldsymbol{j}_{c\varphi} = \boldsymbol{j}_{c\varphi}^{KA} \big[ \mathbf{1} + \boldsymbol{\delta}_{\varphi}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \big]$$

donde  $\delta_{\rho}$  y  $\delta_{\varphi}$  obedecen la condición física  $|\delta_{\rho}|, |\delta_{\varphi}| < 1$ .

1



Figura 26: Distribuciones adimensionadas de Inducción magnética  $B_z/B_0$  en la sección transversal de un cilindro infinito superconductor, bajo el influjo de un campo magnético  $H_a$  aplicado axialmente. El flujo de enclavamiento se considera isotrópico, esto es,  $j_{c\rho} = j_{c\varphi} = j_{c\varphi}^{KA}$ . Se utilizaron los parámetros  $B_{\rho}^*/B_0 = B_{\varphi}^*/B_0 = 0.01$ ,  $n_{\rho} = n_{\varphi} = 0.05$ ,  $j_{0\rho}/j_0 = j_{0\varphi}/j_0 = 1$ . Los paneles(a) y (b), corresponden a estados parcialmente penetrados, el frente de flujo esuna circunferencia y la zona negra es la zona de Meissner. Los paneles (c) y (d), corresponden a estados totalmente penetrados. Finalmente, los paneles (e) y (f) corresponde al estado remanente.

#### RESULTADOS

Presentamos resultados de distribuciones rugosas de la inducción magnética  $B_z(x, y)/B_0$  en el cilindro superconductor, considerando dos desviaciones en la densidad de corriente crítica de referencia  $j_c$  gobernada por el modelo elíptico de estado crítico. Usamos el método de líneas (MOL) para resolver numéricamente las ecuaciones de Maxwell cuasi-estacionarias junto con la ley material y la relación empírica de Kim-Anderson que medía la elipse crítica. Empleamos bibliotecas estándar de MATLAB, específicamente las rutinas ode113 y ode45.



Figura 27: Simulaciones numéricas de la distribución de inducción magnética en una muestra con growth sector boundaries y desorden de bulto.

Por simplicidad asumimos que  $j_{c\rho}^{KA} = j_{c\phi}^{KA}$  y  $\delta_{\rho} = 0$ . La elección de  $\delta_{\varphi}$  es arbitraria porque nuestro propósito es mostrar el efecto de la desviación sobre la densidad de corriente crítica y consecuentemente en la distribución de inducción magnética. El modelado de inhomogeneidades periódicas tiene como contraparte experimental, por ejemplo, las estructuras híbridas superconductor/ferromagneto. En este trabajo si bien no hay una contraparte experimental, es conveniente considerar que el valor de la densidad de corriente crítica sufre una desviación con comportamiento periódico porque ilustra aspectos físicos relevantes de la capacidad de conducción de corriente y porque ayuda al desempeño numérico.

Resultados experimentales de Ainslie et al.[4] sugieren que las inhomogeneidades en el bulto, producidas durante el crecimiento de un superconductor texturizado empleando como semilla un monocristal, pueden emularse con una desviación de la forma  $1 + \delta_{\varphi} = 1 + A_{\varphi}(B/B_0) \cos m\varphi$ . Una manera de modelar el desorden de bulto producido por radiación de iones pesados se consigue modificando el factor de desviación  $A_{\delta}(B/B_0) \cos m\varphi$  agregándole un término periódico con frecuencia mayor y menor amplitud. El mayor interés de esta investigación es el modelado de diferentes tipos de irregularidades y asperezas en la distribución de la inducción magnética, como las observadas en diferentes muestras de bulto [4, 5, 6]. Por lo tanto la figura (2.a) muestra simulaciones numéricas de la distribución de inducción magnética en una muestra con *growth sector boundaries* y desorden de bulto. Se consideraron contribuciones independientes a través del factor de desviación  $\delta_{\varphi} =$  $A_{\varphi}(B/B_0)[\cos(4\varphi + \pi) + 0.1\cos(64\varphi + \pi)]$ . La figura (2.b) simula distribuciones inhomogéneas de la inducción magnética en un superconductor masivo considerando acopladas las contribuciones de los *growth sector boundaries* y rugosidad usando  $\delta_{\varphi} = A_{\varphi}(B/B_0)[\cos(4\varphi + \pi)\cos(64\varphi + \pi)]$ . Ambas distribuciones corresponden a un estado parcialmente penetrado y se obtuvieron con una amplitud  $A_{\varphi} = 3$  y un campo magnético aplicado máximo  $\mu_0 H_a/B_0 = 0.18$ .

#### CONCLUSIONES

El agregar un factor de desviación a una densidad de corriente crítica de referencia modifica los patrones de penetración del flujo magnético en un superconductor tipo II. Se encontró que ajustando el factor de desviación se controlan las inhomogeneidades de tal manera que se consigue modelar fenómenos físicos como patrones rugosos del frente de flujo magnético, trayectorias complejas de la corriente, la formación de m-zonas de Meissner y del llamado frente de remagnetización. El modelo elíptico de estado crítico ha demostrado su efectividad y se puede expandir su uso a los regímenes de flujo activado térmicamente (flux creep) y de flux flow. En trabajos anteriores el modelo elíptico consideró casos en los que el campo eléctrico era estrictamente igual a cero. Vale la pena mencionar que en el esquema teórico presentado en este trabajo el estado crítico no está sujeto a la condición E = 0.

## AGRADECIMIENTOS

C. Romero-Salazar agradece el apoyo parcial de la UABJO. O.A. Hernández-Flores agradece el apoyo de PRODEP.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, "Elliptic flux-line-cutting critical-state model", Appl. Phys. Lett., Vol. 83, 2003, pp. 5256-5258.
- C. Romero-Salazar, O. A. Hernández-Flores, O. Chumak, F. Pérez-Rodríguez, and V. Chabanenko, "Emulating rough flux patterns in type-II superconducting cylinders using the elliptic critical-state model", J. Appl. Phys., Vol. 122, 2017, pp. 143904.
- C. Romero-Salazar., O.A. Hernández-Flores, V. Chabanenko, E.I. Kuchuk, I. Abaloszewa, A. Nabialek and F. Pérez-Rodríguez, "Obtaining a rough flux front in Type-II superconductors using a critical state model", Acta Phys. Pol A, Vol. 130, 2016, pp.645-648.
- 4. M.D. Ainslie, H. Fujishiro, T. Ujiie, J. Zhou, A.R. Dennis, Y.H. Shi, and D.A. Cardwell, "Modelling and comparison of trapped fields in (RE)BCO bulk superconductors for activation using pulsed field magnetization", Supercond. Sci. Technol., Vol. 27, 2014, pp. 065008.
- D. Barness, M. Sinvani, A. Shalouv, T. Tamegai, and Y. Yeshurun, "Finger patterns of magnetic flux in bulk Bi<sub>2</sub>Sr<sub>2</sub>CaCu<sub>2</sub>O<sub>8+δ</sub> samples", Phys. Rev. B, Vol. 77, 2008, pp. 094514.
- M. Geahel, I. Jouanny, D. Gorse-Pomonti, M. Poirer-Quinot, J. Briatico and C.J. van der Beek, "Edge Contamination, Bulk Disorder, Flux Front Roughening, and Multiscaling in Type II Superconducting Thin Films", Condens. Matter, Vol. 2, 2017, pp. 27.

## HELICOBACTER PYLORI SECRETA LA CHAPERONA GROEL CON LA HABILIDAD DE UNIR HIERRO.

Marco Antonio González López<sup>1</sup>, Elena Marcia Gutiérrez Cárdenas<sup>2</sup>, Cristhian Sánchez Cruz<sup>3</sup> y José de Jesús Olivares Trejo<sup>3</sup>

# <sup>1</sup>Catedrático CONACYT, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, <sup>2</sup>Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, <sup>3</sup>Universidad Autónoma de la Ciudad de México. <u>mar-</u> <u>conyqfb@yahoo.com.mx</u>

## RESUMEN

El hierro es esencial para casi todos los seres vivos. Dentro del humano se encuentra unido a metaloproteínas como la lactoferrina (Lf), la ferritina (Ft), o la hemoglobina (Hb), por lo tanto, las bacterias patógenas que infectan al humano han desarrollado mecanismos para adquirir el hierro a partir de estas fuentes. Estos mecanismos consisten en secretar moléculas llamadas sideróforos o hemóforos, las cuales se encargan de unir la fuente de hierro y conducirlo hacia su receptor localizado en la membrana externa de la bacteria, donde finalmente es internalizado.

*Helicobacter pylori* es un patógeno que causa úlcera peptídica y gastritis, puede sobrevivir en varios ambientes dentro del ser humano haciendo necesaria la obtención de hierro para mantener su crecimiento. Se ha demostrado que *H. pylori* puede obtener hierro a partir de la Lf, Ft, Hb y del grupo hemo. Se desconoce si esta bacteria es capaz de secretar moléculas, como los sideróforos o hemóforos que tienen la capacidad de unir hierro. Objetivo: Purificar e identificar una proteína secretada por *Helicobacter pylori* con la capacidad de unir hierro. Material y Métodos: Se diseñó una estrategia basada en la purificación de proteínas secretadas por *H. pylori*, mediante cromatografía de afinidad e identificación por espectrometría de masas. Resultados: Se purificó e identificó una proteína que fue revelada como la chaperonina GroEL (HpGroEL), la cual resultó ser homologa a la chaperona GroEL de *E. coli* (EcGroEL) con un 60% de similitud. Conclusiones: *H. pylori* secreta a la chaperona HpGroEL junto con otras proteínas, a las cuales les ayuda a mantener su plegamiento fuera de la célula, un ejemplo podría ser la ureasa. Sin embargo, a diferencia de las chaperoninas de otras bacterias como *E. coli*, *C. botulinum* o *S. tiphy*, la chaperonina HpGroEL une hierro.

#### **INTRODUCCIÓN**

Las bacterias que invaden al ser humano requieren de nutrientes y elementos los cuales obtienen a partir de este, un ejemplo es el hierro, el hierro es esencial para todos los microorganismos<sup>1</sup>.

En el humano el hierro se encuentra unido a metaloproteínas como la lactoferrina (Lf), ferritina (Ft), hemoglobina (Hb), de tal manera que el hierro libre prácticamente no existe, por lo que las bacterias patógenas han desarrollado mecanismos para adquirir hierro a partir de estas metaloproteínas<sup>2</sup>.

*Helicobacter pylori (H. pylori)* es un patógeno que causa úlcera peptídica y gastritis, este patógeno puede sobrevivir en varios medios dentro del humano pero requiere de hierro para lograrlo, se ha demostrado que *H. pylori* puede obtener hierro a partir de la Lf, Ft y Hb<sup>3</sup>.

Se ha reportado que esta bacteria puede obtener hierro mediante mecanismos directos, esto es, a través de proteínas de membrana, en nuestro grupo de trabajo hemos encontrado tres proteínas de membrana FrpB1, FrpB2 y FrpB3, además esta bacteria cuenta con un sistema de transporte de hierro llamado FeoB<sup>5</sup>. Por otro lado, no se tiene evidencia de que *H. pylori* posea un mecanismo indirecto de adquisición de hierro, es decir sintetizar y secretar sideroforos o hemoforos.

#### PARTE EXPERIMENTAL

*H. pylori* J99 y *E. coli* O157:H7 fueron las cepas empleda en este estudio. *H. pylori* se creció en medio casman suplementado con sangre de carnero al 7.5%, 10% CO<sub>2</sub> y a 37°C. *E. coli* se creció en medio Luria Bertani a 37°C. Posteriormente ambas cepas fueron crecidas en medio casman suplementado con FeCl<sub>3</sub> 5mM por 12 h a 37°C. Las bacterias fueron colectadas y resuspendidas en caldo Brucella, centrifugadas a 6000g por 10 min, el sobrenadante fue filtrado a través de una membrana con tamaño de poro de 0.22 micras, el producto filtrado contenía a las proteínas secretadas, estas se pusieron a interactuar con la cromatografía de hemina para purificar las proteínas afines al grupo hemo. La proteína GroEL fue identificada por western blot con el anticuerpo anti GroEL (1:40000), el

segundo anticuerpo estuvo acoplado a HRP (1:10000), la interacción fue revelada por quimioluminiscencia. Finalmente, la muestra se cargó en el equipo Micromass QTof I, 5 µl de la muestra digerida se inyectó en una columna PepMap C18 (0.75 µm x 15 cm) y se eluyó con acetonitrilo a un gradiente linear de 200nl/ min, el péptido eluido fue introducido al espectrómetro de masas a través de un New Objective PicoTip que a su vez estuvo sostenido por un New Objective adapter. Las condiciones del experimento son: voltaje capilar 1.8kV, voltaje del cono de tensión 32V, energía de colisión fija de 14eV a 50eV de acuerdo con la masa y la carga del ion. Los datos obtenidos fueron buscados en la base de datos <u>www.matrixscience.com</u> usando el algoritmo Mascot (Protein core facility Columbia University Medical Center.

http://www.cumc.columbia.edu/dept/protein/).

#### RESULTADOS

Las proteínas totales secretadas por *H. pylori* (Fig. 1. Panel A, línea 1) fueron cargadas en la cromatografía de afinidad, las proteínas que no se unieron a la cromatografía fueron colectadas (Fig. 1, Panel A, línea 2). 4 lavados de la cromatografía fueron necesarios para evitar interacciones inespecíficas de las proteínas (Fig. 1, Panel A, líneas 3-6). Las proteínas afines al grupo hemo fueron eluídas con una solución de clorhidrato de guanidina 6M (Fig. 1, Panel A, línea 7). Como control negativo se usó el medio de cultivo para mostrar que las proteínas obtenidas no provienen del medio (Fig. 1, panel B).



Figura 1. *H. pylori* secreta una proteína de 58kDa que se une a la cromatografía de afinidad. Panel A, se muestra la purificación de las proteínas. Panel B, el medio en el que creció *H. pylori*. Carril1, proteínas totales. Carril 2, proteínas no unidas. Carriles 3-6 lavados. Carril 7 proteínas eluidas.

De las proteínas eluidas se eligió una de aproximadamente 58kDa, la cual se analizó por espectrometría de masas, el análisis nos indicó que la proteína seleccionada es una chaperona de tipo GroEL de *H. pylori* (Q9ZN50 SwissProt), Tabla 1.

| Número de<br>acceso Uni- | Proteína                       | Cobertura | Masa      | Mascot<br>score | Péptidos<br>únicos | Función                                                                                              |
|--------------------------|--------------------------------|-----------|-----------|-----------------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Prot                     |                                |           | (kDa/pl)  |                 |                    |                                                                                                      |
| Q9ZN50                   | 60 kDa<br>chaperona<br>(GroEL) | 39%       | 58.26/5.5 | 1116            | 24                 | Previene el des-<br>plegamiento y<br>promueve el ple-<br>gamiento de pro-<br>teínas bajo es-<br>trés |

Tabla 1. Características de la proteína GroEL de *H. pylori* identificada por espectrometría de ma-

Este resultado nos llevó a preguntarnos qué características debe tener esta proteína para que además de su función ya documentada, tenga la capacidad de unir hierro. Para esto se realizó un alineamiento de proteínas GroEL de varias bacterias (Figura 2). El servidor ClustalW, indicó que las proteínas analizadas son homologas y tienen un 60% de similitud. Sin embargo, hemos visto que las bacterias del genero *Helicobacter* poseen muchas más histidinas (H) y tirosinas (Y) que el resto de las proteínas analizadas, se sabe que estos aminoácidos están relacionados con la unión de hierro, posiblemente esta sea la razón por la cual la proteína GroEL de *H. pylori* pueda unir hierro, por ejemplo la secuencia GroEL de *H. pylori* posee 7 H y 2 Y más que la secuencia GroEL de *E. coli*, esta diferencia nos sugiere que posiblemente la proteína GroEL de *H. pylori* tenga la capacidad de unir hierro y no así la proteína GroEL de *E. coli*.

|                | 430                 | 440         | 450       | 460       | 470                        | 480      |
|----------------|---------------------|-------------|-----------|-----------|----------------------------|----------|
| H-pylon-J99    | AAQKVHLNLHDDEK-     | VGYEIIMRA   | IKAPLAQIA | INAGYDGGV | VVNEVQK                    | EGHFGFNA |
| H-pylon-HPAG1  | AAQKVHLNLHDDEK-     | VGYEIIMRA   | IKAPLAQIA | INAGYDGGV | VVNEVEKH-1                 | EGHFGFNA |
| H-pylon-26695  | AAQKVHLNLHDDEK-     | VGYEIIMRA   | IKAPLAQIA | INAGYDGGV | VVNEVEK <mark>H</mark> - 1 | EGHFGFNA |
| H-felis        | AAQKVELNLEDEK-      | VGYEIIKRA   | IKAPLAQIA | ANAGYDRGV | VVNEVEK                    | EAHYGFNA |
| H-mustelae     | AAQKVNLELEGDEA -    | VGYDIIKRA   | IKAPLAQIA | ANAGEDSGV | VVNEVENK-1                 | KDAFGFNA |
| H-hepaticus    | ASQKVKLKLEGDEA -    | IGYDIIKRA   | IKAPLAQIA | TNAGYDAGV | VVNEVEKNS                  | KDGFGFNA |
| E-coli         | VASKLAD - LRGQNED   | QNVGIKVALRA | MEAPLRQIV | LNCGEEPSV | VANTVKGG - I               | DGNYGYNA |
| S-dysenteriae  | VASKLAD - LRGQNED   | QNVGIKVALRA | MEAPLRQIV | LNCGEEPSV | VANTVKGG - I               | DGNYGYNA |
| S-typhi        | VASKIAD - LKGQNED   | QNVGIKVALRA | MEAPLRQIV | LNCGEEPSV | VANTVKGG - I               | DGNYGYNA |
| K-pneumoniae   | VAAKLAG - LTGQNED   | QNVGIKVALRA | MEAPLRQIV | SNAGEEPSV | VANNVKAG - I               | DGNYGYNA |
| Y-pessis       | AABAIAG - LKGDNED   | QNVGIKVALRA | MESPLRQIV | VNAGEEASV | IANKVKAG-I                 | EGSFGYNA |
| H-influenzae   | AAAKVAASLKGDNEE     | QNVGIKLALRA | MEAPLRQIV | TNAGEEASV | VASAVKNG-1                 | EGNEGYNA |
| V-cholerae     | AASKLSS - LVGDNEE   | QNVGIRVALRA | MEAPLRQIV | KNAGDEESV | VANNVRAG - I               | EGNYGYNA |
| P-aeruginosa   | ALQAIEG - LKGDNEE   | QNVGIALLRRA | VESPLRQIV | ANAGDEPSV | VVDKVKQG - :               | SGNYGFNA |
| B-avium        | AKQAIAG - LQGDTPD   | QNAGIKLILRA | VEEPLRTIV | TNAGEEASV | VVNNVLNG-1                 | KGNYGYNA |
| N-meningitidis | ARAALEN - LHTGNAD   | QDAGVQIVLRA | VESPLRQIV | ANAGGEPSV | VVNKVLEG -                 | KGNYGYNA |
| B-anthracis    | VYTKVAS - IVAEG - D | EATGINIVLRA | LEEPVRQIA | INAGLEGSV | VVERLKGE - I               | KVGVGFNA |
| S-pneumoniae   | VIPAVAT - LELTG - D | EATGRNIVLRA | LEEPVRQIA | ANAGFEGSI | VIDRLKNA -                 | ELGIGENA |
| C-botulinum    | IIPKIAD - LTSDIID   | VKLGIDIIRKA | LEEPVRQIA | NNAGAEGSV | IIEKVKAT-I                 | EAGVGYDA |

Figura 2. Alineamiento de aminoácidos de diferentes proteínas GroEL, se incluyen secuencias de la cepa *Helicobacter* y de cepas relacionadas, se enfatizan los residuos Histidina (H) y Tirosina (Y). El alineamiento se realizó en el servido ClustalW y se editó con el programa JalView versión 2.8.

Para determinar esto obtuvimos las proteínas totales de *E. coli* y purificamos aquellas con afinidad al grupo hemo por medio de la cromatografía de afinidad y para determinar sí la proteína GroEL se unió a dicha cromatografía se realizó un western blot para localizar esta proteína, de igual manera se realizó este procedimiento para las proteínas de citoplasma de *H. pylori* (Figura 3). Este ensayo nos permitió observar que la proteína GroEL de *E. coli* no es capaz de unirse al grupo hemo porque no podemos revelar su presencia mediante el uso de un anticuerpo especifico (Figura 3, panel B, carril 7), adicionalmente, podemos decir que la proteínas GroEL de citoplasma y la secretada de *H. pylori* son la misma porque ambas son purificadas por cromatografía de afinidad y revelamos su presencia con el anticuerpo anti-GroEL (Figura 3, panel D, carril 7).



Figura 3. La chaperona GroEL de *E. coli* no une hemo. Las proteínas totales de *E. coli* fueron purificadas por cromatografía de afinidad Panel A. Western blot usando anticuerpos anti-GroEL Panel B. Proteínas de citoplasma de *H. pylori* fueron purificadas por cromatografía de afinidad Panel C. Western blot usando anticuerpos anti-GroEL Panel D. Carril 1, Proteínas totales. Carril 2, proteínas no unidas, carriles 3-6 lavados. Carril 7 Proteínas eluidas.

Finalmente se realizó el modelo tridimensional de la proteína GroEL tanto de *H. pylori* como de *E. coli* (Figura 4).



Figura 4. Estructura tridimensional de las proteínas chaperona GroEL de *E. coli* (izquierda) y *H. py-lori* (derecha). Las proteínas son homologas y tienen una similitud del 60% pero su contenido de aminoácidos tirosina e histidina varia (residuos en obscuro).

#### CONCLUSIONES

Hemos purificado la primer proteína secretada por *H. pylori* con la capacidad de unir hierro, el análisis de espectrometría de masas señaló que esta proteína es la chaperona GroEL, de manera interesante hemos visto que esta proteína tiene la capacidad de unir de manera selectiva al hierro, lo cual es una capacidad que no presenta la proteína GroEL de *E. coli*, pensamos que esto puede deberse a los aminoácidos H y Y que se encuentran en mayor cantidad en la proteína GroEL de *H. pylori*. Creemos que *H. pylori* secreta esta proteína con la finalidad de mantener el correcto plegamiento de otras proteínas secretadas como la ureasa y a su vez proporcionarle hierro para su buen funcionamiento.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. Andrews SC, Robinson AK, Rodríguez-Quiñones F. Bacterial iron homeostasis. FEMS Microbiol Rev. 2003; 27:215-37.
- 2. González-López MA, Olivares-Trejo JJ. The gene frpB2 of *Helicobacter pylori* encodes an hemoglobin-binding protein involved in iron acquisition. Biometals. 2009;22:889-94.
- Senkovich O, Ceaser S, McGee DJ. Testerman TL. Unique host iron utilization mechanisms of *Helicobacter pylori* revealed with iron-deficient chemically defined media. Infect Immun. 2010; 78:1841-9.
- 4. Vanet A., Labigne A. Evidence for specific secretion rather than autolysis in the release of some *Helicobacter pylori* proteins. Infect Immun. 1998;66:1023-7
- Velayudhan J. Hughes NJ. McColm AA, Bagshaw J, Clayton CL, Andrews SC, Kelly DJ. Iron acquisition and virulence in *Helicobacter pylori*: a major role for FeoB, a high-affinity ferrous iron transporter. Mol Microbiol. 2000; 37:274-86.

## DISPERSIÓN DE PARTÍCULAS RESPIRABLES EN AGUASCALIENTES

Mariely Montes Camacho<sup>1</sup>, Elsa Marcela Ramírez López<sup>1</sup>, Ma. Consolación Martínez Saldaña<sup>2</sup>, Patricia Rangel Jiménez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Bioquímica, <sup>2</sup>Departamento de Morfología <sup>3</sup>Departamento de Estadística. Centro de Ciencias Básicas. Universidad Autónoma de Aguascalientes. México. e-mail: mariely.montes@gmail.com, emramir@correo.uaa.mx, mcmtzsal@correo.uaa.mx, prangel@correo.uaa.mx

# RESUMEN

Aguascalientes ha tenido un importante desarrollo industrial, económico, e incremento en la población. Y un aumento en la carga vehicular, construcciones de casa-habitación, y deforestación. Las partículas respirables inferiores a 10 µm (PM10) y 2.5 µm (PM2.5) en la atmósfera pueden dispersarse por la acción del viento, y al inhalarse causar enfermedades respiratorias y cardiovasculares. El objetivo de este estudio fue analizar las concentraciones de las partículas respirables y su dispersión, durante la primavera y el invierno del 2016 y 2017, en el municipio de Aguascalientes. Las series de tiempo de las PM2.5 y PM10, del 2016 y 2017, se obtuvieron de la estación de monitoreo de la Red Universitaria de Observatorios Atmosféricos (RUOA-UNAM), instalada en el campus universitario de la UAA. La dispersión de las partículas respirables se determinó con la dirección y velocidad del viento. Se observó un incremento de las concentraciones de PM10 y PM2.5 en primavera y en el invierno. La máxima para las PM2.5, en la estación meteorológica de primavera, fue 39% mayor en el 2017 que en 2016, y del 51% en el invierno. Las concentraciones diarias en el mes de abril y mayo del 2017, fueron inferiores a los 45 µg.m<sup>-3</sup> marcados por la NOM-025-SSA1-2014, sin embargo el promedio anual en el 2017 sobrepasó a la norma (12 µg.m-3) en un 44% (de 15.2, en el 2016, a 17.6 µg.m<sup>-3</sup>), el aumento pudo deberse a la carga vehicular y las actividades industriales en el municipio de Aguascalientes.

En el caso de las PM10 se observaron mayores concentraciones en el mes de mayo (primavera) y en el mes de diciembre. La dominancia de los vientos, mostró mayor dispersión del MP en las direcciones de NNE hacia el SSW, y del E hacia el W. Las concentraciones de las partículas respirables incrementaron en el 2017. La dispersión del MP probablemente es hacia la zona poniente de la ciudad.

#### INTRODUCCIÓN

La presencia de diferente tipo de material suspendido en la atmósfera, en forma de partículas, es causante de cambios en las condiciones de la calidad del aire. Al disminuirse ésta, principalmente en la temporada de invierno, puede ocasionar una inversión térmica, ocasionando un decremento en la salud ambiental y teniendo una importante repercusión en la salud humana, animal y en la vegetación existente en la zona afectada, principalmente si esta permanece por un gran espacio de tiempo. El efecto en la salud humana generalmente es por medio de lo que inhalamos, si consideramos que respiramos entre 5 y 6 L de aire por minuto, en un día habremos respirado entre 7,200 y 8,640 L de aire cargado con una gran variedad de material particulado. La Organización Mundial de la Salud (OMS) ha marcado que la calidad del aire es buena cuando la concentración de las partículas respirables con diámetro aerodinámico inferior a 2.5  $\mu$ m (PM2.5) es de 10  $\mu$ g/m<sup>3</sup>, y de 20  $\mu$ g/m<sup>3</sup> para las inferior a 10  $\mu$ m (PM10). Y bajo estas condiciones, la cantidad de partículas que respiramos por día puede variar desde 72 a 172  $\mu$ g, las cuales pueden introducirse en la parte superior (PM10) y en la inferior (PM2.5) del sistema respiratorio. Por lo anterior, el objetivo de este estudio fue analizar las concentraciones de las partículas respirables y su dispersión, durante las estaciones de primavera e invierno del 2016 y 2017, en el municipio de Aguascalientes.

#### TEORÍA

El incremento en la población mundial aunado a su nivel de confort han sido algunos de los causales de una elevación en las concentraciones de contaminantes atmosféricos. Éstos son emitidos de fuentes fijas y móviles, ocasionando así una disminución en la calidad del aire, como se ha publicado en diversas ciudades del país, como Monterrey, Ciudad de México, Toluca, Mexicali, Guadalajara,

por citar algunas, al presentar concentraciones de los contaminantes criterio (ozono, dióxido de azufre, óxidos de nitrógeno, monóxido de carbono, material particulado respirable como las PM10, y las PM2.5) superiores a las marcadas en las diferentes normas oficiales mexicanas. Denominándose contaminantes criterio porque han sido objeto de estudios de evaluación publicados en documentos de criterios de calidad del aire<sup>1</sup>. La presencia excesiva en la concentración de estos contaminantes criterio alteran la calidad del aire, ocasionando una inversión térmica en la temporada de frío, este fenómeno ocurre cuando por la altitud y el poco flujo de aire y/o por barreras ya sean edificios o montañas favorecen el enfriamiento del suelo, el aire junto al suelo muy frío se enfría por contacto, y el aire más alejado se encuentra con una temperatura más alta por falta de dicho contacto dejando atrapada la contaminación durante más tiempo. Este tipo de inversión se pierde justo cuando el piso comienza a calentarse de nuevo<sup>2,3</sup>.

El material particulado (MP) respirable se presenta en la atmósfera de nuestras ciudades sin importar la poca o mucha actividad productiva, porque estas pueden ser emitidas por las actividades domésticas, los servicios, y la erosión del suelo por acción de la velocidad del viento. No obstante, es notorio que en las ciudades donde existe una gran actividad económica, tienden a incrementar su población, las vías de comunicación, y el derribe de vegetación nativa, y esto puede conducir a una desertificación, principalmente en las zonas con características áridas o semiáridas, y también a posibles incrementos de la temperatura. Las formas en que se puede encontrar el MP puede ser líquida (aerosoles) y sólida, ya sea como polvo, cenizas, hollín, partículas metálicas, cemento, polen, entre otras<sup>4</sup>. Las partículas pueden contener hidrocarburos aromáticos policíclicos (PHAs), compuestos conocidos por su actividad genotóxica, mutagénica y/o carcinogénica, sulfatos, nitritos y algunos metales como As, Cd, Fe, Zn, Cr, Cu, Al. V, Ni y Pb<sup>5</sup> así como amoníaco, polvo de minerales, cenizas metálicas y agua. El contenido de estas partículas puede producir reacciones químicas secundarias en la atmósfera.

De acuerdo al tamaño de las partículas se puede dividir en partículas suspendidas totales (PST) y en las partículas respirables (PR). Las primeras son partículas con diámetro aerodinámico superior a los 10 µm, y pueden ser emitidas por la erosión del suelo y las actividades agrícolas. Las PR son aquellas que tienen un diámetro aerodinámico igual o inferior a los 10 µm, y se les denomina PM10, y las PM2.5, las de diámetro inferior o igual a los 2.5 µm, es decir, son 100 veces más delgadas que un cabello humano. Cada tipo de partículas está compuesto de diferente material y puede provenir de diferentes fuentes. En el caso de las PM2.5 su origen es, principalmente, de fuentes antropogénicas como las emisiones de los vehículos a diésel, mientras que, las partículas de mayor tamaño pueden tener en su composición un importante componente de tipo natural, como partículas de polvo<sup>4</sup>. Las PM2.5 ingresan al tracto respiratorio, pasan a través de la tráquea y se depositan en los alveolos pulmonares por ser muy finas<sup>6</sup>, posteriormente pueden entrar hasta el torrente sanguíneo<sup>7</sup>. La Organización Mundial de la Salud en un comunicado de prensa, en el 2016, informó que unas 12.6 millones de muertes al año se deben a la insalubridad del medio ambiente, causada esencialmente por emisiones antropogénicas, esto representa 234 más muertes al año que las provocadas por conflictos armados en el mundo.

El Estado de Aguascalientes se encuentra ubicado en el centro de México, colinda al norte, noreste y oeste con Zacatecas, al Sureste y Sur con Jalisco. Las coordenadas geográficas extremas son al Norte 22° 27', al Sur 21° 38' de Latitud Norte; al Este 101° 53', al Oeste 102° 52' de Longitud Oeste<sup>8</sup>. Cuenta con una población de 1'312,544 habitantes, y ocupa el quinto lugar en densidad poblacional con 234 habitantes/km<sup>2</sup>, después de la Ciudad de México, Estado de México, Morelos y Tlaxcala<sup>9</sup>. En relación a su actividad económica en el Estado, la industria manufacturera y automotriz se vio incrementada entre el 2016 y 2017. Y la carga vehicular tuvo un aumento del 5% del 2015 al 2016 (516,274 a 543,800), y en el municipio de Aguascalientes fue del 5%, pasando de 383,303 a 402,249<sup>10</sup>. Aunado a las diversas actividades industriales también se cuenta con la producción de ladrillo de forma artesanal, en donde existe la quema de diversos materiales: madera, madera barnizada, en algunas ocasiones llantas, textiles y madera con barniz, entre otros materiales que pueden ocasionar una gran gama de productos de la combustión diferentes al dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>).

### PARTE EXPERIMENTAL

Para la elaboración de este estudio se contó con la base de datos de la estación de monitoreo de la calidad del aire perteneciente a la Red Universitaria de Observatorios Atmosféricos de la Universidad

Nacional Autónoma de México (RUOA-UNAM-UAA), ubicada en el campus norte de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA). Se recopiló los registros de las partículas PM2.5 y PM10, de forma horaria, diaria y anual. El análisis de la base de datos fue de acuerdo a la NOM-025-SSA1-2014<sup>12</sup>. El cálculo del promedio diario, considerando 24 horas de cada día, se requirió un mínimo de 75% de las concentraciones horarias válidas (18 registros). Para el cálculo del promedio anual se requirió de un mínimo de datos en 1 año calendario. Este mínimo se evalúa a partir de la cantidad de muestras de 24 horas válidas obtenidas en cada uno de los 4 trimestres del año. Para cada trimestre se requirió un mínimo de 75% de muestras válidas. La validación del año se hizo al contar con al menos 3 trimestres válidos. Los meses considerados durante la primavera fueron del 21 de marzo al 21 de junio, y para el invierno del 21 de diciembre al 21 de marzo.

La dispersión de las partículas se analizó a partir de la elaboración de las rosas de los vientos empleando el software wrplot v. 5-3-0 (http://wrplot-view-freeware-v-5-3-0.software.informer.com/)

#### RESULTADOS

En la figura 1 podemos observar que la mayor concentración de las partículas, tanto PM10 como PM2.5, fue durante el invierno y la primavera. Y de acuerdo a los registros de la RUOA en el mes de mayo se incrementó la concentración de las partículas PM10 y PM2.5. En temporada de primavera (Marzo - Junio) la concentración máxima de PM2.5, en mayo del 2016, fue de 19  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>, y en el 2017, de 29  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>, 52.6% superior. Y en la temporada de invierno (Diciembre - Marzo) las concentraciones de este MP fueron también elevadas, pero ligeramente inferiores, comparadas con las de primavera. Las concentraciones de PM2.5 en invierno fueron de 15  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>, en febrero del 2016, y de 21  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>, en el mismo mes en 2017.

Con respecto a las PM10 (Figura 1), incrementaron en la temporada de invierno, se mantuvieron en el mes de marzo y en los meses consecutivos alcanzaron la máxima en el mes de mayo subiendo 10  $\mu$ g.m-<sup>3</sup> (de 39 a 49  $\mu$ g.m-<sup>3</sup>, sobre pasando el límite horario), en los meses de invierno el promedio horario se mantuvo entre 38 y 40  $\mu$ g.m-<sup>3</sup>, siendo un 12% mayor que en el invierno anterior, por lo que son menor e igual al límite permisible.

Este comportamiento puede ser debido, como menciona Díaz y Páez<sup>13</sup>, a que en primavera y en el invierno, no hay un gran flujo de viento, y existe escasez de lluvia; y en invierno aunado a las condiciones mencionadas también pueden existir bajas temperaturas, todos estos factores meteorológicos impiden la dispersión de las partículas. Estos factores, más sabiendo que Aguascalientes se encuentra a una altura de 1.8888 MSNM, la disminución de la presión del aire provocan el limitado ingreso de oxígeno al motor, causando que un vehículo contamine más en ciudad con más altura<sup>11</sup>.

Las concentraciones diarias de las PM2.5 en el mes de abril y mayo del 2017 fueron inferiores a los 45  $\mu$ g.m<sup>-3</sup> marcados por la NOM<sup>12</sup>. Determinando su promedio anual (figura 2), en el 2017, la concentración de PM2.5 sobrepasaron en un 44%, a lo marcado por la NOM (12  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>)<sup>12</sup>, pasando de 15.2  $\mu$ g.m<sup>-3</sup> en el 2016, a 17.6  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>.



Figura 1. Comportamiento temporal de las PM10 10 y PM2.5 en el municipio de Aguascalientes durante el 2016 y el 2017.

El análisis anual de las concentraciones de las PM10 (figura 2) mostró que no se rebasó a la NOM<sup>12</sup> la cual marca un promedio anual de 40  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>. Sin embargo, si hubo un incremento en la concentración de PM10 del 2016 al 2017, de 27.9  $\mu$ g.m<sup>-3</sup> a 33  $\mu$ g.m<sup>-3</sup>, respectivamente.

El incremento en las concentraciones de MP pudo deberse a un aumento en la carga vehicular y las actividades industriales en el municipio de Aguascalientes. Se puede mencionar que en el 2016 hubo un total de 144 obras, y en el 2017, 158 obras públicas, entre ellas ampliaciones, rehabilitaciones, construcciones, etc. (GOBIERNO AGUASCALIENTES, 2016 y 2017) Lo que da una visión con respecto al crecimiento de la ciudad y sus actividades en los diferentes sectores.



Figura 2. Concentraciones anuales de las PM10 10 y PM2.5 en el municipio de Aguascalientes para el año 2016 y el 2017.

La elaboración de la rosa de los vientos permitió ver la dominancia de los vientos (Figura 3 y 4), durante las épocas de primavera e invierno, y la posible vía de dispersión del MP. Se puede mencionar que es altamente probable que las partículas se dispersaron en las direcciones de NNE hacia el SSW, y del E hacia el W (figura no mostrada).



Figura 3. Dispersión de las PM2.5 en el 2016. 2016.



ESE



# **CONCLUSIONES**

La concentración de las PM2.5 en la época de primavera e invierno presentaron una mayor concentración, comparada con las otras épocas del año, lo que permite inferir que es altamente probable que la lluvia sea un factor importante en la deposición húmeda de las partículas, y no por deposición seca.

De acuerdo a la serie de tiempo para las PM2.5, las concentraciones anuales sobrepasaron lo marcado por la NOM-025-SSA1-2014, y hubo un incremento en su concentración del 2016 al 2017.

Las concentraciones de PM10 calculadas anualmente no rebasaron a la NOM-025-SSA1-2014, pero si para el caso de los cálculos horarios en los meses de Abril, Mayo y Diciembre.

Las concentraciones de las PM2.5 y PM10 incrementaron del 2016 al 2017, indicando el incremento en las actividades productivas, entre ellas de la construcción y automotriz en el municipio de Aguascalientes.

La dispersión de las partículas, las PM10 y PM2.5, es altamente probable en las direcciones Este hacia Oeste y de NNE hacia el SSW, y del Este hacia el Oeste, este comportamiento en ambos años. El desarrollo económico constante en el que está inmerso el Estado de Aguascalientes, y el municipio capital, con un total de 302 obras de construcción en los 24 meses de estudio, además de la carencia de respeto hacia el ambiente, es altamente probable que provoque un aumento en la concentración del material particulado y su tiempo suspendido en la atmósfera.

Es altamente probable que la presencia de las concentraciones de MP encontrados en este estudio puedan tener alguna repercusión en la salud humana de la población de Aguascalientes.

# **BIBLIOGRAFÍA**

1. Campos, R. Gómez, L. J. Licon, J. Carrillo, E. Ramírez, E.F. Herrera, "Monitoreo de contaminantes atmosféricos en la ciudad de Chihuahua (Norte de México) como una herramienta para la gestión de la calidad del aire", Revista Latinoamericana de Recursos Naturales, Vol. 4, 3, 2008, pp. 357-366.

- M. García, H. Ramírez, H. Ulloa, S. Arias, A. Pérez, "Las inversiones térmicas y la Contaminación atmosférica en la zona Metropolitana de Guadalajara (México)", Investigaciones geográficas, 58, 2012, pp. 9 – 29.
- 3. G. Salini, E. Medina, "Estudio sobre la dinámica temporal de material particulado PM10 emitido en Cochabamba, Bolivia", Rev. Int. Contam. Ambie., Vol. 33, 3, 2017, pp. 437-448.
- Linares, y Díaz, J., "Las PM2.5 y su afección a la salud", El ecologista, Vol. 58, 2008, pp. 46-49.
- Quijano Parra, M. J. Quijano Vargas, J. A.Henao Martínez, "Caracterización fisicoquímica del material particulado fracción respirable PM2.5 en Pamplona-Norte de Santander, Colombia". Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas, Vol. 24, 2, 2010, pp. 37-46.
- R. Rojano, L. Angulo, G. Restrepo, "Niveles de Partículas Suspendidas Totales (PST), PM10 y PM2.5 y su relación en lugares públicos de la Ciudad Riohacha, Caribe Colombiano", Información Tecnológica, Vol. 24, 2, 2013, pp. 37-46.
- J. H. Gutiérrez Jaimes, M.J. Quijano Vargas, A. Quijano Parra, "Monitoreo y caracterización fisicoquímica del material particulado PM2.5 en Cúcuta-Norte de Santander-Colombia", Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas, Vol. 10, 1, 2012, pp. 24-38.
- 8. Gobierno del Estado de Aguascalientes. Consultado el 25 de abril, 2018. http://www.aguascalientes.gob.mx/estado/ubicacion.html
- 9. Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Consultado el 25 de abril, 2018. http://cuentame.inegi.org.mx/monografias/informacion/ags/poblacion/default.aspx?tema=me&e=01
- 10. Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Consultado el 25 de abril, 2018. http://www.inegi.org.mx/lib/olap/consulta/general\_ver4/MDXQueryDatos.asp?#Regreso&c=
- 11. G. Salini, E. Medina, "Estudio sobre la dinámica temporal de material particulado PM10 emitido en Cochabamba, Bolivia", Rev. Int. Contam. Ambie. Vol. 33, 3, 2017, pp. 437-448.
- 12. Norma Oficial Mexicana NOM-025-SSA1-2014. Salud ambiental. Valores límite permisible para la concentración de partículas suspendidas PM10 y PM2.5 en el aire ambiente y criterios para su evaluación.
- 13. V. Díaz, C. Páez, "Contaminación por material particulado en Quito y caracterización química de las muestras", Acta Nova-Quito, Ecuador, Vol. 3, 2, 2006, pp. 308-322.

# ESTIMACIÓN DEL FLUJO DE NEUTRINOS EXTRA-SOLARES PROVENIENTES DE LA ESTRE-LLA ARCTURUS

Santiago Arceo Díaz<sup>1</sup> y Kai Zuber<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Colima, <sup>2</sup>Technische Universitat Dresden.

#### RESUMEN

Este trabajo explora la probabilidad de detección de neutrinos de fusión provenientes desde una estrella diferente al Sol, al contrastar las predicciones de un código de evolución estelar contra la sensibilidad de los telescopios de neutrinos, actuales y futuros, dentro de la vecindad solar. El catálogo Gliese fue utilizado para identificar las fuentes estelares de neutrinos más probables dentro de la vecindad solar, definida como una distancia de 12 PC. Solo se consideraron estrellas, con una masa superior a 0.5 masas solares, debido a los fluios intrínsecos de neutrinos predichos por los modelos. De todos los candidatos, la estrella Arcturus se identificó como la que aporta el flujo de neutrinos más elevado, en base a las predicciones teóricas, hechas mediante modelos producidos con un código de evolución estelar para reproducir las propiedades observables, y el módulo de la distancia entre el sistema solar y cada posible fuente. El flujo intrínseco de Arcturus puede traducirse a cerca de 12 neutrinos por centímetro cuadrado (un valor cerca de 9 órdenes de magnitud menor que el flujo de neutrinos provenientes del Sol) y es casi el triple que el del segundo mejor candidato. El flujo esperado de neutrinos desde cualquier estrella en la vecindad solar es tan bajo que deja fuera cualquier posibilidad de detección con los telescopios de neutrinos actuales, como súperkamiokande o Ice-Cube. La identificación de neutrinos extra-solares requerirá que la futura generación de telescopios de neutrinos pueda proveer información direccional de la fuente y una sensibilidad mucho mayor que la actual (haciendo que los próximos telescopios, aquellos con volumen de detección esperado de una mega-tonelada de agua, como el detector Ying-Ping, Hyperkamiokande y LENA, sean los mejores candidatos).

#### INTRODUCCIÓN

La astronomía de neutrinos ha crecido enormemente en las últimas dos décadas y ahora es un campo bien establecido dentro de la astrofísica de partículas. La detección de los neutrinos solares en tiempo real, gracias tanto a la medición directa de los neutrinos producidos por las reacciones protón-protón (Bellini et al., 2014), p-e-p (Bellini et al., 2012, <sup>7</sup>Be (Bellini et al., 2011), <sup>8</sup>B (Aharmim et al, 2013; Abe et al., 2016; Bellini et al., 2010) así como a las observaciones radio-químicas que utilizan <sup>37</sup>Cl(Cleveland et al., 1998), y <sup>71</sup>Ga (Hampel et al., 1999; Abdurashitov et al., 2009) como un blanco, han hecho de la producción de la energía solar un campo experimental. Aún más, ahora que el problema de los neutrinos solares ha sido resuelto, se sabe que la conversión de sabores de neutrinos sucede continuamente en el Sol. La observación de neutrinos durante el evento SN 1987A (Bionta et al., 1987; Hirata et al., 1987; Alekseev et al., 1988) confirmó las teorías existentes sobre el papel de los neutrinos en las explosiones de supernovas. Recientemente, el detector de neutrinos ICECUBE detectó neutrinos altamente energéticos, provenientes de fuentes extra-galácticas (Aarsten et al., 2013). Los límites experimentales en cantidades como el fondo de neutrinos de supernovas han llegado a sensibilidades del orden de 2-3 eventos por cm<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup> (Bays et al., 2015). La siguiente generación de detectores subterráneos, Hyper-kamiokande, un detector de 1 megatonelada de aqua que se basa en la reacción Cherenkov (Abe et al., 2015), JUNO y RENO-50, detectores de 20 kilo-toneladas con líquido scintilador (An et al., 2016; Kim et al., 2017) y un potencial detector a gran escala en Yin-Ping (Beacom et al., 2017) podrían permitir detectar fuentes de

neutrinos débiles, distintas al Sol. El objetivo de este trabajo es explorar la posibilidad de detectar neutrinos de la fuente estelar más potente dentro de la vecindad de 12 PC del Sol. De todos los posibles candidatos, Arcturus, también conocido como Alfa Boötis, es la fuente de neutrinos más importante. Abajo se detalla el proceso de identificación de la fuente de neutrinos extra-solares más importante en la vecindad solar, sus características físicas, de acuerdo a los modelos estelares computacionales y la posibilidad de detección.

## TEORÍA

Los neutrinos se producen en el Sol gracias a las diferentes reacciones que conforman la cadena protón-protón (Prialnik, 2009). A grandes rasgos, esta secuencia de reacciones nucleares fusiona cuatro protones para crear un núcleo de Helio, fotones (la luz que emite el Sol desde su centro), positrones (que son aniquilados rápidamente dentro del interior solar) y neutrinos (que pueden escapar libremente del Sol, proveyendo evidencia directa de que la fusión de Hidrógeno es la principal fuente de energía del Sol). Tres de las reacciones dentro de las distintas ramas de la cadena protón-protón son responsables de la creación de neutrinos, producidos a distintas tasas y con energías específicas: la fusión de PP-1 que crea neutrinos con una energía promedio de 0.26 MeV, la fusión de <sup>7</sup>Be para crear <sup>7</sup>Li, produciendo neutrinos con una energía promedio de 0.814 MeV y la fusión de <sup>8</sup>B a <sup>8</sup>Be que libera neutrinos con energía mucho más alta, 6.710, aunque es una reacción con la tasa de ocurrencia mucho más baja que los demás (ver Bahcall, 2004 para más detalles sobre las reacciones de la cadena protón-protón).

La principal fuente de energía en estrellas como Arcturus es la fusión de hidrógeno mediante el ciclo Carbono-Nitrógeno-Oxigeno (también llamado ciclo CNO). En este proceso los tres elementos son utilizados como catalizadores en una secuencia de reacciones que permite que cuatro protones se fusionen la crear un núcleo de Helio, liberando fotones, positrones y neutrinos como subproductos. Tres de las reacciones que ocurren en el ciclo CNO pueden producir neutrinos: la transición de un núcleo de <sup>13</sup>N a <sup>13</sup>C, de <sup>15</sup>O a <sup>15</sup>N y de <sup>17</sup>F a <sup>17</sup>O, produciendo neutrinos con energías promedio de 0.706, 0.996 y 0.999 MeV (Prialnik, 2009). Cabe mencionar que, aunque el ciclo CNO también ocurre en el Sol, la su contribución a la energía producida es menor al 2%, debido a que la dependencia en la temperatura de las reacciones que lo conforman es mucho mayor que las de la cadena protón-protón. Sin embargo, en Arcturus, la temperatura en la región al rededor del núcleo de helio, en la cual el hidrógeno se fusiona es mucho más alta, haciendo que la tasa de producción de neutrinos debido al ciclo CNO sea la mucho mayor que la de la cadena protón-protón (ver las últimas líneas en la tabla 1).

Los modelos computacionales presentados en este trabajo se construyeron con una versión actualizada del código numérico desarrollado originalmente por Eggleton (Eggleton 1971). Este código simula la evolución estelar, partiendo de un modelo inicial en el que la estructura interna de la estrella se divide en 200 puntos en los cuales se miden 11 variables físicas de control y después resuelve las ecuaciones de estructura estelar, las de producción y pérdida de energía y las que calculan la variación en la composición química, respecto al tiempo, aplicando el algoritmo de Newton-Raphson, bajo 2 posibles elecciones: un intervalo de tiempo posterior a la edad inicial o después de que una de las variables de control varíe en un porcentaje bien definido, respecto a su valor inicial. El código de Eggleton ha sido probado en múltiples escenarios astrofísicos relevantes (ver por ejemplo Schröder et al., 1997), es capaz de simular la evolución completa de una estrella, con cualquier masa y composición química, desde la secuencia principal hasta la fase de enana blanca, con relativa rapidez. Además, ha sido comparado con códigos más modernos, como el código Princeton-Goddard-PUC (Valcarce et al., 2012), dando un buen grado de coincidencia en los valores predichos, tal como se muestra en Arceo et al. (2015a).

La presente versión del código de Eggleton está basada en la ecuación de estado de Pols et al. (1995), las tasas de reacciones nucleares propuestas por Caughlan y Fowler (1985) y las de conductividad de electrones publicadas por Itoh et al. (1983). Adicionalmente, se han realizado modificaciones de acuerdo al trabajo de Chen y Tout (1996), para incluir las tablas de opacidad OPAL96 (Iglesias y Rogers, 1996). En cuanto a las reacciones térmicas que producen neutrinos, se han considerado tres casos: la reacción fotón-neutrino, la reacción Bremsstrahlung y el decaimiento de plasmones. Para calcular la pérdida de energía, se han utilizado tablas numéricas construidas a partir de las fórmulas analíticas de Itoh et al. (1992), para las dos primeras reacciones, y las de Haft et al. (1994) para el decaimiento de plasmones en neutrinos (de la secuencia principal hasta el término de la fase de gigante roja), y Kantor y Gushakov (2007) para las fases posteriores, ya que cada una muestra un mayor grado de precisión en tales intervalos en la evolución estelar.

Una simulación del Sol, tomando Z=0.02 como la metalicidad, resulta en una estimación para la densidad y temperatura del núcleo de □c=1.62 y Tc=15.76 (en unidades de 10<sup>2</sup> g y 10<sup>7</sup> °K), una diferencia de menos del 1% respecto a los modelos solares estándar [27,28]. Para todos los modelos mostrados en este trabajo la temperatura efectiva, radio y luminosidad difieren de sus estimaciones
observacionales en menos del 5%, siendo la temperatura efectiva la que usualmente muestra la mayor desviación.

#### PARTE EXPERIMENTAL

Las fuentes de neutrinos cercanas al Sol más importantes serán aquellas estrellas más cercanas, ya que el flujo disminuye proporcionalmente al cuadrado de la distancia. Para nuestro análisis, la vecindad solar fue restringida a menos de 12 Parsecs. La mayoría de las estrellas dentro de esta "vecindad solar" son enanas rojas (aproximadamente 215 de 312, ver figura 1), de acuerdo al catálogo Gliese (Gliese 1991), y aportan una cantidad despreciable al número de neutrinos extrasolares que pueden llegar a la Tierra. Como una condición para que las estrellas cercanas fueran consideradas como fuentes de neutrinos importantes se puso como requisito que la luminosidad de neutrinos tuviera un mínimo del 10% de la luminosidad solar. De acuerdo a, las simulaciones hechas y la correlación propuesta en Habets & Heintze (1981) entre la luminosidad bolométrica y la masa, cualquier estrella en secuencia principal con una magnitud visual menor que 18 puede ser considerada como una fuente de neutrinos importante y esto a su vez puede correlacionarse a una masa de alrededor de 0.6 masas solares (el valor exacto dependiendo de la metalicidad: 0.63 masas solares para Z=0.001 y 0.59 masas solares para Z=0.02). Este límite se representa en la figura 1 como la línea roja punteada.



Figura 1. Estrellas ubicadas a una distancia de 12 PC dentro de la vecindad solar. Los símbolos marcan aquellas fuentes que tienen una masa superior al límite mencionado (ver texto).

De todas las estrellas que se consideraron, la fuente más prometedora de neutrinos extra-solares es Arcturus, su flujo triplica al segundo mejor candidato. A continuación, se describen las características conocidas de esta estrella y cómo es que las reacciones nucleares en su interior le otorgan su brillo e indirectamente la convierten en la fuente estelar más importante para la producción de neutrinos fuera del sistema solar.

#### RESULTADOS

Arcturus es la estrella más brillante de la constelación de Boötes, que a su vez es la constelación más brillante del hemisferio norte, a una distancia aproximada de 11.23 Parsec (van Leeuwen, 2007). Esta estrella está clasificada como una gigante amarilla tipo KOIII, con una temperatura efectiva de fotósfera estimada en alrededor de 4280 °K (Ramírez y Allende, 2011, ver tabla 1) y tiene una magnitud aparente en el rango visible del espectro electromagnético de -0.05 (Ducati 2002).

De acuerdo con la teoría estándar de evolución estelar, la clase espectral de Arcturus y su brillo corresponden a los de una sub-gigante anaranjada, una estrella que recién ha comenzado el ascenso en la rama de las gigantes rojas. Este ascenso implica una expansión del radio estelar que ha permitido que el radio actual de Arcturus se haya incrementado hasta 25.4 veces el radio actual del sol (Ramírez y Allende, 2011), cuando originalmente su radio debió ser ligeramente menor

(alrededor de 0.96 veces). La edad estimada para Arcturus, 7.1 Giga-años (Ramírez y Allende, 2011), también concuerda con su clase espectral y radio, dándole el tiempo suficiente a una estrella con una masa de 1.08 veces la masa solar (Ramírez y Allende, 2011) para completar su secuencia principal, contraerse y reiniciar la fusión de hidrógeno en las regiones que rodean al núcleo de helio inerte.

Para ajustarse a la evidencia observacional existente, fue creada una malla de modelos que usaron como base la información disponible: modelos en un rango de masas entre 1.02 y 1.13 <sub>M Sol</sub> y que, al alcanzar la temperatura efectiva, radio y luminosidad, dentro de la incertidumbre estimada, tuvieran una edad similar a la estimada para Arcturus. Estos modelos se muestran en la figura 2.



Figura 2: En el panel izquierdo se muestra la sección dentro del diagrama HR de los modelos utilizados para representar a Arcturus que coinciden con la incertidumbre observacional (ver texto). De todos estos modelos el que posee el mejor ajuste es aquel con Mi=1.08 M Sol y X=0.74 (encerrado en el círculo rojo), todos los otros modelos que están cerca de esta región de mejor ajuste tienen edades fuera del rango estimado para la edad de la estrella. En el panel derecho se muestra el diagrama HR para Arcturus.

Todos los modelos tienen una metalicidad Z=0.01 y cada color corresponde a un contenido inicial específico de hidrógeno: rojo para 0.68, verde para X=0.71 y azul para X=0.74. Los símbolos corresponden a masas iniciales distintas: símbolo de suma para modelos con una masa inicial de  $1.02 \text{ }_{M \text{ Sol}}$ , asterisco para M<sub>i</sub>=1.06M<sub>Sol</sub>, triángulo hacia arriba para 1.08 M sol y triángulo hacia abajo para M<sub>i</sub>=1.13M<sub>Sol</sub> (panel derecho en la figura 2). De todos los modelos, los más cercanos son los que tienen M<sub>i</sub>=1.13M<sub>Sol</sub>, X=0.74 y M<sub>i</sub>=1.08 M <sub>Sol</sub> y X=0.74. Sin embargo, solo este último alcanza los valores deseados para los parámetros observables en una edad que queda dentro del rango estimado para Arcturus. El diagrama HR se muestra en el panel izquierdo de la figura 2 y revela como la estrella se encuentra a cerca de la mitad de su ascenso por la primera rama de las gigantes rojas (aunque ya que el incremento en la luminosidad no crece de forma linear conforme la estrella asciende, la luminosidad actual es mucho menor del valor que se estima para el punto más alto en la rama, cerca de 2700 veces la luminosidad bolométrica del Sol).



Figura 3: Espectro estimado para Arcturus, comparado con el espectro solar, si la estrella se ubicara a una unidad Astronómica de la Tierra. Si tal fuera el caso, el flujo de neutrinos producidos por la reacción PP-I, sería varias veces mayor que las del Sol, mientras que el flujo de neutrinos resultante de las reacciones CNO sería varios ordenes de magnitud mayor.

Las características físicas del modelo que mejor se ajusta a Arcturus se muestran en la tabla 1. Tanto la temperatura como la densidad estimada para el interior de la estrella coinciden con las condiciones necesarias para que el ciclo CNO pueda ocurrir en una región circundante al núcleo de Helio (ver las líneas correspondientes en la tabla 1). Mientras que, la contribución de las reacciones de la cadena protón-protón al flujo intrínseco de neutrinos dentro de la estrella no llega ni al 0.1 por ciento (y las de los neutrinos térmicos apenas aportan el 0.01%), las reacciones del ciclo CNO ya mencionadas proveen cerca del 99% del flujo total. Esto representa una clara diferencia respecto a lo que ocurre en el núcleo solar, donde las proporciones están invertidas.

| Tabla 1. Comparación entre los datos observacionales para Arcturus (primeras 4 líneas, ver el | texto |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| para las referencias) y características del modelo que mejor se ajusta a estos datos.         |       |

| Observables                              |                        |
|------------------------------------------|------------------------|
| Edad [10 <sup>9</sup> años]              | 7.1±1.5                |
| Masa [Masa solares]                      | 1.08±0.06              |
| Temperatura efectiva [K]                 | 4286±30                |
| Luminosidad bolométrica [Lum. solar]     | 170                    |
| Radio [Radio solar]                      | 25.7±0.3               |
| Modelos                                  |                        |
| Edad [10 <sup>9</sup> años]              | 8.35                   |
| Masa [Masa solares]                      | 1.08                   |
| Temperatura efectiva [K]                 | 4271                   |
| Luminosidad bolométrica [Lum. solar]     | 170                    |
| Radio [Radio solar]                      | 23.9                   |
| Temperatura central [K]                  | 4.4065x10 <sup>6</sup> |
| Densidad central [g cm <sup>-2</sup> ]   | 3.265x10⁵              |
| Lum. neutrinos [Lum. Solar de neutrinos] | 2715                   |
| Lum. de neutrinos de pp [% del total]    | 0.08                   |
| Lum. de neutrinos de CNO [% del total]   | 99.01                  |
| Lum. de neutrinos térmicos [% del total] | 0.01                   |

El flujo intrínseco de Arcturus puede calcularse si se integra numéricamente la derivada de la tasa de ocurrencia de cada reacción que produzca neutrinos, desde r=0 hasta el radio de la fotósfera. Haciendo esto mediante el método trapezoidal permite estimar el flujo intrínseco de Arcturus en cerca de 1.75x10<sup>41</sup> ■ s<sup>-1</sup> cm<sup>-2</sup>. Las reacciones correspondientes a la fusión de <sup>13</sup>N a <sup>13</sup>C (49.93 %), de <sup>15</sup>O a <sup>15</sup>N (49.97 %) y de <sup>17</sup>F a <sup>17</sup>O (0.06%) dominan el flujo total. Las demás reacciones presentan una contribución muy pequeña. Sin embargo, debido a que este flujo es cerca de tres órdenes de magnitud mayor que el del Sol, aún estas pequeñas contribuciones serían comparables con las del Sol si Arcturus se encontrara en su lugar, a una distancia de una unidad astronómica de la Tierra. Esto puede apreciarse en la figura 3, en la que se compara el espectro solar de neutrinos con el que podría ser el de Arcturus si el del Sol se re-escalara hasta coincidir con el flujo intrínseco de la gigante roja. Aún las reacciones más débiles alcanzan niveles comparables con los de sus contrapartes solares (a excepción de las reacciones <sup>7</sup>Be, que tiene niveles comparables y la reacción p-e-p que tiene una tasa de reacción que puede considerarse nula a fines prácticos). El flujo esperado en la Tierra se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Flujo de neutrinos proveniente de Arcturus. La primera columna muestra el flujo intrínseco de la estrella, en unidades de neutrinos por segundo. La segunda columna muestra cual sería el flujo de neutrinos detectado en la Tierra (en unidades de neutrinos por segundo por centímetro cuadrado). La tercera columna corresponde a la predicción del flujo real que debería detectarse en la Tierra.

| Fuente   | Flujo intrínseco      | Flujo (1AU)                          | Flujo real                           |
|----------|-----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
|          | [ns <sup>-1</sup> ]   | [ns <sup>-1</sup> cm <sup>-2</sup> ] | [ns <sup>-1</sup> cm <sup>-2</sup> ] |
| Arcturus | 1.75x10 <sup>41</sup> | 6.23x10 <sup>13</sup>                | 11.54                                |

El flujo intrínseco de Arcturus (primera columna) es cerca de tres órdenes de magnitud mayor al del Sol ( $5.6 \times 10^{10} \text{ v} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ ), la segunda columna muestra cual sería el flujo de neutrinos desde Arcturus si la estrella se encontrara a una unidad Astronómica de la Tierra. La mayor contribución al flujo de la estrella proviene de los neutrinos creados por las reacciones del ciclo CNO. Debido a la distancia a la que se encuentra (11.23 Parsec) el flujo real de Arcturus en nuestro planeta se reduce drásticamente, llegando apenas a cerca de los  $12 \text{ v} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$  y, aunque es una cantidad pequeña, este se encuentra dentro de los límites de detección que el Super-Kamiokande ha logrado para la detección del fondo de neutrinos provenientes de super-novas.

#### CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es explorar la posibilidad de detectar neutrinos de la fuente estelar más potente dentro de la vecindad de 12 PC del Sol. Debido a que los neutrinos emitidos por el Sol presentan una señal mucho mayor, se requerirá de información direccional que permitan distinguir a los neutrinos provenientes de Arcturus. Si se consideran neutrinos con energía mayores a 5MeV no habrá interferencia posible con los neutrinos solares, con una energía típica mucho menor. Periodos de observación en el que el Sol se encuentre cerca de estas estrellas podrían rechazarse aquellos neutrinos más energéticos

#### BIBLIOGRAFÍA

- 1. A. R. Valcarce, M. Catelan, A. V. Sweigart, "Effects Of Helium Enrichment In Globular Clusters", A & A 547, 2002, A5.
- 2. Aharmim et al., "Combined analysis of all three phases of solar neutrino data from the Sudbury Neutrino Observatory", Phys. Rev. C 88, 2013, 025501.
- 3. T. Cleveland et al., "Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector", ApJ 496, 1998, 505.
- 4. A. Iglesias & F. J. Rogers, "Updated Opal Opacities", Astrophys. J. 464, 1996, 943.
- 5. Prialnik, (2000), "An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution. 1st ed.", Cambridge University Press. ISBN : 0-521-65937-X.
- 6. M. Kantor, M. E. Gusakov, "The neutrino emission due to plasmon decay and neutrino luminosity of white dwarfs", MNRAS 381, 2007, 1702.
- 7. E. N. Alekseev et al., "Detection of the neutrino signal from SN 1987A in the LMC using the INR Baksan underground scintillation telescope", Phys. Lett. B 205, 1998, 209.
- 8. An et al., Journal of Physics G 43, 03401 (2016)
- 9. F. Van Leeuwen, "Validation of the new Hipparcos reduction". Astronomy and Astrophysics. 474, (2007), 653–64
- 10. Bellini et al.,"Neutrinos from the primary proton-proton fusion process in the sun", Nature 512, 2014, 383.
- 11. G. Bellini et al., "Measurement of the solar 8B neutrino rate with a liquid scintillator target and 3 MeV energy threshold in the Borexino detector", Phys. Rev. D 82, 2010, 033006.
- 12. G. Bellini et al., "Precision Measurement of the 7Be Solar Neutrino Interaction Rate in Borexino", Phys. Rev. Lett. 107, 2011, 141302.
- 13. G. Bellini et al., "First Evidence of pep Solar Neutrinos by Direct Detection in Borexino", Phys. Rev. Lett. 108, 2012, 051302.

- 14. G. M. H. J. Habets and J. R. W. Heintze, Astro. and Astrophys. Suppl. 46, 1981,193.
- 15. G. R. Caughlan, G. R., W. A. Fowler, M. J. Harris, & B. A. Zimmerman, 1985, Atomic and Nuclear Data T., 32, 197.
- 16. Ramírez; C. Allende Prieto, "Fundamental Parameters and Chemical Composition of Arcturus". The Astrophysical Journal. 743 (2011), 135.
- 17. F. Beacom et al.,"Physics prospects of the Jinping neutrino experiment\*", Chin. Phys. C 41, 2017, 023002.
- 18. N. Abdurashitov et al., "Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. III. Results for the 2002–2007 data-taking period", Phys. Rev. C 80, 2009, 015807.
- 19. J. N. Bahcall, A. Serenelli, S. Basu, "New solar opacities, abundances, helioseismology, and neutrino fluxes", ApJ 621, 2005, L85.
- 20. J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, "What Do We (Not) Know Theoretically about Solar Neutrino Fluxes?", Phys. Rev. Lett. 92, 2004, 121301.
- 21. Abe et al., "Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-IV", Phys. Rev. D 94, 2016, 141302.
- K. Abe et al., "Physics potential of a long-baseline neutrino oscillation experiment using a J-PARC neutrino beam and hyper-Kamiokande", Prog. Th. Exp. Phys. 2015, 053C02.
- 23. K. Bays et al., Phys. Rev. D 85,2012, 052007.
- 24. K. S. Hirata et al., Phys. Rev. Lett. 58, 1987, 1490.
- 25. K.-P. Schröder, K, O. R. Pols, P. P. Eggleton, "A critical test of stellar evolution and convective core `overshooting' by means of zeta Aurigae systems", MNRAS 285, 1997, 696.
- K.-P. Schröder, M. Cuntz. "A critical test of empirical mass loss formulas applied to individual giants and supergiants". Astronomy and Astrophysics. 465 (2007), 593–601
- 27. G. Aartsen et al., Phys. Rev. Lett. 113, 2013, 101101.
- 28. Haft, G. Raffelt, A. Weiss, 1994, ApJ 425, 222.
- 29. Itoh, H. Mutoh, A. Hikita, Y. Koyama, 1992, ApJ 395, 622.
- 30. N. Itoh, S. Mitake, H. Iyetomi, S. Ichimaru, 1983, ApJ 273, 774.
- 31. R. Pols, C. A. & P. P. Eggleton, "Approximate input physics for stellar modelling", MNRAS 274, 1995, 964.
- 32. Eggleton, MNRAS, 151, 1971, 351.
- 33. Bionta et al., Phys. Rev. Lett. 58, 1987, 1494.
- 34. Arceo-Díaz, K. P. Schröder, K. Zuber, D. Jack, "Constraint on the magnetic dipole moment of neutrinos using the tipSRGB in ωSCentauri", Astroparticle Physics 70, 2015, 1.
- 35. B. Kim, Nuovo Cimento C 39, 2017, 317.
- W. Gliese, H. Jahreiss, The Astronomical Data Center CD-ROM: Selected Astronomical Catalogs, Vol. 1, (1991)
- 37. W. Hampel et al., Phys. Lett. B 447, 1999, 127.
- 38. X. F. Chen, C. A Tout, Chin. J. Astron. Astrophys. 7, 2007, 245250

#### DETECCIÓN DE CAMBIOS EN LA TEMPERATURA MÁXIMA DE TLAXCO TLAXCALA UTILI-ZANDO METODOLOGÍAS DE ANÁLISIS DE PUNTOS DE CAMBIO

Silvia Herrera Cortés, Bulmaro Juárez Hernández, Silvia\_mat83@yahoo.com.mx, bjuarez@fcfm.buap.mx Hugo Adán Cruz Suárez, Víctor Hugo Vázquez Guevara hcs@fcfm.buap.mx, vvazquez@fcfm.buap.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Av. San Claudio, Col. San Manuel, C.P. 72570, Puebla, Pue.

#### RESUMEN

El estudio y análisis de datos climatológicos, pueden detectar y evidenciar alteraciones en el clima, resultado de variabilidad natural o actividades antropogénicas. Una variación pequeña en la temperatura tiene consecuencias que incluyen desastres naturales catastróficos, de aquí la importancia de monitorear el comportamiento de los datos y establecer medidas que coadyuven a disminuir los impactos al ambiente y a la sociedad. Para los fines de este trabajo, se cuenta con registros semanales de la temperatura máxima de una estación climatológica ubicada en el municipio de Tlaxco-Tlaxcala, con la información se realizó un análisis de calidad de datos, un análisis descriptivo y el ajuste de modelos ARIMA antes y después de detectar puntos de cambio. Para identificar cambios en la media y varianza de la temperatura máxima, se aplicaron los métodos de segmentación Pruned Exact Linear Time (PELT), Binary Segmentation (BinSeg) y Segment Neighbourhood (SegNeigh) para identificar múltiples puntos de cambio y el método AMOC, para detectar sólo un punto de cambio. El método PELT, identificó 48 puntos de cambio para la media y 17 puntos de cambio para la varianza, el método BinSeq identificó 5 puntos de cambio para la media y 4 para la varianza, el método SegNeigh identificó 4 puntos de cambio para la media y la varianza, el método AMOC identificó un cambio en la semana 250 y 27 para la media y la varianza respetivamente. Debido a las segmentaciones resultantes, sólo se ajustaron modelos ARIMA después de aplicar los métodos AMOC y SegNeigh. Los métodos de segmentación aplicados están implementados en la paquetería changepoint del software R y no contemplan la estructura de la serie, se pretende comparar los resultados obtenidos en este estudio con metodologías que contemplen la estructura de la serie y den evidencia estadística de la existencia de puntos de cambio.

Palabras clave: Series de Tiempo, metodología Box-Jenkins, Puntos de cambio.

#### INTRODUCCIÓN

El estudio y análisis de datos climatológicos permite caracterizar y comprender el clima de una región, al mismo tiempo proporciona evidencia de posibles alteraciones en el clima ya sea por variabilidad natural o bien por actividades antropogénicas. Se sabe que una variación pequeña en la temperatura, tiene consecuencias que incluyen afectaciones en el ciclo del agua, alteraciones sobre la frecuencia de los eventos climatológicos normales además de hacer más catastróficos los desastres naturales, de aquí la importancia de monitorear y realizar el análisis del comportamiento de los datos para establecer políticas, en caso de ser necesario, que coadyuven a disminuir los impactos al ambiente y a la sociedad.

Se cuenta con datos de la temperatura máxima registrados en una estación climatológica ubicada en el municipio de Tlaxco-Tlaxcala, que está a cargo de Protección Civil del Estado de Tlaxcala y del Centro de Investigación en Cambio Climático de la Universidad Autónoma de Tlaxcala. Con los registros, se pretende detectar cambios en la temperatura máxima, mediante métodos de segmentación, para ello, se realizó un análisis de calidad de datos, se completaron datos perdidos mediante regresión lineal, se ajustaron modelos *ARIMA* aplicando la metodología de Box-Jenkins antes y después de identificar los puntos de cambio. Para el contraste de la bondad del ajuste de los modelos, se consideró el *Criterio de Información de Akaike*. La estructura de este documento es como sigue, primero se presenta la caracterización de la zona en estudio, el análisis descriptivo de la información y el ajuste de modelos *ARIMA* antes de aplicar los métodos de segmentación para detectar puntos de cambio, después se trabaja con el análisis de puntos de cambio utilizando los métodos Pruned Exact Linear Time (*PELT*), *Binary Segmentation (BinSeg)* y *Segment Neighbourhood (SegNeigh)* para identificar múltiples puntos de cambio y el método *AMOC* para detectar sólo un punto de cambio, los métodos mencionados, están implementados en la paquetería *changepoint* del software *R*.

#### Caracterización de la zona de estudio y análisis de calidad de los datos

El municipio de Tlaxco-Tlaxcala, se sitúa en un eje de coordenadas geográficas entre los 19 grados 37 minutos latitud norte y 98 grados 07 minutos longitud oeste. Colinda al norte con el estado de Puebla, al sur con los municipios de Atlangatepec, Tetla y Muñoz de Domingo Arenas, al oriente se establecen linderos con los municipios de Emiliano Zapata y Lázaro Cárdenas, asimismo al poniente colinda con el estado de Hidalgo y el municipio de Benito Juárez. El clima se considera templado subhúmedo con régimen de lluvias en los meses de junio a septiembre. Los meses más calurosos son de marzo a mayo. La dirección de los vientos en general es de norte a sur, igualmente la temperatura promedio máxima anual registrada es de 22.9 grados centígrados y la mínima de 5.3 grados centígrados. La precipitación promedio máxima registrada es de 122.5 milímetros y la mínima de 7.6 milímetros [20].

Figura 1: Ubicación geográfica del municipio de Tlaxco-Tlaxcala. Mapa extraído de INEGI.



La Comisión de Protección Civil del Estado de Tlaxcala y el Centro de Investigación en Cambio Climático de la Universidad Autónoma de Tlaxcala, proporcionaron información de 6 años (2 de septiembre de 2011 a 2 de septiembre de 2017) de una estación climatológica, ubicada en el centro del municipio de Tlaxco. La estación climatológica, registra cada media hora observaciones de variables como: Temperatura máxima, temperatura mínima, humedad exterior, velocidad del viento, dirección del viento, radiación solar, energía solar e índice de rayos UV.

Con esta información, se realizó un control general de los datos para verificar que las fechas no se repitieran, en este sentido se encontró que la estación duplicó los registros del 2 al 31 de mayo de 2015. Se aplicó un control de rango fijo para identificar observaciones imposibles, por ejemplo, se eliminó una temperatura máxima de 67°C en el mes de mayo de 2012 y una temperatura mínima de  $-1.5^{\circ C}$  en marzo de 2014, además se identificó que la temperatura mínima registrada siempre fuera menor que la temperatura máxima. La base de datos proporcionada, presentó un 8.19% de datos perdidos, los cuales se completaron por medio de regresión lineal, para ello, se agruparon los datos por año y se obtuvo la matriz de correlación, para estimar los datos perdidos de un año en particular se realizó un ajuste de regresión lineal con el año cuya correlación fue mayor y que además contara con los registros en las fechas que faltaban en el año al que se le iba a realizar el ajuste de regresión. Para un mejor manejo de la información, se realizó un programa en *R* que calcula la temperatura máxima por semana, en la Figura 2, se presenta el histograma mencionado así como el ajuste de una densidad normal y un ajuste de la densidad con la metodología Kernel.





Motivados por el interés de describir el comportamiento de la temperatura máxima de la región en estudio se realizó un gráfico box-plot de los registros; ver Figura 3, el gráfico está construido de la siguiente manera, el box-plot ubicado en la semana 1, concentra los datos de la primer semana de enero de todos los años para los que se tiene registros, el último box-plot concentra los registros de temperatura máxima de la semana 52 (última semana de diciembre) de todos los años. En la Figura 3, se puede observar que la temperatura máxima, empieza a tener incrementos graduales, las temperaturas más altas registrándose entre la semana número 8 (por lo general, última semana del mes de febrero) y la semana número 24 (tercer semana de junio), en la semana 10 y 16 se observa una disminución de la temperatura en comparación con las semanas comprendidas para el periodo de primavera, una posible explicación física de este hecho es la presencia de los vientos del norte y lluvias torrenciales que por lo general se presentan en la región. A partir de la semana 25 se observa una disminución de la temperatura máxima, esto debido al comienzo de las Iluvias. El ligero incremento de la temperatura, de las semanas 28 (segunda semana de Julio) a la semana 33 (segunda semana de agosto) se explica por el efecto de la canícula, o seguía intraestival, evento climático que consiste en una disminución de la cantidad de precipitación a la mitad de la temporada de lluvias que ocurre principalmente en los meses cálidos de julio y agosto, después de esas semanas se observa de nuevo un descenso en la temperatura máxima por la culminación de la canícula. A partir de esas semanas, se observa un comportamiento estable en la temperatura máxima.

Para entender los valores extremos, la Tabla 1 presenta la semana, el año y la temperatura anómala registrada así como la caracterización del año de acuerdo a los episodios de enfriamiento y calentamiento por estación reportados por el "*climate prediction center*"[17].

| No. de Semana |      |       |             | No. de Se- |      |      |             |
|---------------|------|-------|-------------|------------|------|------|-------------|
|               | Año  | °C    |             | mana       | Año  | °C   |             |
| 3             | 2017 | 17.81 | Año normal  | 37         | 2011 | 21   | Año de Niño |
| 14            | 2017 | 23.8  | Año normal  | 43         | 2016 | 18.7 | Año de Niña |
| 25            | 2016 | 19.5  | Año normal  | 45         | 2016 | 17   | Año de Niña |
|               | 2017 | 24.6  | Año normal  | 50         | 2016 | 17.6 | Año de Niña |
| 30            | 2015 | 24.8  | Año de Niño |            |      |      |             |
| 51            | 2016 | 17.6  | Año de Niña |            |      |      |             |

#### Tabla 1: Registros extremos de la temperatura máxima.





Gráfico box-plot, para los registros semanales de la temperatura máxima Preiodo: 2/09/2011-2/09/2017

#### AJUSTE DE MODELOS

El ajuste de los modelos que a continuación se presenta, fue realizado después de eliminar los últimos 5 datos de la serie original y aplicando la metodología Box-Jenkins [2]. Se analizó la función de autocorrelación (*fac*) y la función de autocorrelación parcial (*fap*) de la serie para verificar estacionaridad y estacionalidad. La Figura 4, presenta la serie de tiempo de los registros de temperatura en la cual se observa que la serie de tiempo no es estacionaria. Se procedió entonces a realizar una diferencia a la serie y se observó que la *fac* decrece de manera exponencial en forma rápida por lo que se pudo garantizar la estacionaridad de la serie con una diferencia.



#### Figura 4: Serie de Tiempo para los registros semanales.

Temperatura máxima por se 2-09-2011 a 2-09-2017



Con el análisis de la *fac* y la *fap* de la serie, se ajustaron varios modelos, considerando como mejor modelo a aquel con el menor número de Akaike. En la Tabla 2, se presentan todos los modelos que se ajustaron a los registros de temperatura con su correspondiente valor de Akaike. De acuerdo al *Criterio de Información de Akaike*, el mejor modelo para ajustar los datos, fue un modelo *ARIMA(3,1,0)* cuyos coeficientes se muestran en la Tabla 3. Una vez ajustado el modelo, se realizó un análisis de residuos. Con la prueba de Ljung-Box se verificó la no correlación de los residuos y con la prueba de Shapiro se verificó su normalidad (Figura 5).

Con los coeficientes del modelo obtenidos en la Tabla3, el modelo *ARIMA(3,1,0)*, que resultó ser elegido para modelar la temperatura máxima, es:

$$Tmax_{t} = 0.0036 + Tmax_{t-1} - 0.4872(Tmax_{t-1} - Tmax_{t-2}) - 0.2981(Tmax_{t-2} - Tmax_{t-3}) - 0.1795(Tmax_{t-3} - Tmax_{t-4}) + \varepsilon_{t},$$
(1)

en donde **Tmax**<sub>t</sub> denota a la Temperatura al instante t,  $\varepsilon_t$  es un proceso de Ruido Blanco.

# Tabla 2: Modelos utilizados para ajustar los datos.

Tabla 3: Coeficientes del Modelo ARIMA(3,1,0).

| Modelo       | AIC     |     |                      |            |           |           |
|--------------|---------|-----|----------------------|------------|-----------|-----------|
| ARIMA(3,1,2) | 1281.79 | _   | ar1                  | ar2        | ar3       | Constante |
| ARIMA(3,1,1) | 1281.79 |     | -                    | -          | -         | 0.0036    |
| ARIMA(3,1,0) | 1279.85 | s.e | 0.4872               | 0.2981     | 0.1795    | 0.054     |
| ARIMA(2,1,2) | 1282.04 |     |                      | 0.0600     |           |           |
| ARIMA(2,1,1) | 1281.01 | σ   | <sup>2</sup> estimad | do: 3.563, | AIC = 127 | 9.85      |

# Figura 5: Análisis de los residuos del modelo *ARIMA(3,1,0)*.



# Figura 6: Pronóstico del modelo ARIMA(3,1,0).



| Dato Observado | Dato Pronosticado | Error Absoluto | MAPE                 |
|----------------|-------------------|----------------|----------------------|
| 21.7           | 21.69175          | 0.00825        | $6.33 	imes 10^{-5}$ |
| 23.6           | 21.66466          | 1.93534        | 0.013667655          |
| 24.1           | 21.57942          | 2.52058        | 0.017431397          |
| 23.3           | 21.69145          | 1.60855        | 0.01150608           |
| 21.9           | 21.67425          | 0.22575        | 0.001718037          |
| 22.1           | 21.67163          | 0.42837        | 0.003230543          |

Tabla 4: Tabla de datos observados y pronosticados con el modelo ARIMA(3,1,0).

Una vez ajustado el modelo a los registros de temperatura, se utilizó el comando *sarima.for* de la librería *astsa* para obtener el gráfico de los pronósticos que se muestra en la Figura 6. La Tabla 4 muestra el valor observado, el valor pronosticado así como el error absoluto y el error porcentual medio absoluto (MAPE) de los pronósticos.

Análisis de puntos de cambio

En el sentido más simple, el término punto de cambio se utiliza para estimar el punto en el que las propiedades estadísticas de un conjunto de observaciones cambian. Formalmente, sean  $X_1, X_2, ..., X_n$ , variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con función de densidad  $f_1(x; \theta), f_2(x; \theta), ..., f_n(x; \theta)$ , se quiere probar si existe un cambio en los parámetros de  $f_i(x; \theta)$ , y si existe, entonces se desea saber el punto en donde ocurrió, es decir, se quiere probar

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n \text{ vs } H_a: \text{ Existe } k \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } \theta_1 = \theta_2 = \theta_k \neq \theta_{k+1} = \dots = \theta_n$$
(2)

Si  $H_a$  es verdadera, se quiere estimar el momento en el que ocurre el cambio, es decir, la estimación de k de tal forma que cumpla con ciertas propiedades estadísticas como la consistencia.

Los primeros estudios sobre puntos de cambio, se realizaron para variables aleatorios normales independientes e idénticamente distribuidas con un enfoque paramétrico a finales de la década de 1950 ([1], [3], [4], [18]). Años más tarde, se tuvieron resultados para determinar puntos de cambio en la varianza, teniendo aplicación en el área de Finanzas ([7], [9], [11]). Desde entonces, el problema de detectar puntos de cambio se ha abordado con enfoques paramétricos y no paramétricos, utilizando los paradigmas de Máxima Verosimilitud y Bayesianos, además, se han incluido herramientas como los algoritmos genéticos para aplicar métodos de segmentación y la metodología de los waveletes ([6], [14], [16]). El problema de detectar puntos de cambio ha permeado en otras áreas del conocimiento, como Finanzas, Medicina, Climatología, etc. ([10], [13], [15]).

En la búsqueda de eficientar el tiempo en la aplicación de las distintas metodologías de puntos de cambio, se han implementado paqueterías en software para su aplicación en los datos. En *R*, se han implementado distintas librerías para tal fin. Una de ellas es la librería *changepoint* que considera los métodos de segmentación *PELT*, SegNeigh, *BinSeg* y *AMOC*, para determinar puntos de cambio en series de tiempo ([19]). Para determinar puntos de cambio, la librería *changepoint* de *R*, crea objetos de clase *cpt*. La estructura básica en *R* es la siguiente:

cpt.mean(data, method = "método", test.stat = "Normal o CUSUM"),

en donde:

data: Vector de objetos que contienen los datos en los que se buscará un cambio en la media.

*method:* Se decide por un punto de cambio (*AMOC*) o bien por múltiples puntos de cambio (*PELT*, *SegNeigh* o *BinSeg*).

*test.stat:* Estadística de prueba, es decir se supone una distribución, se puede elegir entre "*Normal*" o "*CUSUM*". La estadística de prueba se puede revisar en [9] o [18] para la suposición de normalidad o la prueba *CUSUM* respectivamente.

Para detectar el cambio en la varianza con la librería *changepoint*, la estructura del comando en *R*, es la siguiente:

cpt.var(data, know.mean = FALSE, method,test.stat = "Normal o CSS"),

en donde :

data: Registros de la serie de tiempo.

*know.mean:* Argumento lógico que es requerido sólo bajo la suposición de normalidad, si el valor lógico es *TRUE*, se asume media conocida, en caso contrario se estima por método de Máxima Verosimilitud.

*method:* Es el mismo que para *cpt.mean*.

*test.satat:* Se refiere a la estadística de prueba, se pueden elegir dos estadísticas, "*Normal*" o "*CU-SUM*" (*CSS*).

Para determinar los puntos de cambio en la media de la temperatura máxima, se aplicaron los métodos *AMOC*, *PELT*, *SegNeigh* y *BinSeg*. El método *AMOC*, determina a lo más un punto de cambio mientras que los métodos *PELT*, *SegNeigh* y *BinSeg*, determinan múltiples puntos de cambio por medio del método de segmentación de la serie de tiempo. La Tabla [5], presenta el número de puntos de cambio que determinó el software con los distintos métodos que se pueden utilizar. En la Figura [7], se presentan las particiones propuestas para la serie de cada uno de los métodos aplicados.

Tabla 5: Número de puntos de cambio para la media de la temperatura máxima, identificados con los distintos métodos de la paquetería *changepoint*.

| Método   | Número de Puntos<br>de Cambio | Estimación de<br>Puntos de Cambio | Promedios Estima-<br>dos              |
|----------|-------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| AMOC     | 1                             | 250                               | 22.6, 21.5                            |
| PELT     | 48                            | Ver Tabla 6                       | Ver Tabla 6                           |
| SegNeigh | 4                             | 237, 249, 270,286                 | 22.4, 25.8, 21.2,<br>17.8, 23.8       |
| BinSeg   | 5                             | 237, 250, 270,<br>286, 306        | 22.5, 25.6, 21.1,<br>17.8, 24.5, 22.3 |

Tabla 6: Ubicación de los puntos de cambio para el promedio de la temperatura máxima, con los distintos métodos del paquete *changepoint* de *R*.

| Semana   | 8    | 16   | 23   | 24   | 25   | 34   | 36   | 42   | 52   | 61   | 62   | 74   | 83   |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Promedio | 21.4 | 23.2 | 20.9 | 16.9 | 20.3 | 23.6 | 26.9 | 24.7 | 21.1 | 22.3 | 18.6 | 22.1 | 23.9 |
| Semana   | 93   | 122  | 125  | 129  | 133  | 135  | 141  | 148  | 152  | 164  | 165  | 171  | 172  |
| Promedio | 25.7 | 21.8 | 18.9 | 22.7 | 24.5 | 27.5 | 25.5 | 22.5 | 19.4 | 22.0 | 18.0 | 22.1 | 17.2 |
| Semana   | 175  | 176  | 181  | 184  | 188  | 194  | 227  | 229  | 234  | 235  | 237  | 249  | 259  |
| Promedio | 22.1 | 16.9 | 20.3 | 24.2 | 22.1 | 25.6 | 22.5 | 18.0 | 21.4 | 25.4 | 20.6 | 25.8 | 21.8 |
| Semana   | 260  | 270  | 286  | 288  | 289  | 291  | 299  | 302  | 306  | 22.3 |      |      |      |
| Promedio | 12.2 | 21.6 | 17.8 | 22.7 | 25.7 | 21.1 | 24.8 | 26.9 | 24.3 |      |      |      |      |





Los cambios para la varianza se presentan en la Tabla 8. La Figura 8, presenta las particiones de la serie correspondientes a la varianza para cada uno de los métodos aplicados.

Tabla 8: Ubicación de los puntos de cambio en la varianza de la temperatura máxima, que se determinan con el método PELT.

| Semana   | 18  | 42  | 82    | 93   | 122  | 152 | 158  | 194 | 218 |
|----------|-----|-----|-------|------|------|-----|------|-----|-----|
| Varianza | 1.8 | 6.2 | 2.3   | 1.1  | 1.6  | 7.1 | 0.1  | 5.7 | 1.7 |
| Semana   | 222 | 254 | 257   | 260  | 270  | 286 | 288  | 306 |     |
| Varianza | 0.1 | 7.5 | 0.003 | 25.3 | 1.10 | 0.5 | 0.02 | 3.6 | 1.0 |





*Ajuste de modelos después de detectar puntos de cambio en la media de la temperauta máxima* Después de aplicar los métodos de segmentación *PELT*, *AMOC*, *BinSeg* y *SegNeigh*, para la media, se observa que el método *PELT*, registra varios cambios, lo cual hace difícil un ajuste de modelos a los datos particionados, de forma similar ocurre con el método *BinSeg*. Para modelar las particiones de la serie y comparar los resultados con los pronósticos realizados, se utilizaron las particiones consideradas con el método *AMOC* y el método *SegNeigh* (Figuras 9 y 10).



Figura 9: Serie de Tiempo particionada, después de aplicar AMOC.

|        | Modelo Ajustado  |        | Modelo Ajustado |        |
|--------|------------------|--------|-----------------|--------|
|        | Primer Bloque de |        | Segundo Bloque  |        |
|        | Datos            | AIC    | de Datos        | AIC    |
|        | ARIMA(3,1,2)     | 990.47 | ARIMA(2,1,0)    | 274.79 |
|        | ARIMA(3,1,1)     | 988.85 | ARIMA(2,1,1)    | 275.61 |
| MÉTODO | ARIMA(3,1,0)     | 987.74 | ARIMA(2,1,2)    | 277.52 |
| AMOC   | ARIMA(2,1,0)     | 994.72 | ARIMA(1,1,1)    | 273.61 |
|        | ARIMA(2,1,2)     | 988.47 |                 |        |
|        | ARIMA(2,2,2)     | 991.34 |                 |        |
|        | ARIMA(2,1,1)     | 987.06 |                 |        |

### Tabla 9: Ajuste de modelos después de aplicar el método AMOC





| Tabla 10: A | juste de modelos | después de ap | olicar el método | SegNeigh. |
|-------------|------------------|---------------|------------------|-----------|
|-------------|------------------|---------------|------------------|-----------|

|          | Modelo Ajus-<br>tado<br>Primer Bloque<br>de Datos | AIC    | Modelo Ajustado<br>Segundo Bloque de<br>Datos | AIC    | Modelo Ajustado<br>Tercer Bloque de<br>Datos | AIC    |
|----------|---------------------------------------------------|--------|-----------------------------------------------|--------|----------------------------------------------|--------|
|          | ARIMA(3,1,2)                                      | 917.13 | ARIMA(1,1,2)                                  | 197.58 | ARMA(1,1)                                    | 110.21 |
| MÉTODO   | ARIMA(3,1,1)                                      | 924.64 | ARIMA(1,1,0)                                  | 194.84 | ARMA(2,2)                                    | &113.5 |
| SegNeigh | ARIMA(2,1,2)                                      | 924.6  | ARIMA(1,1,1)                                  | 191.99 | ARMA(1,2)                                    | 111.71 |
|          | ARIMA(2,1,1)                                      | 914.29 | ARIMA(2,1,2)                                  | 194.44 | MA(1)                                        | 108.29 |

Para elegir el mejor modelo que ajuste a la serie particionada, se siguió el Criterio de Información de Akaike, por tanto, después de aplicar el Método *AMOC*, el ajuste de la serie queda expresado en la ecuación (3), el ajuste después de aplicar el método *SegNeigh* está expresado en la ecuación (4).

$$Xtmax_{t} = \begin{cases} Tmax_{t-1} + 0.0213 - 0.7750(Tmax_{t-1} - Tmax_{t-2}) + 0.0732(Tmax_{t-2} - Tmax_{t-3}) \\ -0.2464\varepsilon_{t-1} + 0.5789\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t}, & 1 \le t \le 250 \\ 0.0102 + Tmax_{t-1} + 0.0419(Tmax_{t-1} - Tmax_{t-2}) + 0.5162\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t}, & t > 251 \end{cases}$$
(3)

 $Xtmax_t$ 

$$=\begin{cases} -0.0008 + \text{Tmax}_{t-1} + 0.4547(\text{Tmax}_{t-1} - \text{Tmax}_{t-2}) + 0.1698(\text{Tmax}_{t-2} - \text{Tmax}_{t-3}) \\ -\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, & 1 \le t \le 237 \\ -0.2044 + \text{Tmax}_{t-1} + 0.3740(\text{Tmax}_{t-1} - \text{Tmax}_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, & 238 \le t \le 286 \quad (4) \\ 23.8714 + 0.3968\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, & t \ge 287 \end{cases}$$

#### **RESULTADOS Y CONCLUSIONES**

Estimar cambios en variables climatológicas es importante, pues en la medida que se puedan explorar anticipadamente escenarios del comportamiento de esas variables para un futuro próximo permitirá a los gobiernos y a la sociedad proponer políticas de acción para la adaptación a tales condiciones previstas. Los expertos en Climatología sugieren que para caracterizar el clima de una región, se necesitan registros de por lo menos 30 años. Otra recomendación que se ha dado [12], es que si se quiere evidenciar un cambio en la temperatura, se consideren bases de datos de 1961 a 1990 y se busquen cambios a partir de series construidas de 1991 en adelante. En este sentido, la base de datos proporcionada es reciente por lo que no se puede hacer una comparación como lo proponen los expertos.

Con las metodologías aplicadas se encontró que, el método *PELT*, identificó 48 puntos de cambio para la media y 17 puntos de cambio para la varianza, el método *BinSeg* identificó 5 puntos de cambio para la media y 4 para la varianza, el método *SegNeigh* identificó 4 puntos de cambio para la media y la varianza, el método *AMOC* identificó un cambio en la semana 250 y 27 para la media y la varianza respetivamente. Debido a las segmentaciones resultantes, sólo se ajustaron modelos *ARIMA* después de aplicar los métodos *AMOC* y *SegNeigh*. Al observar la Figura [7] (b), (c) y (d), se puede apreciar en las líneas rojas centrales un incremento en las temperaturas, lo que confirma los reportes del IPCC. En la Figura [4], se observa que las temperaturas máximas al comienzo de cada año tienden a ir disminuyendo en comparación con el año anterior, mientas que las temperaturas en los meses de primavera (registros más altos de la serie) se están manteniendo alrededor de los 28°C, lo que hace pensar en un cambio en la varianza de la serie, de acuerdo a la Figura 8 (a), el cambio en la varianza comienza en la semana 236 que corresponde a la semana del 4/03/2016, este punto de cambio coincide con los métodos *BinSeg*. El método *PELT* marca como punto de cambio la semana 233 la cual es cercana a la semana 236.

Los métodos que aplica la paquetería *changepoint* de *R*, son métodos de segmentación que no contemplan la estructura de la serie, es necesario comparar estos resultados con aquellas metodo-logías que contemplan la estructura de la serie como lo planteado en los trabajos de 5 y 8.

#### BIBLIOGRAFÍA

- 1. B.S. Brodsky., B.E. Darkhovsky., "Nonparametric methods in Change Point Problems, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- 2. J. Brockwell P., A. Davis R, "Time Series: Theory and Methods", Sprinver-Verlag, 1987.
- 3. Chernoff, H., Zacks S., "Estimating the current mean of a normal distribution which is subjected to changes in time", Ann. Math.Statist, 35, 1964, pp.999-1018.
- 4. Csörgó M., Horváth L., "Limit Theorems in Change-Point Analysis." John Wiley, 1997.
- 5. Davis R.A, et. al., "Testing for a change in the parameter values and order of an autoregressive model", The Annals of Statistics, 23(1), 1995, pp.282-304.

- 6. Davis R.A., Thomas C.M. Lee, Gabriel A. Rodríguez-Yam, "Break detection for a class of nonlinear time series models", Journal of Time Series Analysis, 29(5), 2008., pp. 834-867.
- 7. Davis W.W., "Robust Methods for Detection of Shifts of the innovation Variance of a Time Series", 21, 1979, pp.313-320.
- 8. Gombay E., "Change detection in autorregresive time series", Journal of Multivariate Analysis, 99, 2008, pp. 451-464.
- 9. Hinkley D.V., "Inference about the Change-Point in a Sequence of Random Variables", Biometrika, 57(1), 1970, pp. 1-17.
- Horváth L., Kokoszka P., Steinebach J., "Testing for Changes in Multivariate Dependent Observations with an Application to Temperature Changes", Journal of Multivariate Analysis, 68, 1999, pp.96-119.
- Inclán C., Tiao C. G., "Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of variance", Journal of the American Statistical Associaton, 89(427), 1994, pp. 913-923.
- 12. IPCC, "Summary for Policymakers Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change", 2013, United Kingdom y USA.
- 13. Jarušková D., "Change point detection in Meteorological Mesasurement", American Meteorological Society, 124, 1996, pp.1535-1543.
- 14. Kumar K., Wu B., "Detection of change points in time series analysis with fuzzy statistics", International Journal of Systems Science, 32(9), 2001, pp. 1185-1192.
- 15. Ling S., "Estimation of change points in linear and nonlinear time series models". Econometric Theory, 32(2), 2014,pp. 1-29.
- 16. Loschi H.R., et al, "Bayesian Analysis for Change Points in the Volatility of Latin American Emmering Markets", Journal of Data Science 3,2005, pp.101-122.
- 17. Climate Prediction Center. http://origin.cpc.ncep.noaa.gov/products/analysis\_monitoring/ensostuff/ONI\_v5.php. Fecha de consulta: 12-03-2018.
- 18. Page E. S, "Continuous Inspection Schemes", Biometrika, 41(1-2),1954, pp. 100-115.
- R. Killick, P. Fearnhead, I. A. Eckley, "Optimal Detection of Changepoints With a Linear Computational Cost", Journal of the American Statistical Association, 107:500, 2012, pp.1590-1598, DOI: 1\$ 0.1080/01621459.2012.737745\$.
- 20. Enciclopedia de los Municipios y Delegaciones de México, http://siglo.inafed.gob.mx/enciclopedia/EMM29tlaxcala/municipios/29034a.html.

#### PROPIEDADES ÓPTICAS NO LINEALES DE UNA MEZCLA DE COLORANTES DE TRIFENIL-METANO

Corinna Janeth Enriquez Sánchez, Virginia Francisca Marañón Ruiz, Kevin Manuel Esparza Ramirez, Samuel Mardoqueo Afanador Delgado, Jesús Castañeda Contreras, Roger Chiu Zarate

Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara. <u>vmaranon@cula-gos.udg.mx</u>

# RESUMEN

Los materiales ópticos orgánicos no lineales (nlo) se han investigado exhaustivamente para su posible aplicación en dispositivos ópticos y optoelectrónicos. Los cromóforos nlo útiles para tal aplicación deben tener una gran hiperpolarización molecular, cristalizar en una estructura no centrosimétrica para exhibir una actividad óptica no lineal masiva eficiente, y poseer propiedades físicas óptimas aceptables para la fabricación del dispositivo. (1) Ejemplo de este tipo de sistemas moleculares son los colorantes derivados de trifenilmetano, que tienen un amplio uso en la industria textil pero que también se han convertido en objeto de estudio en el campo de la óptica no lineal (2). Para el presente estudio se propone la combinación de dos colorantes de esta familia, verde de malaquita y cristal violeta, de los cuales hay reportes de su respuesta no lineal por separado. Para su estudio se realizaron pruebas de uv-vis y de z-scan de cada uno de los colorantes por separado y después en mezcla a una concentración de 1x10<sup>-2</sup> m, la cual posteriormente fue puesta en pva para la elaboración de películas a diferentes concentraciones.

Finalmente, fueron determinadas las propiedades ópticas no lineales mediante la técnica de z-scan, donde se determinó que el ensanchamiento de la banda de absorción de 15 nm de ambos colorantes impactó en las propiedades ópticas no lineales ( $n_2=8.05x10^{-11}$  y  $\Box=1.08x10^{-4}$ ) de la mezcla volviéndola más absorbente. Este resultado es alentador para emplearlo como absoberdor óptico para aplicaciones en dispositivos en optoelectrónica.

#### INTRODUCCION

Las propiedades no lineales de las moléculas de colorantes orgánicos se están explorando actualmente con gran interés, colorantes como los derivados de trifenilmetano que antiguamente se utilizaban para la tinción de papel, cuero, tela y en las áreas biológicas como fungicidas, han atraído la atención debido a su potencial aplicación en esta area.(3) El índice de refracción no lineal es un parámetro muy importante en diseñando dispositivos ópticos La técnica Z-scan propuesta incialmente por Sheik Bahae, se basa en los principios de la distorsión espacial del haz y ofrece simplicidad y una sensibilidad muy alta para medir tanto el índice de refracción no lineal como el coeficiente de absorción no lineal y se ha aplicado al estudio de varios compuestos no lineales y materiales semiconductores. Las propiedades ópticas no lineales de las moléculas de colorantes orgánicos son importantes desde el punto de vista de la comprensión de su foto-física y para aprovechar el potencial del uso de estas moléculas en aplicaciones como el procesamiento óptico, la informática y la limitación óptica (4)

## **TEORIA**

Los colorantes se han utilizado durante miles de años. Hasta el comienzo de este siglo el añil, la alizarina y otros colorantes fueron producidos a partir de materiales vegetales y animales. El origen del color de las sustancias orgánicas sólo podría explicarse con éxito cuando se había establecido la constitución molecular de los primeros tintes y se llevaron a cabo las primeras síntesis. (5) Los derivados de trifenilmetano se muestran en la Figura 1, son colorantes bien conocidos para tinciones histológicas o como indicadores de pH. Estas estructuras poseen un carbono central que contiene tres anillos aromáticos, los cuales pueden estar o no sustituidos con grupos aminos. Estos grupos amino también pueden estar o no sustituidos por grupos alquilo.



Figura 1. Estructura de colorantes derivados de trifenilmetano.

Pertenecientes a esta familia se encuentran colorantes como el verde de malaguita, el cual ha sido utilizado ampliamente en la tinción de piel, cuero y papel; y el cristal violeta, colorante utilizado en el área biológica para tinciones, además de uso extensivo en veterinaria por su propiedad antifungica. En esta perspectiva, los cromóforos orgánicos han recibido mayor atención debido a su flexibilidad química y rápidas respuestas moleculares, características de interés para áreas de investigación como la óptica no lineal (ONL). La ONL se ha desarrollado en los últimos años como un importante campo de investigación debido a su potencial aplicabilidad en el área de la fotoelectrónica y en un futuro inmediato, en la tecnología fotónica. La elaboración de materiales ONL ha atraído gran atención durante las dos últimas décadas debido a diversas aplicaciones en telecomunicaciones, almacenamiento óptico de datos y procesamiento de información óptica. Los efectos ONL de segundo orden como la generación de energía de segundo armónico (SHG) o la modulación electro-óptica requieren el diseño de cromóforos que muestren respuestas cuadráticas mejoradas. Tales cromóforos, que presentan una intensa absorción en la región visible debido a una fuerte transición de transferencia de carga intramolecular, son adecuados para la modulación electro-óptica a longitudes de onda de telecomunicaciones. (6) El procedimiento más habitual para describir fenómenos ONL se basa en expresar la polarización en términos de la intensidad del campo eléctrico aplicado. La razón por la que la polarización juega un papel clave en la descripción de fenómenos ONL es que, una polarización variable en el tiempo puede actuar como la fuente de nuevos componentes del campo electromagnético. (7)

El método Z-scan ha ganado rápida aceptación por la comunidad ONL como una técnica estándar para la determinación por separado los cambios no lineales en el índice de refracción y los cambios en la absorción o transmitancia. Esta aceptación es principalmente debido a la simplicidad de la técnica, así como la simplicidad de la interpretación. En la mayoría de los experimentos el cambio de índice de refracción,  $\Delta$  n, y el cambio de absorción,  $\Delta\alpha$ , puede determinarse directamente a partir de los datos obtenidos de las curvas de Z-scan sin recurrir a la instalación de ordenador. *(8)* 

Entre las diversas técnicas desarrolladas para medir el índice de refracción ONL, la técnica de Zscan de un solo haz, fue desarrollada por Mansoor Sheik Bahae (9), la cual es una herramienta simple y eficaz. Esta tecnica proporciona no sólo las magnitudes de las partes real e imaginaria de la susceptibilidad no lineal, sino también el signo de la parte real. Este es un método que puede medir rápidamente la refracción no lineal y la absorción no lineal en muestras sólidas y líquidas. Se trata de un simple método de haz simple, que utiliza fenómenos de autofocalización o autodesenfocalización en materiales ONL. (10)

#### PARTE EXPERIMENTAL

La preparación de soluciones de los colorantes de trifenilmetano se llevó a cabo de la siguiente manera: se prepararon una solución de verde malaquita y una solución de cristal violeta a una concentración  $1x10^{-2}$  M y a partir de esta hacer diluciones en las siguientes concentraciones (M=mol/L): $1.0x10^{-3}$ ,  $1.0x10^{-4}$ ,  $2.0x10^{-5}$ ,  $3.0x10^{-5}$ ,  $4.0x10^{-5}$ ,  $5.0x10^{-5}$ ,  $6.0x10^{-5}$ ,  $7.0x10^{-5}$ ,  $8.0x10^{-5}$ ,

9.0x10<sup>-5</sup>; por cada colorante. Posteriormente, se hizo lectura en espectrofotómetro UV usando como blanco agua. En seguida, se compararon las absorbancias obtenidas y preparar una solución (*v:v*) 50:50 de las soluciones que muestren picos de absorbancias similares (estandarización de concentraciones). Se realizaron 10 diluciones a partir de la solución con ambos colorantes. Se hizo lectura en espectrofotómetro UV usando como blanco agua. Posteriormente se realizó la depositacion de las películas de acuerdo al siguiente procedimiento: Se prepararon soluciones de PVA y la solución de dos colorantes en con la concentración optimizada en el paso 1 inciso a), y se mezclaran con 1 mL PVA. Los volúmenes de las alícuotas que se tomarán de la mezcla optimizada serán con las siguientes cantidades (mL): 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8 y 1.6. A continuación, Se pusieron en un spiner un vidrio de portaobjeto (previamente lavado con solución piraña y activado) y se añadirá un volumen de 0.05 mL de la solución de PVA/solución de colorantes para obtener la película, poner a secar la película a temperatura ambiente. Finalmente, se hizo lectura en espectrómetro de UV-Vis y en Z-scan, del cual se describe el diagrama experimental en la Figura 2.



Figura 2. Arreglo experimental del Z-scan.

#### RESULTADOS

A partir de las diluciones preparadas se obtuvieron los siguientes espectros de Uv-vis, para cada colorante y para la mezcla



En la Figura 3, se observa que a altas concentraciones CV8 y CV9 el máximo se observa en el pico a 545 nm, sin embargo, cuando la concentración es igual a CV7 los máximos de absorción entre 545 y 589 nm se igualan. Cuando baja la concentración desde CV6 se aprecia que la banda en 589 nm se vuelve importante. Las bandas a 589 nm y 545 nm se les conocen como banda  $\alpha$  y  $\beta$  (Chiu, 2013). La banda  $\alpha$  se refiere al CV cuando se encuentra preferentemente en su forma monomérica, y la

forma β cuando se encuentra en estado dimérico. La zona de absorción corresponde a las transiciones electrónicas entre  $\pi \rightarrow \pi^*$ . Y la absorción a 304 nm a las transiciones electrónicas de n $\rightarrow \pi^*$ 



Figura 4. Espectros UV-vis de VM.

Los máximos de absorción que se presentan en el VM son:  $\lambda_{max}$  a 620 nm, un hombro a 590 nm y un pico mínimo a 424 nm y otro más a 315 nm. El máximo de absorción que aparece alrededor de 619 nm corresponde a la transiciones electrónicas de  $\pi \rightarrow \pi^*$ , La aparición de los dos máximos a una concentración de VM5 significa la formación de especies diméricas según la teoría del excitón molecular a 609 nm y 625 nm. Los picos de absorción menores que aprecian a 320 nm y a 430 nm se refieren a las transiciones electrónicas de de n $\rightarrow \pi^*$  de los pares libres de electrones de las dimetilaminas.



Figura 5. Espectros UV-vis de CV:VM.

En la Figura 5 se puede observar que los máximos de absorción que se presentan en el CV son:  $\lambda_{max}$  a 614 nm y una banda de absorción de menor tamaño que aparece a 430 nm. En la mezcla de CV:VM el máximo de absorción se unifica en una solo máximo. La curva que se presenta en el espectro de UV-Vis de la ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. no es una curva gaussiana simétrica, sino que se ve tendida hacia el azul. El efecto hipsocrómico se debe a las transiciones electrónicas que se están generando y al acomodo de los orbitales  $\pi$  entre moléculas. El sistema trifenilmetano, para que se acomode los anillos aromáticos tiene que ser de tipo propela para que exista dicha interacción intermolecular. A pesar de que se hacen mediciones a baja concentraciones no se presenta el mismo fenómeno que cuando están separados los colorantes, la separación en las bandas no se observa lo que significa que el acomodo en las moléculas entre VM y CV, sus dipolos se acomodan de manera preferencial de tipo oblicuo. Se aprecia que las transiciones electrónicas del VM predominan a longitudes de onda menores (314 nm y 430 nm) y las transiciones electrónicas de  $\pi \rightarrow \pi^*$  de la mezcla CV:VM centradas a 615 nm, las bandas del CV se desplazaron batocrómicamente 65 nm de la primer banda (549 nm) y 25 nm de la segunda banda (CV 589 nm). Por lo que se puede asumir que las transiciones electrónicas en la mezcla predominan las del VM sobre el CV.



Figura 6. Gráfico de z-scan apertura cerrada con láser de 532 nm

En la Figura 6, se observa las gráficas de z-scan obtenidas de cada colorante, la mezcla y la película respetivamente. En la gráfica correspondiente al CV, podemos observar una no linealidad negativa, con un valle más prominente respecto al pico, lo que indica que el material presenta buena absorción. Para el grafico correspondiente a VM se puede observar que presenta una no linealidad negativa, además se observa que el valle es más prominente con respecto al de CV, es decir, su propiedad de absorción es mayor. Para el grafico de la mezcla de ambos colorantes se aprecia que esta presenta una no linealidad negativa, y un valle mucho más profundo que los presentados por cada uno de los colorantes, lo que nos indica que la propiedad de absorción se ve mejorada en la mezcla. En cambio, la gráfica correspondiente a la película de PVA, muestra una no linealidad positiva al presentar un valle seguido de un pico, además se observa que dicha gráfica es simétrica en comparación con los gráficos de las soluciones liquidas, lo que podría indicar que al introducir la mezcla en una matriz polimérica, se ve mejorada la propiedad refractiva del material.



Figura 7. Gráfico de z-scan apertura abierta con láser de 532 nm

En la Figura 7, se observan las curvas obtenidas de z-scan de apertura abierta. Podemos observar que las soluciones liquidas presentan una absorción significativa la cual se ve aún más en la gráfica correspondiente a la película de PVA, propiedad que se atribuye a la contribución de los colorantes en mezcla.



Figura 8. Gráfico de z-scan apertura abierta con láser de 532 nm

Finalmente, en la Figura 8 observamos los gráficos de z-scan una vez que se ha restado la absorción, donde las muestras en liquido presentan una no linealidad negativa, para los cuales se obtuvieron valores de  $n_2$ = 9.5528x10<sup>-10</sup>, 4.3108E<sup>-10</sup>, 2.0014x10<sup>-09</sup>, 8.05x10<sup>-11</sup>, respectivamente, y valores de  $\beta$ =1.23x10<sup>-3</sup>, 1.28x10<sup>-3</sup>, 1.26x10<sup>-3</sup>, 1.08x10<sup>-4</sup>.

#### CONCLUSIONES

Se obtuvieron los espectros de absorción característicos del VM y CV los cuales tuvieron una  $\lambda$ max a 615 nm y 525 nm, respectivamente. Estos resultados fueron congruentes con los reportados en la literatura. Se determinó que la concentración óptima para trabajar en UV-vis (1X10<sup>-5</sup> M) no será la óptima para trabajar en el Z-scan (1X10<sup>-3</sup>), mientras que para la elaboración de las películas la concentración optima fue 0.1 M. Las curvas obtenidas de las soluciones liquidas presentaron siempre un pico seguido de un valle, por lo tanto, se consideran de tipo negativa o autodesenfocante. Por otra parte, dichas curvas presentaron una alta asimetría lo que significa fuertes efectos ópticos no lineales especialmente en el coeficiente de absorción no lineal ( $\beta$ ). Se aprecia que cuando se aumentó la concentración tanto de los colorantes puros como en la mezcla, el  $\beta$  también aumentó. Sin embargo, este efecto se muestra distinto en las películas de PVA al cambiar el signo de la no linealida a positivo, y adquiriendo una mayor simetría, por lo que se propone que al introducir la mezcla a la matriz polimérica del PVA, cambia su propiedad de ser absortiva a ser más refractivo.

#### BIBLIOGRAFÍA

- Cho, B. R., Piao, M. J., Son, K. H., Lee, S. H., Yoon, S. J., Jeon, S. J., & Cho, M. Nonlinear Optical and Two-Photon Absorption Properties of 1, 3, 5-Tricyano-2, 4, 6-tris (styryl) benzene-Containing Octupolar Oligomers. *Chemistry-A European Journal*, 8(17), (2002). 3907-3916.
- Triphenylmethane Dye Activation of Beta-Arrestin. Barak, L. S., Bai, Y., Snyder, J. C., Wang, J., Chen, W.,Caron, M. G. Triphenylmethane Dye Activation of Beta-Arrestin, Biochemistry, 52(32), (2013). 5403-5414
- 3. Xiao-Dong Li, Q.-Z. Z.-Q. Optical properties of (nanometer MCM-41)-(malachite green) composite material. *Applied surface Science*, *257*, (2010).1134-1140.
- 4. Geethakrishnan, T., and P. K. Palanisamy. "Z-scan determination of the third-order optical nonlinearity of a triphenylmethane dye using 633 nm He–Ne laser." *Optics Communications* 270.2 (2007): 424-428.
- 5. Fabian, J. H. *Light absorption of organic colorants: theoretical treatment and empirical rules Vol. 12.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. (1980).
- 6. Brunel, J. J.-D. Boomerang-shaped octupolar molecules derived from triphenylbenzene. *Synthetic metals*, *124:1*, (2001) 195-199.
- 7. Baldwin, G. C. An Introduction to Nonlinear Optics. *New York: Plenum Press.Primera edición.*, (1969).1-5.
- 8. Van Stryland, E. W.-B. Z-scan measurements of optical nonlinearities. *Characterization techniques and tabulations for organic nonlinear materials, 18(3),* (1998).655-692.
- Sheik-Bahae, M., Said, A. A., Wei, T. H., Hagan, D. J., & Van Stryland, E. W. Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam. *IEEE journal of quantum electronics*, *26*(4), (1990).760-769.
- 10. Vinitha, G. R. Single-Beam Z-Scan Measurement of the Third-Order Optical Nonlinearities of Triarylmethane Dyes. *Laser Physics 18*, (2008).1176–1182.

#### SÍNTESIS Y COMPORTAMIENTO MAGNÉTICO DE FERRITA TIPO GRANATE SUSTITUIDA CON BI<sup>3+</sup> Y ND<sup>3+</sup>.

E. Baños-López<sup>1</sup>, A. M. Bolarín-Miró<sup>1</sup>, F. Sánchez-De Jesús<sup>1</sup>, C.A. Cortés-Escobedo<sup>2</sup>, F. Pérez-Moreno, L. E. Hernández-Cruz<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Área Académica de Ciencias de la Tierra y Materiales. Carretera Pachuca-Tulancingo, Km 4.5 s/n, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P.

42184.

<sup>2</sup>Centro de Investigación e Innovación Tecnológica del Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal 02250, México.

# esperanza\_banoslo@hotmail.com

#### RESUMEN

Diversos autores han reportado que las propiedades de la ferrita de itrio con estructura cristalina tipo granate Y<sub>3</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (YIG) pueden ser mejoradas cuando son dopadas con Bi<sup>3+</sup>, la finalidad del dopaje es conferirle un mayor carácter magneto-óptico. Un efecto adicional del Bi3+, es la disminución de la temperatura de síntesis con incremento de la anisotropía magnética en el YIG. Por otro lado, como efectos contrarios, éste catión provoca disminución tanto en su coeficiente magneto-dieléctrico como en los valores de magnetización de saturación. Con la finalidad de evaluar el efecto del Nd<sup>3+</sup> sobre la estructura cristalina y modular sus propiedades, en este trabajo se analiza sistemáticamente el efecto del Nd<sup>3+</sup> sobre la estructura cristalina y propiedades magnéticas de Bi<sub>0.8</sub>Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (Bi:YIG) con  $0 \le x \le 1.5$ ,  $\Delta x=0.3$ . A partir de una mezcla estequiométrica de polvos molidos durante 5 h, posteriormente se fabricaron compactos aplicando 900 MPa de presión y sinterizados hasta 900°C. Los materiales obtenidos se caracterizaron mediante Difracción de Rayos X, Microscopía Electrónica de Barrido y Magnetometría de Muestra Vibrante. Los resultados confirman la introducción de los iones Bi<sup>3+</sup> y Nd<sup>3+</sup> en la estructura del YIG. Las micrografías del análisis de SEM muestran tamaño de grano promedio de1µm de diámetro, adicionalmente se observa ligera variación en los valores de magnetización de saturación de 23 emu/g, así como coercitividades desde 17 hasta 49 Oe y la transformación de la estructura tipo granate para x=1.5 siendo la YFeO<sub>3</sub> la fase dominante, con pequeñas cantidades de Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

#### INTRODUCCIÓN

La ferrita tipo granate con fórmula {Y<sub>3</sub><sup>3+</sup>}<sup>c</sup>[Fe<sub>2</sub><sup>3+</sup>]<sup>a</sup>(Fe<sub>3</sub><sup>3+</sup>)<sup>d</sup>O<sub>12</sub>, grupo espacial *la3d*, red cúbica centrada en el cuerpo, es constituido por ocho fórmulas unidad, debido a su arreglo dentro de la estructura presenta interacciones de superintercambio atribuido al ángulo del enlace Fe-O-Fe de 180° con alineación antiparalela en sitios tetraédricos(d) y octaédricos(al, con acoplamiento débil en sitios dodecaédricos<sub>(c)</sub>. El momento magnético total en el YIG lo aportan los iones Fe<sup>3+</sup> (5 Magnetones de Bohr, orbitales 3d<sup>5</sup>), adicionalmente el Y<sup>3+</sup> es diamagnético con orbitales 4p<sup>6</sup> (al tener todos sus electrones apareados), dando como resultado comportamiento ferrimagnético con valores promedio de magnetización de saturación ( $M_s$ ) de 26 emu/g a temperatura ambiente y parámetro de red (a) de 1.238 nm. La finalidad del dopaje es modular propiedades magnéticas, magneto-ópticas y dieléctricas. La introducción de iones de Bi<sup>3+</sup> en la estructura del YIG, incrementa el índice de refracción, ángulo de rotación de Faraday ( $\theta_F$ ) y constante de Verdet. La deformación de la red y el cambio en la estructura electrónica inducen cambios en el enlace Fe<sup>3+</sup>- Fe<sup>3+</sup> debido a la hibridación Bi-6p y Fe-3d en sitios (d) y en consecuencia aumenta las interacciones de intercambio. El granate de hierro bismuto Bi<sub>3</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (BIG) ha sido estudiado, sin embargo sólo es posible sintetizarlo en forma de película delgada; por ello diversos autores lo han sintetizado con bajos niveles de dopaje o bien realizando co-dopajes. En este sentido Dong y col. [1] sintetizaron GdxBi1.0Y2-xFe5O12 (x=0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8) mediante sol-gel, reportan reducción de la temperatura de sinterización de 100 a 300° C y para la muestra x=0, sinterizada a 850 °C durante 3 h, obtuvieron tamaño de partículas ( $D_m$ ) 43.3 nm, y M<sub>s</sub> 23.5 emu/g. Por otra parte Xu y col. [2] sintetizaron a 850 °C y a 1000 °C Y<sub>2.9-x</sub>Ce<sub>0.1</sub>Bi<sub>x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (x = 0 - 0.5) obteniendo partículas de 58 - 63 nm por sol-gel. Afirma que con el aumento de a,  $D_m$  disminuye. Para la muestra Ce x=0.1, observa simultáneo aumento de  $M_s$  y  $D_m$  y  $M_s$  de 28.0 emu/g. Paralelamente Wu y col. [3] sintetizaron  $Y_{3.0-x}Bi_xFe_5O_{12}$  (x = 0, 0.5 y 1.0) mediante ruta del estado sólido a 1350, 1100 y 1000°C durante 3 h, obteniendo partículas con a de 1.2374, 1.2418 y 1.2441 nm. Afirman que con el aumento Bi disminuye la M<sub>s</sub> de 26.0 - 21.08 emu/g y. Del mismo modo Niyaifar y col. [4] sintetizaron por sol-gel Y<sub>3-x</sub>Bi<sub>x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (x = 0-0.4), obteniendo M<sub>s</sub> de 27-24 emu/g,  $D_m$  25-32 nm y a de 1.2203 - 1.2365 nm. Jia y col. [5] sintetizaron Y<sub>3-x</sub>Bi<sub>x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (x=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2) a 950° C por 3 h, obtuvieron densidad 5.75 g/cm<sup>3</sup>, a de1.243 nm,  $D_m$ =2.1 µm, H=41 Oe y  $M_s$  de 15.25 emu/g para la muestra x = 0.9. En el mismo sentido Duran y col. [6] sintetizaron Y<sub>2</sub>BiFe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> por sol gel compactos a 1400°C durante 4h, obteniendo partículas con a de1.24568 nm y M<sub>s</sub>=27.1 emu/g.

En este sentido la mecanoquímica es un método de activación mecánica que permite obtener partícula de tamaño muy pequeño con superficie de contacto grande y disminución de la energía de activación. Considerando que el método así como parámetros de síntesis, tiempo de tratamiento térmico y concentración del ión sustituyente, entre otros modifica las propiedades del material sintetizado, por ello y en base a los trabajos donde incorporan iones dentro de la estructura del Y<sub>3</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub>, en el presente trabajo la finalidad se enfoca en evaluar el efecto de la doble sustitución de iones de Bi<sup>3+</sup> la cual es fijada x=0.8 y Nd<sup>3+</sup>0 $\leq x\leq1.5$ , debido al límite de solubilidad en el YIG, mediante molienda de alta energía asistida con tratamiento térmico, para conocer estructura cristalina y evaluar sus propiedades magnéticas, dando como resultado el aumento de sus aplicaciones en dispositivos de microondas.

#### PARTE EXPERIMENTAL

Los polvos precursores de Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Sigma Aldrich, pureza 99%), Nd<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Sigma Aldrich, pureza 99,8%), Bi<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Sigma Aldrich, pureza 99,9%) y Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Sigma Aldrich, pureza 99,9%), se mezclaron en una relación estequiométrica de acuerdo con la siguiente ecuación:

 $(2.2-x)Y_{2}O_{3} + xNd_{2}O_{3} + 0.8Bi_{2}O_{3} + 5 Fe_{2}O_{3} \rightarrow 2 Bi_{0.8}Nd_{x}Y_{2.2-x}Fe_{5}O_{12}$ (Ec. 1)

Se colocaron en viales de acero 5 g de óxidos de partida, en relación estequiométrica, junto con bolas de acero, los cuales fueron molidos durante 5 horas, de acuerdo con Sánchez-De Jesús [7, 8]. Los polvos obtenidos  $Bi_{0.8}Nd_xY_{3-x}Fe_5O_{12}$  con concentraciones de  $Nd^{3+}$  ( $0 \le x \le 1.5$ ,  $\Delta x=0.3$ ) posteriormente se compactaron aplicando 900 MPa de presión y sinterizados hasta 900°C durante 6 h. Con la finalidad de determinar parámetros de red (*a*), tamaño de cristalita (*D*<sub>m</sub>) y micro tensiones (*µs*), los polvos se caracterizaron mediante DRX en un difractómetro marca Inel, Modelo Equinox 2000 con radiación Co K<sub>α1</sub>. A los patrones obtenidos se les realizó refinamiento Rietveld, adicionalmente para evaluar morfología y tamaño de partícula, los compactos se caracterizaron mediante MEB en un equipo marca Jeol Modelo JSM-6300. Por otra parte la caracterización química para detectar las vibraciones de enlace Bi-O, Nd-O y Fe-O se realizó mediante la técnica espectroscópica de Infrarrojo por Transformada de Fourier (FT-IR) empleando un equipo marca Perkin Elmer, modelo Spectrum GX en el intervalo de 400-1200 cm<sup>-1</sup> en pastillas de KBr. Finalmente se realizaron estudios de magnetización y susceptibilidad magnética a temperatura ambiente utilizando un magnetómetro de muestra vibrante Microsense EV7 con un campo máximo de 18 kOe.

#### RESULTADOS

Los polvos obtenidos después de la mecanosíntesis fueron tratados a 900 °C durante 6 h, con ello se redució la temperatura de sinterización con respecto al YIG puro. En la Figura 1 se muestran los difractogramas obtenidos, en los cuales se identifican los picos de reflexión característicos del granate de  $B_{0.8}$  Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> excepto para la concentración *x*=2.5 donde predomina la fase de YFeO<sub>3</sub> con pequeñas cantidades de FeO<sub>3</sub>.



Figura 1: Patrones de difracción de rayos X de la mezcla de Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Bi<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Nd<sub>2</sub>O<sub>3</sub> y Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> para obtener Bi<sub>0.8</sub>Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (0 ≤ *x* ≤ 1.5, Δ*x*=0.3) tratadas a 900 °C durante 6 h.

Con la finalidad de determinar las fases presentes, se realizó refinamiento Rietveld a cada uno de los patrones de difracción de las muestras tratadas. Se presenta la Tabla I con valores obtenidos: parámetro de red (*a*), tamaño de cristalita ( $D_m$ ), micro tensiones ( $\Box s$ ) y ( $\Box^2$ ) ajuste del refinamiento.

| Tabla I: Resultados de refinamiento | Rietveld para Bi <sub>0.8</sub> Nd <sub>1.2</sub> YFe <sub>5</sub> O <sub>12</sub> (0 ≤ | $x \le 1.5, \Delta x=0.3$ ) obtenida |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| por molienda de                     | alta energía durante 5 h y tratada a §                                                  | 00 °C                                |

| Nd<br>nivel<br>x | Fase                                                                                    | Grupo<br>espacial | %<br>peso | D <sub>m</sub><br>(nm) | Parámetro<br>De red (a)<br>nm | μs                       | $R_{wp}$ | <b>□</b> <sup>2</sup> |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------|------------------------|-------------------------------|--------------------------|----------|-----------------------|
| 0                | $Bi_{0.8}Y_{2.2}Fe_5O_{12}$                                                             | la3d              | 100       | 124.6                  | 1.231                         | 3.4·10⁻<br>₃             | 10.87    | 0.82                  |
| 0.3              | Nd0.3 Bi0.8Y1.9<br>Fe5O12                                                               | la3d              | 100       | 126.6                  | 1.233                         | 3.4·10 <sup>-</sup><br>₃ | 8.86     | 0.78                  |
| 0.6              | $\begin{array}{ccc} Nd_{0.6} & Bi_{0.8}Y_{1.6} \\ Fe_5O_{12} \end{array}$               | la3d              | 96.0      | 137.9                  | 1.235                         | 3.4·10 <sup>-</sup><br>₃ | 7.82     | 0.77                  |
|                  | YFeO <sub>3</sub>                                                                       | Pnma              | 1.3       | 100.0                  | 0.55                          | 6.0·10⁻<br>₄             |          |                       |
|                  | Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>                                                          | R-3cH             | 2.7       | 100.0                  | 0.55                          | 6.0·10 <sup>-</sup><br>4 | -        |                       |
| 0.9              | Nd <sub>0.9</sub><br>Bi <sub>0.8</sub> Y <sub>1.3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub> | la3d              | 96.2      | 123.1                  | 1.238                         | 3.1·10 <sup>-</sup><br>3 | 7.39     | 0.80                  |
|                  | YFeO <sub>3</sub>                                                                       | Pnma              | 1.3       | 100.0                  | 0.55                          | 6.0·10 <sup>-</sup><br>4 | -        |                       |
|                  | Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>                                                          | R-3cH             | 2.5       | 100.0                  | 0.50                          | 6.0·10 <sup>-</sup><br>₄ | -        |                       |
| 1.2              | Nd <sub>1.2</sub><br>Bi <sub>0.8</sub> Y <sub>1.0</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub> | la3d              | 93.0      | 888.0                  | 1.239                         | 2.9·10 <sup>-</sup><br>₃ | 7.45     | 0.88                  |
|                  | YFeO₃                                                                                   | Pnma              | 7.0       | 100.0                  | 0.55                          | 6.0·10⁻<br>₄             | -        |                       |
| 1.5              | YFeO₃                                                                                   | Pnma              | 81.2      | 158.0                  | 0.55                          | 3.5·10⁻<br>₃             | 5.89     | 0.79                  |
|                  | Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>                                                          | R-3cH             | 18.8      | 79.47                  | 0.50                          | 3.0·10⁻<br>₃             | -        |                       |

Los resultados plasmados en la Tabla I, donde se observa un sistemático incremento en el parámetro de red (*a*) conforme aumenta el nivel de sustitución (*x*) atribuido a la distorsión de la red, debido al mayor radio iónico de los iones dopantes Nd<sup>3+</sup> (0.1109nm) y bismuto (0.117nm) comparado con el del Y<sup>3+</sup> (0.1019nm) [9], mientras que los valores de micro tensión disminuyen conforme aumenta el nivel de dopaje, del mismo modo para dopajes mayores a *x*=0.6 el tamaño de cristalita disminuye, lo cual es asociado a defectos cristalinos, modificando los parámetros de red, como consecuencia ocasionada por la presencia de fases minoritarias YFeO<sub>3</sub> y FeO<sub>3</sub>, las cuales para la muestra *x*=1.5 son predominantes.

Por otra parte los ciclos de histéresis obtenidos de los análisis de magnetometría de muestra vibrante, se observan en la Figura 2. El comportamiento es ferrimagnético y presenta mínima variación de la  $M_s$  con valores promedio de 23 emu/g menor a la del YIG puro de 26 emu/g. Considerando que el cambio en la longitud del ángulo de enlace se asocia con las interacciones de superintercambio en sitios octaédricos y tetraédricos. Por ello estos resultados son atribuidos a la introducción del ión diamagnético Bi<sup>3+</sup> en el YIG, además la disminución de los valores de M<sub>s</sub> para la muestra x = 1.2 (21.7 emu/g) y (0.841 emu/g) para x = 1.5 es debido a la presencia de YFeO<sub>3</sub> y FeO<sub>3</sub>. Con respecto a los valores de coercitividad los cuales son dependientes de la microestructura y pureza de la fase, en la parte inferior derecha de la figura 2, se observan valores de campo coercitivo (H<sub>c</sub>) en el rango de 17.4-46.5 Oe y para x = 1.5 de 49.1 Oe, presentando incremento con el aumento de la concentración, estos resultados indican que los dispositivos que se fabriquen requieran poca energía para magnetizarse o desmagnetizarse ya que trabajan a altas frecuencias.



Figura 2: Curvas de histéresis magnética de polvo molido durante 5 h y tratado térmicamente a 900 ° C durante 6 h Bi<sub>0.8</sub>Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> ( $0 \le x \le 1.5, \Delta x=0.3$ )

Con la finalidad de confirmar la presencia de los iones de Nd<sup>3+</sup> y Bi<sup>3+</sup> dentro de la estructura del YIG se analizaron los polvos mediante Espectroscopía de Infrarrojo (IR) en el rango de 400 y 1200 cm<sup>-1</sup>. en la Figura 3 se presentan los espectros de transmitancia FT-IR de las muestras Bi<sub>0.8</sub>Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub> Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (0 ≤ *x* ≤ 1.5,  $\Delta x$ =0.3) molidas durante 5 h y tratadas a 900 °C durante 6 h donde se observa la vibración del enlace Nd-O a 484 cm<sup>-1</sup> y a 418 cm<sup>-1</sup>,por otro lado se observan tres vibraciones que corresponden al enlace tetraédrico Fe-O (563, 600 y 660 cm<sup>-1</sup>) que decrecen por efecto de la sustitución Bi<sup>3+</sup> en sitios dodecaédricos, así como la vibración en 473 cm<sup>-1</sup> característica de la YFeO<sub>3</sub> [10].



Figura 3: Espectro IR de polvos molidos de Bi<sub>0.8</sub>Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> ( $0 \le x \le 1.5$ ,  $\Delta x$ =0.3) sinterizados a 900°C6H

Por otra parte las micrografías obtenidas de los análisis por Microscopía Electrónica de Barrido (MEB) realizadas a los polvos Bi<sub>0.8</sub>Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (0 ≤ x ≤ 1.5,  $\Delta$ x=0.3), las cuales no se presentan. En ellas se observan partículas con distribución de tamaño casi uniforme, ligeramente aglomerados, morfología irregular y redondeada, de aproximadamente 1 µm de diámetro. El tamaño pequeño de las partículas es atribuido a la introducción de los iones Bi<sup>3+</sup> y Nd<sup>3+</sup> en el YIG así como al método de síntesis, pero sin modificar significativamente la morfología de las partículas.

#### CONCLUSIONES

En el presente trabajo se logró sintetizar Bi<sub>0.8</sub>Nd<sub>x</sub>Y<sub>2.2-x</sub> Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (0 ≤ x ≤ 1.5,  $\Delta$ x=0.3) mediante molienda de alta energía asistida con tratamiento térmico a 900°C durante 6 horas, considerando disminución de temperatura de sinterización, atribuido a la introducción del ión Bi<sup>3+</sup>. Se detecta incremento en *a* conforme aumenta la concentración de Nd<sup>3+</sup>, de tal modo que para dopajes mayores a *x*=0.6 el *D*<sub>m</sub> disminuye, atribuido a la presencia de las fases YFeO<sub>3</sub> y FeO<sub>3</sub>, predominantes para *x*=1.5. Adicionalmente los valores de M<sub>s</sub> se mantienen constantes 23 emu/g, pero menores a los reportados para el YIG puro 26 emu/g, mientras que a concentraciones mayores a 1.2 su M<sub>s</sub> es de 21.7 emu/g disminución ocasionada por la formación de la fase YFeO<sub>3</sub> con campos coercitivos en el rango de 17-49 Oe. Los espectros de transmitancia FT-IR confirman la introducción de los iones Nd<sup>3+</sup> y Bi<sup>3+</sup>. Finalmente las micrografías SEM obtenidas muestran notable similitud y reducido tamaño de partícula, en todas las muestras estudiadas con partículas de aproximadamente 1 µm de diámetro, lo cual es provocado por la introducción del ión Bi<sup>3+</sup>.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- B. Dong, Y. Cui, H. Yang, L. Yu, W. Jin, S. Feng, "The preparation and magnetic properties of Gd<sub>x</sub>BiY<sub>2-x</sub> Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> nanoparticles", Materials Letters, 60, 2012, pp. 2094–2097. Doi: 10.1016/j.matlet.2005.12.143
- H. Xu, H. Yang, "Magnetic Properties of Y<sub>3</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> Nanoparticles Doped Bi and Ce Ions ", Materials and Manufacturing Processes, 23, 2008, pp.1–4, Doi: 10.1080/10426910701524212.
- Y.J. Wu, C. Yu, X. M. Chen, J. Li, "Magnetic and magnetodielectric properties of Bi-substituted yttrium iron garnet ceramics", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 324, 2012, pp. 3334–3337. Doi: 10.1016/j.jmmm.2012.05.045.
- 4. M. Niyaifar, H. Mohammadpour, "Study on magnetic role of Bi<sup>3+</sup> ion by random cation distribution model in Bi–YIG system", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 396, 2015, pp. 65–70. Doi:10.1016/j.jmmm.2015.08.009.
- 5. N. Jia, Z. Huaiwu, J. Li, Y. Liao, L. Jin, Ch. Liu, V. G. Harris, "Polycrystalline Bi substituted YIG ferrite processed via low temperature sintering", Journal of Alloys and Compounds, 2016. Doi: 10.1016/j.jallcom.2016.10.201
- A. Durán, C. Ostos, O. Arnache, J. M. Siqueiros, M. García-Guaderrama, "Multiferroic properties of the Y<sub>2</sub>BiFe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> garnet", Journal of Applied Physics 122, 2017, pp. 134101. Doi: 10.1063/1.5005908
- F. Sánchez-De Jesús, C. Cortés-Escobedo, R. Valenzuela, S. Ammar y A. Bolarín-Miró, "Synthesis of Y<sub>3</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub> (YIG) assisted by high-energy ball milling" Ceramics International, 5257-5263, 2012, pp. 5257-5263. Doi: 10.1016/j.ceramint.2012.03.036
- E. Baños-López, C. A. Cortés-Escobedo, F. Sánchez-De Jesús, A. Barba-Pingarrón, A. M. Bolarín-Miró, "Crystal structure and magnetic properties of cerium-doped YIG: Effect of doping concentration and annealing temperatura", Journal of Alloys and Compounds 730, 2018, pp. 127-134. Doi:10.1016/j.jallcom.2017.09.304
- 9. M. Ristic, I. Nowik, "Influence of synthesis procedure on the YIG formation", Mate. Lett. 57, 2003, pp. 2584-2590. Doi: 10.1016/S0167-577X(02)01315-0
- 10. R. D. Shannon, "Revised effective ionic radii and systematic studies of interatomic distances in halides and chalcogenides", Acta Cryst., A32, 1976, pp. 751-767, doi.org/10.1107/S0567739476001551.

# DINÁMICA NO LINEAL DE UNA PELOTA SUSPENDIDA EN UNA COLUMNA DE AIRE

Daniela Rodríguez Lara, Iván Álvarez Ríos, Gabriel Arroyo Correa

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH.

#### RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio experimental de la dinámica no lineal de una pelota de ping pong (3.73 cm de diámetro y 1.5 g de masa) suspendida en una columna de aire producida con una bomba cuya presión se puede regular (0 a 900 pascales). Se utilizó instrumentación moderna (sensores de movimiento, sistema de adquisición y procesamiento de datos, computadora). Los sensores de movimiento capturaron datos a una razón de muestreo de 40 Hz/s y se colocaran en las tres direcciones (X, Y y Z) para medir las posiciones, velocidades y aceleraciones de la pelota como funciones de la presión de salida del aire de la bomba. Se tomaron mediciones por 30 segundos. Se hizo un análisis cinemático de las series del tiempo (posición vs. tiempo, velocidad vs. tiempo y aceleración vs. tiempo) y un análisis basado en la teoría de sistemas dinámicos (espacio de configuraciones, diagramas de fase, mapas de retorno y espectros de Fourier). Los resultados experimentales muestran que el movimiento de la pelota es cuasi-regular a valores medios de la presión (225-450 pascales), pero irregular a valores bajos (<225 pascales) y altos de la presión (>450 pascales). Esto quedó de manifiesto por los espectros de Fourier y los mapas de retorno de las posiciones de la pelota. Agradecimiento: CIC-UMSNH 2018.

#### INTRODUCCIÓN

Existen experimentos bien específicos para estudiar el movimiento de objetos en condiciones controladas usando tecnologías modernas y tradicionales [1]. Hay situaciones en donde, por su naturaleza, resulta interesante analizar el movimiento no trivial de ciertos objetos, como lo es el de una pelota de ping pong suspendida en una columna de aire, que se presenta en este trabajo. Se usan dos enfoques para analizar el problema: básico (cinético) y avanzado (dinámico). En el enfoque básico se usan gráficos como posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo, así como las correlaciones entre estas variables, para entender la cinemática del movimiento de la pelota [2]. En el enfoque avanzado se usan herramientas de la teoría de sistemas dinámicos (espacio fase, espectros de Fourier y mapas de retorno) para indagar más en la mecánica del movimiento de la pelota [3].

#### PARTE EXPERIMENTAL

En la Fig. 1 se presenta el arreglo experimental utilizado. B es la bomba de aire (Pasco, SF-9216) usada para suspender la pelota de ping pong P (diámetro de 3.73 cm, masa de 1.5 g) a distintas alturas. I es una interfaz de adquisición de datos (Pasco 750). S1, S2 y S3 son sensores de movimiento (Pasco, CI-6742A) utilizados para registrar los movimientos en los ejes X, Y y Z, respectivamente. El sistema permite monitorear el movimiento de P en tres dimensiones. Se realizaron varias mediciones durante 30 segundos a una razón de muestreo de 40 Hz/s, utilizando el programa DataStudio. El análisis y el procesamiento de los datos se hicieron con los programas Origin 8 y Gnuplot.



Figura 1. Arreglo experimental.

#### RESULTADOS

Primeramente se caracterizó la presión del aire producida por la bomba. Esto permitió medir la forma funcional de la altura de suspensión promedio de la pelota de ping pong como función de la presión, Fig. 2, en donde se observa una dependencia no lineal. La Fig. 3 muestra gráficos tridimensionales

(3D) de la evolución dinámica de la posición, velocidad y aceleración de la pelota, para las regiones marcadas como S1, S5 y S9 en la Fig. 2. En el caso de las presiones bajas y altas (regiones S1 y S9) se pueden notar patrones similares en la dispersión de los valores para la posición, velocidad y aceleración, lo cual también se puede identificar al observar las proyecciones en los planos XY, XZ y YZ, definidos en planos verticales. En contraparte, para presiones medias (región S5) los patrones de dispersión son diferentes, presentándose en planos horizontales.



ALTURA DE SUSPENSIÓN vs PRESIÓN DEL AIRE

Figura 2. Gráfica de la altura de suspensión Z (valor promedio) de la bola como función de la presión del aire a la salida de la bomba. Los valores de la presión se estimaron de la información técnica del fabricante. Los valores S1, S5 y S9 se tomaron para el análisis del movimiento.



Figura 3. Gráficas 3D de la posición (R), velocidad (V) y aceleración (a) para S1, S5 y S9 (puntos en negro); se muestran las proyecciones en los planos XY (puntos en rojo), XZ (puntos en verde) y YZ (puntos en azul).

Para simplificar el análisis cinemático, en la Fig. 4 se muestran las magnitudes de la posición, la velocidad y la aceleración de la pelota como funciones del tiempo. Los casos S1 y S9 presentan una

marcada irregularidad en la magnitud de la posición, siendo mayor en el caso S9. En el caso S5, la magnitud de la posición muestra cierto comportamiento regular. Las correlaciones entre la magnitud de la posición y la magnitud de la velocidad, así como entre la magnitud de la posición y la magnitud de la aceleración, se muestran en la Fig. 5. El espacio fase para S5 es el menos disperso y el más disperso es el de S9. En el caso S5, sin embargo, la gráfica de a vs R, no muestra evidencia de un posible movimiento armónico. Para poder analizar en mayor detalle la dinámica de la pelota, es necesario aplicar técnicas más avanzadas derivadas de la teoría de sistemas dinámicos [3]. De las herramientas proporcionadas por la teoría de sistemas dinámicos, en este trabajo se usaron los espectros de Fourier y los mapas de retorno para las magnitudes de las posiciones de la pelota. En la Fig. 6 se muestra estas cantidades. Sólo para el caso S5 se puede identificar una frecuencia definida, evidenciando un periodo de oscilación específico. También se puede observar que el mapa de retorno es más compacto para el caso S5, y menos compacto para los casos S1 y S9. Estos resultados explican el comportamiento más irregular de la pelota para presiones bajas y altas (casos S1 y S9) y menos irregular para presiones medias (caso S5).



Figura 4. Gráficas temporales de las magnitudes de la posición (R), velocidad (V) y aceleración (a) para S1, S5 y S9.



Figura 5. Gráficas de V vs R (espacio-fase) y de a vs R para S1, S5 y S9.



Figura 6. Análisis espectral y mapas de retorno de la magnitud de la posición (R), para S1, S5 y S9.

#### CONCLUSIONES

En este trabajo se hizo un análisis detallado, cinético y dinámico, del movimiento de una pelota de ping pong suspendida en una columna de aire. Para valores medios de la presión de aire (caso S5) se evidenció la presencia de una frecuencia de oscilación, como lo mostró el análisis espectral de la posición de la pelota. Sin embargo, para valores bajos y altos de la presión el movimiento de la pelota es más irregular. Nuestros enfoques utilizados se pueden aplicar para analizar situaciones más complejas acerca del movimiento de objetos suspendidos en corrientes de aire. Por ejemplo, se podría analizar el efecto de la turbulencia en el movimiento de la pelota. Verificamos experimentalmente que al insertar pequeños objetos cilíndricos en la columna de aire, se pueden inducir movimientos estables e inestables sobre la pelota, dependiendo de la posición del objeto en la columna del aire.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1. S. Gil y E. Rodríguez, "Física re-creativa: experimentos de Física usando nuevas tecnologías", (Pearson Educación, S. A, Buenos Aires, Argentina, 2001), pp. 90-96.
- 2. R. L. Reese, "Física Universitaria", (Thompson Learning, Inc., México, 2002), Vol. 1, pp. 117-129.
- 3. T. Kapitaniak, "Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control", Second Ed. (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2000), pp. 27-35, 48-51.
# ESTRUCTURA DE BANDAS DE UN CRISTAL FONÓNICO UNIDIMENSIONAL EN UNA GUÍA DE ONDAS EN 3D, USANDO EL MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN PERIÓDICA

María Claudia Guillén Gallegos, Hugo Enrique Alva Medrano, Alberto Mendoza Suárez, Héctor Igor Pérez Aguilar.

#### Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" de la UMSNH, Morelia, Mich., e-mail: <u>clausfase4@yahoo.com.mx</u>, <u>hugoalva9@gmail.com</u>, <u>amendo-</u> zas777@yahoo.com, hiperezag@hotmail.com

# RESUMEN

En la actualidad, los cristales fonónicos constituyen materiales periódicos artificiales que permiten controlar y manipular la propagación de ondas acústicas. En este trabajo, consideramos perfiles tridimensionales formados por guías de ondas acústicas rectangulares que contienen estructuras internas, en la forma de un arreglo periódico unidimensional. Además, se presenta un procedimiento integral del tipo Método de Elementos de Frontera, el cual implementa funciones de Green periódicas. En este caso, el modelo matemático del sistema acústico propuesto satisface el teorema de Bloch para el campo de presiones que se hace presente y por lo tanto, se puede considerar una estructura de bandas asociada a la periodicidad. Como aplicaciones de la metodología propuesta, se reporta la obtención de bandas de frecuencia prohibidas para guías de onda que contienen inclusiones esféricas con distintos diámetros, considerando periodicidad perfecta y bajo la condición de frontera de Neumann. El sistema considerado constituye en sí mismo un cristal fonónico cuya estructura de bandas corresponde en muchos aspectos a un cristal fonónico unidimensional convencional. Este hecho es una alternativa para fabricar un cristal fonónico que presenta una doble función: como cristal fonónico y como guía de ondas acústica. Estas propiedades presentan cierto interés desde el punto de vista tecnológico.

## INTRODUCCIÓN

La idea de que una estructura periódica en dos o tres dimensiones de un material pueda actuar en la propagación de ondas acústicas, es reciente. Un cristal fonónico es un material estructurado artificialmente hecho de al menos dos o más materiales (sólido, líquido o gas) con diferentes densidades de masa y propiedades elásticas, cuyo notorio interés radica en su capacidad para controlar la propagación de ondas elásticas a través de bandas prohibidas que bajo ciertas condiciones se pueden formar, para adaptarse por sus propiedades de dispersión [1].

En cristales fonónicos, éstas son el resultado de la interferencia destructiva de ondas acústicas dispersas [2]. En estas regiones de frecuencia prohibida, las ondas elásticas no pueden propagarse y por ende, pudieran llegar a tener un impacto considerable en el desarrollo de estructuras libres de vibraciones en rangos de frecuencia específicos. Actualmente, estas estructuras fonónicas se han convertido en un tema de investigación importante debido a su capacidad de proporcionar aislamiento acústico y controlar el flujo del sonido a través de una cavidad, como si fuera un filtro. [3].

Por ende, las mayores expectativas de los cristales fonónicos son referidas a su capacidad para guiar ondas acústicas altamente eficientes, mediante la remoción de esparcidores; es decir, se construye una guía de ondas sónica que contiene defectos en el sistema, en la forma de un cristal fonónico compuesto que produce transmisión de bajas pérdidas, a través de ellos [4].

Desde este punto de vista, las guías de ondas acústicas construidas en cristales artificiales es un tema que está vigente hoy en día, no sólo teórica sino también experimentalmente. En la literatura, la mayoría de los trabajos presentados están limitados a cristales fonónicos bidimensionales y se han investigado diferentes tipos de celdas unitarias, para maximizar el rango de las frecuencias prohibidas que se hacen presentes [5]. Más aún, sólo pocos ejemplos de cristales completamente tridimensionales han sido investigados, hasta ahora [6, 7]. Los estudios en 2D están enfocados en su mayoría, sobre la implementación del método de expansión de ondas planas (PWE) [8], basado en la expansión de los coeficientes periódicos en la ecuación de onda, en la forma de sumas de Fourier y ha sido aplicado en la práctica para una variedad de combinaciones de materiales, tanto ideales como realistas.

Sin embargo, el utilizar dicha metodología para modelar sistemas periódicos en 3D que involucran esferas sólidas inmersas en un fluido, es inadecuado para producir resultados precisos y se requiere

entonces, de un nuevo enfoque para la investigación. Una técnica rigurosa para calcular estructuras de bandas es un procedimiento integral del tipo Método de Elementos de Frontera (BEM) y se le conoce como El Método de la Ecuación Integral. Cabe mencionar que, su aplicación se basa en la resolución de ecuaciones integrales de superficie (SIE) para determinar los campos dispersos en sistemas bidimensionales y tridimensionales de gran interés, en áreas como la óptica, propagación de ondas sísmicas y por supuesto, en la acústica.

La ecuación de onda sónica en 3D implica el planteamiento de una ecuación escalar de Helmholtz cuando consideramos el potencial para el vector desplazamiento del campo o la presión como argumentos. Por lo tanto, la ecuación de onda en el régimen estacionario es la misma que en el caso 2D, pero con diferencias importantes, ya que la función de Green y su derivada normal presentan singularidades de orden superior. Este hecho complica la solución numérica al considerar el Método de Elementos de Frontera, el cual en general, implica la expansión de integrandos sobre parches curvilíneos en la forma de una representación paramétrica en términos de las longitudes de arco de un sistema de coordenadas ortogonales. En la aplicación al caso tridimensional, los investigadores han propuesto una serie de variantes a la solución de las ecuaciones integrales asociadas con la ecuación de Helmholtz para determinar las funciones del campo y su derivada normal directamente, en contraste con otros métodos que se expanden sobre una base funcional. Posiblemente, la característica más importante de esta metodología es su versatilidad para resolver problemas de dispersión (problemas exteriores), modos resonantes en cavidades (problemas interiores) [9], y cálculos de estructuras de bandas en sistemas periódicos infinitos, como cristales fonónicos [10].

En el presente trabajo, calculamos las relaciones de dispersión de una guía de ondas acústica tridimensional compuesta por cuatro placas paralelas perfectamente conductoras que incluyen un arreglo periódico unidimensional de inclusiones esféricas sólidas, utilizando el Método de la Función de Green Periódica (PGFM) [11]. En particular, mostramos las bandas prohibidas de una guía de onda de cristal fonónico (PCW) cuando se consideran distintos valores de los radios (o fracciones de llenado), bajo condiciones de frontera de Neumann. Además, cuando es posible hacerlo, los resultados numéricos se comparan con su contraparte analítica, encontrando buena concordancia.

Finalmente, queremos mencionar que el método propuesto es una generalización al caso 3D de trabajos previos publicados sobre la aplicación del método integral para resolver problemas rigurosamente en 2D [12-14].

# **ENFOQUE TEÓRICO**

En esta sección, presentamos un método numérico para calcular las estructuras de bandas de una guía de ondas en 3D de cristal fonónico unidimensional (3DPnCW). Consideramos que el perfil está conformado por superficies acústicas rígidas y que el medio que se hace presente, dentro y fuera del sistema, entre las paredes rígidas y las inclusiones esféricas, es el aire. La geometría propuesta se muestra en la Fig. 1.



Figura 1. Descripción gráfica de la guía de ondas rectangular de cristal fonónico (PnCW) formada por cuatro superficies acústicas planas paralelas y un arreglo unidimensional de inclusiones esféricas de radio  $r_s$ . Los perfiles  $S_{jl}$  (j = 1, 2, 3, 4) representan los lados de cada una de las celdas uni-

tarias cúbicas, y  $S_{5l}$  las superficies de la esferas, con  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 

Además, cabe mencionar que en la Fig. 1, *P* es el período de la guía de ondas en la dirección *x*, y *b* es la distancia entre las paredes planas. Un determinado valor de *l* representa una celda unitaria particular de la estructura interna periódica de la guía de onda. Por ende, para l=0 se tiene la correspondencia al caso de la celda unitaria, cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas cartesianas considerado. Además, el símbolo  $S_l$  representa todas las superficies asociadas a la *l* ésima celda unitaria.

Una ecuación de onda acústica se puede obtener a partir de las ecuaciones linealizadas de continuidad y de Euler:

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p,\tag{2}$$

como de la ecuación de estado del gas:

$$p = B\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right),\tag{3}$$

donde  $\rho$  representa la densidad de masa del gas y  $\rho_0$  es la densidad en equilibrio; **u** es el campo de velocidades; *p* es la presión acústica y *B*, es el módulo adiabático.

Aplicando la divergencia en ambos lados de la Ec. (2) y combinando la expresión resultante con las Ecs. (1) y (3), se obtiene:

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \qquad (4)$$

donde *c* es la velocidad de fase de la onda acústica, tal que  $B = \rho_0 c^2$ . La Ec. (4) se denomina ecuación de onda homogénea para perturbaciones por presión.

En el caso de una onda armónica acústica en el tiempo con frecuencia  $\omega$ , en cada celda unitaria:  $p_l(\mathbf{r},t) = p_l(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ , se obtiene la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 p_l \left( \mathbf{r} \right) + k^2 p_l \left( \mathbf{r} \right) = 0, \ l \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

donde  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$  es la posición del observador.

Debido a la periodicidad en la dirección de propagación longitudinal del sistema y a la forma diferencial de la Ec. (5), el teorema de Bloch puede ser aplicado en la dirección *x*, obteniéndose las expresiones

$$p_{l}(x+lP, y, z) = \exp(iklP) p_{0}(x, y, z),$$
  
$$\partial p_{l}(x+lP, y, z) / \partial n' = \exp(iklP) \partial p_{0}(x, y, z) / \partial n'$$
(6)

donde *k* es el vector de Bloch unidimensional.

Para resolver la Ec. (5), introducimos la función de Green:  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , la cual es una solución para

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{7}$$

donde  $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}} + z'\hat{\mathbf{k}}$  representa el punto de integración correspondiente. Consideramos el caso de una función periódica de Green para una geometría 3D, usada para resolver la ecuación de Helmholtz:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{iklP_l} e^{ikR} / R,$$
(8)

donde *R* es la magnitud de  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Usando la segunda identidad de Green tridimensional con las Ecs. (5) y (7), podemos obtener:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_l} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} p_l(\mathbf{r}') \right] dS' = \theta(\mathbf{r}) p_0(\mathbf{r}),$$
(9)

donde

$$\theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_0, \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V_0. \end{cases}$$
(10)

para dS', el elemento de área;  $\hat{n}$  es el vector normal a la región de integración y  $V_0$ , el volumen de la celda unitaria con l = 0.

Refiriéndonos al lado izquierdo de la Ec. (9), discretizamos la superficie total de integración  $S_l$  en la forma de pequeñas superficies denotadas por  $\Delta S_l^n$ :

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_l} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial p_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} p_l(\mathbf{r}') \right] dS' \approx$$
$$\sum_{n=1}^{N} D_n \left( \frac{1}{4\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_l^n} e^{iklP} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)$$
$$- \sum_{n=1}^{N} E_n \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_l^n} e^{iklP} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \right)$$
(11)

donde n = 1, 2, ..., N;  $D_n$  y  $E_n$  son los valores numéricos de la presión  $p_0(\mathbf{r}')$  y su derivada normal,  $\partial p_0(\mathbf{r}') / \partial \hat{\mathbf{n}}'$  evaluados en el *n*-ésimo punto central de  $\Delta S_l^n$ , denotado por  $\mathbf{R}_n$ .

Finalmente, la Ec. (9) puede ser escrita en la forma de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales algebraicas:

$$\sum_{n=1}^{N} \mathcal{L}_{mn}(k,\omega) D_n - \sum_{n=1}^{N} \mathcal{N}_{mn}(k,\omega) E_n = 0, \ m = 1, 2, ..., N$$
(12)

donde los elementos de matriz  $L_{\rm mn}$  y  $N_{\rm mn}$ , que dependen del vector de Block k y la frecuencia  $\omega$ , están dados por:

$$\mathcal{L}_{mn}\left(k,\omega\right) = \sum_{l=-N_{L}}^{N_{L}} e^{iklP} L_{mn}^{l}\left(\omega\right)$$
(13)

$$\mathcal{N}_{mn}\left(k,\omega\right) = \sum_{l=-N_{L}}^{N_{L}} e^{iklP} N_{mn}^{l}\left(\omega\right),\tag{14}$$

tal que  $N_L$  es el valor máximo del índice *I*, considerado numéricamente.

A su vez, los elementos de matriz  $L_{mn}^{l}(\omega)$ y  $N_{mn}^{l}(\omega)$ , dentro de las sumatorias anteriores, son definidos por los límites:

$$L_{mn}^{l}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \to 0^{+}} \int_{\Delta S_{l}^{n}} \left. \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right|_{\mathbf{r} = \mathbf{R}_{m} + \epsilon \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_{m})} dS', \qquad (15)$$

$$N_{mn}^{l}\left(\omega\right) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \int_{\Delta S_{l}^{n}} \left. e^{i\frac{\omega}{c}\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{3}}\right) \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_{m}+\varepsilon \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_{m})} dS',$$

$$-\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\Delta S_l^n} e^{i\frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( i\frac{\omega}{c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \widehat{\mathbf{n}} (\mathbf{r}') \bigg|_{\mathbf{r} = \mathbf{R}_m + \varepsilon \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_m)} dS'.$$
(16)

Calculados explícitamente, corresponden a las siguientes expresiones:

donde  $r = (x_m - (x_n + P))^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2$ ,  $Q = \sqrt{2} + 1/\sqrt{2} - 1$ ;  $\Omega_{mn}$  representa la normal exterior a la superficie en **r**' y los factores  $\tau_{nu}$  y  $\tau_{nv}$  dependen de los vectores de curvatura, todos ellos descritos respectivamente por las Ecs. (19) y (20):

$$\Omega_{mn} = \Omega_{mn_x}(x_n) (x_m - x_n) + \Omega_{mn_y}(y_n) (y_m - y_n) + \Omega_{mn_z}(z_n) (z_m - z_n),$$
(19)
$$\Omega_{mn_n} \cdot \partial^2 \mathbf{r}' / \partial s_u^2 \big|_{s_{u_n}, s_{v_n}} \quad \text{y} \quad \Omega_{mn_n} \cdot \partial^2 \mathbf{r}' / \partial s_v^2 \big|_{s_{u_n}, s_{v_n}}.$$
(20)

Considerando el caso de superficies acústicas "suaves":

$$\sum_{n=1}^{N} \mathcal{L}_{mn}(k,\omega) D_n = 0, \ m = 1, 2, ..., N.$$
(21)

En el sistema que propusimos teóricamente en este trabajo (superficies acústicas "duras"), la derivada de la presión acústica es igual a cero (condición de frontera de Neumann). Obteniéndose así, un nuevo sistema reducido de ecuaciones ( $D_n = 0$  para n = 1, 2, ..., N), a partir de la Ec. (12):

$$\sum_{n=1}^{N} \mathcal{N}_{mn}(k,\omega) E_n = 0, \ m = 1, 2, ..., N.$$
(22)

El sistema de ecuaciones lineales obtenido tiene una matriz representativa asociada  $M_{mn}$ , que depende del vector de Bloch *k* y la frecuencia  $\omega$ . Como el sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución no trivial puede ser obtenida, si el determinante de dicha matriz es cero. Para determinar la estructura de bandas correspondiente, definimos la función:

$$D(k,\omega) = \ln\left(\left|\det\left(\mathcal{M}_{mn}(k,\omega)\right)\right|\right),\tag{23}$$

que numéricamente presenta puntos mínimos locales, que nos darán la relación de dispersión numérica  $\omega = \omega_r(k)$ .

#### RESULTADOS

Inicialmente, se considera una guía de ondas rectangular tridimensional con paredes planas, la cual tiene asociada una estructura de bandas que puede calcularse analíticamente. Por ende, para validar el método numérico presentado en la sección anterior, comparamos los resultados teóricos con los obtenidos a través de la simulación. La guía de onda de longitud infinita tiene una anchura entre las placas y periodicidad dadas respectivamente por:  $b = 2\pi = P$ , en la dirección de propagación longitudinal del sistema como se muestra en la Fig. 1.

La relación de dispersión  $\omega_r(k)$  está dada por [15]:

$$\omega_r\left(k\right) = \frac{P}{2\pi} \sqrt{\left(k - \frac{2\pi}{P}m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}n\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}q\right)^2}$$

para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...; n, q = 1, 2, 3, ...$ 

En la Fig. 2, mostramos la estructura de bandas (círculos sólidos rojos) en términos de la frecuencia reducida  $\omega_r = (P/2\pi)(\omega/c)$  y *k* dentro de la primera zona de Brillouin  $-\pi/P \le k \le \pi/P$ , con  $P = 2\pi$ , determinada con nuestro método numérico (PGFM). La gráfica determinada analíticamente (puntos azules) es superpuesta a la primera, mostrando una excelente concordancia.



Figura 2. (a) Estructuras de bandas de una guía de ondas rectangular tridimensional con paredes planas. Comparación del modelo analítico (puntos azules) y el modelo numérico (círculos sólidos rojos).

A partir de la Fig. 2, es notorio que las ondas elásticas de todas las frecuencias referidas pueden propagarse por completo, dentro de la estructura de bandas.

Además, a partir de estos resultados, podemos proceder con mayor confiabilidad en la obtención de los cálculos sobre el sistema que incluye dispersores. Una desventaja al considerar estructuras híbridas en las que se hacen presentes varias tipos de combinaciones de geometrías distintas, es que no existen resultados analíticos con los que puedan compararse los datos numéricos obtenidos. A continuación, se analizará el caso de una guía de ondas rectangular en 3D con un arreglo periódico unidimensional de inclusiones, en la dirección longitudinal del sistema. Para este propósito, cuatro diferentes configuraciones son consideradas para los radios de la esferas:  $r_s = 0.083$  (Fig. 3 (a)),  $r_s = 0.802$  (Fig. 2 (b)),  $r_s = 1.286$  (Fig. 2 (c));  $r_s = 1.525$  (Fig. 2 (d))

 $r_s = 0.892$  (Fig. 3 (b)),  $r_s = 1.286$  (Fig. 3 (c)) y  $r_s = 1.525$  (Fig. 3 (d)).



Figura 3. Celda unitaria de una guía de ondas rectangular tridimensional que contiene una disposición periódica unidimensional de inclusiones esféricas con radios: (a)  $r_s = 0.083$ , (b)  $r_s = 0.892$ , (c)  $r_s = 1.286$ , (d)  $r_s = 1.525$ . Diagramas de bandas en 3D del cristal fonónico periódico ( $P = 2\pi$ ) en una dirección, utilizando nuestro método numérico (PGFM3D). La distancia entre las superficies planas de la guía de onda rectangular es  $b = 2\pi$ .

Cabe mencionar que cuando la condición de frontera de Neumann es considerada, se tiene la presencia de gaps con anchura pequeña, lo cual es evidente para grandes fracciones de llenado tal como se observa en las Figs. 3(g) y 3(h).

Finalmente, observamos que las estructuras de bandas de esta guía de ondas tridimensional se asemejan a las asociadas al cristal fonónico unidimensional, con algunas características interesantes que pueden ser manipuladas; particularmente la anchura de los gaps, simplemente cambiando el valor del radio de la inclusión esférica.

## CONCLUSIONES

Hemos desarrollado y aplicado una metodología numérica rigurosa del tipo Método de Elementos de Frontera para estudiar un cristal fonónico inmerso en una guía de ondas rectangular en 3D que contiene una disposición periódica unidimensional de inclusiones esféricas sólidas. Con el Método de la Función de Green Periódica, determinamos la estructura de bandas de este sistema, bajo la condición de frontera de Neumann. Los resultados numéricos obtenidos muestran buena precisión y eficiencia del método integral, respecto a su contraparte analítica. Cabe mencionar, la aparición de bandgaps de la estructura propuesta para diferentes valores del radio de las esferas (o fracciones de llenado). Creemos que estas propiedades podrían representar gran interés desde un punto de vista tecnológico. Como continuación del presente trabajo, este método nos permitirá calcular la respuesta acústica de cristales fonónicos finitos inmersos en guías de ondas en 3D.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. Babaee, S., Wang, P., y Bertoldi, K., "Three-dimensional adaptive soft phononic crystals", Journal of Applied Physics. 117, 244903 (2015).
- Gao, N., Hui-Wu, J., y Yu, L., "Research on bandgaps in two-dimensional phononic crystal with two resonators", Ultrasonics 56, 287-293 (2015).
- Khelif, A., DjafariRouhani, B., Vasseur, J.O. y Deymier, P.A., "Transmission and dispersion relations of perfect and defect-containing waveguide structures in phononic band gap materials", Physical Review B. 68, 1-8 (2003).

- 4. Khelif, A., y Benchabane, S., "Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides", Applied Physics Letters. 84, 4400-4402 (2004).
- 5. Delpero, T., Schoenwald, S., y Bergamini, A., "Structural engineering of three-dimensional phononic crystals", Journal of Sound and Vibration 363, 156-165 (2016).
- 6. Kushwaha, M.S., y DjafariRouhani, B., "Complete acoustic stop bands for cubic arrays of spherical liquid balloons", Journal of Applied Physics. 80, 3191 (1996).
- Bapat, M.S., Shen, L., y Liu, Y.J., "Adaptive fast multipole boundary element method for three dimensional half-space acoustic wave problems", Engineering Analysis with Boundary Elements 33, 1113-1123 (2009).
- 8. Charles, C., Bonello, B. y Ganot, F., "Propagation of guided elastic waves in 2D phononic crystals", Ultrasonics 44, 287-293 (2009).
- Guel-Tapia, J.A., Villa-Villa, F., Mendoza-Suárez, A. y Pérez-Aguilar, H., "Acoustic Scattering of 3D Complex Systems Having Random Rough Surfaces by Scalar Integral Equations", Archives of Acoustic. 41, 461-472 (2016).
- 10.Villa-Villa, F., Pérez-Aguilar, H. y Mendoza-Suárez, A., "The locally corrected Nyström method applied to 3D scalar SIE in acoustic cavities using curvilinear coordinates", Engineering Analysis with Boundary Elements 79, 110-118 (2016).
- Mendoza-Suárez, A., y Pérez-Aguilar, H., "Numerical integral method to study plasmonic modes in a photonic crystal waveguide with circular inclusions that involve a metamaterial", Photonic Nanostruc. 21, 1-12 (2016).
- 12.Mendoza-Suárez, A., y Pérez-Aguilar, H., "Optical response of a photonic crystal waveguide that includes a left-handed material", Photonic Nanostruc. 14, 93-100 (2015).
- 13.Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H., y Villa-Villa, F., "Photonic crystal integrated in a waveguide with periodic roughness", Prog. Electromagn. Res. 121, 433-452 (2011).
- Mendoza-Suárez, A., F. Villa-Villa., y Gaspar-Armenta, "Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive left-handed materials and dielectrics in the unit cell", J. Opt. Soc. Am. B. 24, 3091-3098 (2007).
- 15.Arfken, G.B., Weber, H.J., y Harris, F.E. Mathematical Methods for Physicists. 7<sup>th</sup> Edition. Academics Press, USA. (2013).

## UNA FORMA INTERACTIVA DE ENTENDER SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN REUTILIZANDO RE-CIPIENTES COTIDIANOS

Keops García-Galván, Brandón Morales Olguín, Alejandro Valdivieso Oviedo, Hannia Janet López Ángeles, Karen Yazareth Gonzaga Rivas, Abdiel Ramírez Reyes, José Roberto Contreras Bárbara

Instituto Tecnológico de Atitalaquia. Av. Tecnológico No. 9, Tezoquipa, Atitalaquia Hidalgo, México C.P. 42970

## RESUMEN

Abordar el tema de sólidos de revolución permite, entre otras cosas, aproximar volúmenes de distintos cuerpos. Este tema es parte de la asignatura de cálculo integral en el nivel medio y superior (ciencias e ingenierías). Su entendimiento favorece el desarrollo de competencias que permiten la conexión entre diferentes conceptos matemáticos. A pesar de su importancia, se tiene evidencia de que en ocasiones, su entendimiento es parcial o nulo durante el curso de la asignatura. Para atender parte de esta problemática, se propone la estrategia denominada "Reutilizando recipientes cotidianos", que tiene como objetivo identificar los elementos de aprendizaje matemático que emergen, cuando se resuelven problemas relacionados con sólidos de revolución, reutilizando recipientes cotidianos. La metodología es que los estudiantes resuelvan situaciones problemáticas a partir del material de estudio propuesto. Las tareas de instrucción, siguieren utilizar sólidos de revolución y fueron aplicadas de forma piloto a un grupo mixto de 30 estudiantes, con conocimiento previo de cálculo diferencial. Los datos se recolectaron bajo autorización de los estudiantes, mediante toma de videos, fotografía, audio y evidencia escrita. Del trabajo realizado, se logró identificar los elementos de aprendizaje matemático que emergieron al utilizar los objetos de estudio propuestos. En este sentido, se argumenta que la propuesta sugerida robusteció el entendimiento del tema de sólidos de revolución. Ya que, permitió la manipulación de objetos concretos y se favoreció la generación de imágenes mentales sobre el significado de las expresiones matemáticas que emergieron.

# INTRODUCCIÓN

En el temario de la asignatura de cálculo integral de nivel medio superior y superior de la educación pública en México, está considerado el tema de sólidos de revolución (SEMS, 2013). Su importancia radica en que a través de su aplicación, es posible, entre otras cosas, aproximar el volumen de ciertos cuerpos irregulares comunes en el entorno; por ejemplo, pipas, botellas de agua, jugos etc. Además de que su aprendizaje favorece el desarrollo de competencias; por ejemplo, en los alumnos aporta elementos para que argumenten sobre las aplicaciones de elementos matemáticos específicos en contextos reales, proponiendo puntos de vista reflexivos y argumentados; en docentes permite que desarrollen estrategias de enseñanza mediante experiencias y proyectos en el contexto de los estudiantes (SEMS, 2013).

A pesar de la importancia de este tema, se tiene evidencia que en ocasiones su aprendizaje se logra de manera parcial o incluso no se alcanzan a abordar este concepto en el curso normal. Una posible explicación de lo anterior, es que los temarios son exhaustivos o los problemas planteados son estrictamente apegados a alguna bibliografía. Lo que permite, un desarrollo limitado de las competencias que se deberían alcanzar a medida que se implementaran otras tareas de instrucción, donde fuera posible interactuar con los objetos de estudio, siguiendo las ideas de la corriente Piagetiana, donde parte del aprendizaje se logra cuando el sujeto interactúa con el objeto. Como una posible alternativa para atender parte de este problema, en este trabajo se reporta la implementación de una estrategia denominada "Reutilizando", la cual tiene como objetivo identificar los elementos de aprendizaje matemáticos que emergen, cuando se resuelven problemas utilizando material cotidiano; y da lugar a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué elementos de aprendizaje matemáticos emergen al resolver problemas de sólidos de revolución, al utilizar material cotidiano? La metodología propuesta fue resolver situaciones problemáticas, en la cuales el material de estudio eran recipientes cotidianos, tales como, botellas, cajas de jugo, latas, etc.

# TEORÍA

Este apartado consiste en describir el sustento de la investigación. En este sentido, es preciso subrayar la postura que se tiene sobre matemáticas, ya que las tareas de instrucción están directamente influenciadas por la forma en que los autores identifican esta disciplina Godino, Batanero, y Font, (2003). De esta manera, se adopta la postura de Steen (1988), donde argumenta que las matemáticas son ampliamente aceptadas como la ciencia de los patrones. Con esta idea, la tarea de los matemáticos consiste en observar patrones de comportamiento y generar reglas que los describan (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2013). Por esta razón, en las tareas propuestas, se busca que los estudiantes identifiquen regularidades y las modelen matemáticamente, para su posterior manipulación con elementos matemáticos.

Por otra parte, se describe que en desarrollo de las tareas de instrucción y generación del material didáctico, se tomó como referente la resolución de problemas descrita por Polya, (2005); Schoenfeld (1992) y Santos-Trigo (2007), en la cual se proponen el desarrollo de heurísticas, es decir, identificación de saberes previos y su aplicación en las tareas solicitadas. En este sentido, este trabajo se basa en la corriente pedagógica constructivista, ya que, las tareas propuestas buscan desequilibrar los esquemas mentales de los estudiantes, provocando así la asimilación y acomodación de nuevos saberes, a través de la manipulación y estudio de los objetos físicos. Por su parte, para el entendimiento matemático, este trabajo se basó con lo propuesto por Hiebert, et al., (1997) donde se menciona que entender, es un proceso complejo que se da por niveles. Y para estas tareas, fue la forma en que se esperaba se diera; por ejemplo, en un momento los estudiantes fueron capaces de identificar el comportamiento de una función que modelara el contorno del objeto de estudio. Posteriormente, lograron aplicar métodos de integración y algunos utilizar el método de los discos para obtener el volumen. Así como, darle sentido a las expresiones que estaban proponiendo.

Referente a los trabajos revisados sobre la forma en que se ha abordado el tema de sólidos de revolución, se tiene evidencia que existen múltiples propuestas y en la mayoría se describe que existe dificultad para dar sentido a las expresiones algebraicas que emergen de tema. En este sentido Serhan, (2015) estudió cuál era el significado que le daban los estudiantes, a las integrales, cuando eran aplicadas a diversas áreas, incluidos sólidos de revolución. Su estudio lo aplicó con 25 estudiantes que cursaban la asignatura de cálculo integral. Propuso la solución de una integral que posteriormente sería aplicada a solidos de revolución. Identificó, que a pesar de tener la parte algorítmica fluida, al momento de la aplicación mostraron dificultades, por lo que no lograron en su mayoría concluir con la tarea propuesta.

Por su parte Guillen, (2010) explica las razones del por qué se deberían utilizar materiales sólidos, como contexto de enseñanza. Una de las ideas centrales fue analizar cómo influía la manipulación de objetos concretos para que los estudiantes dieran sentido y generaran imágenes mentales de las expresiones algebraicas que emergían. Concluyeron que la manipulación de los objetos concretos, perite entre otras cosas, que los estudiantes tengan un nivel de entendimiento superior, comparado a cuando solo se realiza la parte algorítmica, y argumentan que podría deberse a que utilizan más de un sentido del cuerpo. Además, este tipo de tareas permiten la manipulación del objeto para obtener sus dimensiones, lo que puede generar el desarrollo del sentido numérico.

Por otra parte, menciona que las tareas propuestas con estas ideas de manipulación de objetos concretos, requieren mayor tiempo en diseño y aplicación, porque se deben considerar múltiples variables que pudieran emerger en el desarrollo de la tarea, tales como, el interés por el objeto, alguna futura aplicación, la complejidad, entre otros (Guillen, 2010). En este sentido, Rubí, Moreno, Pou, y Jordán, (2010) realizaron un estudio para identificar algunas de las problemáticas en torno a las dificultades presentadas al abordar temas de cálculo diferencial e integral. Identificaron problemas en docentes y alumnos, tales como falta de fluidez en la enseñanza de estos temas y parte de desinterés por parte de los estudiantes, además propusieron estrategias de estudio, una de ellas era el uso de material didáctico concreto. Mediante el cual presentaban situaciones problemáticas que serían abordadas con herramientas puramente matemáticas.

Por su parte Pettersson y Scheja (2008) realizaron un estudio con 20 estudiantes de ingeniería, referente a la conceptualización de límite e integral, en el cual fue incluido el tema de sólidos de revolución por el método de discos. En su estudio observaron que los estudiantes mostraron dificultades para relacionar el concepto de límite aplicado a los objetos de estudio, primero para obtener área y posteriormente el volumen. También reportan que la mayoría de los estudiantes abordaron el

problema con características de resolución de problemas, ya que simplificaron el problema en otros más simples, y se hicieron presentes heurísticas que fueron cruciales en la solución.

#### PARTE EXPERIMENTAL

El enfoque del presente trabajo es cualitativo, debido a que las fuentes de información recolectadas para su análisis consisten en evidencias escritas o verbales de los participantes, mediante las cuales es posible identificar formas particulares de pensar o razonar, con relación a la aplicación de la integral en el tema de sólidos de revolución. En esta metodología se presta atención a la forma en que los estudiantes responden a las preguntas que guían a la tarea, es decir, se busca identificar, qué es lo que piensan, como abordan la tarea, cómo interpretan la información, de qué manera se adaptan en la resolución de la actividad, qué heurísticas utilizan y cómo relacionan sus recursos con el nuevo conocimiento que se genera al abordar la tarea. El diseño de la tarea incluyó, la contextualización, la manipulación del objeto de estudio, el problema, las condiciones de aplicación, así como los cuestionamientos guías para apoyar el avance de los estudiantes.

**Participantes.** Las tareas de instrucción se implementaron en una escuela pública de nivel superior, (Instituto Tecnológico de Atitalaquia, ITAt), en una zona rural del Estado de Hidalgo. Los participantes se eligieron por conveniencia. Las tareas se implementaron con un grupo mixto de estudiantes, con 30 integrantes en promedio, de una licenciatura en ingeniería industrial. Los alumnos habían aprobado los cursos de cálculo diferencial y estaban cursando cálculo integral. Para la actividad se formaron equipos de dos a cuatro integrantes. Se permitió el uso de calculadora, Geogebra, Excel o los recursos computacionales que los participantes consideraran necesarios para abordar las tareas. **Características y tipo de tarea.** Se diseñó una tarea de instrucción, con la cual se buscó identificar los elementos útiles para fortalecer el entendimiento de las aplicaciones de la integral, específicamente en la obtención de volumen de recipientes cotidianos mediante la aplicación del tema "sólidos de revolución, (método de discos)". Las características consideradas durante el diseño de las tareas son: la formulación de preguntas, conjeturas y relaciones, orientadas a promover el entendimiento y la construcción de modelos o sistemas conceptuales.

Referente a la estructura de la tarea, consistió en que los estudiantes trajeron un recipiente común, del cual se solicitó obtener de manera analítica el volumen, aplicando la metodología del tema sólidos de revolución, por el método de los discos. Primero se pidió que identificaran un eje de rotación, a partir del cual, fuese posible rotar la superficie o contorno que describiera al objeto de estudio. El contorno se obtuvo mediante la representación gráfica en un plano cartesiano, a través de la medición de pares ordenados, es decir, se midieron incrementos aproximados en el eje de rotación y se utilizó el eje horizontal para representarlo, en el vertical se colocaron los valores correspondientes al contorno del objeto.

Para identificar la superficie a rotar, se plasmó gráficamente el contorno en un plano cartesiano; debido a la simetría del objeto de estudio (en caso de tenerla), se utiliza sólo una parte de los puntos equidistantes que conforman el contorno. Posteriormente, se guío a los estudiantes para que registraran los pares ordenados en Excel o Geogebra, y a partir de ahí, que realizaran su ajuste con una función polinómica. A continuación se procedió a aplicar el método de discos para obtener de manera analítica el cálculo del volumen. Posteriormente se pidió realizar la comprobación de manera física, apoyados de una probeta graduada. Para este proceso, se llenaron los recipientes con agua, para después verterlo en la probeta, comparando su cálculo con la medida obtenida.

## RESULTADOS

Este apartado tiene el propósito de determinar de qué manera, tareas desarrolladas por estudiantes de licenciatura utilizando material concreto y cotidiano, favorecieron el desarrollo del entendimiento de la aplicación de las integrales (sólidos de revolución). Además de identificar los elementos que emergieron al abordar las tareas relacionadas con la obtención del volumen de diferentes recipientes. Para la aplicación los estudiantes integraron 9 equipos, entre 2 y 4 personas, quienes trajeron material concreto para la realización de la actividad, tales como botellas, vasos, embudos, entre otros. Para realizar el análisis de esta actividad, se identificaron líderes en cada equipo, a cada uno se le asignó un número del 1 al 9. El seguimiento de las actividades se realizó a través del líder,

debido a que fueron quienes mostraron interés en el desarrollo de las tareas e influyeron y organizaron la actividad del resto de los integrantes del equipo.

Para iniciar con la actividad, se dieron las indicaciones de aplicación propuestas en la parte experimental. De manera general, los alumnos mostraron interés sobre el tema, debido a que el material de estudio fue traído por ellos mismos. Los estudiantes partieron de la modelación del contorno y la identificación de pares ordenados en el plano cartesiano, a través de mediciones físicas del contorno del objeto de estudio. Cabe resaltar que algunos equipos (5,6 y 7), pusieron su objeto sobre una hoja y de ahí mercaron el contorno, plasmándolo en un plano cartesiano.

El equipo 8 quien tenía un objeto en forma de extractor, tomo las medidas utilizando una regla graduada y un hilo que hacia trazo de perpendicularidad, esta acción se pudo estudiar a profundidad para tratar conceptos de la recta y sus propiedades, sin embargo en este momento no se abordó de esa manera, ya que el tiempo de aplicación era un papel relevante. El resto de los equipos realizaron mediciones con regla y vernier.



Figura 28 Mediciones y obtención de pares ordenados.

Para todos los equipos, eje horizontal representaba la línea de rotación y el vertical su correspondiente al contorno (figura 2). Utilizando los datos obtenidos del contorno, se registraron en Excel por todos los equipos, y fueron guiados por los aplicadores para que obtuvieran una representación gráfica y aproximaran un modelo formal, mediante un ajuste polinómico, esta acción se pudo realizar con Geogebra o por el método de mínimos cuadrados, sin embargo no era el foco de este trabajo, razón por la cual se trabajó con la hoja de cálculo.



Figura 29 Modelación del contorno.

Posteriormente con la función obtenida en la hoja de cálculo, se procedió a realizar la integral (método de discos) para la obtención del volumen en cada objeto de estudio, se resalta que algunos equipos (4, 6, 8 y 9) utilizaron software para validar sus cálculos analíticos. Esta acción favorece por que utilizan las tics como parte de su formación académica, en línea con las competencias de estudio establecidas para estos temas, tales como manejo de software de especialidad y adaptación a nuevas herramientas de aprendizaje.

Al realizar la integral se obtuvo evidencia que los estudiantes generaron significado a las representaciones semióticas (Duval, 1998) que dieron lugar al desarrollo de la tarea; por ejemplo, el equipo 1 identificó que cada incremento en el eje *X*, representaba un avance en la línea de rotación, y lo simbolizaron mediante la notación *dx*. A su vez la mayoría de los equipos identificó que existía una relación entre el radio que se utiliza para obtener el área de una circunferencia (útil en el método de los discos) y la altura representada por la función obtenida de Excel, muestra de esto se describe en la siguiente conversación.

Profesor: ¿Qué relación tiene el radio con la función obtenida?

**Alumno:** a esa [señalando la función] nos indica la distancia que hay entre el eje *x* y el punto de la atura.

**Profesor:** ¿Y ese punto de dónde salió?

Alumno: salió de la medición que hicimos y tiene relación con la función, porque si se evalúa en lo que tenemos aquí [señalando el eje x], nos da lo de acá, [señalando su correspondiente en el eje vertical]. Por último casi todos los equipos comprobaron sus resultados analíticos mediante el uso de una probeta graduada, ya que llenaron los recipientes con agua y los vertieron en la misma. Con esta acción casi todos los equipos validaron sus resultados; por ejemplo, los equipos 1, 2, 4, 5 y 9 lograron obtener volúmenes aproximados a la medición física. En cada momento se tuvo evidencia de que los estudiantes mostraron una visión retrospectiva, es decir, reflexionaban sobre los valores obtenidos, las consideraciones realizadas (espesor del objeto de estudio), ya que podrían influir en el valor puntual del volumen. Por su parte el equipo 8 de desintereso de la actividad, probablemente porque presentaron problemas para obtener la modelación del contorno. Los demás equipos 6 y 7 mostraron dificultades para validar sus volúmenes, ya que sus objetos estaban completamente cerrados y no pudieron introducirles agua.



Figura 30 Validación del volumen.

#### CONCLUSIONES

Con esta tarea, se logró obtener evidencia de los elementos matemáticos que emergieron cuando se resolvieron problemas enfocados a la búsqueda de funciones y cálculo de sólidos de revolución, mediante el uso de material reciclado. Se resalta también que la aplicación de la reforma educativa puede ser una oportunidad para generar estrategias de enseñanza que favorezcan al desarrollo de competencias docentes y para los alumnos.

De tal manera que con el desarrollo de este tipo de tareas, se evidenció de algunos elementos de aprendizaje matemático que emergieron; por ejemplo, la generación de imágenes mentales, desarrollo de los elementos del pensamiento matemático; tales como, identificación de elementos fijos y variables, formulación de conjeturas y comunicación de resultados. De esta manera, se cumple responde la pregunta de investigación planteada, ya que el resolver este tipo de tareas favoreció para entender el tema de sólidos de revolución y conectarlo con diferentes conceptos matemáticos.

En comparación con las propuestas estudiadas, se evidencia que coincidió en la generación de imágenes mentales. Se valida y justifica en relación con reportado en otros trabajos, porque se logró apreciar la ventaja que los estudiantes trabajen con objetos concretos; lo que les permite, dar sentido a los elementos que aparecen en las expresiones formales y momentos después, entender las cosas de manera abstracta. Trabajando así en un contexto, puramente matemático.

# BIBLIOGRAFÍA

- 1. F. Barrera-Mora y A. Reyes-Rodríguez." Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas". Pachuca: UAEH (2013). México.
- 2. R. Duval. "Geometry from a cognitive point of view". *New ICMI studies series*, 5, 1998, pp. 37-51.
- 3. J. Godino, C. Batanero y V. Font. "Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas para maestros". Granada: Universidad de Granada, 2003.
- G. Guillén. "¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?" En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* Lleida: SEIEM, 2010, pp. 21-68.
- 5. J. Hiebert, T. P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier y P. Human. "Making sense: teaching and learning mathematics with understanding". Portsmouth, NH: Heinemann, 1997.
- Rubí, Moreno, Pou, y Jordán, "Problemática persistente en el aprendizaje de cálculo caso de la facultad de ciencias, UABC". *El cálculo y su enseñanza*, 2 Cinvestav-IPN, México, D.F. 2010.
- 7. M. Santos-Trigo. "La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos". Mexico: Trillas, (2007).
- 8. A. Schoenfeld. "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics". En D. Grouws (Eds.). *Handbook for research o mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.1992, pp. 334 370.
- 9. Serhan, D. "Students' understanding of the definite integral concept". En International Journal of Research in Education and Science (IJRES), Vol. 1,1, 2015, pp. 84-88
- 10. A. L. Steen, "The Science of Patterns". Science, Vol. 240, 4852, 1988, pp. 611-616.
- 11. Subsecretaría de Educación Media Superior. "Programa de Estudios: Bachillerato Tecnológico. Acuerdo 653". México: Secretaría de Educación Pública [SEMS] 2013.
- 12. K. Pettersson y M. Scheja. "Algorithmic contexts and learning potentiality: a case study of students understanding of calculus". International Journal of Mathematical Education in *Science and Technology*, Vol. 39, 6, 2008, pp. 767-784

# MODELOS MATEMÁTICOS DE CUERPO RÍGIDO APLICADOS A BIOMECÁNICA DEL ANTE-BRAZO HUMANO. LA CONEXIÓN ENTRE LA FÍSICA Y LA FISIOLOGÍA

Sanvicente Tapia Omar Alfonso, Rafael Zamorano Ulloa

Instituto Politécnico Nacional -Escuela Superior de Física y Matemáticas

#### RESUMEN

En el presente trabajo se aborda la biomecánica del antebrazo humano, la cual hasta la fecha ha sido descrita cualitativamente con mucho éxito por la fisiología. Buscamos tener una descripción matemática es decir un modelo matemático del antebrazo humano, aquí exhibimos un modelo de dichas ecuaciones de movimiento (ecuaciones diferenciales) y su solución. Mediante el modelado a partir del enfoque de cuerpos rígidos se han descrito las ecuaciones de movimiento para el sistema esquelético, complementado con el uso del software Tracker es que logramos obtener una descripción matemática para las fuerzas externas (fuerzas musculares), completando así el modelo matemático. En general hemos encontrado ecuaciones de movimiento para la descripción de los movimientos permitidos (anatómicamente) para el antebrazo humano particularizando a los 3 movimientos básicos que permite el codo (flexión - extensión, pronación - supinación y traslación). Empleando estas ecuaciones y la definición de física de potencia, es que podemos comenzar una visualización entre la creación de tono muscular y la física. Además de que dichas ecuaciones pueden ser usadas en la automatización de prótesis en humanos, también pueden ser empleadas para el correcto entrenamiento y mejorar el rendimiento de deportistas de alto rendimiento, así como proveer un método de apoyo (verificación de modo cuantitativo) en terapias de rehabilitación. Todo esto mediante la definición de potencia que en el presente trabajo desarrollamos

# INTRODUCCIÓN

La biomecánica es una rama multidisciplinaria la cual de modo cualitativo está ampliamente desarrollada, sin embargo se ha buscado impulsar el desarrollo de esta área mediante modelos que describan el movimiento de alguna parte del cuerpo, en esa dirección hemos buscado modelar el antebrazo. Dan Karlsson (1992) propone un modelo para carga estática y centrado en la elevación del hombro (el cual se basa en la técnica del área de optimización mediante suma de cuadrados) Frans C.T. van der Helm (1994) propone el modelo Delft Shoulder and Elbow Model (DSEM) el cual se basa en la en una técnica diferente de optimización (Inverse Dynamics Optimization (IDO) y suma de cuadrados) Charlton IW. (2006) ha propuesto lo que llamaron Newcastle Shoulder Model es otro modelo que también se basa en técnicas de optimización e IDO. Siendo sus desarrollos en el área de optimización y métodos numéricos, sin embargo el enfogue que hemos tomado en este trabajo es distinto ya que se busca mediante el empleo del estudio de cuerpos rígidos un modelo matemático el cual describa los movimientos básicos del brazo humano Rotación, flexión-extensión y la, pronación-supinación. Mediante ecuaciones de movimiento y la solución de dichas ecuaciones. Todo esto con el objetivo de encontrar descripciones para las fuerzas externas (músculos) y poder mediante la definición de potencia Pow=W/t comenzar a generar una conexión matemática y explicita con la potencia muscular, misma que está ligada íntimamente al desarrollo de musculo.

# TEORÍA

Descripción física del codo: El análisis de la dinámica del brazo depende de 3 movimientos: Rotación, flexión–extensión y la, pronación–supinación. Dichos movimientos están gobernados por 3 articulaciones que forman el sistema del codo:



Ilustración 6 Sistema Esquelético con su sistema de referencia.

-Articulación humero radial: Es una articulación condilea, la cual es también llamada elipsoidal que permite dos grados de libertad. Esta se encarga de la rotación.



Ilustración 7 Rotación del brazo (vista superior).

-Articulación humero cubital: Esta es una articulación tróclea, la cual es también llamada "de bisagra" y permite un grado de libertad. Esta se encarga de la flexión – extensión.



Ilustración 8Flexión-Extensión (vista lateral)

-Articulación radio cubital: Esta articulación trocoide, o también llamada cilíndrica, la cual permite el movimiento en un grado de libertad. Esta se encarga de la pronación – supinación.



Ilustración 9Pronación-Supinación (vista frontal)

Por otra parte se tienen que los músculos asociados a la dinámica del codo son:

| Musculo           | Acción                                                       | Articulaciones con las que<br>participa            |  |
|-------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|--|
| Bíceps braquial   | Flexión y supinación                                         | Humero-Cubital (bisagra)<br>Radio-cubital (pivote) |  |
| Braquial          | Flexión (el más importante en<br>esta acción)                | Humero-Cubital (bisagra)                           |  |
| Braquiorradial    | Flexión (para flexiones rápidas<br>o de carga de peso lenta) | Humero-Cubital (bisagra)                           |  |
| Tríceps braquial  | Extensión (el más potente en esta acción)                    | Humero-Cubital (bisagra)                           |  |
| Anconeo           | Extensión (apoyo para el trí-<br>ceps braquial)              | Humero-Cubital (bisagra)                           |  |
| Pronador cuadrado | Pronación (rotación de la palma hacia abajo)                 | Radio-Cubital (pivote)                             |  |
| Pronador redondo  | Pronación (rotación de la palma hacia abajo)                 | Radio-cubital (pivote)                             |  |
| Supinador         | Supinación (rotación de la palma hacia arriba)               | Radio-Cubital (pivote)                             |  |

Tabla 1. Resumen de los movimientos asociados a los músculos y el tipo de articulación empleada.

Formulación de Lagrange.

Dentro del marco de la mecánica se tienen enfoques clásicos, como la Mecánica de Newton, sin embargo la dinámica se replanteo gracias al trabajo de matemáticos como Lagrange el cual describe el movimiento en términos de una función llamada la Función de Lagrange o Lagrangiana. Es así que tenemos al menos 2 métodos distintos de plantear las ecuaciones de movimiento de una partícula o sistema, se define la Lagrangiana como:

$$L = T - U...(1)$$

Donde L es la lagrangiana, T es la energía cinética, la cual depende de la velocidad y U la energía potencial la cual depende del desplazamiento.

En términos de la dinámica de Lagrange lo que "reemplaza" a la ecuación F = ma es:

 $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \dots (2)$ 

Esto para un movimiento completamente libre sin constricciones, sin embargo al añadirle restricciones al problema muchas veces dichas ecuaciones se plantean como:  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i ... (3)$ 

Donde  $q_i y \dot{q}_i$  representan la coordenada y la velocidad  $i - \acute{esima}$  respectivamente y  $Q_i$  la fuerza generalizada.

Transformada Rápida de Fourier TRF (Método de interpolación)

Para escribir el polinomio interpolante reduciendo el error al mínimo (teniendo un gran número de datos y uniformemente espaciados) se puede expresar del siguiente modo:

$$S_m = \frac{a_0 + a_m \cos(mx)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cos(jx) + b_j sen(jx) \dots (4)$$

Donde las constantes  $a_i$  y  $b_i$  tienen la forma:

$$a_{j} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{2n-1} y_{i} cos j x_{i} \dots (5)$$

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} y_i senj x_i \dots (6)$$

Para cada  $k = 0,1,2, ..., n \ y \ k = 1,2, ... n - 1$ . Sin embargo para tener un método de cómputo más sencillo los coeficientes  $a_j \ y \ b_j$  se calculan mediante el algoritmo de Cooley-Tukey el cual es conocido como la Transformada Rápida de Fourier.

$$c_{j} = \sum_{k=0}^{2n-1} y_{k} e^{\frac{ij\pi}{n}}, \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \dots 2m - 1 \dots (7)$$

Así una vez calculado el término  $c_j$  podemos recuperar los términos  $a_j y b_j$  mediante la fórmula de Euler, entonces dado  $c_i$  tenemos:

$$a_j + ib_j = \frac{(-1)^j}{n} c_j \dots (8)$$

Esto es posible dado que  $c_i \in \mathbb{C}$ .

## PARTE EXPERIMENTAL

Ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento son 3, una por cada grado de libertad del sistema y se obtienen a partir del desarrollo de Lagrange y la lagrangiana L del sistema en cuestión. Para esto analizamos el sistema y sus velocidades angulares en base a los ángulos de Euler en la convención XYZ.

$$\omega_{\psi} = \psi - \phi sen(\theta) \dots (4)$$
$$\omega_{\theta} = \dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\phi} \cos(\theta) sen(\psi) \dots (5)$$

 $\omega_{\phi} = -\dot{\theta}sen(\psi) + \dot{\phi}\cos(\theta)\cos(\psi) \dots (6$ 

y la energía cinética asociada a cada componente es:

$$T_{\psi} = \frac{1}{2} [ml^{2} + I_{l}] \omega_{\psi}^{2} = \frac{1}{2} [ml^{2} + I_{l}] \left( \dot{\psi}^{2} - 2\dot{\psi}\dot{\phi}sen(\theta) + \dot{\phi}^{2}sen^{2}(\theta) \right) \dots (7)$$

$$T_{\theta} = \frac{1}{2} I_{t} \omega_{\theta}^{2} = \frac{1}{2} I_{t} \left( \dot{\theta}^{2}cos^{2}(\psi) + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\psi)\cos(\theta)sen(\psi) + \dot{\phi}^{2}\cos^{2}(\theta)sen^{2}(\psi) \right) \dots (8)$$

$$T_{\phi} = \frac{1}{2} [ml^{2} + I_{l}] \omega_{\phi}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} [ml^{2} + I_{l}] \left( \dot{\phi}^{2}cos^{2}(\theta)cos^{2}(\psi) - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)\cos(\psi)sen(\psi) + \dot{\theta}^{2}sen^{2}(\psi) \right) \dots (9)$$

$$U = mgl(1 - \cos(\psi)) \dots (10)$$

Luego

$$T = T_{\psi} + T_{\theta} + T_{\phi} \dots (11)$$

Con lo que completamos la ecuación (1) correspondiente a la lagrangiana

$$\begin{split} L &= \frac{1}{2} [ml^2 + I_l] \left[ \dot{\psi}^2 - 2\dot{\psi}\dot{\phi}sen(\theta) + \dot{\phi}^2 \Big(sen^2(\theta) + \cos^2(\theta)sen^2(\psi) \Big) \\ &- 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)\cos(\psi)sen(\psi) \Big] \\ &+ \frac{1}{2} I_t \left( \dot{\theta}^2 cos^2(\psi) + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\psi)\cos(\theta)sen(\psi) + \dot{\phi}^2\cos^2(\theta)sen^2(\psi) \right) \\ &- mgl(1 - \cos(\psi)) \dots (12) \end{split}$$

Y ahora aplicando la ecuación (3) y considerando que nos moveremos únicamente en un plano de rotación a la vez (es decir cuando hacemos el movimiento de flexión-extensión por ejemplo únicamente realizamos este movimiento) tenemos:

$$[ml^{2} + I_{l}]\ddot{\psi} + mglsen(\psi) = Q_{\psi} \dots (13)$$
  
$$[ml^{2} + I_{l}]\ddot{\theta}sen^{2}(\psi) + I_{t}\ddot{\theta}cos^{2}(\psi) = Q_{\theta} \dots (14)$$
  
$$[ml^{2} + I_{l}]\ddot{\phi}(sen^{2}(\theta) + cos^{2}(\theta)cos^{2}(\psi)) = Q_{\phi} \dots (15)$$

Estas ecuaciones representan los movimientos del sistema rígido en cuestión (sistema esquelético del brazo humano). Sin embargo este sistema no es capaz de moverse por sí solo. Así que debemos completar el sistema con las fuerzas externas  $Q_i \ con \ i = (\psi, \theta, \phi)$ *Fuerzas externas.* 

Para obtener estas fuerzas nos hemos auxiliado del Software Tracker (Tracker.(2016). Open Source Physics). Ya que es un sistema de captura de movimiento, el cual nos permite obtener los datos de posición y tiempo en forma discreta.



Ya que para cada caso tenemos los valores  $(x_j, y_j)$  obtenidos experimentalmente mediante el método de captura de movimiento mediante la TRF podemos recuperar los valores  $(a_j, b_j)$  y determinar de este modo que el polinomio asociado a la posición en función del tiempo es de la forma:

$$\psi(t) = \sum_{\substack{j=1\\n}}^{n} a_{\psi j} sen(jt) + b_{\psi j} \cos(jt) \dots (16)$$
  
$$\theta(t) = \sum_{\substack{j=1\\n}}^{n} a_{\theta j} sen(jt) + b_{\theta j} \cos(jt) \dots (17)$$
  
$$\phi(t) = \sum_{\substack{i=1\\n}}^{n} a_{\phi j} sen(jt) + b_{\phi j} \cos(jt) \dots (18)$$

Ya que estas posiciones están directamente asociadas a los agentes externos que provocan la fuerza, de este modo para obtener dichas fuerzas externas basta con aplicar la segunda derivada con respecto al tiempo, esto nos da las aceleraciones asociadas al movimiento del brazo, las cuales son generadas por el sistema muscular.

Y así obtener:

$$\psi_{ext}^{"}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ n}}^{n} a_{\psi j} j^2 sen(jt) + b_{\psi j} j^2 \cos(jt) \dots (19)$$
  
$$\theta_{ext}^{"}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j=1}}^{n} a_{\theta j} j^2 sen(jt) + b_{\theta j} j^2 \cos(jt) \dots (20)$$

$$\phi_{ext}^{"}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{\phi j} j^2 sen(jt) + b_{\phi j} j^2 \cos(jt) \dots (21)$$

Posteriormente multiplicando por las constantes correspondientes a cada movimiento se obtienen  $Q_i con i = (\psi, \theta, \phi)$ 

$$Q_{\psi} = [ml^{2} + I_{l}] \sum_{j=1}^{n} a_{\psi j} j^{2} sen(jt) + b_{\psi j} j^{2} cos(jt) \dots (22)$$

$$Q_{\theta} = [ml^{2} + I_{l} + I_{l}] \sum_{j=1}^{n} a_{\theta j} j^{2} sen(jt) + b_{\theta j} j^{2} cos(jt) \dots (23)$$

$$Q_{\phi} = [ml^{2} + I_{l}] \sum_{j=1}^{n} a_{\phi j} j^{2} sen(jt) + b_{\phi j} j^{2} cos(jt) \dots (24)$$

$$[ml^{2} + I_{l}] \ddot{\theta} + mglsen(\theta) = [ml^{2} + I_{l}] \sum_{j=1}^{n} a_{\psi j} j^{2} sen(jt) + b_{\psi j} j^{2} cos(jt) \dots (25)$$

$$[ml^{2} + I_{l}] \ddot{\psi} sen^{2}(\theta_{0}) + I_{t} \ddot{\psi} cos^{2}(\theta_{0}) = [ml^{2} + I_{l} + I_{l}] \sum_{j=1}^{n} a_{\theta j} j^{2} sen(jt) + b_{\theta j} j^{2} cos(jt) \dots (26)$$

$$[ml^{2} + I_{l}] \ddot{\phi} (sen^{2}(\psi) + cos^{2}(\psi) cos^{2}(\theta)) = [ml^{2} + I_{l}] \sum_{j=1}^{n} a_{\phi j} j^{2} sen(jt) + b_{\phi j} j^{2} cos(jt) \dots (26)$$

Potencia:

La definición física de potencia es

$$Pow = \frac{W}{t}\dots(28)$$

Donde

$$W = \int_{a}^{b} F \cdot dr \dots (29)$$

Siendo de este modo, reducimos cada uno de los movimientos a coordenadas polares y procedemos a calcular el angulo entre que se forma entre la horizontal y la elevación del brazo, para recurrir a la definición alterna de producto interno:

$$F \cdot dr = |Fdr| \cos \alpha \dots (30)$$

Esto de modo correspondiente a cada uno de los movimientos.

## RESULTADOS

Buscamos empatar las fuerzas externas mediante métodos de interpolación (Transformada Rápida de Fourier), sin embargo hemos "simplificado" las fuerzas externas mediante métodos empíricos de ajuste, esto con la finalidad de probar la solubilidad de dichas ecuaciones, la simplificación es la siguiente:

$$[ml^2 + I_l]\ddot{\psi} + mglsen(\psi)$$

$$= [ml^{2} + I_{l}][-4.494sen(3.06t - 0.14) + .001815\cos(2.2 \times 10^{-16} - 0.11t) - .48\pi^{2}sen(\pi t + 5.02)] \dots (31) \\ ([ml^{2} + I_{l}]sen^{2}\psi + I_{t}\cos^{2}\psi)\ddot{\theta} = [ml^{2} + I_{l} + I_{t}][-3.006sen(2.854t + 0.938) - 0.0013\cos(1.4 \times 10^{-14} - 0.0772t) + 0.369sen(\pi t + 5.658)] \dots (32) \\ [ml^{2} + I_{l}]\ddot{\phi}(sen^{2}(\theta) + cos^{2}(\theta)cos^{2}(\psi)) = [ml^{2} + I_{l}][-7.25sen(4.34t - 0.342) - 0.0035\cos(0.095 - 0.187t)] \dots (33)$$

Como resultado de nuestro trabajo lo que hemos obtenido es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden (ecuaciones de movimiento).

Las soluciones de dichas ecuaciones son de la forma:

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left\{ sen\left(\frac{\theta_{o}}{2}\right) Sn\left[k\left(sen^{2}\left(\frac{\theta_{0}}{2}\right)\right) - \omega_{0}t, sen^{2}\left(\frac{\theta_{0}}{2}\right)\right]\right\} + \sum_{j=1}^{n} a_{\psi j}j^{2}sen(jt) + b_{\psi j}j^{2}\cos(jt) \dots (34)$$

$$\psi(t) = c_{0} + c_{1}t + \sum_{j=1}^{n} a_{\theta j}j^{2}sen(jt) + b_{\theta j}j^{2}\cos(jt) \dots (35)$$

$$\phi(t) = b_{0} + b_{1} + \sum_{j=1}^{n} a_{\phi j}j^{2}sen(jt) + b_{\phi j}j^{2}\cos(jt) \dots (36)$$

# CONCLUSIONES

- El modelo ha permitido visualizar un resultado inesperado. ya que las componentes de la fuerza generalizada de Lagrange son expresadas en términos de una sumatoria, esto es consistente con la superposición de fuerzas que generan las miofibrillas que causan el movimiento.
- Las presentes ecuaciones con sus respectivos ajustes pueden dar lugar al análisis de algunas patologías y así ayudar al diagnóstico y seguimiento de un paciente que padezca discapacidad motriz.
- La dinámica de esta extremidad está íntimamente relacionada con sus músculos, por lo que está también relacionada con una mejor calidad de vida [Harvard Health]
- Estas ecuaciones de movimiento pueden ser usadas para diseñar tanto prótesis, como robots o en un caso complementario prótesis robóticas, con el fin de que su precisión sea alta.
- Las ecuaciones aquí presentadas son en apariencia generales, pues se plantean en términos de mecánica analítica, así pues parece que funcionan en todos los casos donde haya un sistema mecánico, sin embargo esto no pasa a nivel nano, en este caso las fuerzas externas deberán reconsiderarse y así podremos adaptar este nuevo "nano Lagrangiano" a dichos problemas
- Mediante esta proposición de potencia podemos aspirar a describir de modo cuantitativo el crecimiento muscular, el cual está ligado con una mejor calidad de vida, tanto para adultos, como para adultos mayores.
- Este método de potencia nos permitirá aspirar a dar mejores sistemas de evaluación en la evolución en pacientes con discapacidades motrices siempre y cuando estén sometidos a terapias de rehabilitación.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. Terrier A, et al. A musculoskeletal shoulder model based on pseudo-inverse and nullspace optimization. Med Eng Phys (2010).
- 2. Wu G, van der Helm FC, Veeger HE, Makhsous M, Van Roy P, Anglin C, et al. ISB recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion. Part II. Shoulder, elbow, wrist and hand. J Biomech 2005;38(5):981–92.
- 3. Strength and Power Training Special Health Report Harvard Health Publications, Harvard Medical School.
- 4. Jerry B. Marion Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas 2ª Ed.
- 5. Zamorano Ulloa R. Notas del Curso: Temas Selectos del Física Médica. 2ªEd.
- 6. H.Goldstein Mecánica Clásica 3a Ed.
- 7. G. Tortora Principios de anatomía y fisiología 13ª Ed.
- Beléndez, A., Pascual, C., Méndez, D.I., Beléndez, T., & Neipp, C.. (2007). Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(4), 645-648. <u>https://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172007000400024</u>

## CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA Y CARACTERIZACIÓN DE SALES EN SEDIMENTOS DE CO-PÁNDARO, MICHOACÁN

Mariela Casillas Corona, Isabel Israde Alcántara. María Alcalá De Jesús.

Facultad de Biología. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mich. e-mail:\_mari\_liz87@msn.com; <u>isaisrade@gmail.com</u>; <u>tupuri12@hotmail.com</u>.

#### RESUMEN

Los sedimentos del Lago de Cuitzeo presentan sales debido a su evaporación. La conductividad eléctrica en suelos y sedimentos depende del contenido de sales solubles presentes en la solución de estos y su concentración aumenta de acuerdo con el contenido y tipo de sales. El objetivo del presente estudio fue analizar la conductividad eléctrica (CE) y caracterizar las sales de los sedimentos en el municipio de Copándaro, Michoacán, para ello, se muestreó en tres localidades (Santa Rita, Copándaro y San Agustín) el sedimento de los primeros 20 cm de profundidad en cuadrantes de 25 cm x 25 cm. Se determinó la CE y se analizaron las sales de los sedimentos mediante difracción de rayos X que muestran la mineralogía en las sales. Los resultados indican que en los sedimentos, la CE, varía de 1.04 dS m<sup>-1</sup>, efectos depreciables de salinidad a 6.16 dS m<sup>-1</sup> suelos salinos, la mineralogía encontrada fue albita, andesina, anortita, calcita, cristalobita clinoptilolita, magnetita y muscovita. Los sitios donde se encontró la mayor CE es en donde se presenta la calcita mineral asociada a la evaporación localizada al margen oeste del lago de Cuitzeo. La mineralogía encontrada en las muestras de sal de las tres localidades es similar, no se observaron mineralogías asociadas a Yeso y Trona, por lo que a pesar de la alta evaporación que presenta el lago no ha llegado a tener alta concentración de iones.

Palabras clave: mineralogía, calcita, evaporación.

## INTRODUCCIÓN

El lago de Cuitzeo es el segundo más grande de México y en los últimos años ha presentado graves problemas de sequía que se deben principalmente por el desequilibrio que existe entre la precipitación de los últimos años y la evaporación; esta última es mayor lo que ha provocado que el lago se seque principalmente de la parte que se localizan los municipios de Copándaro, Chucandiro, Huandacareo entre otros, a mayor evaporación aumenta la cantidad de sales en sus sedimentos y suelos.

La forma de medir la salinidad en los suelos y sedimentos es mediante la Conductividad Eléctrica (CE), que mide la capacidad del suelo para conducir corriente eléctrica al aprovechar las propiedades de las sales solubles presentes en la solución del suelo y esta será mayor cuando la concentración de sales sea más elevada (Intagri, 2017) ; además, esta CE también depende del tipo de sales motivo por el cual el objetivo del presente trabajo fue analizar la conductividad eléctrica (CE) y caracterizar las sales de los sedimentos en el municipio de Copándaro, Michoacán.

## **MATERIALES Y METODOS**

La zona de estudio pertenece al municipio de Copándaro de Galeana en la Cuenca del Lago de Cuitzeo, al norte de la ciudad de Morelia (Fig. 1) a una altitud de 1900 m. El clima es templado subhúmedo con lluvias en verano Cw1 (w) b (i') g, la temperatura media anual varía de los 7.8 °C y 23.4 °C, la precipitación pluvial anual varía de 800 mm a 1000 mm y los vientos dominantes provienen de noreste a suroeste (Luna, 2014; Vidal, 2010). La geología presenta una serie de lomeríos alargados, limitados por fallas este-oeste correspondientes a bloques de rocas volcánicas muy fracturadas que limitan la porción norte y sur del Lago de Cuitzeo. En la secuencia de rocas volcánicas se observan estructuras de lomeríos bajos y valles formados de andesitas, dacitas y flujos piroclásticos (Garduño-Monrroy e Israde-Alcántar, 2010).



Figura 1. Localización del área de estudio.

El estudio se realizó en el municipio de Copándaro, Michoacán que incluye a Copándaro como cabecera municipal, San Agustín y Santa Rita, los dos últimos, localizados a 4 km al oriente y 3 km al poniente de Copándaro, respectivamente. En estas localidades se tomaron muestras de sedimentos y sales. Para los sedimentos se realizaron cuadrantes de 25 cm x 25 cm a una profundidad de 20 cm y las sales con ayuda de una espátula, se colectó únicamente la capa superficial y se almacenó en bolsas de plástico.

A las muestras de sedimentos se les analizo la conductividad eléctrica (CE) con Conductronic PC 45 y en un conductivímetro marca APHA-AWWA-WPCF, 1995. Y para las sales el análisis mineralógico se realizó de manera directa en las muestras para lo que se utilizó la técnica de Difracción de Rayos X (DRX).

## RESULTADOS

Los resultados indican que en los sedimentos, la CE, varía de 1.04 dS m<sup>-1</sup>, efectos depreciable de salinidad a 6.16 dS m<sup>-1</sup> suelos salinos; Crosara, (2012) menciona que a mayor salinidad la estabilidad del suelo disminuye.

Los minerales identificados en las localidades estudiadas se presentan en el Cuadro 1 y en las Figuras 2, 3 y 4.

| Especie mine-  | Fórmula química                                                                                        | Sitios de mu | estreo     |             |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|------------|-------------|
| ral            |                                                                                                        | Copándaro    | Santa Rita | San Agustín |
|                |                                                                                                        |              |            |             |
| Albita         | NaAlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub>                                                                     |              | Х          |             |
| Andesina       | (Na,Ca)(Si,Al)4O <sub>8</sub>                                                                          | Х            |            | Х           |
| Anortita       | NaAlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub>                                                                     |              | Х          |             |
| Calcita        | CaCO₃                                                                                                  | Х            |            |             |
| Clinoptilolita | ( <u>Ca,K,Na</u> ) <sub>6</sub> (Si <sub>30</sub> Al <sub>6</sub> )O <sub>72</sub> ·20H <sub>2</sub> O | Х            |            | Х           |
| Cristobalita   | (SiO <sub>2</sub> )                                                                                    | Х            | Х          | Х           |
| Cuarzo         | SiO <sub>2</sub>                                                                                       | Х            | Х          | Х           |
| Magnetita      | Fe <sup>3+</sup> <sub>2</sub> O <sub>4</sub>                                                           | Х            |            | Х           |
| Moscovita      | KAI2(Si3AI)O10(OH,F)2                                                                                  | Х            |            | Х           |





Figura 2. Difractograma de los minerales en la muestra de sal de Copándaro, Michoacán.



Figura 3. Difractograma de los minerales de muestra de sal de Santa Rita, Michoacán.



Figura 4. Difractograma de los minerales de muestra de sal de San Agustín, Michoacán.

De acuerdo con la información de los difractogramas, la mineralogía de las muestras de sal de las tres localidades se presenta en forma de picos con una definición variable entre los 15 y 40 e. Para Copándaro, el pico con mejor definición (28 e) corresponde a la andesina; la magnetita, a 36 e; cristobalita, a 22 e; moscovita, a 20 e; clinoptilolita, a 30 e y calcita, a 10 e.

En Santa Rita, el pico con mejor definición lo presentó la albita a los 28 e; cuarzo, a 27 e; cristobalita, a 22 e y anortita, a 28 e.

En el caso de San Agustín, la mejor definición de los picos fueron para la andesina, a los 28 e; cristobalita, a 22 e; magnetita, a 36 e; moscovita, a 35 e; cuarzo, a 28 e y clinoptilolita, a 10 e.

La mineralogía antes mencionada indica que su origen proviene de rocas de composición tendiente a intermedia. La clinoptilolita es un mineral derivado de la alteración de rocas zeolíticas que se encuentran en el escarpe cercano a Copándaro, la calcita es un mineral asociado a la evaporación del margen oeste del lago que es bianual y por último no se observaron mineralogías asociadas a Yeso (CaSO4) y Trona Na2CO3.

La relación de la CE y las sales en el los sedimentos se debe principalmente a la evaporación del lago, asi mismo el valor más alto de CE en este estudio se relaciona con la presencia de la albita.

#### CONCLUSIONES

Las altas concentraciones de CE en los sedimentos se deben a la alta evaporación y poca precipitación aumentando la cantidad de sal en el suelo.

La mineralogía encontrada en muestras de sal de las tres localidades es similar, no se observaron mineralogías asociadas a Yeso y Trona, por lo que a pesar de la alta evaporación que presenta el lago no ha llegado a tener una elevada concentración de iones.

La concentración de la conductividad eléctrica en los sedimentos del lago de Cuitzeo aumenta con la evaporación de este.

#### BIBLIOGRAFÍA

- Garduño-Monrroy V. H. y Isrrade-Alcantara I. Geología. Cápitulo 1. Características físicas. *In*: Atlas de la Cuenca del Lago de Cuitzeo: Análisis de su Geografía y Entorno Socioambiental (2010). ISBN: 978-607-02-1830-9.
- 2. Intagri .instituto para la innovación tecnológica para la agricultura. La conductividad eléctrica del suelo en el desarrollo de los cultivos 2017. Disponible en <u>https://www.intagri.com/articu-los/suelos/la-conductividad-electrica-del-suelo-en-el-desarrollo-de-los-cultivos</u>
- 3. Luna M. I. Periódico Oficial del gobierno constitucional del estado de Michoacán de Ocampo. H. Constitucional del Municipio de Copándaro Michoacán (2014). Tomo CLIX. Núm.15.
- 4. Vidal. R. Clima *In*: Atlas de la Cuenca del Lago de Cuitzeo: Análisis de su Geografía y Entorno Socioambiental (2010). ISBN: 978-607-02-1830-9

# EL IMPACTO DE LA DIMENSIONALIDAD EN LA DEGENERACIÓN DE LOS NIVELES DE ENERGÍA PARA EL ÁTOMO HIDROGENIODE EN 2-DIMENSIONES

Eduardo Casas Martínez<sup>1</sup>, Berenice N. Castañeda Avila<sup>1</sup>, Rafael Zamorano Ulloa<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) IPN. <sup>2</sup>Departamento de Física Avanzada, Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM). Av. Instituto Politécnico Nacional Edificio 9, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738, México, Distrito Federal, Tel. 57-29-60-00 ext. 55343.

## RESUMEN

Una aplicación importante al estudio cuántico del átomo hidrogenoide es el análisis de la dimensionalidad y la degeneración de los niveles de energía; así como la contribución de los estados excitados a las funciones de onda. Orientamos el estudio de la ecuación diferencial de Schrödinger en coordenadas cilíndricas; a partir de sus soluciones en dos dimensiones. A partir de esta idea formulamos la siguiente pregunta, ¿Cuál es el impacto de las condiciones de frontera en la degeneración de los niveles de energía y en las funciones de onda asociadas a estos? Aquí mostramos la importancia de la dimensionalidad para la solución del átomo hidrogenoide en dos dimensiones contrastándolo con la solución en tres dimensiones. Hemos encontrado a través del análisis de las condiciones de frontera la dependencia que tiene la energía respecto a dos números cuánticos. Al resolver el átomo hidrogenoide en dos dimensiones mediante el método de separación de variables llevamos la ecuación con dependencia radial a la forma de una Ecuación Diferencial Hipergeométrica Confluente cuyas soluciones se expresan en términos de los Polinomios Asociados de Laguerre. Al resolver el sistema cuántico hidrogenoide en dos dimensiones observamos el acceso a diferentes estados excitados para cada nivel de energía así como sus funciones de onda asociadas, diferentes a los observados en el átomo hidrogenoide en tres dimensiones.

## INTRODUCCIÓN

Desde los primeros trabajos realizados por Bohr para describir el átomo de hidrógeno; considerado como un modelo clásico y sin duda el primer modelo atómico en el que se introduce la idea de la cuantización, se intenta explicar el comportamiento de los electrones en órbitas estables alrededor del núcleo además de entender la presencia de los espectros de emisión característicos del átomo. La descripción del átomo de hidrógeno radica en dos componentes; un protón localizado en el núcleo y girando en órbitas circulares a su alrededor un electrón, mismo que ocupará la órbita de menor energía posible, es decir: la órbita más cercana al núcleo.

Este modelo está basado conceptualmente en el planteamiento del modelo atómico de Rutherford y en las originales ideas sobre cuantización que anteriormente habían surgido a partir de las investigaciones de Max Planck y Albert Einstein. Pero existía un gran problema, de acuerdo a la teoría electromagnética clásica, se predice que una partícula cargada moviéndose de forma circular emite energía, por tanto los electrones orbitando alrededor del núcleo deberían colapsar sobre el mismo en breves instantes de tiempo. Bohr dio solución a este problema suponiendo que los electrones únicamente pueden moverse en órbitas determinadas, cada una de las cuales caracterizada por su nivel energético. Entonces cada órbita puede identificarse mediante un número entero n; donde al número "n" se le identifica con el nombre de número cuántico principal.

En este contexto las aportaciones al estudio del átomo de hidrógeno a partir de la teoría de Bohr ha contribuido en gran parte al desarrollo de nuevos planteamientos; tal es el caso de los denominados átomos hidrogenoides, los cuales son átomos formados por un núcleo y un solo electrón. Por ejemplo: Un modelo característico de átomo hidrogenoide son los isótopos del hidrógeno (Protio, Deuterio y Tritio); también el caso de un átomo de  $He^+$ ,  $Li^{2+}$ ,  $Be^{3+}$  y  $B^{4+}$ . Los átomos o iones cuya capa de valencia está constituida por un único electrón por ejemplo, los metales alcalinos poseen propiedades espectroscópicas y de enlace semejantes a las de los átomos hidrogenoides.

De acuerdo al formalismo de la Mecánica Cuántica el estudio de los átomos hidrogenoides representa uno de los pocos problemas que encuentran solución de forma exacta; en contraste con el caso en el que los átomos contengan dos o más electrones, la resolución de las ecuaciones solo se podrá establecer a partir de diferentes métodos de aproximación. En este sentido los orbitales de los átomos hidrogenoides se pueden identificar mediante tres números cuánticos *n*, *l*, y *m*. Encontramos que los estados cuánticos de los átomos hidrogenoides son sus orbitales atómicos, en general el comportamiento de un electrón se representan como combinación lineal de los niveles de energía y de las funciones de onda asociadas, demostrando la existencia de degeneración.

#### TEORÍA

La solución del problema de dos cuerpos cuántico a partir de la teoría de campo central, representa una herramienta fundamental para la solución de diversos problemas relacionados con un sistema de interacción entre dos partículas. Sin duda es el modelo más simple y el primer acercamiento a la descripción de un sistema físico cuántico semejante a un átomo hidrogenoide cuyo movimiento esta dado en el espacio libre. La deducción de una expresión para el Hamiltoniano del sistema dependiente de las coordenadas del centro de masa y del vector asociado a la distancia relativa entre las partículas, es uno de los objetivos esenciales para la solución de la ecuación de Schrödinger, misma que utilizaremos posteriormente para la descripción de la dinámica del sistema.

Pensemos un sistema físico semejante a un átomo de hidrógeno de acuerdo al modelo atómico de Bohr Fig.1 compuesto por dos partículas con interacción a través del potencial para un átomo hidrogenoide  $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ . La solución del problema aplicando el formalismo proporcionado por la mecánica cuántica provee una excelente herramienta para la descripción e interpretación de la interacción núcleo – electrón. A partir de la *Ecuación de Schrödinger Independiente del Tiempo* construimos la descripción matemática del problema donde el Hamiltoniano del sistema es la suma del Hamiltoniano de cada partícula más el potencial de interacción. Finalmente al analizar los números cuánticos se obtiene la degeneración de los niveles de energía y con ello determinamos las funciones de onda asociadas a cada nivel de energía, desde el estado base hasta un número finito de estados excitados.



Figura 1. Representación artística de un átomo hidrogenoide de acuerdo con el modelo atómico de Bohr. Formado por dos partículas (núcleo – electrón) ligadas a través del potencial

#### PARTE EXPERIMENTAL

Consideremos un átomo hidrogenoide conformada por dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Fig. 2.



Figura 2. Representación artística de una molécula diatómica formada por dos átomos o partículas ligadas por medio de un potencial de interacción.

El átomo hidrogenoide se mueve libremente en el espacio de modo que identificamos con los vectores  $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$  a las posiciones de las partículas atómicas respecto al origen de un sistema cartesiano fijo. Por otro lado  $\vec{R} = (X, Y, Z)$  es el vector de posición medido desde el origen del sistema cartesiano al centro de masa (CM).

Ahora, definimos  $\vec{r} = (x, y, z)$  como el vector medido desde el centro de la partícula 1, al centro de la partícula 2. En este sentido identificaremos al vector  $\vec{r}$  como el "vector distancia relativa". Por tanto  $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ . Recordemos que el objetivo es: "Obtener una expresión para el Hamiltoniano" del sistema dinámico cuántico dependiente de las coordenadas asociadas a los vectores  $\vec{R}$  y  $\vec{r}$ . Similar al problema de los dos cuerpos en mecánica clásica, en mecánica cuántica es posible abordar este problema desde dos perspectivas distintas; a partir de las coordenadas relativas del sistema o desde la perspectiva del centro de masa.

Por tanto, sabemos que el Hamiltoniano de un sistema diatómico es la suma del Hamiltoniano de cada partícula más el potencial de interacción; es decir:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r})$$
(1)

Como primer paro en la obtención del Hamiltoniano, encontramos la forma matemática de las componentes de los vectores  $\vec{R}$  y  $\vec{r}$ .

Donde el vector CM en coordenadas relativas se escribe como:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \dot{r_1} + m_2 \dot{r_2}}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

Observemos que al encontrar una expresión para el Hamiltoniano del sistema, descrito en coordenadas relativas; los operadores Laplaciano contenidos en el Hamiltoniano dependen de las variables  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  asociadas a los vectores de posición  $\vec{r_1}$  y  $\vec{r_2}$  respectivamente.



Figura 3. Representación artística de una molécula diatómica formada por dos átomos o partículas ligadas por medio de un potencial de interacción.

Por tanto la ecuación de Schrödinger se escribe como:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2\psi(\vec{R},\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2\psi(\vec{R},\vec{r}) + V(r)\psi(\vec{R},\vec{r}) = E\psi(\vec{R},\vec{r})$$
(5)

A partir del método de separación de variables, escribimos  $\psi(\vec{R}, \vec{r}) = \mathcal{R}(\vec{R})\Phi(\vec{r})$  por tanto:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{\mathcal{R}(\vec{R})}\nabla_R^2\mathcal{R}(\vec{R}) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\Phi(\vec{r})}\nabla_r^2\Phi(\vec{r}) + V(r) = E$$
(9)

Donde  $E = \varepsilon + \epsilon$ ; entonces:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{\mathcal{R}(\vec{R})}\nabla_R^2\mathcal{R}(\vec{R}) = \varepsilon$$
(10 a)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\Phi(\vec{r})}\nabla_r^2\Phi(\vec{r}) + V(r) = \epsilon$$
(10 b)

Para la ecuación (10 a), tenemos:

$$\nabla_R^2 \mathcal{R}(\vec{R}) + \frac{2M}{\hbar^2} \varepsilon \mathcal{R}(\vec{R}) = 0$$
 (11)

Definimos  $K^2 = -\frac{2M}{\hbar^2}\varepsilon$ 

Por tanto la solución de la ecuación (11) se expresa como:  $\mathcal{R}(\vec{R}) = Ae^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}$ Con  $\vec{K}$  igual al vector de propagación en 2 dimensiones, es decir  $\vec{R}(R_x, R_y, 0)$ ;  $\vec{K}(K_x, K_y, 0)$ Falta el análisis de las condiciones de frontera para sacar también la contribución de la energía que según yo quedaría

$$\varepsilon_R = \frac{P^2}{2M}$$

Y denotar que al ser el átomo bidimensional usamos las coordenadas polares y al ser independiente del tiempo la ecuación de schrödinger se puede escribir como en (13) Abora para la ecuación (10 b) tenemos:

Ahora para la ecuación (10 b), tenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2\Phi(\vec{r}) + V(r)\Phi(\vec{r}) - \epsilon \Phi(\vec{r}) = 0$$
(12)

Donde el Laplaciano  $\nabla_r^2$  está descrito en coordenadas cilíndricas, entonces:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Phi(\vec{r}) + V(r) \Phi(\vec{r}) - \epsilon \Phi(\vec{r}) = 0$$
(13)

Nuevamente, aplicando separación de variables, tenemos que  $\Phi(\vec{r}) = R(\vec{r})\vartheta(\varphi)$ 

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{rR(\vec{r})}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}R(\vec{r})\right) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2\vartheta(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\vartheta(\varphi) + V(r) - \epsilon = 0$$
(16)

Multiplicamos la ecuación por  $r^2$ 

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{r}{R(\vec{r})}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}R(\vec{r})\right) + V(r)r^2 - \epsilon r^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\vartheta(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\vartheta(\varphi)$$
(18)

Para separar la ecuación, sabemos que dos ecuaciones diferenciales son iguales si y solo si son iguales a una constante; por tanto, tomamos la parte angular, igual a  $-m^2$ 

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\vartheta(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\vartheta(\varphi) = -m^2 ; \quad \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\vartheta(\varphi) + \frac{2\mu m^2}{\hbar^2}\vartheta(\varphi) = 0$$
(19)

Definimos  $\alpha^2 = \frac{2\mu m^2}{\hbar^2}$ ; entonces la ecuación (19) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \vartheta(\varphi) + \alpha^2 \vartheta(\varphi) = \mathbf{0}$$
 (20)

Donde sus soluciones se expresan de la forma:

$$\vartheta(\varphi) = e^{i\alpha\varphi} + e^{-i\alpha\varphi} \tag{21}$$

Aplicamos las condiciones de frontera para la parte angular, donde se debe cumplir que  $\vartheta(\varphi) = \vartheta(\varphi + 2\pi)$ ; para ello se requiere que  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

Entonces la solución se escribe como:  $\vartheta(\varphi) = e^{i\alpha\varphi}$  con  $\alpha \in \mathbb{Z}$ Ahora procedemos a encontrar las soluciones de la parte radial, por tanto tenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{r}{R(\vec{r})}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}R(\vec{r})\right) + V(r)r^2 - \epsilon r^2 = -m^2$$
(22)

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}R(\vec{r})\right) - \frac{2\mu}{\hbar^2}r^2V(r)R(\vec{r}) + \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}r^2R(\vec{r}) - \alpha^2R(\vec{r}) = 0$$
(23)

Donde previamente se definió  $\alpha^2 = \frac{2\mu m^2}{\hbar^2}$ ; además de que ahora consideremos el siguiente cambio

de variable  $R(\vec{r}) = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}}$  y el potencial para el átomo hidrogenoide  $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ , entonces:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}r^2\left(\frac{Ze^2}{r}\right)\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} + \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}r^2\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} - \alpha^2\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} = 0$$
(24)

$$r\left[\sqrt{r}\chi''(r) + \frac{1}{4}\frac{1}{r}\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}}\right] + \frac{2\mu}{\hbar^2}r^2\left(\frac{Ze^2}{r}\right)\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} + \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}r^2\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} - \alpha^2\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} = 0$$
(25)

Multiplicamos la ecuación (25) por  $\sqrt{r}$ , tenemos:

$$r\left[r\chi''(r) + \frac{1}{4}\frac{1}{r}\chi(r)\right] + \frac{2\mu}{\hbar^2}r^2\left(\frac{Ze^2}{r}\right)\chi(r) + \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}r^2\chi(r) - \alpha^2\chi(r) = 0$$
(26)

$$r^{2}\chi''(r) + \frac{1}{4}\chi(r) + \frac{2\mu Z e^{2}}{\hbar^{2}}r\chi(r) + \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^{2}}r^{2}\chi(r) - \alpha^{2}\chi(r) = 0$$
(27)

Definimos  $\beta^2 = -\frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}$  considerando estados ligados en el sistema donde  $\epsilon < 0$ ; también  $\gamma = \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2}$ . Entonces escribimos:

$$r^{2}\chi''(r) + \frac{1}{4}\chi(r) + \gamma r\chi(r) - r^{2}\beta^{2}\chi(r) - \alpha^{2}\chi(r) = 0$$
(28)

Ahora realizamos un análisis asintótico para el comportamiento de la ecuación diferencial ec. (28)

Caso I: Consideremos  $r \rightarrow \infty$ 

Dividimos la ecuación (28) entre  $r^2$  por tanto:

$$\frac{r^2}{r^2}\chi''(r) + \frac{1}{4}\frac{\chi(r)}{r^2} + \frac{\gamma r}{r^2}\chi(r) - \frac{r^2\beta^2}{r^2}\chi(r) - \frac{\alpha^2}{r^2}\chi(r) = 0$$
(29)

$$\chi_{\infty}''(r) + \frac{1}{4} \frac{\chi_{\infty}(r)}{r^2} + \gamma \frac{\chi_{\infty}(r)}{r} - \beta^2 \chi_{\infty}(r) - \alpha^2 \frac{\chi_{\infty}(r)}{r^2} = 0$$
(30)

$$\chi_{\infty}''(r) - \beta^2 \chi_{\infty}(r) = 0$$
(31)

Por tanto la solución para la ecuación (31) es de la forma:



problema, se requiere evitar que la solución imponga divergencia.

Buscamos soluciones que no impongan divergencia en  $r \to \infty$ ; por tanto la solución para la ecuación (31) se expresa como:

$$\chi_{\infty}(r) = e^{-\beta r} \tag{33} *$$

Caso II: Consideremos  $r \rightarrow 0$ 

$$r^{2}\chi_{0}''(r) + \frac{1}{4}\chi_{0}(r) + \gamma r\chi_{0}(r) - r^{2}\beta^{2}\chi_{0}(r) - \alpha^{2}\chi_{0}(r) = 0$$
(34)

$$r^{2}\chi_{0}''(r) + \left(\frac{1}{4} - \alpha^{2}\right)\chi_{0}(r) = 0$$
(35)

Notemos que la ecuación (35) tiene la forma de la ecuación de Cauchy – Euler, donde sus soluciones se expresan de la forma:

 $\chi_0(r)=r^k$  ;  $\chi'_0(r)=kr^{k-1}$  ;  $\chi''_0(r)=k(k-1)r^{k-2}$  Así, la ecuación (35) se escribe como:

$$r^{2}k(k-1)r^{k-2} + \left(\frac{1}{4} - \alpha^{2}\right)r^{k} = 0$$
(35)

$$k(k-1) + \left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right) = 0$$
 (36)

Así:  $k = \frac{1}{2} \pm \alpha$ ; ya que se buscan soluciones que eviten la divergencia, en particular cuando r = 0 tomamos  $k = \frac{1}{2} + |\alpha|$ 

Así construimos la solución para  $\chi(r)$ , como el producto de las soluciones obtenidas mediante el análisis asintótico, es decir:

$$\chi(r) = \chi_0(r)\chi_{\infty}(r)g(r) = e^{-\beta r}r^k g(r)$$
(37)

Ahora proponemos la siguiente definición  $\eta(r) = r^k g(r)$ , donde g(r) se puede expresar como una serie de potencias, por tanto:

$$g(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j r^j$$
  
$$f(r) = e^{-\beta r} n(r)$$
(38 a)

$$\chi(r) = e^{-\beta r} \eta(r)$$
(38*a*)  
(r) =  $\eta''(r)e^{-\beta r} - 2\beta\eta'(r)e^{-\beta r} + \beta^2\eta(r)e^{-\beta r}$ (38*b*)

Ahora regresemos a la ecuación diferencial (28) se puede reescribir como:

X

2012

$$r^{2}\eta''(r) - 2\beta r^{2}\eta'(r) + \left(\frac{1}{4} + \gamma r - \alpha^{2}\right)\eta(r) = 0$$
(40)

Expresamos la función  $\eta(r)$  y sus derivadas como una serie de potencias, de la forma:

$$\eta(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j r^{j+k} \; ; \; \eta'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (j+k) r^{j+k-1} \; ; \; \eta''(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (j+k) (j+k-1) r^{j+k-2}$$

Así, al sustituir en la ecuación (40) obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j \left[ (j+k)(j+k-1) + \frac{1}{4} - \alpha^2 \right] r^{j+k} + \sum_{j=0}^{\infty} C_j [\gamma - 2\beta(j+k)] r^{j+k+1} = 0 \quad (43)$$

Para la primer sumatoria, extraemos el primer término considerando el caso cuando j = 0; es decir:

$$C_{0}\left[k(k-1) + \frac{1}{4} - \alpha^{2}\right]r^{k} + \sum_{j=1}^{\infty} C_{j}\left[(j+k)(j+k-1) + \frac{1}{4} - \alpha^{2}\right]r^{j+k} + \sum_{j=0}^{\infty} C_{j}[\gamma - 2\beta(j+k)]r^{j+k+1} = 0$$
(44)

Ahora para acoplar las sumatorias en la primer sumatoria consideremos el siguiente cambio:  $i \rightarrow i +$ 1

$$C_{0}\left[k(k-1) + \frac{1}{4} - \alpha^{2}\right]r^{k} + \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+1}\left[(j+k+1)(j+k) + \frac{1}{4} - \alpha^{2}\right]r^{j+k+1} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} C_{j}[\gamma - 2\beta(j+k)]r^{j+k+1} \\ = 0 \quad (45) \\ \left[k(k-1) + \frac{1}{4} - \alpha^{2}\right]r^{k} + \sum_{j=0}^{\infty} \left\{C_{j+1}\left[(j+k+1)(j+k) + \frac{1}{4} - \alpha^{2}\right] + C_{j}[\gamma - 2\beta(j+k)]\right\}r^{j+k+1} \\ = 0 \quad (46)$$

 $C_0$ 

Para que se cumpla la igualdad, tenemos:  $C_0 \left[ k(k-1) + \frac{1}{4} - \alpha^2 \right] = 0$ (47)

Hacer la comprobación sustituyendo el valor de k, donde:  $k(k-1) + \frac{1}{4} - \alpha^2 = \left(\frac{1}{2} + |\alpha|\right) \left(\frac{1}{2} + |\alpha| - 1\right) + \frac{1}{4} - \alpha^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}|\alpha| - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\alpha| + \alpha^2 - |\alpha| + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0$ Por otro lado  $C_0$  es un coeficiente completamente arbitrario, por tanto  $C_0 \neq 0$ . Así la expresión para la recurrencia se escribe como:

$$C_{j+1}\left[(j+k+1)(j+k) + \frac{1}{4} - \alpha^2\right] + C_j[\gamma - 2\beta(j+k)] = 0$$
(48)

$$C_{j+1} = \frac{2\beta(j+k) - \gamma}{(j+k+1)(j+k) + \frac{1}{4} - \alpha^2} C_j$$
(49)

Por tanto para evitar divergencia en la función g(r), proponemos truncar la serie de modo que la función asociada ahora se escriba como un polinomio de grado *n*; es decir:  $C_{i+1} = 0$  y  $C_i \neq 0$ . De acuerdo a las condiciones anteriores escribimos:

$$2\beta(j+k) - \gamma = 0 \implies (j + \frac{1}{2} + |\alpha|) = (n + \frac{1}{2}) \implies (j + |\alpha|) = n \in N$$
(50)

Donde  $\gamma y \beta^2$  se habían definido previamente como:  $\gamma = \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2} \beta^2 = -\frac{2\mu e}{\hbar^2}$  elevando al cuadrado la ecuación (50), tenemos:

$$\epsilon_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 (j+k)^2} \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_{n\alpha} = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{51}$$

Ahora tenemos las derivadas siguientes

 $\eta(r) = r^{k}g(r) \quad \eta'(r) = r^{k}(g'(r) + kg(r)r^{-1}) \quad \eta''(r) = r^{k}(g''(r) + 2kr^{-1}g'(r) + k(k-1)r^{-2}g(r))$ Y sustituyendo en la ec. 40 tenemos

$$rg''(r) + [2k-2\beta r]g'(r) + [-2\beta k+\gamma]g(r) = 0$$

Sustituyendo en lo anterior

 $2\beta(j+k) = \gamma$ Además de los cambios de variable  $x = 2\beta r \implies r = \frac{x}{2\beta}$  además del valor de  $k = \frac{1}{2} + |\alpha|$  $ra''(r) + [2k - 2\beta r]a'(r) + [-2\beta k + 2\beta(j+k)]a(r) = 0$ 

$$\frac{x}{2\beta}(2\beta)(2\beta)g''(x) + [2k-x](2\beta)g'(x) + 2\beta jg(x) = 0$$

$$xg''(x) + [2|\alpha| + 1 - x]g'(x) + jg(x) = 0$$

De la forma de una ecuación Hipergeométrica confluente tenemos:

xg''(x) + [M+1-x]g'(x) + Ng(x) = 0

Cuyas soluciones se escriben de la forma:

 $\mathcal{L}_N^M(x) = g(x)$ 

De nuestra ecuación tomando que  $M = 2|\alpha|^n$  y que  $N = j => j + |\alpha| = n => j = n - |\alpha|$  tendremos que la solución quedaría de la forma:

$$g(x) = \mathcal{L}_{n-|\alpha|}^{2|\alpha|}(x) = \mathcal{L}_{n-|\alpha|}^{2|\alpha|}(2\beta r) = g(r)$$

Asi que la función general  $R(\vec{r})$  quedaría expresada finalmente como:

$$R(\vec{r}) = e^{-\beta r} e^{|\alpha|} \mathcal{L}_{n-|\alpha|}^{2|\alpha|}(2\beta r)$$

$$\Phi(\vec{r}) = R(\vec{r})\vartheta(\varphi) = e^{i\alpha\varphi}e^{-\beta r}e^{|\alpha|}\mathcal{L}_{n-|\alpha|}^{2|\alpha|}(2\beta r)$$

Entonces con esto podemos encontrar la degeneración de la energía, ya que:

$$n = j + |\alpha|$$

Comenzaremos la demostración por inducción, así suponemos que se cumple para los siguientes casos:

- Para n = 0

$$j = -|\alpha| \implies j = 0 \ y \ |\alpha| = 0 \implies \Phi(\vec{r})_{n,\alpha} = \Phi(\vec{r})_{0,0}$$
  
Para n = 1

$$\begin{aligned} j + |\alpha| &= 1 \implies j = 1 \ y \ |\alpha| = 0 \implies \Phi(\vec{r})_{1,0} \\ j &= 0 \ y \ |\alpha| = 1, -1 \implies \Phi(\vec{r})_{1,1}, \Phi(\vec{r})_{1,-1} \\ \vdots \end{aligned}$$

Entonces

- Para n = k

$$\begin{aligned} j + |\alpha| &= k \implies j = k \ y \ |\alpha| = 0 \implies \Phi(\vec{r})_{k,0} \\ j &= k - 1 \ y \ |\alpha| = 1, -1 \implies \Phi(\vec{r})_{k,1}, \Phi(\vec{r})_{k,-1} \\ j &= k - 2 \ y \ |\alpha| = 2, -2 \implies \Phi(\vec{r})_{k,2}, \Phi(\vec{r})_{k,-2} \\ \vdots \\ j &= 3 \ y \ |\alpha| = k - 3, -(k - 3) \implies \Phi(\vec{r})_{k,k-3}, \Phi(\vec{r})_{k,-(k-3)} \\ j &= 2 \ y \ |\alpha| = k - 2, -(k - 2) \implies \Phi(\vec{r})_{k,k-2}, \Phi(\vec{r})_{k,-(k-2)} \\ j &= 1 \ y \ |\alpha| = k - 1, -(k - 1) \implies \Phi(\vec{r})_{k,k-1}, \Phi(\vec{r})_{k,-(k-1)} \\ j &= 0 \ y \ |\alpha| = k, -k \implies \Phi(\vec{r})_{k,k}, \Phi(\vec{r})_{k,-k} \end{aligned}$$

Vemos que para el valor de n = k, cuando  $0 \le j \le k - 1$  entonces  $|\alpha| \ne 0$  y por tanto hay 2k valores para  $|\alpha|$  él cual puede tomar dos valores  $\binom{+}{-}$  ya que  $\alpha \in Z$  mientras que para cuando j = k,  $|\alpha|$  solo puede tomar el valor de 0, entonces solo tiene un valor; así que por tanto se cumple que existen 2k+1 eigenvalores.

#### RESULTADOS

Ahora procederemos a hacer la comparación de los niveles de energía y su degeneración entre el tratamiento del átomo Hidrogenoide en 2-D y 3-D de quien ya conocemos los datos debido a que se sigue un tratamiento similar pero lo dejaremos en términos del radio de Bohr, del cual ya sabemos su valor el cual es  $a_{\mu} = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} =$  y ya que se trata deun átomo Hidrogenoide Z=1.

| 3-D | 2-D |
|-----|-----|
|     |     |



# BIBLIOGRAFÍA

- 1. Martínez, Jorge Enrique Figueroa (1 De Enero De 2007). *Física Moderna Edición Revisada*. Pearson Educación.
- 2. Luis De La Peña (2016). Introducción A La Mecánica Cuántica tercera Edición, Segunda Reimpresión. Ciudad Universitaria, Ciudad De México. Fondo De Cultura Económica.
- Armando Martínez Téllez (Martes, 11 De Agosto De 2009). Solución Matricial Del Átomo De Hidrogeno. [Blog]. La Mecánica Cuántica. Recuperado De Http://La-Mecanica-Cuantica.Blogspot.Mx/2010/09/Solucion-Matricial-Del-Atomo-De.Html
- 4. Átomo De Hidrógeno. (S.F.). En Wikipedia. Recuperado El 16 De Febrero De 2018 De https://es.wikipedia.org/wiki/%c3%81tomo\_de\_hidr%c3%b3geno
# MODELACIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS UTILIZANDO EJS Y OTROS.

R. Espíndola H., G. Del Valle D., G. Hernández M., D. Muciño, M. López R., R. Acho y M. Lara.

Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco. Av San Pablo 180, Col Reynosa Tamaulipas, Del. Azcapotzalco, 02200 Ciudad de México, CDMX.

#### RESUMEN

Actualmente las simulaciones son utilizadas tanto para la investigación como para la enseñanza en distintas áreas como: física, química, matemáticas e ingeniería. Programas tales como Mathematica, Easy Java Simulation (EJS), MatLab, etc. ofrecen sus plataformas, por demás robusta y probada para dar soluciones numéricas y modelar adecuadamente distintos sistemas de interés. En este trabajo presentamos la modelación de algunos sistemas físicos relacionados con la dinámica rotacional, como con son las oscilaciones, obteniendo resultados sobre propiedades físicas como: frecuencia (f), periodo (T), torca ( $\Box$ ), velocidad (v), aceleración (a), momento angular (L), etc., los resultados son obtenidos y modelados tanto con Mathematica como con EJS, presentamos la forma requerida para construir adecuadamente los modelos físicos y los resultados de las simulaciones con el software correspondiente para motivar el uso de estas herramientas para el análisis de sistemas físicos, y como un apoyo para la enseñanza.

# INTRODUCCIÓN

Tanto en el estudio como en la investigación en ciencias se requiere el conocimiento y manipulación de modelos físicos. Definir tales modelos, requiere indudablemente del conocimiento de las leyes de la física que permiten establecer la descripción de la realidad, de esta manera podrán ser representados, ya sea de manera abstracta o simbólica a través de ecuaciones y de manera visual por medio de gráficas o simulaciones, las cuales necesariamente tendrán que corresponder con la descripción experimental, recordemos que la física es una ciencia fenomenológica que basa su conocimiento en la experimentación.

Con el desarrollo de las plataformas computacionales, hoy en día existen gran variedad de programas utilizados para entender, visualizar y resolver modelos físicos. El desarrollo de la computación por medio de interfaz gráfica, han permitido al usuario una interacción directa y fluida con la computadora, la oferta de programas de cómputo que permiten modelar se ha incrementado y forman parte de un gran negocio y fuente de desarrollo, por lo que el conocimiento y majeo de tales programes son necesarios tanto para la academia como para la investigación.

En este trabajo presentamos algunos sistemas físicos que se han modelado con los programas EJS y Mathematica, como: 1) Péndulo Cónico de Masa Variable, (Voladores de Papantla), 2) Rotor en MCU con Péndulo, 3) Péndulo Doble, 4) Péndulo doble de Masa Variable. Nuestro propósito es presentar la utilidad del uso y manejo de sistemas computacionales para modelar los sistemas con propósitos de investigación y de enseñanza.

#### TEORÍA

Para modelar los sistemas mecánicos descritos anteriormente, es necesario obtener las ecuaciones de movimiento (EM), generalmente son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (EDONL), el método que se sigue para su obtención es el procedimiento estándar dentro de la formulación Lagrangiana y que es como sigue: 1) Obtención de las energías del sistema T (energía cinética), U (energía potencial); 2) Construcción de Lagrangiano del sistema (L= T - U); 3) A través de la ecuación de Euler-Lagrange (EL:  $(d/dt) \partial L/\partial \dot{q} - \partial L/\partial q = 0$ ) obtener las EM. Posteriormente son resueltas de manera numérica, lo cual es el punto de partida para la realización de la modelación del sistema. A continuación se presentan las ecuaciones de los sistemas anteriormente descritos y que forman parte de este trabajo.

Ecuación de movimiento para el péndulo simple.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Ecuación de movimiento para el péndulo doble.

$$\ddot{\theta_1} + \frac{g}{l_1}\sin\theta_1 = -\frac{l_2}{l_1}\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\cos(\theta_2 - \theta_1)\,\dot{\theta_2} + \frac{l_2}{l_1}\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\sin(\theta_2 - \theta_1)\,\dot{\theta_2}^2 \tag{2}$$

$$\ddot{\theta}_{2} + \frac{g}{l_{2}}\sin\theta_{2} = -\frac{l_{1}}{l_{2}}\cos(\theta_{2} - \theta_{1})\ddot{\theta}_{1} - \frac{l_{1}}{l_{2}}\sin(\theta_{2} - \theta_{1})\dot{\theta}_{1}^{2}$$
(3)

Ecuación de movimiento para el péndulo cónico de longitud variable

$$\ddot{\rho} = g\cos(\theta) + \rho \dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \rho \dot{\phi}^2 \tag{4}$$

(6)

$$\ddot{\varphi} = 2\cot(\theta)\dot{\theta} - 2\frac{\theta\rho}{\rho}$$

$$\ddot{\theta} = \cos(\theta)\sin(\theta)\,\dot{\varphi}^2 - 2\frac{\theta\dot{\rho}}{\rho}$$

# PARTE NUMÉRICA

Easy Java Simulations (EJS)

EJS permite simular y elaborar experimentos con un enfoque en la vista gráfica, a continuación se verá un poco de lo que comprende el software.

Consola.

Es el punto de entrada al ejecutar EJS. La consola sirve para ejecutar procesos de manera adicional que requieren más de una copia de Easy Java. También despliega en la salida los mensajes de error de las simulaciones creadas y en algunas ocasiones mensajes de error del sistema.

Para iniciar el sistema basta con apretar el botón "Ejecutar EJS" y la primera ventana al ser ejecutado es la de descripción.



Ilustración 10. Consola de EJS.

Descripción.

El panel de descripción provee un lugar donde se puede narrar la descripción del problema de la simulación. Esta información será desplegada al iniciar la simulación, o también puede ser parte de páginas HTML cuando la simulación forma parte de *applets*.

(5)

| ● Descripción ○ Modelo ○ Vista             |                  |
|--------------------------------------------|------------------|
| Pulse para crear una página de descripción |                  |
| Mensajes                                   | Limpiar mensajes |

Ilustración 11. Panel de Descripción de EJS.

Modelo.

En el panel de modelo se encuentran diferentes sub-paneles, donde pueden ser introducidas las ecuaciones del modelo, las variables, inicialización, evolución, relaciones fijas, entre otros.

| <b>Descri</b>                        | pción ● <mark>Modelo</mark> O Vista                                       |                                              |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| ○ Variable                           | es O Inicialización III Evolución O Relaciones fijas O Propio O Elementos |                                              |
| Imágenes<br>por segundo<br>I 190     | Pulse para crear una página de código                                     |                                              |
| IPS 20<br>VTR<br>PPV 1<br>V Arranque | Pulse para crear una página de EDO                                        | <b>□</b><br><b>■</b><br><b>③</b><br><b>③</b> |
| Mensajes                             | Limpiar mensa                                                             | jes                                          |

Ilustración 12. Panel de Modelo de EJS.

Vista.

El panel de vista nos permite crear una interfaz gráfica que incluye visualización, interacción con el usuario y control del programa con la mínima codificación posible.

Cada uno de los elementos de la simulación, están ordenados en una estructura de árbol, que permite tener todo organizado.

| ○ Descripción ○ Modelo ◎ Vista |                         |          |
|--------------------------------|-------------------------|----------|
| Árbol de elementos             | Elementos para la vista |          |
| 📲 Vista de la simulación       | Interfaz                |          |
|                                | * I I K                 | <u>-</u> |
|                                |                         |          |
|                                |                         | B        |
|                                |                         | à        |
|                                | Elementos de dibujo 2D  |          |
|                                | 🥂 🚓 📑 🖬                 | $\odot$  |
| Ocultar la vista previa        |                         | ۲        |
| Mensajes                       | Limpiar mensa           | ijes     |
|                                |                         |          |
|                                |                         |          |
|                                |                         |          |

Ilustración 13. Panel de Vista de EJS.

#### Mathematica

Es un programa desarrollado por Wolfram Research, permite realizar cómputo científico, en la actualidad es un programa utilizado por investigadores, ingenieros, economistas, actuarios etc. Además de ser un programa que permite desarrollar algebra simbólica, también permite programar, y por medio de sus paqueterías permite desarrollar animaciones o modelos computacionales. A continuación presentamos una de las muchas formas posibles para desarrollar una animación, en la versión 11 de Matemática.

El procedimiento es el siguiente:

1.- Ser abre la paquetería para trabajar con método variacional, se limpian todas las variables, y apagan las salidas.

2.- Se definen las energías tanto cinética como potencial.

3.- Se asignan las coordenadas polares y se escribe el lagrangiano en su forma estandar.

4.- Por medio de la opción EulerEquations[L,  $\theta_1$ [t], t], se puede obtener la ecuación de movimiento para el sistema.

5.- A través de la opción Solve[EQMov,  $\theta_1$ [t], t] se despeja el valor de la segunda derivada de  $\theta$ 

6.- Se asignan los valores correspondientes de las constantes y de los parámetros iniciales de la simulación.

7.- Por medio de la opción NDSolve[{ $\ddot{\theta}[t]$ ==SolNum, [ $\theta[t=0]$ ==  $\theta_0$ ,  $\dot{\theta}_0[t=0]$ ==  $\dot{\theta}_0$ },  $\theta$ ,{t,0,nmax}] se obtiene la solución numérica con las condiciones iniciales dadas en un cierto intervalo de integración, el resultado que la computadora ofrecerá, será una función interpolada en el intervalo dado.

8.- Posteriormente se pueden visualizar las gráficas correspondientes de la solución, por medio de la opción Plot, ParametricPlot, Show, según sea el caso, en este punto uno busca hacer la construcción de ellas.

9.- Finalmente se define una función que depende del tiempo, a la cual se le asigna la dinámica del movimiento para cada una de las partes del sistema que se mueven, es decir puede ser, una línea, curva, punto u otro objeto, esta función nos permitirá asignar la dinámica resuelta a cada objeto y graficarlo cuadro por cuadro, en un intervalo de tiempo dado. Se generan N gráficas para N distintos tiempos.

10.- Finalmente con la opción Export["Video.gif",tomas], se genera una imagen con extensión gif que nos permite visualizar la dinámica del sistema.

Este procedimiento fue utilizado para resolver la dinámica de un péndulo simple, un péndulo doble y un péndulo forzado.

Otra alternativa que se tiene y que también se exploró en este trabajo, es resolver el método numérico directamente, la paquetería que Mathematica ofrece representa una caja negra para el usuario, porque no sabe cómo está programado el método a utilizar, la versatilidad de Mathematica es que aun en el notebook, uno puede programar el método con la ordenes propias de un lenguaje de computación, de esta manera tendrá un poco de más de control sobre lo que se está haciendo así como de sus variables y parámetros.

#### RESULTADOS

• Péndulo Cónico de longitud Variable.

Las variables y las ecuaciones que describen al sistema pueden ser observadas a continuación:

| ◯Descripción ◎ Modelo ◯ Vista |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Descripción     ● Modelo    ○ Vista                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| cialización 🗢 Evoluc          | ión 🗢 Relaciones fijas 🗢                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Propio Celementos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <u> </u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | /ariable         | es 🗢 Inicialización 💿 Evolución 🗢 Re                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | laciones fijas 📀 Propio 🗢 Elementos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| rchivo Variables Dinámicas    | y de Salida                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 🚞 lma                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | ágenes           | Evolución                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Valor inicial                 | Tipo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Dimensión                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | . Spor                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | segundo<br>- 100 | Var. Indep. t                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 📾 Incremento dt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 0.0008                        | double                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2                | Estado                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Derivada                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 0.002395                      | double                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | - 20             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Derivada                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 9.78                          | double                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Ľ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1                | a phi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | mbi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 0.15                          | double                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1.1              | dt -                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ophi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 34                            | double                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>Q</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 15               | dynhi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 3                             | double                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | \$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                  | <u></u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | -2*vrho*vphi/rl                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 600                           | double                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | es                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 10               | 01                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| false                         | boolean                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                  | d rho                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| false                         | boolean                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | - 5              | dt =                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | vrho                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| false                         | boolean                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| false                         | boolean                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | - 1              | <u>d vrho</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | (                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| false                         | boolean                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | IPS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 23               | dt -                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | (ING. Abur Abur.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | /TR                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | γPV                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1                | Método Verlet en Velocidad V Tol 0.00001                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ¥ 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | rranque          | Comentario                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                               | Modelo Vist     Statizació Vist     Vist | Modelo Vista     Vist | Modelo       Vista         cialización       Evolución       Relaciones fijas       Propio       Elementos         valor inicial       Tipo       Dimensión       Ouble       Ouble </td <td>Modelo Vista</td> <td>Modelo Vista     Descriticalización Celolación Relaciones fijas Propio Elementos     Civit Variables Dinámicas y de Salida     Valor inicial     Valor     Valor</td> <td>● Modelo       Vista         ● Descripción       ● Modelo       Vista         ○ Lalización       Evolución       Relaciones fijas       Propio       Elementos         Variables       Inicialización       Evolución       Rescripción       ● Modelo       Vista         Valor inicial       Tipo       Dimensión       ● Variables       Inicialización       ● Evolución       Re         0.0008       double       0       Observation       evolución       Re       Evolución       Re         0.002395       double       0       Dimensión       0       Estado       double       double       double       0       0       double       0       double       0       double       0       0       double       0       0       double       0       double       0       0       double       0       0       double       0       0       double       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0</td> | Modelo Vista     | Modelo Vista     Descriticalización Celolación Relaciones fijas Propio Elementos     Civit Variables Dinámicas y de Salida     Valor inicial     Valor     Valor | ● Modelo       Vista         ● Descripción       ● Modelo       Vista         ○ Lalización       Evolución       Relaciones fijas       Propio       Elementos         Variables       Inicialización       Evolución       Rescripción       ● Modelo       Vista         Valor inicial       Tipo       Dimensión       ● Variables       Inicialización       ● Evolución       Re         0.0008       double       0       Observation       evolución       Re       Evolución       Re         0.002395       double       0       Dimensión       0       Estado       double       double       double       0       0       double       0       double       0       double       0       0       double       0       0       double       0       double       0       0       double       0       0       double       0       0       double       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       0 |

Ilustración 14. Variables y Evolución.

El resultado de la simulación se puede observar en la siguiente figura:



Ilustración 15. Resultado de la Simulación.

• Péndulo Doble con Masa Variable.

Al igual que en el modelo pasado, las variables, inicialización, relaciones fijas, elementos propios y las ecuaciones que describen al sistema pueden ser observadas a continuación:

| Descripción     Iniciali     Variables     Iniciali     view plot pendulum1 pend | Modelo Vista<br>ización Evolución Relaciones fijas<br>dulum2 | Descripción ● Modelo ○ Vista<br>⊇ Variables ● Inicialización ○ Evolución<br>nt | □ <u>Descripción</u> ● Modelo ○ Vista<br>○ Variables ○ Inicialización ○ Evolución ● Relaciones fijas<br>relation |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nombre                                                                           | Valor inicial                                                | t=0.;                                                                          | x1=L1*Math.sin(ctal);                                                                                            |
| xmin                                                                             | -10.                                                         |                                                                                | y1=-L1*Math.cos(ctal);                                                                                           |
| xmax                                                                             | 10.                                                          |                                                                                | x2=L2*Math.sin(cta2);                                                                                            |
| ymin                                                                             | 0.                                                           |                                                                                | y2=-L2*Math.cos(cta2);                                                                                           |
| ymax                                                                             | 20.                                                          |                                                                                | ya=ymax+y1;                                                                                                      |
| t                                                                                | 0.                                                           |                                                                                | xb=x1+x2;                                                                                                        |
| dt                                                                               | 0.09                                                         |                                                                                | yb=ya+y2;                                                                                                        |
| gravity                                                                          | 9.8                                                          |                                                                                | /*Diagrama de Fase*/                                                                                             |
| size                                                                             | 1                                                            |                                                                                | if(co) { px=cta1; py=omega1; }                                                                                   |
| label                                                                            | "play"                                                       |                                                                                | else if(cc) {px=cta1; py=cta2;}                                                                                  |
| ng                                                                               | 0.3047                                                       |                                                                                | else {px=omega1; py=omega2;}                                                                                     |
| lambda                                                                           | 0.005                                                        |                                                                                |                                                                                                                  |
|                                                                                  |                                                              |                                                                                | vx1=-y1*omega1;                                                                                                  |
|                                                                                  |                                                              |                                                                                | vy1=x1*omega1;                                                                                                   |
| Comentario                                                                       |                                                              |                                                                                | vx2=vx1-v2*omega2;                                                                                               |
| Comentario Página                                                                |                                                              | Comentario                                                                     | vy2=vy1+x2+omega2;                                                                                               |

Ilustración 16. Variables, Inicialización y Relaciones Fijas.





Los elementos usados para la vista y el resultado de la simulación se pueden observar en las siguientes figuras:



Ilustración 18. Resultados de la Simulación.

• Péndulo Simple.

El procedimiento descrito para trabajar con Mathematica en el apartado anterior fue utilizado a continuación presentamos alguna graficas que fueron generadas:



Ilustración 10. Resultados de la Simulación para el péndulo simple.

La ilustración 10 presentan el comportamiento de *X* y *Y* para el péndulo simple, el diagrama fase para la variable  $\theta$  en el espacio de posiciones, y para el espacio de velocidades, las figuras de la parte inferior son tres imágenes de la animación realizada, esta animación se hizo para un ángulo inicial de  $\pi/2$ .

• Péndulo Doble.

Procediendo de igual manera se tiene lo siguiente:



Ilustración 11. Resultados de la Simulación para el péndulo doble.

La ilustración 11 presenta el comportamiento de *X* y *Y* para el péndulo doble, el diagrama fase para la variable  $\theta$  y para la variable  $\beta$  en el espacio de posiciones, asimismo para el espacio de velocidades, la figura de la parte inferior derecha es una imagen de la animación realizada, esta animación se preparó para un ángulo inicial de  $\pi/2$ , tanto para  $\theta$  como para  $\beta$ .

• Objeto en MCU con Péndulo.



Procediendo de igual manera se tiene lo siguiente:

Ilustración 12. Resultados de la Simulación para un objeto moviéndose en MCU con un péndulo acoplado.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado la manera en que se pueden utilizar dos programas de cómputo, para modelar sistemas físicos. La utilización de EJS permite de alguna manera iniciarse en la programación en JAVA, el uso de la interfaz propicia una interacción sencilla para modelar un problema en particular, desde luego, es necesario conocer la teoría del sistema a desarrollar y saber de qué manera la interfaz debe generar las gráficas y dar las ordenes necesarias para que los objetos sigan la dinámica propuesta.

Por otro lado Mathematica combina con su paquetería tanto el cómputo simbólico como la posibilidad de resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, la paquetería ayuda a desarrollar la teoría y obtener las ecuaciones de movimiento, así como resolverlas de forma numérica, la versatilidad de Mathematica radica en la manera en que se le indique las instrucciones a la computadora, existen mil y un formas de hacerlo y de obtener los mismos resultados.

El análisis y modelación de sistemas físicos es requerido como una propuesta previa para la realización de la experimentación, por lo cual se convierten en herramientas muy importantes para la investigación científica.

#### REFERENCIAS

- 1. Hauser W., "Introducción a los Principios de Mecánica", Uteha, 1969.
- 2. Marion J. B., "Dinámica Clásica de Partículas y Sistemas", Reverté, 2003
- 3. Fowles G. R., Cassiday G. L., "Analytical Mechanics", Thomson Brooks/Cole, 7ma Ed., 2005.
- Thornton S. T., Marion J. B., "Classical Dynamics of Particles and Systems", ThomsonBrooks/Cole, 5a ed., 2004. 5. Taylor J. R., "Classical Mechanics", Ira ed., University Science Books, 200
- 5. Tomasz Stachowiak, Toshio Okada, A numerical analysis of chaos in the double pendulum Chaos, Solitons and Fractals 29 (2006) 417–422
- 6. Rafał Kwiatkowskia, Dynamic analysis of double pendulum with variable mass and initial velocities, Procedia Engineering 136 (2016) 175 – 180.

### ANÁLISIS ESTADÍSTICO DESCRIPTIVO DE LA RELACIÓN: ACTIVIDAD FÍSICA Y APROVE-CHAMIENTO ESCOLAR

Julio Cesar Mendoza Rojas<sup>1</sup>, Daniel Martínez Madrigal<sup>2</sup>, María Guadalupe González Valencia<sup>2</sup>, Karla Guadalupe Lira Melendez<sup>2</sup> y Gilberto Hernández García<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Escuela Preparatoria "Gral. Lázaro Cárdenas", UMSNH, <sup>2</sup> CEUVA. merojuce@hotmail.com.

#### RESUMEN

Se realizó un análisis estadístico descriptivo a una muestra aleatoria de 126 alumnos de la carrera de nutrición del CEUVA, plantel Uruapan, para determinar si existe correlación entre las variables: actividad física y aprovechamiento escolar. Para su análisis se aplicó el Cuestionario Internacional de Actividad Física IPAQ (1998) y se relacionó con sus promedios de aprovechamiento. Los resultados del cuestionario son los siguientes: en un periodo de 7 días la población realiza actividad física, el 12 % moderada, el 33% más intensa y el 54 % no realiza. En un periodo de 24 hrs. realizan, el 87. 23 % de 1 a 2 hrs., el 6.47 % de 3 a 5 hrs. y el 6.3 % no realiza actividad física. La población tiene los siguientes promedios: el 0.80 % 6 o menos, el 5.64 % tiene 7, el 45.16 % tiene 8, el 41. 12 % tiene 9 y el 7.25 % tiene 10. Del análisis estadístico se concluye que el rendimiento escolar es multifactorial y no disminuye por la actividad física si no por la dieta baja en carbohidratos que llevan semanas antes de una competencia deportiva, causando una disminución de concentración afectando con esto su rendimiento escolar, se observó un cambio en el aprovechamiento escolar de los jóvenes, debido al exceso de horas de entrenamiento.

#### **INTRODUCCIÓN**

En el centro de estudios universitarios Vizcaya de las américas se observa que un porcentaje de estudiantes realizan actividad física, algunos, ningún tipo de actividad y otro realizan actividad física de alto rendimiento como lo es en la disciplina de fisicoculturismo, según Caballero, C. C., & Abello, L. L. R, Palacios J.(2007), el hecho de realizar actividad física en exceso puede provocar ciertos cambios en la salud del deportista de alto rendimiento, dado como primer lugar el cansancio debido a la falta de horas de dormir porque si no tenemos un buen descanso después de un alta exigencia en un entrenamiento puede causar un cansancio excesivo en el deportista.

Establecen que existe una relación en estos cambios como lo es el estrés y depresión además de cambios en el sistema inmunológico provocando que la persona deportista además no cumplir con sus tareas a nivel universidad y sus deberes tal vez esto provocando un deficiente desarrollo a nivel escolar en el sujeto. Cohen, S., & Herbert, T. B. (1996) por otro lado, establecen que los estudiantes universitarios son cada vez más exigidos en sus actividades deportivas dejándoles poco tiempo para ponerte al tanto en sus demás actividades escolares y por supuesto esto también provocándoles situaciones de estrés y ansiedad llevándolos a que todo este logre afectar su estado psicológico.

Además no todo el problema es generado por las instituciones educativas, sino también se debe considerar que algunos estudiantes en los tiempos actuales son irresponsables en sus deberes escolares provocando un bajo rendimiento escolar en los jóvenes universitarios, otro factor es la falta de cronogramas y organización de alumnos para realizar sus actividades diarias: escolares, personales, de recreación y familiares, además deben considerar los tiempos de traslado a sus hogares y así logren un grato descanso para reincorporarse a sus actividades al día siguiente.

Las competencias deportivas de los estudiantes con sus respectivas selecciones provoca ausentismo a sus actividades escolares a lo largo del periodo escolar, generando un problema con los profesores, con sus calificaciones y deben realizar las tareas y/o exámenes fuera de los tiempos establecidos institucionalmente o por el docente y esto automáticamente provoca una situación de estrés en el alumno. En algunos casos cuando no existe el apoyo por parte de la institución educativa el alumno debe decidir entre su actividad física o su preparación profesional. El hecho de participar en competencias de alto rendimiento no siempre es sinónimo de un buen desempeño físico y escolar, en ocasiones sucede lo contrario como se ha observado en los estudiantes de la universidad Vizcaya de las Américas que practican alguna actividad deportiva por parte de su institución, la mayor parte del tiempo llegan tarde a sus clases, provocándoles esto un problema porque no siempre se les permite ingresar al salón por llegar tarde. Además del estrés que esto genera en el alumno, se tiene consecuencias en su rendimiento escolar al perder clases y actividades escolares que repercuten en su calificación.

#### DESARROLLO

Se realizó un análisis estadístico estratificado por clases de 126 alumnos de la carrera de nutrición del CEUVA, plantel Uruapan, de la carrera de Nutrición modalidad escolarizado de los cuales se tomó una muestra compuesta por los grupos de: 2 A, 2 B, 5 A, 5B Y 8 A. para determinar la correlación entre las variables: actividad física y aprovechamiento escolar. Para su análisis se aplicó el Cuestionario Internacional de Actividad Física IPAQ (1998) y se relacionó con sus promedios de aprovechamiento proporcionados por el departamento de Control Escolar de la Institución Educativa. Se aplicó el cuestionario internacional de actividad física (IPAQ, 1998) consideraron dos variables, la actividad física y el aprovechamiento escolar. La primera variable se analiza a través del cuestionario IPAQ y la segunda se obtuvo a través de la base de datos de control escolar.

Se realizó un análisis estadístico descriptivo de datos no agrupados, considerando una muestra para las respuestas de cada pregunta, en cada una de ellos se realizó una tabla de frecuencias, graficas de sectores, se calcularon las medidas de tendencia central y dispersión

#### RESULTADOS

Al analizar el aprovechamiento escolar de la muestra a partir de los datos proporcionados por control escolar, se obtuvieron los siguientes resultados: Los resultados del cuestionario son los siguientes: en un periodo de 7 días la población realiza actividad física, el 12 % moderada, el 33% más intensa y el 55 % no realiza ninguna actividad. En un periodo de 24 hrs realizan, el 87. 23 % de 1 a 2 hrs., el 6.47 % de 3 a 5 hrs. y el 6.3 % no realiza ninguna actividad física. La población tiene los siguientes promedios: el 0.80 % 6 o menos, el 5.64 % tiene 7, el 45.16 % tiene 8, el 41. 12 % tiene 9 y el 7.25 % tiene 10.

La muestra tiene los siguientes promedios:



El 0.80 % de la muestra tiene 6 o menos de calificación, el 5.64 % tiene 7, el 45.16 % tiene 8, el 41. 12 % tiene 9 y el 7.25 % tiene 10.

La muestra presenta la siguiente distribución en su actividad física:



El 55 % de la muestra no realiza actividad física. El 12% Realiza una actividad física moderada. El 33 % realiza actividad física de alto rendimiento.

El Índice de Masa Corporal de la distribución muestral es el siguiente:



El 77% de las personas tienen un estado normal de nutrición. El 5% de se encuentran en desnutrición. El 18% de la universidad se encuentra con un sobrepeso.

# CONCLUSIONES

El rendimiento escolar es multifactorial y no disminuye por la actividad física si no por la dieta baja en carbohidratos que llevan semanas antes de una competencia deportiva los estudiantes que realizan actividad física de alto rendimiento, causando una disminución de concentración afectando con esto su rendimiento escolar. Además los jóvenes de alto rendimiento que tienen competencias a lo largo del calendario escolar generándoles mayor estrés que los estudiantes de tiempo completo, porque sus actividades deportivas les afectan en la entrega de tareas y en la aplicación de exámenes de diferentes materias en tiempo y forma establecidos por el docente y/o la institución académica. afectando su rendimiento escolar. Aunque este fenómeno no se observó en todos los estudiantes de alto rendimiento si es un factor que influye. El exceso en la actividad física (tiempo de gimnasio) aunado a una mala alimentación causa cansancio, sueño y falta de concentración en los estudiantes afectando su rendimiento escolar y reflejándose en su aprovechamiento, de ahí la importancia de generar cronogramas de actividades entre los estudiantes, docentes y la institución educativa, para que esto no afecte el rendimiento escolar de los alumnos que realicen alguna actividad física de alto rendimiento y/o participen en competencias deportivas. Para los estudiantes en general es necesario que reciban orientación adecuada por un nutriólogo y cuiden su alimentación, sugiriéndoles que la complementen con actividad física mínima como: caminar o cambio de hábitos sedentarios. Porque se detectó un 18% de la población con sobrepeso.

# **BIBLIOGRAFÍA**

- Caballero, C. C., & Abello, L. L. R, Palacios J.(2007) Relación del burnout y el rendimiento académico con la satisfacción frente a los estudios en estudiantes universitarios. *Avances es Psicología Latinoamericana*, 25(2), 98-111.
- Feldman, L., Goncalves, L., Chacón-Puignau, G., Zaragoza, J., Bagés, N., & De Pablo, J. (2008). Relaciones entre estrés académico, apoyo social, salud mental y rendimiento académico en estudiantes universitarios venezolanos. *Universitas psychologica*, 7(3), 739-752.
- Cohen, S., & Herbert, T. B. (1996). Health psychology: Psychological factors and physical disease from the perspective of human psychoneuroimmunology. *Annual review of psychology*, 47(1), 113-142.
- Lema Soto, L. F., Salazar Torres, I. C., Varela Arévalo, M. T., Tamayo Cardona, J. A., Rubio Sarria, A., & Botero Polanco, A. (2009). Comportamiento y salud de los jóvenes universitarios: satisfacción con el estilo de vida. *Pensamiento psicológico*, *5*(12)..
- 5. IPAQ (1998) Cuestionario Internacional de Actividad Física.

6. Merino Narváez, W. C. (2012). Actividad deportiva extracurricular en el rendimiento académico y diseño de una guía de hábitos de estudio para mejorar el rendimiento académico de los y las estudiantes de bachillerato del Colegio Nacional Mixto Gonzalo Escudero en el año lectivo 2012-2013.

# EL NEUTRINO, ESA PARTÍCULA ELUSIVA

María del Rocío Aparicio Méndez<sup>1</sup>, José Enrique Barradas Guevara<sup>2</sup>, Olga Guadalupe Félix Beltrán<sup>1</sup>, González Canales Félix Francisco<sup>1</sup>, Sánchez Tomay Alinne Michelle<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP, Av. San Claudio y Río Verde, Edif. 1FCE6, C. U., CP 72570, Puebla, Pue. México.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Av. San Claudio y Río Verde, Edif. FM1, C. U., CP 72570, Puebla, Pue. México.

#### RESUMEN

La escala de masa de los neutrinos es una de las preguntas fundamentales abiertas en la física, que tiene implicaciones desde la cosmología hasta la física de partículas. Desde el descubrimiento de la oscilación de los neutrinos en Super kamiokande hasta las mediciones de precisión de la cinemática de las desintegraciones débiles en núclidos inestables, con un enfoque independiente del modelo, para abordar esta cuestión en un entorno de laboratorio. En este trabajo presentamos una revisión del ajuste actual de las masas y mezclas de neutrinos, así como los diferentes experimentos, actuales y propuestos, que se dedican a la búsqueda de la física de los neutrinos. Finalmente, mostraremos los resultados teóricos de un análisis global de datos de oscilación de neutrinos en el marco del modelo de dos dobletes de Higgs considerando neutrinos masivos y la simetría S<sub>3</sub> (v2HDM⊗S<sub>3</sub>).

#### INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudian las implicaciones fenomenológicas de representar a las matrices de masa fermiónicas a través de una matriz con dos ceros de textura. Primero hablaremos sobre cómo acotar a las masas de los neutrinos, aprovechando los resultados experimentales actuales sobre oscilación de neutrinos y del satélite Planck. Esto nos permitir\'a tener un panorama general de lo que esperamos obtener en nuestro ajuste  $\chi^2$ .

Cotas sobre las masas de los neutrinos

En la actualidad no existe ningún experimento que nos permita conocer el valor absoluto o escala de las masas para neutrinos. De hecho, los experimentos de oscilaciones únicamente nos permiten determinar la diferencia de los cuadrados de las masas. En otras palabras, el único parámetro de masas de los neutrinos oscilación que involucra а las se define como  $\Delta m_{ij}^2 = m_{\nu_i}^2 - m_{\nu_j}^2$  con *i*, *j*=1,2,3. A partir de esta definición y considerando las dos posible jerarquías en el espectro de masas para neutrinos, dos de las masas se pueden expresar en términos del parámetro  $\Delta m_{ii}^2$  y de la masa del neutrino más ligero, como:

$$m_{\nu_3} = \sqrt{m_{\nu_1}^2 + \Delta m_{31}^2}, \quad m_{\nu_2} = \sqrt{m_{\nu_1}^2 + \Delta m_{21}^2},$$
  
 $m_{\nu_2} = \sqrt{m_{\nu_3}^2 + \Delta m_{23}^2}, \quad m_{\nu_1} = \sqrt{m_{\nu_3}^2 + \Delta m_{31}^2}.$ 

Las expresiones en el primer (segundo) renglón corresponden al caso de una jerarquía normal e invertida, respectivamente. Además, de las expresiones podemos observar que la masa del neutrino más ligero debe satisfacer la relación:

| $m_{\nu_3} > \sqrt{\Delta m_{31}^2}$ | para la Jerarquía Normal [JN],    |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| $m_{\nu_2} > \sqrt{\Delta m_{23}^2}$ | para la Jerarquía Invertida [JI]. |

El rango de valores para los parámetros  $\Delta m_{ii}^2$  reportados en son:

| Parámetro                                                    | BFP±1σ                              | Rango a 3σ    |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $\Delta m_{21}^2 (10^{-5} \text{eV}^2)$                      | 7.50-0.17                           | 7.03 - 8.09   |
| $ \Delta m_{21}^2 $ (10 <sup>-3</sup> dV <sup>2</sup> ) [JN] | $2.524 \substack{+0.039\\-0.040}$   | 2.407 - 2.643 |
| $ \Delta m_{21}^2 $ (10 <sup>-3</sup> dV <sup>2</sup> ) [JI] | $2.514 \substack{+0.038 \\ -0.041}$ | 2.399 - 2.635 |

Figura 31 Se muestra el rango experimental a BFP\$\pm 1\$, 2 y 3 sigmas para los parámetros de oscilación  $\Delta m_{21}^2$  y  $\Delta m_{31[13]}^2$ .

Por otro lado, de los resultados reportados por la Colaboración Planck [1] conocemos que el número efectivo de neutrinos activos es  $N_{eff} = 3.15 \pm 0.23$  y suma de sus masas tiene la siguiente cota superior:

$$\sum_{i=1}^{3} m_{\nu_i} < 0.23.$$

Estos resultados son independientes de la jerarquía que satisfagan las masas de los neutrinos. La expresión es equivalente a:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{m_{\nu_1}^2 + \Delta m_{31}^2} + \sqrt{m_{\nu_1}^2 + \Delta m_{21}^2} + m_{\nu_1} \\ \sqrt{m_{\nu_3}^2 + \Delta m_{23}^2} + \sqrt{m_{\nu_3}^2 + \Delta m_{31}^2} + m_{\nu_3} \end{array} \right\} < 0.23 \text{ eV}.$$

A continuación están dados los valores de las masas para los neutrinos, que se obtienen a partir de las expresiones dadas en ec.~(\ref{cotasupsuma}) y ec.~(\ref{cotainfsuma}). Además de considerar que los parámetros de oscilación están dados a un nivel de confianza de y \$3\sigma\$.

$$m_{\nu_1} (10^{-2} \text{ eV}) = \begin{cases} [0.00, 7.10] \\ [4.90, 8.25] \end{cases}$$
,  $m_{\nu_2} (10^{-2} \text{ eV}) = \begin{cases} [0.84, 7.13], \\ [4.97, 8.30], \end{cases}$ ,  $m_{\nu_2} (10^{-2} \text{ eV}) = \begin{cases} [4.80, 8.75], \\ [0, 6.45]. \end{cases}$ 

Los valores en la primer y segundo renglón corresponden a una jerarquía normal e invertida respectivamente.

En la figura 1 se muestra en el panel izquierdo el comportamiento de las masas de los neutrinos en función de la masa del neutrino más ligero, en el panel de la derecha se muestra el comoportamiento para la suma de masas, en ambas gráficas se toman en cuenta la jerarquía normal e invertida.



En el panel de la izquierda mostramos la suma de masas para los neutrinos. El panel de la derecha muestra la masa de los neutrinos. Los valores de los parámetros de oscilación \$\Delta m^{2}\_{ij}\$ son tomadas de la literatura. La cota superior sobre las masas del neutrino más ligero son obtenidas de los resultados de Planck donde \$\sum m\_{\nu\_{i}} < 0.23 eV\$ a un nivel de confianza del 95%. En base a las cotas sobre los valores permitidos para las masas de los neutrinos, dadas en (\ref{valores\_masas}), podemos concluir que para ambas jerarquías en el espectro de masas, existe la posibilidad que el neutrino más ligero sea un partícula sin masa. Pero si el neutrino más ligero, o cualquiera de los dos restantes, tiene masa nula, nos indicaría que solo es necesario un ángulo para describir las mezclas del sabor de los neutrinos. Tener un solo ángulo de mezcla no esta en acuerdo con los datos experimentales sobre oscilaciones, ya que actualmente se conoce que existen tres ángulos de mezcla diferentes a cero. Por consiguiente, las masas de los neutrinos pueden ser muy pequeñas pero estrictamente diferentes de cero. Por otro lado, en el siguiente análisis de verosimilitud \$\chi^{2}\$ en lugar de considerar a las tres masas de los neutrinos como tres parámetros libres, debemos considerarlas como uno sálo, ya que, como hemos observado anteriormente, dos de ellas pueden ser escritas en términos de la masa del neutrino más ligero. De hecho, en el análisis de

verosimilitud podemos considerar que las masas de los neutrinos son entradas y no como parámetros libres, ya que las cotas sobre estas mismas fueron determinadas a partir de los datos experimentales actuales.

Matriz y ángulos de mezcla del sabor leptónico

Ahora, antes de realizar el análisis de verosimilitud \$\chi^{2}\$ necesitamos establecer la forma como vamos a conectar nuestras expresiones teóricas con las observables físicas. En específico, como se relaciona nuestra parametrización con los ángulos de mezcla determinados en los experimentos de oscilación de neutrinos.

En la base donde los eigenestados de sabor de los tres leptones cargados son identificados con sus eigenestados de masa, los eigenestados de sabor de los tres neutrinos puede ser escrito como:

 $\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$ 

En la expresión de la matriz  $\{ V_{\rm PMNS} \$  los  $\nu_{\texttt{i}} \$  (con i=1,2,3) corresponde a los eigenestados de masa del neutrino, mientras que los  $\nu_{\texttt{k}} \$  ( $\texttt{k} \$  e,  $\nu, \tau$ ) corresponden a los eigenestados de sabor.

En el caso de tener tres familias de neutrinos activos, la Matriz de Mezclas del sabor leptónico para neutrinos de Majorana \${\bf V}\_{\rm PMNS}\$, puede ser representada en términos de tres ángulos y de tres fases pero la forma explicita de la matriz de mezclas depende de la base que se elija. Nosotros tomaremos la parametrización simétrica de la matriz de mezcla del sabor leptonico que tiene la forma \cite{Fritzsch:1999ee}

$$\mathbf{U}_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{12}\mathbf{c}_{13} & \mathbf{s}_{12}\mathbf{c}_{13}\mathbf{e}^{-i\phi_{13}} & \mathbf{s}_{13}\mathbf{e}^{-i\phi_{13}} \\ -\mathbf{s}_{12}\mathbf{c}_{23}\mathbf{e}^{i\phi_{12}} - \mathbf{c}_{12}\mathbf{s}_{13}\mathbf{s}_{23}\mathbf{e}^{-i(\phi_{23}-\phi_{13})} & \mathbf{c}_{12}\mathbf{c}_{23} - \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{13}\mathbf{s}_{23}\mathbf{e}^{-i(\phi_{23}+\phi_{12}-\phi_{13})} & \mathbf{c}_{13}\mathbf{s}_{23}\mathbf{e}^{-i\phi_{23}} \\ \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{23}\mathbf{e}^{i(\phi_{23}+\phi_{12})} - \mathbf{c}_{12}\mathbf{s}_{13}\mathbf{c}_{23}\mathbf{e}^{i\phi_{13}} & -\mathbf{c}_{12}\mathbf{s}_{23}\mathbf{e}^{i\phi_{23}} - \mathbf{s}_{12}\mathbf{s}_{13}\mathbf{c}_{23}\mathbf{e}^{-i(\phi_{12}-\phi_{13})} & \mathbf{c}_{13}\mathbf{c}_{23} \end{pmatrix}$$

Por simplicidad en esta matriz se ha definido la notación \$c\_{i j} = \cos{\theta\_{i j}}\$ y \$s\_{i j} = \sin{ \theta\_{i j} }\$, donde los tres ángulos \$\theta\_{ij}\$ son los ángulos de mezcla. Los parámetros \$\phi\_{12}\$, \$\phi\_{13}\$ y \$\phi\_{23}\$ son fases asociadas a la violación de CP.

Las fases \$\alpha\_{1}\$ y \$\alpha\_{2}\$ son conocidas como fases de Majorana, y sólo tienen consecuencias físicas si los neutrinos son part\'iculas de Majorana.

Las fases de Majorana tienen influencia en la desintegración doble beta sin neutrinos y otros procesos con violación de número leptónico.

Al calcular la magnitud de cada entrada de la matrices en las ecs.~\ref{Eq:pmns:comp}) y ~(\ref{Vsym}), y compararlas entre sí, se obtiene que los ángulos de mezcla se escriben como:

$$\operatorname{sen}^{2} \theta_{13} = \left| (\mathbf{U}_{\text{PMNS}})_{13} \right|^{2}, \quad \operatorname{sen}^{2} \theta_{12} = \frac{\left| (\mathbf{U}_{\text{PMNS}})_{12} \right|^{2}}{1 - \left| (\mathbf{U}_{\text{PMNS}})_{13} \right|^{2}}, \quad \operatorname{sen}^{2} \theta_{23} = \frac{\left| (\mathbf{U}_{\text{PMNS}})_{23} \right|^{2}}{1 - \left| (\mathbf{U}_{\text{PMNS}})_{13} \right|^{2}}.$$

Esta expresiones constituyen una forma simple de establecer un puente entre los ángulos de mezclas y distintas parametrizaciones para la matriz de mezclas \${\bf V}\_{\mathbf{V}}. Ahora, es natural preguntarnos si para los factores de fases asociados a la violación de CP existe una expresión como las dadas en ec.~(\ref{senoscuadrados}). La respuesta es afirmativa, pero no es suficiente con construir las magnitudes \$\left| V\_{ij} \right|\$, sino que necesitamos construir ciertas cantidades que sean invariantes bajo los refasamientos. Estas cantidades son el invariante de Jarlskog, en su version leptónica, y los llamadosinvariantes CP-Majorana.

La estrategia que seguiremos para poder obtener las regiones de parámetros con cierto nivel de confianza es la siguiente; \$i)\$~Se minimiza la función estimadora \$\chi^{2}\$ con el objetivo de obtener el BFP. \$ii)\$~Con los valores del BFP se fijan tres parámetros libres de la función \$\chi^{2}\$ y se dejan los otros dos libres de manera que subtiendan un region permitida. Así nuestro análisis de verosimilitud tendrá un grado de libertad.

Así los valores del BFP se muestran en la siguiente tabla.

|    | $\Delta m_{H}^2$ at | $\Phi_{n}[*]$     | $\Phi_{I2}[*]$    | m <sub>elines</sub> [dV]                                                      | å <sub>r</sub>                | 4                             | Ø <sub>12</sub> [*]     | 6 1                     | Ø                    | 4cm [*]                    | \$12 [*]                | φ <sub>12</sub> [*]     | $\chi^2_{min}$                                                                |
|----|---------------------|-------------------|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| NH | Se<br>BFP±1s<br>BFP | 270<br>270<br>270 | 196<br>196<br>196 | 2.67 × 10 <sup>-2</sup><br>2.67 × 10 <sup>-2</sup><br>2.67 × 10 <sup>-2</sup> | 0.20480<br>0.22258<br>0.21492 | 0.64607<br>0.64008            | 32.80<br>32.83<br>32.83 | 41.60<br>41.61<br>41.63 | 8.47<br>8.46<br>8.45 | -68.65<br>-70.74<br>-69.85 | -6.88<br>-6.79<br>-6.80 | 14.77<br>14.87<br>14.73 | 4.63 × 10 <sup>-4</sup><br>3.13 × 10 <sup>-4</sup><br>8.75 × 10 <sup>-2</sup> |
| Ш  | 3σ<br>BFP±1σ<br>BFP | 99 99<br>99 99    | 187<br>187<br>187 | 2.49 × 10 <sup>-3</sup><br>2.49 × 10 <sup>-3</sup><br>2.49 × 10 <sup>-3</sup> | 0.69943<br>0.69888<br>0.69798 | 0.01999<br>0.01995<br>0.01971 | 31.67<br>31.74<br>31.83 | 40.09<br>40.09          | 8.8<br>8.42<br>8.42  | -81.90<br>-81.88<br>-81.83 | -6.96<br>-6.96<br>-6.96 | -2.18<br>-2.18<br>-2.19 | $\frac{9.30 \times 10^{-2}}{4.66 \times 10^{-2}}$<br>$1.08 \times 10^{-1}$    |

Valores numéricos obtenidos para los cinco parámetros libres de los que depende \$\chi^2\$, los ángulos de mezcla y los factores de fase asociados a la violación de CP. Estos resultados fueron obtenidos considerando a \$\Delta m^{2}\_{ij}\$ en el rango del \$BFP\$, \$BFP\pm1\sigma\$ y \$\pm 3\sigma\$ \cite{Esteban:2016gun}.



A partir de este análisis de verosimilitud se puede realizar el estudio de la fenomenología de los neutrinos, esto es, cálculo de la fase de violación de CP, análisis de verosimilitud de los ángulos de mezcla y oscilaciones de neutrinos.

#### CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un análisis de las masas de los neutrinos ligeros en el marco del 2HDM-III. incluvendo la simetría del sabor S<sub>3</sub>v neutrinos masivos. 2HDM⊗S<sub>3</sub>. En este marco teórico se realizó un rompimiento explícito secuencial de  $S_3$  de acuerdo a la cadena de rompimiento S3L S3R Sdiag3 Sdiag2. Lo anterior nos permitió generar una matriz de masas hermitiana para todos los fermiones de Dirac. Es importante resaltar que esta matriz, en la base adaptada a la simetría del sabor, contiene dos ceros de textura que puede ser descrita por medio de cinco parámetros libres. El rompimiento secuencial de la simetría S<sub>3</sub> que hemos impuesto, ha permitido que las partículas tres familias tengan una masa distinta de cero, además de disminuir los parámetros libres en el sector de Yukawa. Así, obtenemos matrices de masa con cinco parámetros libres en la base adaptada a la simetría. Por un lado, el efecto de la simetría de sabor no es observable en los ángulos de mezcla, ya que al construir la matriz PMNS se cancelan sus efectos, es decir, la matriz US asociada al sabor se oculta. Por otro lado, estos efectos de sabor se observan en la fenomenología del sector escalar. La física de neutrinos es uno de los tópicos de investigación en modelos más allá del Modelo Estándar, que actualmente están siendo estudiados en búsquedas de nueva física, de ahí la importancia de nuestro modelo 2HDM⊗S<sub>3</sub>. Por consiguiente, en este trabajo se considera que los neutrinos son partículas masivas, las cuales adquieren su masa a través del mecanismo seesaw-tipo I. Por consiquiente, consideramos una matriz de masa con dos ceros de textura en la base adaptada a la simetría, lo que se interpreta como un tratamiento unificado en el sector fermiónico. Las matrices de masa fueron parametrizadas en términos de las masas de los fermiones (mr1; mr2; mr3), una fase compleja zación U<sub>I</sub> y U<sub>v</sub>, ya que nos enfocamos principalmente en el sector leptónico pero el tratamiento unificado que presentamos pudo ser igualmente utilizado en el sector de quarks. Una consecuencia inmediata de esta parametrización es que las matrices de Yukawa en la base física adquieren naturalmente la estructura del conocido anzats de Cheng-Sher. Usando U<sub>1</sub> y U<sub>v</sub> construimos la matriz de mezcla leptónica UPMNS, la cual quedó en función de las masas leptónicas, las fases  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , y los parámetros  $\delta_1$  y  $\delta_v$ . Finalmente, con el fin de comparar nuestras expresiones teóricas de los ángulos de mezcla con los datos experimentales actuales sobre oscilaciones de neutrinos, se realizó una prueba de verosimilitud por medio del estimador  $\chi^2$ .

# **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. E. Barradas-Guevara, O. Felix-Beltran, F. González-Canales and M. Zeleny-Mora,Lepton CP violation in a \$\nu\$2HDM with flavor,Phys. Rev. D 97 no. 3, 035003 (2018).
- E. Barradas-Guevara, O. Félix-Beltrán, F. Gonzalez-Canales, E. Rodríguez-Jáuregui and M. Zeleny-Mora, Analysis of the Lepton Mixing Matrix in the Two Higgs Doublet Model, Journal of Nuclear Physics, Material Sciences, Radiation and Applications, Vol. 4 No.-1 pp 203-219 (2016).

# ESTUDIO DE LA DISPERSIÓN CROMÁTICA TOTAL Y ÁREA EFECTIVA DE UNA FIBRA DE CRISTAL FOTÓNICO PARA APLICACIONES EN FENÓMENOS NO LINEALES

Alejandro Barrientos García, Carmen Victoria Mendoza, Vignaud Granados Alejo, Juan Antonio Guel Tapia, Miguel León Rodríguez y Orlando Medina Cazares

Departamento de Ingeniería Robótica, Universidad Politécnica de Guanajuato, Av. Universidad Sur 1001, Comunidad Juan Alonso, Cortazar, Gto., 38483, México.

#### RESUMEN

En el presente trabajo es analizada una fibra de cristal fotónico con geometría decagonal, permitiendo obtener dos puntos de dispersión cero, área efectiva pequeña y por lo tanto, un coeficiente de no linealidad alto y regiones de dispersión anómala y normal en el rango de 500 nm a 2000 nm, con las cuales podemos obtener diferentes fenómenos no lineales en aplicaciones de compresión, conformación o ruptura del pulso original de acuerdo a la longitud de la fibra usada. La fibra esta compuesta por cuatro anillos del mismo diámetro y un pitch de 1.618 µm, en este caso obtenemos 2 puntos de dispersión cero en 787 nm y 2046 nm respectivamente.

#### INTRODUCCIÓN

Las fibras de cristal fotónico hoy en día son uno de los pilares fundamentales en aplicaciones de óptica no lineal, tales como: la generación de supercontinuo, compresión de pulsos, conformación de pulsos, control de polarización, sensado de señales físicas etc [1]. Por lo que el diseño y estudio de este tipo de fibras sigue siendo un campo muy amplio en la óptica. Aquí la fibra propuesta tiene una geometría decagonal, la cual permite un amplio rango de operación monomodo, pérdidas de confinamiento pequeñas y un área efectiva más pequeña en comparación con una estructura hexagonal [2], permitiendo obtener fenómenos no lineales como la generación de supercontinuo de amplio espectro.

#### Fibra de cristal fotónico decagonal

La fibra propuesta esta formada por cuatro anillos de agujeros rodeando el núcleo sólido con una estructura decagonal como se muestra en la Fig. 1. El diámetro de los agujeros de la fibra son iguales a 0.9 µm con un pitch de 1.618 µm [3] entre cada anillo respecto al centro de la fibra. La caracterización de la fibra se realizó bajo el método de elemento finito. Finalmente se obtuvo la curva de dispersión cromática total de la fibra usando la siguiente relación:

$$D(\lambda) = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 \operatorname{Re}\{n_{eff}\}}{d\lambda^2}$$
(1)

donde *c* es la velocidad de la luz en el vacío,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $n_{eff}$  es el índice modal efectivo.



Fig. 1. Fibra de cristal fotónico decagonal.

En la caracterización de los parámetros de la fibra se obtuvieron las siguientes curvas para la dispersión cromática total, área efectiva y coeficiente de no linealidad respecto a la longitud de onda, mostradas en las Fig. 2 y Fig. 3. Podemos observar en la Fig. 2 que se obtienen dos puntos de dispersión cero, uno en 787 nm y otro en 2046 nm respectivamente. Así también la dispersión en esta región de la fibra es anómala y relativamente plana con un máximo de 132 ps/(nm\*Km).



En la Fig. 3 a) se muestra el área efectiva de la fibra directamente relacionada con un alto coeficiente de no linealidad, el cual es mostrado en la Fig. 3 b). Aquí podemos observar que el área efectiva en un amplio espectro es pequeña, menor a 4  $\mu$ m<sup>2</sup> dandonos la posibilidad de obtener bajo ciertos fenómenos nolineales un amplio espectro en la generación de supercontinuo. Basandonos en los dos puntos de cero dispersión, obtenemos el punto medio centrado en 1424 nm, el cual presenta un coeficiente de no linealidad de 30 W<sup>-1</sup>m<sup>-1</sup> el cual se va a usar en aplicación para la generación de supercontinuo, [4] arrojandonos un ensanchamiento muy amplio con una corta longitud de la fibra propuesta.



Fig. 3. En la figura 3 a) se muestra la curva del área efectiva de la fibra propuesta y en la figura 3 b) podemos apreciar la curva del coeficiente de no linealidad dependiente de la longitud de onda.

## **RESULTADOS DE GENERACIÓN DE SUPERCONTINUO**

Para la generación de supercontinuo, se bombeo un pulso con perfil de secante hiperbólica cuadrada centrado en 1424 nm, potencia pico de 100 kW y un ancho de 100 fs medido a ancho completo y altura media con un coeficiente de no linealidad igual a 30 W<sup>-1</sup>m<sup>-1</sup>. En la Fig. 4 podemos apreciar que el espectro obtenido es muy amplio, 2600 nm abarcando desde los 600 hasta los 3200 nm y relativamente uniforme en las ventanas de telecomunicaciones de 1300 y 1550 nm. En la Fig. 5 es mostrada la evolución del ensanchamiento espectral respecto a la distancia, la cual fue de solo 15 mm de la fibra propuesta.



Fig. 4. Aquí es mostrado el espectro de salida de la generación de supercontinuo.



Fig. 5. Aquí es mostrada la evolución del pulso dentro de la fibra.

#### CONCLUSIONES

En el presente trabajo es analizada una fibra de cristal fotónico con geometría decagonal, área efectiva pequeña y por lo tanto, un coeficiente de no linealidad alto y regiones de dispersión anómala y normal en el rango de 500 nm a 2000 nm, con las cuales podemos obtener diferentes fenómenos no lineales en aplicaciones de compresión, conformación o ruptura del pulso original de acuerdo a la longitud de la fibra usada. La fibra esta compuesta por 4 anillos, de los cuales todos tienen el mismo diámetro y un pitch de 1.618 µm entre el centro de la fibra respecto a los anillos de agujeros. Para esta fibra obtenemos 2 puntos de dispersión cero en 787 nm y 2046 nm respectivamente. Al bombear pulsos de 100 kW en cierta región de la fibra, obtenemos bajo simulación numérica, la generación de supercontinuo con un ancho espectral entre 600 nm y 3200 nm usando solamente 15 mm de fibra con una área efectiva entre 2.48 y 4.34  $\mu$ m<sup>2</sup> en el rango de 500 a 2000 nm.

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- A. Barrientos-García, Igor A. Sukhoivanov, J. A. Andrade-Lucio, O. G. Ibarra-Manzano, Igor Guryev, J. C. Hernández-García and G. Ramos-Ortiz, "Numerical Study of Highly Nonlinear Photonic Crystal Fiber with Tunable Zero Dispersion Wavelengths", J. of Electromagnetic Analysis and Applications, Vol. 7, 2015, pp. 141-151.
- 2. S. M. Abdur Razzak and Yoshinori Namihira, "Guiding Properties of a Decagonal Photonic Crystal Fiber", J. of Microwaves and Optoelectronics, Vol. 6, 2007, pp. 44-49.
- A. Barrientos-García, J. A. Andrade-Lucio, Igor A. Sukhoivanov, Igor Guryev, J. Ruiz-Pinales and R. Rojas-Laguna, "Numerical Study of photonic crystal fiber with ultra-flattened chromatic dispersion in anomalous and normal dispersion regimes", Optik, Vol. 126, 2015, pp. 1307-1311.
- 4. W. H. Reeves, D. V. Skrybin, F. Biancalana, J. C. Knight, P. St. Russell, F. G. Omenetto, A. Efimov and A. J. Taylor, "Transformation and Control of Ultra-Short Pulses in Dispersion-Engineered Photonic Crystal Fibres", Nature, Vol.424, 2003, pp. 511-515.

# ESTADÍSTICA DE LOS ESTADOS ESTABLES DE UN TUBO FLEXIBLE

Arturo Orozco Estrada<sup>1</sup>, Anne Cros<sup>1</sup>, Ricardo Lima<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Física, CUCEI, Universidad de Guadalajara, México <sup>2</sup> Dream and Science Factory, Marseille, Francia

#### RESUMEN

En nuestro experimento, un tubo flexible es recorrido por un flujo de aire descendente. Este sistema es un ejemplo típico de la interacción fluido-estructura, que da lugar a fluctuaciones de la estructura flexible. Bajo ciertas condiciones (como las dimensiones del tubo y la intensidad del flujo), el tubo presenta un régimen en el cual, estados turbulentos (durante los cuales el tubo fluctúa) alternan con estados estáticos, donde sorprendentemente el perfil del tubo no es recto. La estadística de cada uno de estos estados es descrita por un modelo de intermitencia desarrollado por Floriani et. al (2003), en el cual una variable aleatoria puede ser mayor o menor que cierto umbral. Este umbral puede o no variar. La competición entre las escalas de tiempo del umbral y de la variable da lugar a dos distribuciones estadísticas distintas, que pueden identificarse con cada una de las distribuciones de los estados estáticos y turbulentos del sistema experimental. Este análisis, además de explicar las distribuciones estadísticas de cada estado, permite observar los diferentes estados estáticos que caracterizan al sistema.

#### INTRODUCCIÓN

Morales Hernández (2014) estudió el comportamiento de un tubo flexible largo y delgado, a través del cual pasa un flujo de aire. El tubo está colgado de manera que el aire fluye de forma descendente. El flujo es controlado por medio del voltaje de una bomba de aire, a la cual el tubo está amarrado en su parte superior. Para valores bajos del voltaje de la bomba el tubo cuelga inmóvil en un estado estable. Al incrementar el voltaje de la bomba el tubo se mueve de manera caótica para luego volver a colocarse en una posición estable. Esta alternancia entre estados estables y caóticos caracteriza el comportamiento intermitente. Para caracterizar el tipo de intermitencia se midió tanto la presión como la velocidad del aire a la salida de la bomba (es decir, a la entrada del tubo) durante los periodos en que se presentaba el comportamiento intermitente. Mediante un procesamiento de señales se identificaron estados turbulentos y laminares.

Para cada una de las mediciones se construyó la distribución de probabilidad acumulada para los tiempos laminares y los tiempos turbulentos, es decir  $P(T_{lam/turb} \ge T)$ . Se encontró que la probabilidad de que un periodo laminar sea mayor que un tiempo dado es proporcional a una ley de potencias. Mientras que la probabilidad de que un periodo turbulento sea mayor que un tiempo dado es exponencial.

Por otra parte, Floriani et al. (2003) presentaron un modelo probabilístico para un sistema intermitente en el umbral de la estabilidad. El estado del sistema está caracterizado por una variable aleatoria x, otra variable aleatoria y toma el rol de umbral de estabilidad. Ambas variables están distribuidas respecto a cierta función de distribución de probabilidad. En el sistema se presentan estados laminares siempre que la variable de estado tome valores inferiores al valor de umbral: x < y. En cuanto x pasa por encima del umbral y, el tiempo laminar termina. El ingrediente novedoso de este modelo es que el umbral de estabilidad y puede fluctuar o no, de manera más o menos frecuente. Es decir, y puede variar con la misma frecuencia que x o bien de manera más lenta. En general, la estadística de las fases laminares depende de la frecuencia con la cual varía y con respecto a x. Si y es constante a lo largo del proceso, entonces la distribución de probabilidad acumulada de los estados laminares sigue una ley de potencias. Si y varía con la misma escala de tiempo que x, entonces la distribución de probabilidad acumulada de los tiempos laminares será exponencial.

En este trabajo se estudian las la distribuciones de probabilidad acumulada para los tiempos laminares y los tiempos turbulentos, así como su relación con el modelo de intermitencia de Floriani et al. (2003).

# TEORÍA

En el modelo de Floriani et al. (2003), tanto la variable de estado como el umbral de estabilidad son considerados como variables aleatorias independientes. Luego, se introduce un parámetro de control  $\eta \in [0,1]$ , que representa la frecuencia relativa de la variación del valor de umbral. Variar el valor de  $\eta$  equivale a modificar la relación entre las escalas de tiempo características de la variable de umbral *y* de la variable de estado *x*. Cuando  $\eta = 0$ , la variable de estado y el umbral tienen la misma escala de tiempo; y la estadística de las fases laminares es exponencial, mientras que cuando  $\eta = 1$  la estadística de las fases laminares sigue un escalamiento de ley de potencias. Para valores intermedios de  $\eta$ , la estadística es una combinación de las anteriores.

La estadística de las fases laminares depende esencialmente de la estadística de las variables de estado del sistema y del umbral.

Este modelo reproduce, de manera simplificada, ciertas características de un sistema Hamiltoniano débilmente caótico, con islas de estabilidad en el espacio de fases.

La órbita de dicho sistema (descrita por la variable de estado) típicamente se mantiene por periodos largos de tiempo en la vecindad de una isla de estabilidad hasta el momento que cruza la separatriz (descrita por la variable de umbral): la órbita entonces se mueve rápidamente a otras regiones del espacio de fases, hasta que alcanza la vecindad de otra isla, y el proceso comienza de nuevo.

En este modelo se supone que el estado del sistema puede ser caracterizado por un número real  $x \in [0,1]$  y el umbral de estabilidad por otro número real  $y \in [0,1]$ . El sistema es estable siempre que x < y. Cuando  $x \ge y$  el sistema presenta una transición repentina a un estado irregular.

Se considera *x* como una variable aleatoria distribuida con respecto a una función de distribución de probabilidad  $\mathcal{P}\{x < u\} = F(u) = \int_0^u f(x) dx$ . De manera análoga, el valor de umbral *y* es otra variable aleatoria distribuida con respecto a una función de distribución de probabilidad  $\mathcal{P}\{y < u\} = G(u) = \int_0^u g(y) dy$ . En general, *F* y *G* son dos funciones continuas arbitrarias que satisfacen las condiciones de normalización F(0) = G(0) = 0, F(1) = G(1) = 1.

Dado un valor fijo de  $\eta \in [0,1]$  se define el proceso aleatorio de tiempo discreto como sigue. Al tiempo t = 0, la variable x se elige con respecto a F, y y se elige con respecto a G. Si x < y, el proceso continúa y sigue al tiempo t = 1. Al tiempo  $t \ge 1$ , lo siguiente sucede:

*i.*- Con probabilidad  $\eta$ , *x* es escogida con respecto a *F* pero *y* mantiene el valor que tenía en t - 1. De otra manera;

*ii.*- Con probabilidad  $1 - \eta$ , x es escogida con respecto a F y y es escogida con respecto a G.

Si  $x \ge y$ , el proceso termina; si x < y, el proceso continúa y pasa al tiempo t + 1. Eventualmente x superará el valor de y, terminando así el proceso. En este punto el sistema se desestabiliza y el valor t = T, adquirido durante este proceso, limita la duración de la fase laminar. El sistema, entonces, vuelve a un estado estable cuando x < y, y el proceso comienza de nuevo.

Al estudiar este modelo, se está interesado en la probabilidad  $P_{\eta}(T; F, G)$  de que el proceso previamente descrito termine al tiempo *T*, dadas las funciones de distribución de probabilidad *F* y *G*, y dado un número  $\eta$  fijo. Floriani et al. (2003) demuestran que la probabilidad de que el proceso termine en un tiempo *T*, con  $\eta = 0$  (*y* cambia a cada paso del proceso) está dada por:

$$P_{\eta=0}(T) = \left[\int_0^1 dG(y)F(y)\right]^T \int_0^1 dG(y)(1-F(y))$$
(1)

Y la probabilidad de que el proceso termine en un tiempo *T*, con  $\eta = 1$  (*y* nunca cambia de un tiempo al siguiente) está dada por:

$$P_{\eta=1}(T) = \int_0^1 dG(y) [F(y)]^T (1 - F(y))$$
<sup>(2)</sup>

#### PARTE EXPERIMENTAL

El arreglo experimental es el siguiente. Una bomba de aire se monta en un lugar elevado. A la bomba está conectado un tubo flexible de tela plástica a través de un adaptador de cobre, de manera que el tubo flexible queda colgando de forma vertical (ver figura 1).



Figura 1. Imagen del sistema experimental (Morales Hernández, 2014).

La bomba de aire está conectada a un potenciómetro de forma que se pueda variar el voltaje de la bomba. El adaptador de cobre tiene orificios en los cuales se colocan los sensores de velocidad y de presión con los que se adquieren los datos. Los tubos flexibles están fabricados de una tela lisa y elástica de 0.1 mm de espesor, y tienen un diametro de 1.6 cm y un largo de 110 cm.

Al fluir el aire dentro del tubo se observan los siguientes comportamientos:

*i.*- Para voltajes bajos de la bomba el tubo queda inflado verticalmente en un estado estático (ver figura 2a).

*ii.*- Para voltajes mayores de la bomba, el tubo alterna entre un estado de oscilaciones y flexiones aparentemente aleatorias, y un estado "quebrado" estático, en el que el tubo se flexiona, generalmente en dos secciones, formando "codos" y manteniendo esta posición por periodos largos de tiempo (ver figura 2b).

De los sensores de velocidad y presión se obtienen los datos para los diferentes voltajes de la bomba a los cuales se realiza el experimento. Estos datos están organizados en dos vectores, uno para las medidas de velocidad y otro para las de potencia. Se tomaron series de tiempo de un promedio de 2h para los diferentes voltajes de la bomba con una frecuencia de adquisición de 60Hz por lo que se obtuvieron series de más de 400 000 puntos de datos.



Figura 2. (a) Tubo inflado verticalmente en estado estático, (b) tubo inflado en estado "quebrado".

Para definir los estados laminares y turbulentos se utilizaron los datos de la presión. Se utilizó el programa Matlab para crear el código de programación para binarizar la señal de la presión. Para binarizar la señal se calculó la desviación estándar sobre un intervalo de diez puntos a la izquierda y diez puntos a la derecha de cada punto de la serie. La serie con la que se trabajó es la serie original

de datos menos los primeros once puntos y los últimos once puntos. Se definió un umbral U = 50 Pa para definir los estados laminares y turbulentos de acuerdo a la desviación estándar:

*i.*- Si std(p) > U entonces  $p_b = 1$  y el estado del sistema corresponde a un estado turbulento. *ii.*- Si std(p) < U entonces  $p_b = 0$  y el estado del sistema corresponde a un estado laminar. Donde std(p) es la desviación estándar de la presión y  $p_b$  es la señal de la presión binarizada. Además de los dos puntos anteriores, si el tiempo de permanencia en el estado  $p_b = 0$  es menor a un segundo, los puntos correspondientes se convierten a  $p_b = 1$ . De la misma manera, si el tiempo de permanencia en  $p_b = 1$  es menor a un segundo, los puntos correspondientes se convierten a  $p_b = 1$ .



La figura 3 muestra la señal original en azul y la señal binarizada en rojo identificando los estados laminares y turbulentos.



Figura 3. Acercamiento de la señal de 36.0 V. Las líneas rojas muestran la señal binarizada.

#### RESULTADOS

A partir del experimento descrito anteriormente se obtuvieron las señales binarizadas para cinco voltajes diferentes de funcionamiento de la bomba: 35.5V, 36.0V, 36.5V, 37.0V y 37.5V. Para cada uno de los voltajes se construyó la distribución de probabilidad acumulada para los tiempos laminares y los tiempos turbulentos. La probabilidad de que un periodo laminar sea mayor que un tiempo dado es proporcional a una ley de potencias:

$$P(T_{lam} \ge T) \propto \frac{1}{T^k} = T^{-k} \tag{3}$$

Mientras que la probabilidad de que un periodo turbulento sea mayor que un tiempo dado es exponencial:

$$P(T_{turb} \ge T) \propto e^{-T/\tau} \tag{4}$$

Donde k y  $\tau$  son valores obtenidos experimentalmente.

Para mostrar la relación que hay entre los exponentes experimentales,  $k y \tau$ , y el modelo teórico de Floriani et al. (2003) se calculará  $P_{\eta=0}(T) y P_{\eta=1}(T)$  con F y G como funciones de distribución de probabilidad exponencial. Notemos que en el modelo descrito por Floriani et al. (2003), la variable del sistema y el umbral están normalizadas para pertenecer a [0,1], por lo tanto las distribuciones F(x) y G(y) no podrían ser exponenciales. Sin embargo no hay ningún problema en tomar x y y en el intervalo  $[0, \infty)$  y usar las funciones exponenciales para este caso.

Para  $\eta = 0$  la probabilidad de que el proceso aleatorio termine al tiempo *T* está dada por la ecuación 1. Sin embargo, para las funciones de distribución de probabilidad:  $dF(x) = \alpha e^{-\alpha x} dx, x \ge 0$  y  $dG(y) = \beta e^{-\beta y} dy, y \ge 0$ , la ecuación 1 se escribe ahora como:

$$P_{\eta=0}(T) = \left[\int_0^\infty dG(y)F(y)\right]^T \int_0^\infty dG(y)(1-F(y))$$
(5)

Por motivos de espacio omitiremos el desarrollo de esta integral, sin embargo es posible comprobar que:

$$P_{\eta=0}(T) = \left[\frac{\alpha}{\beta+\alpha}\right]^T \left[\frac{\beta}{\beta+\alpha}\right]$$
(6)

De manera similar, Para  $\eta = 1$  la probabilidad de que el proceso aleatorio termine al tiempo *T* está dada por la ecuación (2). Una vez más las funciones a utilizar son:  $dF(x) = \alpha e^{-\alpha x} dx, x \ge 0$  y  $dG(y) = \beta e^{-\beta y} dy, y \ge 0$ .

Haciendo las mismas consideraciones que para el caso anterior, la ecuación (2) se convierte en:

$$P_{\eta=1}(T) = \int_0^\infty dG(y) [F(y)]^T (1 - F(y))$$
(7)

Una vez más, omitimos el procedimiento de esta integral, pero que al resolver se encuentra que:

$$P_{\eta=1}(T) = \left(e^{1+\frac{\beta}{\alpha}}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)! \left(\frac{1}{T^{(\beta/\alpha)+1}}\right) \left(1+o\left(\frac{1}{T}\right)\right)$$
(8)

Con estos resultados es ya posible encontrar la relación entre los datos experimentales y el modelo teórico. Una vez más nos vemos forzados a omitir el procedimiento matemático pero mediante una comparación entre las ecuaciones (3) y (8); y las ecuaciones (4) y (6) encontramos que para el caso de  $\eta = 0$ :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 - e^{-1/\tau}}{e^{-1/\tau}}$$
(9)

y para el caso de  $\eta = 1$ :

 $\frac{\beta}{\alpha} = k \tag{10}$ 

Así, las relaciones entre los parámetros de las funciones de probabilidad exponenciales  $(\alpha, \beta)$  con los exponentes de las distribuciones de probabilidad acumulada experimentales  $(k, \tau)$  están dadas por las ecuaciones (9) y (10).

A continuación mostraremos como los valores experimentales de k y  $\tau$  obtenidos. Como ya se mencionó, se obtuvieron las señales binarizadas para cinco voltajes diferentes de funcionamiento de la bomba: 35.5V, 36.0V, 36.5V, 37.0V y 37.5V. Se construyó la distribución de probabilidad acumulada para los tiempos laminares y los tiempos turbulentos, es decir  $P(T_{lam/turb} \ge T)$ , para cada uno de los voltajes.

En la figura 4 se muestra la serie de tiempo contra presión para 36.0V.





Las líneas en azul muestran la presión y las líneas en rojo muestran la señal binarizada. Las líneas altas en rojo indican un estado turbulento y las bajas en rojo un estado laminar. Notemos en primera instancia que se pueden identificar dos estados laminares, uno de presión baja alrededor de 400Pa y uno de presión alta de entre 900 - 1000Pa. Se realizaron gráficas similares para cada uno de los voltajes (que por razones de espacio no mostraremos) y en general se encuentra que los estados laminares de presión baja son más duraderos para voltajes bajos de la bomba. Al incrementar el voltaje, los estados laminares de presión baja son cada vez más cortos y menos comunes; y los de presión alta se vuelven más habituales, excepto para el máximo voltaje de la bomba donde estos también se vuelven menos comunes. Además, al incrementar el voltaje de la bomba, los estados laminares se ven cada vez más interrumpidos por los estados turbulentos, los cuales, a su vez se vuelven más duraderos.

Se calcularon las distribuciones de probabilidad acumulada para los tiempos laminares y turbulentos para cada uno de los cinco voltajes. En la figura 5 se muestra esta distribución para el voltaje de 36.0V. Del lado izquierdo se encuentra la distribución de las fases laminares y del lado derecho la distribución de las fases turbulentas.

Los valores para cada coeficiente  $(k, \tau)$  están recopilados en la tabla 1. Podemos observar que los valores de  $\tau$  se incrementan conforme el voltaje se incrementa. Esto quiere decir que conforme se aumenta la potencia de la bomba, una fase turbulenta de un tiempo dado es más probable que suceda. Además, se incrementa la probabilidad de que fases turbulentas de larga duración ocurran. Esto a su vez, significa que al incrementar la potencia de la bomba, las fases turbulentas son más frecuentes y más duraderas. Sin embargo, el comportamiento de k es distinto. De 35.5 a 36.0V, k aumenta, luego comienza a disminuir, y de 37.0 a 37.5V aumenta de nuevo.



Figura 5. Distribuciones de probabilidad acumulada para los tiempos laminares y turbulentos para la señal de 36.0 V. Del lado izquierdo, la distribución de las fases laminares y del lado derecho la distribución de las fases turbulentas.

El significado en los distintos valores de k es el siguiente: para valores bajos de k es más probable obtener fases laminares de larga duración que para valores altos de k. Incrementar el valor de k significa que las fases laminares son cada vez más cortas y es menos probable que ocurran.

| Voltaje (V) | k    | τ     |
|-------------|------|-------|
| 35.5        | 0.37 | 3.08  |
| 36.0        | 0.52 | 17.46 |
| 36.5        | 0.45 | 27.12 |
| 37.0        | 0.36 | 45.94 |
| 37.5        | 0.74 | 79.06 |

Tabla 1. Valores de los coeficientes k y  $\tau$  para cada valor del voltaje de la bomba.

Una suposición lógica sería creer que, al aumentar la potencia de la bomba el valor de k también se incrementaría. Sin embargo esto no se ve que suceda. El comportamiento no monótono de k, lleva a la decisión de estudiar con más detalle las fases laminares.

Se observó anteriormente que en la gráfica de la señal de presión podían verse dos fases laminares distintas, una de presión baja y otra de presión alta. Hasta el momento se supuso que ambas fases laminares se comportaban de la misma manera. Esta suposición fue hecha en una primera aproximación para facilitar el análisis de los datos; sin embargo la evolución no monótona de k obliga a tomar en cuenta los periodos laminares de diferentes valores promedios como estados dinámicos diferentes. Para analizar las distintas fases laminares por separado se calculó el valor promedio de cada fase laminar. Con esta información se realizaron los histogramas de las presiones promedio para cada voltaje de la bomba. Aquí mostramos el histograma para 36.0V en la figura 6.



Figura 6. Histogramas de las fases laminares para 36.0 V.

En el histograma de 36.0 V se observan tres máximos locales; uno alrededor de 450 Pa, otro alrededor de 700 Pa y el ultimo, alrededor de 900 Pa. En general (tomando en cuenta todos los histogramas), el sistema tiene preferencia por tres estados laminares de diferente presión, uno de presión baja (alrededor de 400Pa), uno de presión media (alrededor de 700Pa) y uno de presión alta (alrededor de 900Pa). A partir de ahora se hará referencia a ellos como estados 1, 2 y 3, respectivamente. A partir de los histogramas, se definió un intervalo de presión para cada uno de los estados y los voltajes, se debe mencionar que la frontera entre el estado 2 y 3 es algo arbitraria debido al hecho de que esos estados se sobreponen. En la tabla 2 se muestran estos intervalos.

| Tabla 2. Int | ervalos de la pre | sión para cada esta | ado y cada voltaje. |
|--------------|-------------------|---------------------|---------------------|
| Voltaje (V)  | Estado 1          | Estado 2            | Estado 3            |
| 35.5         | 0-550Pa           | 550-750Pa           | 750-1100Pa          |
| 36.0         | 0-550Pa           | 550-750Pa           | 750-1100Pa          |
| 36.5         | 0-550Pa           | 550-850Pa           | 850-1100Pa          |
| 37.0         | 0-550Pa           | 550-850Pa           | 850-1100Pa          |
| 37.5         | 0-550Pa           | 550-850Pa           | 850-1100Pa          |

Otra cuestión importante es la de cuantas fases laminares ocurren durante el experimento y cuantas ocurren en cada estado. La tabla 3 provee esta información.

|      | Tabla 3. Numero de | tases laminares que ocu | rren para cada estado y | para cada voltaje.   |
|------|--------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------|
| Vol- | No. total de fa-   | No. de fases lami-      | No. de fases lami-      | No. de fases lami-   |
| taje | ses laminares      | nares en el estado 1    | nares en el estado 2    | nares en el estado 3 |
| (V)  |                    |                         |                         |                      |
| 35.5 | 26                 | 8                       | 3                       | 15                   |
| 36.0 | 163                | 17                      | 47                      | 99                   |
| 36.5 | 151                | 6                       | 49                      | 96                   |
| 37.0 | 85                 | 0                       | 34                      | 51                   |
| 37.5 | 73                 | 3                       | 19                      | 51                   |

T-1-1- 0 NL/ . . . . . . . . 14 - 1

Hay que recalcar el poco número de datos que hay para 35.5*V* y para la mayoría de los estados 1. De la tabla 4 se puede observar que los estados 3 son los más visitados, mientras que los estados 1 son los menos visitados por el sistema.

Se realizaron las distribuciones de probabilidad acumulada de cada estado para cada voltaje. Aquí mostramos la distribución de probabilidad acumulada para 36.0 V en la figura 7. Cabe indicar que los ajustes del exponente k para 35.5V no son buenos debido a la falta de datos, lo mismo sucede para los estados 1 de los demás voltajes. Los valores del exponente k están recopilados en la tabla 4.



Figura 7. Distribuciones de probabilidad acumulada para 36.0V. Arriba, de izquierda a derecha, estado 1, estado2 y estado3. Abajo, los tres estados juntos.

|             | cos pun  | tos de datos. |          |
|-------------|----------|---------------|----------|
| Voltaje (V) | k        |               |          |
|             | Estado 1 | Estado 2      | Estado 3 |
| 35.5        | 0.13*    | 0.43*         | 0.49*    |
| 36.0        | 1.45     | 0.79          | 0.34     |
| 36.5        | -        | 0.56          | 0.35     |
| 37.0        | -        | 0.48          | 0.26     |
| 37.5        | -        | 0.59          | 0.5      |

Tabla 4. Valores de k para cada estado y voltaje. Los valores con asterisco (\*) no son confiables debido a la falta de datos. Los guiones (-) indican que el ajuste no se pudo realizar debido a los po-

Podemos apreciar que el valor de k disminuye conforme se pasa del estado 1 al 3 para cada uno de los diferentes voltajes, excepto en 35.5 V. Esto significa que los estados 3 tienen mayor probabilidad de ocurrir que los estados 2, y estos a su vez tienen mayor probabilidad de ocurrir que los estados 1. El haber obtenido diferentes valores de k para cada estado en este análisis indica que, efectivamente, los estados de presión baja y presión alta se comportan de forma distinta. Sin embargo, k

sigue evolucionando de manera no monótona para un mismo estado conforme aumenta la potencia de la bomba.

### CONCLUSIONES

Se ha estudiado el comportamiento de un tubo flexible largo y delgado, recorrido por un flujo de aire, que bajo ciertas condiciones de flujo, presenta un comportamiento intermitente. Se observan periodos en los que el tubo se mantiene en diferentes posiciones estáticas (fases laminares) que luego son interrumpidos por periodos de movimiento aparentemente caótico del tubo (fases turbulentas). Experimentalmente, las distribuciones de probabilidad acumulada de las fases laminares siguen una ley de potencia mientras que las de las fases turbulentas son exponenciales. Esta diferencia entre la estadística de las fases laminares y de las fases turbulentas puede ser descrita por el modelo de intermitencia desarrollado por Floriani et al. (2003).

Se calcularon las probabilidades de que el proceso aleatorio, descrito en el modelo de Floriani et al. (2003), termine al tiempo *T* para  $\eta = 0$  y para  $\eta = 1$  con funciones de distribución de probabilidad exponenciales, estas probabilidades están dadas por las ecuaciones (6) y (8). Con estas ecuaciones, se halló la relación entre los exponentes experimentales (*k* y  $\tau$ ) y los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de las funciones de distribución de probabilidad exponencial. Estas relaciones están dadas por las ecuaciones (9), y (10).

Se encontraron los valores experimentales de k y  $\tau$  para diferentes voltajes de la bomba considerando que solo existía un tipo de fase laminar, posteriormente, mediante un análisis más detallado de las señales de presión se pudo encontrar la existencia de al menos tres tipos diferentes de fases laminares para cada uno de los voltaje; los estados 1, 2 y 3. Se calculó el valor del exponente k para cada uno de los tres estados y se encontró que cada uno de estos estados tiene diferentes propiedades estadísticas. Se encontró que, para cada voltaje, los estados siguen una tendencia en la que los estados laminares de presión alta son más probables que los de presión baja. El haber obtenido diferentes valores de k para cada estado indica que, efectivamente, los estados de baja presión se comportan de forma distinta que los de alta presión.

Se encontró que el modelo de Floriani et al. (2013) puede describir la estadística tanto de las fases laminares como la de las fases turbulentas mediante la variación del parámetro  $\eta$ . En este caso se tendría que la estadística de los estados laminares corresponde al modelo con  $\eta = 1$ , y la de los estados turbulentos al modelo con  $\eta = 0$ .

#### BIBLIOGRAFÍA

- V. Afraimovich, T.R. Young, M. I. Rabinovich. "*Hierarchical Heteroclinics in Dynamical Model of Cognitive Processes: Chunking*". International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 24, No. 10, 1450132 (2014).
- 2. K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. "Chaos: An introduction to dynamical systems". Springer. New York, 1996.
- 3. R. Artuso and G. Cristadoro. "Anomalous deterministic transport". Chaos Vol. 15, (2005) 015116/1–7.
- 4. J. P. Eckmann. "*Roads to turbulence in dissipative dynamical systems*". Reviews of Modern Physics, Vol. 53, No.4, (1981) pp. 643-654.
- 5. M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney. "Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos". Elsevier. USA, 2004.
- 6. E. Floriani, D. Volchenkov, R. Lima. "*A system close to a threshold of instability*". Journal of Physics a: Mathematical and General. Vol. 36 (2003) pp. 4771–4783.
- 7. S. Galatolo. "*Complexity, initial condition sensitivity, dimension and weak chaos in dynamical systems*". Nonlinearity Vol. 16, (2003) pp. 1219–1238.
- C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke. "<u>Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation</u>". Physical Review Letters, Vol. 50, No. 13, (1983) pp. 935-938.
- 9. P.W. Hammer, N. Platt, S. M. Hammel, J. F. Heagy, B. D. Lee. "*Experimental observation of on-off intermittency*". Physical Review Letters, Vol. 73, No. 8, (1994) pp. 1095-1098.

- 10. J.F. Heagy, N. Platt, S.M. Hammel. "*Characterization of on-off intermittency"*. Physical Review E, Vol 49, No. 2 (1994) pp. 1140-1150.
- 11. R. Morales Hernández. "*Caracterización del régimen inestable de un tubo flexible conduciendo un flujo de aire*". Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. pp. (2014).
- 12. N. Platt, E. A. Spiegel, C. Tresser. "On-off intermittency: A mechanism for bursting". Physical Review Letters. Vol. 70, No. 3 (1993) pp. 279-282.
- 13. Y. Pomeau, P. Manneville. "Intermitent transition to turbulence in dissipative dynamical systems". Communications in Mathematical Physics, Vol. 74 (1980) pp. 189-197.
- 14. H. van Beijeren. "Generalized dynamical entropies in weakly chaotic systems". Physica D 193, (2004) pp. 90–95.
- 15. G.M. Zaslavsky and D.A. Usikov. "*Weak chaos and quasi-regular patterns*". Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

# COMPUTACIÓN CUÁNTICA: EXPLORANDO EL MUNDO CUÁNTICO DE LA INFORMACIÓN

Rodolfo Espíndola Heredia, Gabriela Del Valle Díaz Muñoz, Guadalupe Hernández Morales, Santiago Guijosa Guadarrama, Ángel Omar De Luna Gallardo, Mario Alberto López Reyes, Damián Muciño Cruz.

#### Departamento de Ciencias Básicas, Física Atómica Molecular Aplicada, Laboratorio de Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco rodolfoespiher@yahoo.com.mx

# RESUMEN

En este trabajo se presenta una investigación documental de una nueva rama de la física llamada computación cuántica; se expone su historia y desarrollo, al igual que la importancia que tiene en el mundo científico, sus increíbles fundamentos físicos e informáticos y su capacidad de cambiar el mundo informático como lo conocemos. También se exponen los obstáculos que se presentan ante esta tecnología y todas las herramientas que nos brindaría un mejor entendimiento del universo en el que vivimos. Indagamos sobre preguntas como: ¿Qué sucede cuando la física clásica que rige el funcionamiento de una computadora llega a su límite?, se sabe que existen problemas y cálculos que las computadoras "clásicas" tardan mucho tiempo en procesar y resolver, debido a los algoritmos que manejan los valores binarios de los bits. La física cuántica ofrece una solución para agilizar los procesos informáticos, se comenta y presenta la unidad cuántica llamada "cúbit", que aprovecha el principio de superposición cuántica de las partículas, para exponer las nuevas ideas que regirán los cómputos en un tiempo no muy lejano, al alcance de todos.

#### INTRODUCCIÓN

Las computadoras se han vuelto parte de nuestra vida cotidiana, las utilizamos día a día en cualquier lugar que estemos; restaurantes, oficinas, industrias, escuelas y más. Incluso las guardamos como nuestra más valiosa pertenencia dentro de nuestros bolsillos. Pero en cuanto sale en el mercado un nuevo y mejor celular, desechamos el que ya tenemos para obtenerlo. Este proceso pasa en cuestión de meses y se ve relacionado con la mejora de los transistores. Los transistores (de los cuales se hablará más adelante) son las bases lógicas de las computadoras; mientras más transistores tenga una computadora, más rapidez y poder tendrá. Pero, ¿Cuál es el límite de transistores, lo cual nos lleva a un límite en el poder de las computadoras.

Este dilema crea nuevas alternativas en la computación para mejorar el rendimiento, rapidez y poder de una computadora. Una de estas alternativas es la *Computación Cuántica*, la cual establece un nuevo elemento cuántico llamado *Cúbit*, que toma en cuenta los efectos cuánticos de las partículas, estableciendo una nueva era de la computación. En este trabajo se hablará de los obstáculos de la computación clásica, el origen, las metas, las ventajas y el funcionamiento de las computadoras cuánticas y por qué éstas pueden cambiar el mundo tecnológico como lo conocemos. *Computadoras clásicas* 

El matemático británico Alan Turing denotó un tipo de máquinas, ahora conocidas como *máquinas de Turing*, para facilitar el uso de los algoritmos y explicar cómo se relacionan con los procesos computacionales. Una máquina de Turing contiene cuatro partes: el programa, un número finito de estados de control o el registro de estado, una cinta (memoria) y un cabezal de lectura-escritura. El programa contiene el algoritmo que se ejecutará por la máquina, el estado de control es aquel que coordina las acciones de las demás partes de la máquina, la memoria es donde se registran y almacenan los datos realizados por el programa y el cabezal de lectura-escritura es aquel que escribe y registra la información en la memoria (M.A. Nielsen, I.L. Chuang, 2010, pp. 122-123). Todas las computadoras, tanto las antiguas como las modernas, son una máquina de Turing, se basan en este diseño para su funcionamiento.



Figura 19. Ejemplo ilustrativo de una máquina de Turing. (M.A. Nielsen, I.L. Chuang, 2010, p.123)

El lenguaje que utilizan estas máquinas para su registro y lectura de datos es la numeración binaria, que consta de valores de 0 y 1. Estos valores se almacenan en el elemento fundamental llamado *bit* (abreviación de *binary digit*). Un bit puede tomar dos valores o estar en dos estados asociados a los valores del lenguaje binario: 0 y 1. Estos bits a veces se ven asociados en paquetes de más bits, como el *byte* que es una agrupación de 8 bits, para facilitar el procesamiento de información.

# TRANSISTORES Y EL LÍMITE DE LAS COMPUTADORAS CLÁSICAS

Un transistor es un dispositivo electrónico que se utiliza para entregar una señal de salida en respuesta a una señal de entrada. Visto de una manera más sencilla, un transistor es un dispositivo que nos permite controlar el flujo de la corriente eléctrica. El término "transistor" fue sugerido por John R. Pierce debido a su trabajo en semiconductores anteriormente y más tarde se le acreditó el inventó del transistor a William Bradford Shockley, Walter Houser Brattain y John Bardeen. Este invento en 1947 cambió el mundo de la electrónica, y por tanto de la tecnología.

El transistor es utilizado en la informática para controlar el flujo de la corriente eléctrica y así implementarlo en las computadoras para registrar y controlar los valores de los bits. Mientras el transistor no deje pasar la corriente eléctrica, el estado binario del bit será de 0, mientras que si el transistor permite el flujo de corriente eléctrica, el estado será de 1. Estos dispositivos electrónicos nos brindan un gran apoyo para poder controlar y manipular los valores de los bits, generando mejores y más precisos algoritmos, mejorando el rendimiento de una computadora. Por lo tanto, mientras más transistores tengan el procesador de una computadora, más rapidez, rendimiento y poder tendrá. Pero, ¿Cómo funciona un transistor y por qué es importante entenderlo?

Un transistor está hecho de un material semiconductor, como el Silicio puro, que permite el flujo de la corriente eléctrica mejor que un material aislante pero no tan bien como un material metálico. Este material semiconductor será dopado con un átomo de otro elemento. Este proceso llamado *dopaje* o *dopado* consiste en añadir a un semiconductor puro otra sustancia para mejorar sus características, en este caso, su capacidad de permitir el flujo de corriente eléctrica. Existen dos tipos de dopado, tipo n y tipo p. En el caso específico para el transistor de Silicio, el tipo n agrega un átomo de Fósforo que es parecido al átomo de Silicio pero con un electrón libre más, y el tipo p agrega un átomo de Boro, que contiene un electrón menos.

El transistor consiste de una placa semiconductora de Silicio; con dopaje tipo n en los extremos y con dopaje tipo p en el medio. Esta placa se conecta a una fuente y a una salida de voltaje, que actúan como la fuente de señal y el recibidor de la señal. En la parte superior de la placa, se conecta un interruptor que brindará voltaje a la palca semiconductora. De esta manera si el interruptor brinda un voltaje, hará que los átomos libres del dopaje externo tipo n, se transfieran al dopaje tipo p llenando los espacios no ocupados por electrones, generando una corriente que llega a la salida de la placa. Esto equivale a un valor en un bit de 1, mientras que si no se enciende el interruptor, no hay corriente, teniendo un bit con valor de 0.



Figura 20: Ilustración del funcionamiento de un transistor (Veritasium, "How does a Transistor Work?", 2013)

Como se comentó antes, mientras más transistores hay más rapidez tiene una computadora. Una computadora actual contiene cerca de mil millones de transistores, desde su descubrimiento, el tamaño de los transistores disminuye cada dos años, haciéndolo más útil para las computadoras. El tamaño actual de los transistores es de aproximadamente 14 nm (nanómetros 1x10<sup>-9</sup> metros), lo cual nos hace preguntarnos lo siguiente: ¿Existe un límite en el tamaño del transistor, y por lo tanto, en el poder de una computadora? Debe de existir un límite para el tamaño del transistor, ya que cada vez se acerca más al tamaño de los átomos, y a estas escalas efectos cuánticos empiezan a experimentarse.

Si los transistores llegan al tamaño de las partículas cuánticas, llegarán a experimentar un efecto cuántico llamado el *efecto túnel*. El efecto túnel es un fenómeno cuántico en el que una partícula viola las leyes de la física clásica y atraviesa una barrera de potencial de mayor energía que la energía misma de la partícula. Esto significa que un electrón podría pasar la barrera entre el dopaje tipo n y el tipo p, sin que se inyecte ningún potencial eléctrico, y así, quitándole el sentido al funcionamiento del transistor.

# **ORIGEN DE LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA**

Muchos científicos mostraron su interés en el ámbito físico de la información utilizada por las computadoras, observando las limitaciones de la física clásica. Desde 1960 y 1970 se publicaron varios artículos y trabajos que mencionaban formas de aplicar la mecánica cuántica a la informática, como Alexander Holevo (Rusia 1943) que indicó un nuevo elemento para la computación, llamado *Cúbit* y R.P. Poplavskii que publicó un artículo mencionando las características energéticas y termodinámicas de la información. Más tarde a inicios de 1980 varios físicos y matemáticos comenzaron a debatir sobre ideas de la parte cuántica de la información, mostrando una nueva manera de interpretar y aplicar la naturaleza cuántica de las partículas (M.A. Nielsen, I.L. Chuang, 2010, pp. 204).

En 1980 Paul Benioff describe el Hamiltoneano de mecánica cuántica para partículas en modelos computacionales, seguido del origen de la idea de *Computación Cuántica* sugerido por Yuri Manin. Más tarde en 1981, el famoso físico Richard Feynman habla en la *Primer Conferencia de la física de la computación* celebrada en el MIT, sobre los obstáculos de las computadoras clásicas para simular el mundo físico, y propone que una computadora cuántica sería capaz de hacerlo de forma más efectiva. Después en 1982 Paul Benioff describe el primer diseño teórico de una computadora cuántica, seguido de David Deutsch que describe una computadora cuántica "Universal".

Los avances en la teoría de la computación e información cuántica comienzan a crecer rápidamente a partir de 1990, tiempo durante el cual se describe casi por completo el modelo teórico y físico de la computación cuántica. En 1993 Charles Benett, investigador de IBM descubre el teletransporte cuántico dándole un nuevo inicio a las telecomunicaciones. Más tarde en 1998 investigadores de Los Álamos y el MIT logran propagar el primer cúbit a través de una solución de aminoácidos. Durante 1998, se crea la primera máquina de 2 cúbits en California (EE. UU.) Un año más tarde, en 1999, en los laboratorios de IBM, se creó la primera máquina de 3 cúbits, capaz de correr varios algoritmos de alto nivel. Todo esto es el origen de la computación cuántica, pero, ¿Qué es una computadora cuántica y cómo funciona?

#### **BITS CUÁNTICOS**

Para describir una computadora cuántica, tenemos que comenzar por describir su elemento fundamental cuántico, el *Cúbit*. El cúbit, derivado de su nombre en inglés *Qubit* designado por *Quantum Bit*, es el elemento fundamental análogo al bit en las computadoras clásicas. Es muy común que se visualice al cúbit como un objeto matemático antes que un objeto físico, para su caracterización y definición. Este elemento cuántico puede tomar el valor de 0 y 1, pero también puede tomar al mismo tiempo ambos valores. Esto es posible gracias a la superposición cuántica de estados, la cual permite que un objeto cuántico exista en una superposición de estados hasta que se realiza una medición del estado del objeto, determinando un solo estado. Este fenómeno es consecuencia de la dualidad onda-partícula de la materia. Se puede imaginar al cúbit como un vector de longitud fija y que puede apuntar en muchas direcciones, donde estas direcciones son los valores  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , donde la notación "| >" es la notación de Dirac para estados cuánticos. Por lo tanto, un cúbit tiene mucho más poder computacional e informático que un bit clásico; mientras un bit puede tener sólo 1 valor determinado v 2 posibles, el cúbit puede tener cuatro valores en superposición.

Sabemos que el cúbit puede ser representado por un vector de longitud fija con muchas posibilidades de direcciones, entonces se pueden visualizar sus estados en superposición de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

Donde el término  $|\psi\rangle$  representa el estado en superposición de los dos estados posibles,  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos (que para estos casos pueden ser reales) que indican la probabilidad de cada estado. Entonces la probabilidad total de estado del cúbit es del 100% o de valor 1, por lo tanto:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$
 (2)

Esta condición nos muestra que la longitud del vector puede ser normalizado a 1, lo que lo hace un vector unitario en un espacio bidimensional complejo. Si transformamos la ecuación (1) con la condición (2) a números complejos, tendremos que:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\operatorname{Sen}\frac{\theta}{2}\beta|1\rangle)$$
(3)

Donde  $\gamma$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  son números reales. Se puede visualizar esta ecuación como una *esfera de Bloch*, que visualiza al cúbit de manera geométrica para su mejor entendimiento. En esta esfera,  $\theta$  y  $\varphi$  definen un punto en la esfera tridimensional, los cuales definen por lo tanto un estado en superposición de un solo cúbit. Es importante recordar que esta superposición sigue en pie hasta que se realiza una medición, o se "observa" al cúbit, obteniendo un solo estado.


Figura 21: Esfera de Bloch que visualiza un solo cúbit matemáticamente. (M.A. Nielsen, I.L. Chuang, 2010, pp. 14-15)

La cantidad equivalente de información clásica en bits de ene número de cúbits por lo tanto es de  $2^n$ . Esto significa que el número de bits clásicos equivalentes a cúbits es un número increíblemente grande ya que su comportamiento de crecimiento es exponencial. Esto implica que una computadora que utilice cúbits tendrá muchas más posibilidades de manejo de datos, lo cual la hace mucho más eficiente para ciertos problemas computacionales. Por ejemplo, si tenemos dos cúbits tendremos ahora cuatro posibles estados 00,01,10 y 11, y así para cada vez que se agregue un cúbit.

Existen varias partículas que pueden utilizarse para crear un cúbit, tales como un átomo, un fotón o un electrón. Por ejemplo, el electrón puede estar en dos órbitas diferentes alrededor del núcleo de un átomo, tomando estas órbitas como los estados que llamamos 0 y 1. O el alineamiento del espín de un núcleo atómico en un campo magnético uniforme. Para el caso de un fotón que puede estar en dos estados de polarización, tomando uno como 0 y otro como 1. O para cualquier partícula subatómica que puede tener diferentes direcciones de espines cuánticos.

## **COMPUTACIÓN CUÁNTICA**

La computación cuántica aprovecha todas as características matemáticas y físicas de los cúbits, haciéndolas superiores en problemas computacionales a las computadoras clásicas. Una computadora cuántica también agrupa cúbits en paquetes para facilitar su manipulación, y cuando se tienen varios cúbits es posible comenzar a correr algoritmos. Al igual que en las computadoras clásicas, en una computadora cuántica se contienen puertas lógicas, que son dispositivos electrónicos con funciones booleanas (esquematizan las operaciones informáticas) o de otro tipo, que conforman los algoritmos. Estas puertas cuánticas realizan un cambio en la posición y dirección del vector que representa al cúbit; modifican sus puntos para poder manipular la información que contiene el mismo. La computación cuántica también aprovecha las características de los cúbits y de la mecánica cuántica en el uso de las puertas lógicas. Una computadora clásica resolvería o correría un algoritmo para cada problema que se presente de manera individual, pero una computadora cuántica aplica los algoritmos conformados por las puertas lógicas cuánticas para cada problema presentado, pero al mismo tiempo. Esto significa que mientras una computadora clásica intenta resolver problemas uno por uno, la computadora cuántica lo hace de manera mucho más eficiente y rápida, haciéndolo al mismo tiempo. Lo anterior puede realizarse gracias a un fenómeno cuántico llamado paralelismo cuántico, el cual permite evaluar una función para varios y diferentes valores simultáneamente. El paralelismo cuántico es posible gracias a la naturaleza cuántica de las partículas que permiten un estado de superposición de valores.

Es importante observar qué sucede cuando dos o más cúbits comienzan a interactuar entre ellos y verificar si estas interacciones facilitan o dificultan su manipulación. Gracias a su interacción, se aprovecha de un fenómeno cuántico llamado *enredamiento cuántico*, el cual actúa como una conexión entre partículas cuyos estados están relacionados de tal manera que al determinar o medir el estado de una de ellas, sabemos también el estado de la otra. Cuando dos cúbits o más interactúan

(para cualquier partícula) sus campos magnéticos interactúan, deformando y cambiando la orientación de sus espines. Pero gracias a estas interacciones, es posible preparar un estado enredado cuántico para así manipular un cúbit y por lo tanto el otro también. Por ejemplo, si se aplica un campo magnético uniforme a un electrón para que su espín se mantenga en un estado fijo, se sabe que dada la interacción entre este electrón y el otro, es posible manipular el espín de uno, para controlar el otro. Las computadoras cuánticas utilizan este fenómeno para manipular múltiples cúbits, agilizando los procesos informáticos y transportando información increíblemente rápido.

## MANIPULACIÓN DE CÚBITS EXPERIMENTALMENTE

Las partículas utilizadas como cúbits tienen estados muy frágiles por lo que es necesario someterlas a campos magnéticos fijos y a temperaturas cercanas al cero absoluto. Ya que es necesario mantener los espines atómicos en ciertas direcciones para que se cumplan las condiciones de superposición y enredamiento cuántico, es necesario aplicar un campo magnético para que las partículas se alineen al mismo y puedan ser manipuladas, lo cual aplica para cualquier otra partícula utilizada como cúbit. También es importante aislar y manipular a la partícula de los alrededores para que pueda ser utilizada, esto es consecuencia de un obstáculo cuántico llamado *decoherencia,* el cual es un proceso aleatorio por el cual las interacciones con el ambiente "destruyen" la habilidad de interactuar con una partícula cuántica. Para solucionar esto, es necesario aplicar una frecuencia para que el átomo o la partícula se alinee de mejor manera al campo magnético, y así contrarrestando frecuencias que dañan su estado. Para que la partícula sea óptima para manipulación, es necesario someterla a temperaturas cercanas al cero absoluto, ya que esto garantiza que la partícula no vibre o no se mueva, quitándole energía cinética, convirtiéndola en un objeto posible de manipular.

Al igual que en las computadoras clásicas, las puertas lógicas se ven controladas por dispositivos electrónicos que actúan como funciones para controlar los bits y así crear los algoritmos a ejecutar. Estas puertas lógicas se encuentran en circuitos eléctricos, los cuales controlan la corriente, el campo magnético y la frecuencia, generando una función que modifica el uso de los cúbits, generando combinaciones y así, ejecutando un algoritmo. Ya que se tienen que aislar tanto y vencer tantos obstáculos, las computadoras cuánticas son equipos muy grandes, que ocupan un cuarto completo.

## EL PODER DE LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA

Existen dos clases de problemas complejos en el área de informática o computación, llamados problemas *P* y *NP*. P es la clase de problemas computacionales que pueden ser resueltos rápidamente en una computadora clásica y los problemas NP son aquellos que tienen soluciones que pueden ser rápidamente comprobadas en una computadora clásica. Por ejemplo, se requiere saber los factores primos de un número entero, ya que no hay una manera realmente rápida de resolver esto en una computadora clásica, el problema pertenece a NP. Por el otro lado, si sabemos el factor de un número y queremos comprobarlo, es posible haciéndolo en una computadora clásica, por lo tanto la factorización es problema de NP.

Gracias a las propiedades cuánticas de las cúbits que se han descrito anteriormente, las computadoras cuánticas son capaces de solucionar estos problemas NP que son difíciles de resolver en computadoras clásicas, de manera mucho más eficiente. Gracias al paralelismo cuántico y al enredamiento, es posible verificar todas las soluciones posibles al mismo tiempo y con mucha rapidez, lo cual hace a las computadoras cuánticas hábiles para problemas de optimización, factorización, simulación, encriptación y más.

Las computadoras cuánticas son utilizadas para optimizar procesos y operaciones, lo que a una computadora cuántica le podría llevar millones de años, a una cuántica le tomaría varios segundos. Esto es útil en áreas de ingeniería, negocios, economía e industria, para agilizar procesos y operaciones. Uno de los usos más revolucionarios e importantes de las computadoras cuánticas es la simulación de proteínas, moléculas y enzimas; son capaces de simular la interacción entre átomos muy precisamente, logrando simular moléculas y proteínas. Esto es importante ya que al simular proteínas y moléculas mucho más rápido que las computadoras actuales, podríamos encontrar combinaciones que nos ayuden a crear medicinas, vacunas, fertilizantes más saludables y más compuestos tanto orgánicos como inorgánicos. Para el área de construcción se podrían simular estruc-

turas atómicas, formando materiales sustentables y resistentes. La encriptación también es una ventaja, se crean patrones y contraseñas de acuerdo al comportamiento cuántico de las partículas, generando firewalls y códigos increíblemente (imposibles) de descifrar, lo cual aplicaría para bancos y seguridad nacional, al igual que para crear un internet cuántico de velocidades inimaginablemente rápidas. La inteligencia artificial también se ve beneficiada, ya que es posible darle una "mente" mucho más poderosa y capaz que la de una computadora clásica, que va de la mano con la encriptación y generación de datos. De hecho, la inteligencia artificial aprovecha absolutamente todos los beneficios de la computación cuántica.



Figura 4: Procesador (chip) de una computadora cuántica perteneciente a la empresa privada D-Wave, de Google.



Figura 5: Computadora cuántica de D-Wave.

## **OBSTÁCULOS A VENCER**

El obstáculo principal es la construcción, dada la fragilidad de los estados superpuestos de los cúbits con ambiente, ya que debe disminuirse al nivel más bajo posible para evitar la decoherencia de los estados superpuestos. Las influencias no controlables destruirían por completo la delicada superposición y el "enredamiento" de los cbits, propiedades que son la base de todos los algoritmos computacionales cuánticos. Mientras más grande sea el sistema cuántico, más probable es que alguno de ellos interactúe con el exterior, y es suficiente para producir la decoherencia de todo el sistema. Es importante señalar que una computadora cuántica no sirve mejor para cualquier tarea que una computadora clásica. Las computadoras cuánticas son mejores para simular y solucionar problemas, pero no sería correcto utilizarla para ver una película, o para hablar por vídeo, o para jugar videojuegos, ya que su tipo de procesamiento es muy diferente a la de las computadoras clásicas.

## CONCLUSIONES

Las computadoras cuánticas son máquinas que utilizan como elemento fundamental al cúbit; una partícula cuántica (átomo, fotón, electrón, etc) capaz de estar en superposición y enredamiento cuántico. Esto le da el poder de estar en muchos estados o de tomar muchos valores al mismo tiempo manipulando también a todas las demás partículas, haciéndola exponencialmente más poderosa que cualquier computadora clásica. Estas computadoras serán capaces de simular el comporta-

miento atómico y molecular de la realidad con gran precisión y rapidez, ayudándonos a crear materiales sustentables y resistentes, al igual que a encontrar proteínas y encimas capaces de atacar bacterias y virus. También darán inicio a una nueva etapa de encriptación y seguridad digital, entregando un mejor internet y una mejor protección de identidad en las redes. Es necesario vencer algunos obstáculos tales como la interacción de las partículas con el ambiente, para así poder construir una computadora más estable y capaz de solucionar problemas. Es importante señalar que una computadora cuántica no sirve mejor para cualquier tarea que una computadora clásica. Las computadoras cuánticas son mejores para simular y solucionar problemas, pero no sería correcto utilizarla para ver una película, o para hablar por vídeo, o para jugar videojuegos, ya que su tipo de procesamiento es muy diferente a la de las computadoras clásicas.

# **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. L. Diósi, "A Short Course in Quantum Information Theory", Lect. Notes Phys. Springer, Berlin Heidelberg, Berlin, 2007, pp. 4-22.
- 2. Bokulich, G.Jaeger, "Philosophy of quantum information and entanglement", Cambridge University Press, Nueva York, 2010, pp. 10-34.
- 3. M. Nakahara, T.Ohmi, "Quantum computing: From Linear Algebra to Physical Realizations", CRC Press:Taylor & Francis Group, Boca Ratón, 2008, pp. 178-192.
- 4. E. Desurvire, "Classical and Quantum Information Theory", Cambridge University Press, Nueva York, 2009, pp. 8-17.
- 5. D.J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics", Prentice Hall, Nueva Jersey, 1995, pp. 394.
- 6. M.A. Nielsen, I.L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", Décima edición, Cambridge University Press, Nueva York, 2010, pp. 670.
- 7. D. Deutsch, "Quantum Theory, the Church-Turing Principle, and the Universal Quantum Computer" Proc. Roy. Soc. Lond., 1985, pp. 97-113.
- 8. R. P. Feynam, "Simulating Physics with Computers" International Journal of Theoretical Physics, Vol. 21, 1982, pp. 467-488.
- 9. C. Orzel, "How to teach Quantum Physics to your dog", One World Book, Nueva York, 2010, pp. 65-213.
- 10.urzgesagt In a Nutshell, "Quantum Computers Explained Limits of Human Technology", Diciembre del 2015, Recuperado de: <u>https://www.youtube.com/watch?v=JhHMJCUmq28</u>
- 11.Coding Tech, "A Beginner's Guide To Quantum Computing", Noviembre de 2017, Recuperado de: <u>https://www.youtube.com/watch?v=JRIPV0dPAd4</u>
- 12.MIT Venture Capital & Innovation, "Quantum computing explained with a deck of cards | Dario Gil, IBM Research", Junio de 2017, Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=yy6TV9Dntlw
- 13.Veritasium, "How Does a Quantum Computer Work?", Junio de 2013, Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=g\_laVepNDT4
- 14. Veritasium, "How to Make a Quamtum Bit", Julio de 2013, Recuperado de: <u>https://www.youtube.com/watch?v=zNzzGgr2mhk</u>

#### SEGMENTACIÓN DE INTERFEROGRAMA CON FRANJAS CERRADAS PARA LA ASIGNA-CIÓN INDEPENDIENTE DE LOS PARÁMETROS DE LA TÉCNICA DE OPTIMIZACIÓN HS Héctor Ulises Rodríguez Marmolejo y Ulises Mateo Rodríguez Muñoz

U de G; Centro Universitario de Los Lagos.

#### RESUMEN

Las diferentes metodologías existentes de recuperación de fase de interferogramas trabajan tipos específicos de patrones de franjas, dependiendo de las características del interferograma en análisis. Ya sean interferogramas de franjas cerradas o abiertas, frecuencia de los segmentos de los interferogramas ya sean muy separados o muy cercanos, si existe una portadora en las franjas, etc. Actualmente no existe una técnica general que realice la demodulación de todos los tipos de patrones de franias conocidos. Diversas técnicas de Optimización han sido aplicadas a la demodulación de patrones de franjas como lo son Algoritmos Genéticos (AG) aplicados a polinomios de Zernike, Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) aplicado a polinomio de grado "n", Algoritmos Genéticos aplicados a técnica de demodulación por Frecuencia Guiada (AG-FSD), Búsqueda Armónica aplicada a técnica de demodulación por Frecuencia Guiada (HSO-FSD), etc. El presente trabajo (Segmented-HSO-FSD) propone novedoso método que realiza la segmentación (Segmented) de un interferograma cerrado, el cual asigna de manera independiente a cada uno de los segmentos obtenidos valores distintos de los parámetros de la técnica de Optimización por Búsqueda Armónica en conjunto con técnica de demodulación por Frecuencia Guiada. Con la técnica Segmented-HSO-FSD no se aplican los mismos parámetros de búsqueda a todo el interferograma generando una demodulación excelente en interferogramas cerrados con tiempos de cómputo muy razonables. Debido a que con la técnica HSO-FSD se lograba para interferogramas muy específicos por utilizar los mismos parámetros de Optimización para todo el interferograma.

## INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se han desarrollado diversas técnicas para la demodulación de uno ó varios patrones de franjas obteniendo muy buenos resultados, que van desde las muy simples como lo es la interpretación visual de un interferograma ó el método *"Phase shifting"* en el cual se hace uso de varios interferogramas donde dichas intensidades se relacionan matemáticamente encontrando la fase buscada.

Más tarde haciendo uso de un solo interferograma, en la década de los 80's Mitsuo Takeda a partir de un procesamiento computacional encuentra una discriminación entre elevaciones y depresiones de fase haciendo uso de la transformada de Fourier. A partir de los 90's Manuel Servin introduce una modulación espacial con una portadora cónica estimando la fase. Él mismo autor realiza demodulación en franjas abiertas o cerradas a partir de una función costo, estimando 3 variables a partir de los métodos "Regularizaed Phase Tracking", "Fringe Followed Regularized Phase Tracking. No conforme con las técnicas anteriores Servin desarrolla estrategia que se basa en un amarre de fase digital (PLL). En el 2007 Kian Quemao y Soon realizaron la demodulación de fase también con un solo interferograma pero ahora estimando solo 2 variables haciendo uso de función costo con sus conocida técnica "Frequency guide Sequential Demodulation" ó estimación de 3 variables con la técnica "Frequency-guided regularized phase tracker". Al mismo tiempo se desarrollarón pruebas con el computo suave obteniendo buenos resultados en la demodulación de un solo patrón de franjas, como lo son los polinomios de Zernike en conjunto con algoritmos genéticos, los polinomios de Zernike con enjambre de partículas y la combinación del método de demodulación de frecuencia secuencial con optimización por búsqueda armónica. Una de las limitantes de implementar la combinación del método de demodulación de frecuencia secuencial con optimización por búsqueda armónica es utilizar un solo rango de valores de los parámetros de la técnica de optimización para todo el interferograma en estudio. En el presente artículo se muestra la manera en que se hace la segmentación del interferograma asimismo para cada partición o segmento se toma un rango independiente de valores de los parámetros de optimización.

## TEORÍA

Demodulación secuencial guiada por frecuencia (FSD)

El método de Demodulación Secuencial guiada por Frecuencia (FSD, de sus siglas en inglés) fue desarrollado en 2007 por Kemao y Soon. El algoritmo se explica a continuación en 6 pasos:

1. El filtrado o pre-procesamiento de la imagen.  
2. La normalización del interferograma ó intensidad normalizada  

$$I_n(x, y) = \cos(\varphi(x, y)),$$
 (1)

3. La extracción directa de la fase  

$$\widehat{\varphi}_{wa}(x, y) = \cos^{-1}(I_n(x, y)) \in [0, \pi],$$
(2)

ésta fase directa  $\hat{\varphi}_{wa}$  es utilizada para estimar las frecuencias intermedias  $\xi_{xa}$  y  $\xi_{ya}$ , las frecuencias intermedias se presentan mientras la búsqueda se encuentra en marcha, una vez que se culmina el proceso de optimización se tienen las frecuencias definitivas ( $\omega_x, \omega_y$ ) =  $\hat{\omega}(x, y)$  [12].

4. La extracción de la fase local 
$$\tilde{\varphi}_a$$
, se considera lineal en una pequeña ventana.  
 $\tilde{\varphi}_a(x, y; u, v, \tilde{p}) = \hat{\varphi}_{wa}(x, y) + \xi_{xa} \cdot (x - u) + \xi_{ya} \cdot (y - v),$ 
(3)

en donde  $\tilde{\varphi}_a$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}$ , (u, v), (x, y),  $(\xi_{xa}, \xi_{ya})$  y el operador "·", son la fase estimada del pixel a demodular, el vector de las dos frecuencias intermedias, la sub-imagen en estudio, los vecinos del pixel en estudio, las coordenadas del pixel en estudio, las frecuencias de proceso de búsqueda y el producto punto, respectivamente. El patrón de franjas virtual puede ser generado a partir de la siguiente ecuación

$$\tilde{I}(x, y; u, v, \tilde{\mathbf{p}}) = \cos[\tilde{\varphi}_a(x, y; u, v, \tilde{\mathbf{p}})].$$
(4)

La función energía empleada por el método de optimización es definida como el cuadrado de la diferencia del interferograma original y el interferograma virtual, la cual se muestra a continuación

$$E(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v};\widetilde{\boldsymbol{p}}) = \sum_{\boldsymbol{y}=-\infty}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{x}=-\infty}^{\infty} [g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})[\widetilde{I}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\widetilde{\boldsymbol{p}}) - I_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^2],$$
(5)

donde g(x, y) es la ventana en estudio. Las frecuencias locales se estiman minimizando la función energía, esto es

$$\widehat{\mathbf{p}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \operatorname{argmin}_{\widetilde{\mathbf{p}}} E(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v};\widetilde{\mathbf{p}}). \tag{6}$$

- 5. La extracción de la frecuencia estimada por el método de optimización es  $\hat{\mathbf{p}}(u, v) = [\hat{\omega}_{xa}(u, v), \hat{\omega}_{ya}(u, v)]^T.$ (7)
- 6. El sexto y último paso es eliminar el *error de ambigüedad* ó error de signo. En donde  $\hat{p}(u, v)$  y  $\hat{\varphi}_{wa}(x, y)$  tienen el error de ambigüedad, por lo que la función s(x, y) obliga a las frecuencias locales a crear una continuidad. esto es

$$s(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } \widehat{\omega}_a(x_i, y_i) \cdot \widehat{\omega}(x_{i-1}, y_{i-1}) \ge \mathbf{0} \\ -1, & \text{if } \widehat{\omega}_a(x_i, y_i) \cdot \widehat{\omega}(x_{i-1}, y_{i-1}) < \mathbf{0}, \end{cases}$$
(8)

la ambigüedad se indica por el sub-índice "*a*". En la determinación del signo se continúa con el pixel vecino  $(x_i, y_i)$  hasta que todos los pixels son procesados. Una vez corregido el signo de ambigüedad s(x, y), tanto  $\hat{\omega}(x, y)$  como  $\hat{\varphi}(x, y)$  son determinados por

$$[\widehat{\omega}(x,y),\widehat{\varphi}_{w}(x,y)] = s(x,y)[\widehat{\omega}_{a}(x,y),\widehat{\varphi}_{wa}(x,y)].$$
(9)

### Búsqueda Armónica (HS)

El algoritmo de la búsqueda armónica (HS, de sus siglas en inglés), es un algoritmo meta-heurístico. La versión para problemas discretos de este algoritmo fue propuesto por Zong Woo Geem y Kang Seo Lee en el 2001, más tarde el algoritmo se aplicó en problemas continuos por Geem y Lee en el 2005. HS simula el proceso de improvisación musical, en el cual los músicos buscan producir una armonía agradable determinada por el estándar estético auditivo.

Cuando un músico está improvisando, el realiza una de las siguientes tres acciones:

- I. Toca alguna melodía conocida que ha aprendido anteriormente.
- II. Toca algo parecido a la melodía anteriormente mencionada, ajustándola poco a poco al tono deseado.
- III. Compone una nueva melodía basándose en sus conocimientos musicales para seleccionar nuevas notas aleatoriamente.

Estas tres opciones formalizadas corresponden a los componentes del algoritmo ó parámetros: uso de la memoria armónica, ajuste de tono y aleatoriedad, respectivamente. En la improvisación musical, cada músico toca una nota dentro de un posible rango, de tal manera que forman un vector armónico. Si el conjunto de notas tocadas por los músicos son consideradas una buena armonía, esta es guardada en la memoria de cada músico, incrementando la posibilidad de hacer una buena armonía la próxima vez. Del mismo modo en el proceso de optimización en ingeniería, cada variable de decisión inicialmente toma valores aleatorios dentro del rango posible, formando un vector solución. Si dicho vector, es decir, dicho conjunto de valores que lo conforman son una buena solución, esta es almacenada en la memoria de cada variable, aumentando la posibilidad de encontrar mejores soluciones en la siguiente iteración.

A continuación en la figura 1; se presenta el diagrama a bloques del proceso de demodulación de patrones de franjas cerradas utilizando el nuevo algoritmo FSD-HSO.



Figura 1. Proceso de demodulación aplicado a cada pixel utilizando el algoritmo de demodulación propuesto FSD-HSO.

#### Segmentación del interferograma

Una de las características a resaltar en éste artículo es la segmentación del interferograma de tal manera que a cada segmento del interferograma se le asigna un rango de valores a los parámetros del método de optimización HS tales parámetros son: número de variables a optimizar NVAR, memoria armónica HM, tamaño de la memoria HMS, tasa de consideración de memoria armónica HMCR, tasa de ajuste del tono PAR, ancho de banda de ajuste el tono BW y número de improvisaciones NI. De ésta manera no se asignan solo un rango de valores a cada uno de los parámetros antes descritos si no que éstos varían en cada segmento del interferograma. Se han obtenido buenos resultados dejando fijos los parámetros de la técnica HS para toda la demodulación del patrón de franjas pero se reduce a interferogramas bastante simples como los anillos de newton.

## RESULTADOS

Todo patrón de franjas matemáticamente es definido por la conocida ecuación de interferencia

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\varphi(x, y))$$
(10)

En donde donde *I*, *a*, *b*,  $\varphi$  y (*x*, *y*) son la función de irradiancia, la intensidad de la fuente de luz, la dispersión en los cambios de modulación, la fase y las coordenadas espaciales en el plano objeto, respectivamente. El primer paso es normalizar *I*, eliminando *a*, *b* de ahí que se obtuvo (1). Aplicando simplemente  $\cos^{-1}(I_n(x, y)) \in [0, \pi]$  se obtuvo la fase directa (2). En seguida se hace una binarización de la fase directa que consiste en definir un valor de umbral de manera tal que la fase quede definida solo en 0's y 1's el motivo tal es necesario para poder aplicar proceso morfológico el cual permite obtener el esqueleto del interferograma que a su vez éste es necesario para segmentar el interferograma. Los resultados experimentales del procesamiento de la fase directa, binarización, esqueletización y segmentación se muestran a continuación en la figura 2.



Figura 2. Fases: directa, en binarización, en esqueletización y en segmentación

Con la segmentación de la fase directa del interferograma es simple proponer valores a los parámetros de la técnica de optimización HS diferentes para cada segmento. Dicha técnica de optimización entonces se aplicará a la técnica de demodulación FSD para así obtener la fase correcta la cual es la meta de cualquier técnica de demodulación. Con la segmentación descrita anteriormente se puede dar una idea de la forma que tendrá la fase correcta tal como se puede observar en las siguientes fases segmentadas que se presentan en la figura 3.



Figura 3. Resultados de segmentos de fases en la asignación independiente de parámetros de la técnica HS para 2 distintos interferogramas.

Dentro de la bibliografía Ulises H. Rodríguez y equipo, realizaron la demodulación de interferogramas con las técnicas HSO+FSD para ello asignaron para todo un interferograma los mismos parámetros logrando buenos resultados. En la figura 2 se enumeraron las 5 segmentaciones de interferograma de estudio y en la tabla 1. se muestran los valores de los parámetros de la técnica de optimización de manera independiente para cada segmento.

| Número de<br>segmento | NVAR | SC   | HMS  | HMCR | PAR  | bw   | Limites    |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------------|
| 1                     | 2    | 300  | 1000 | 0.89 | 0.75 | 0.05 | [-0.3,0.3] |
| 2                     | 2    | 500  | 1000 | 0.85 | 0.7  | 0.08 | [-0.2,0.2] |
| 3                     | 2    | 500  | 1000 | 0.8  | 0.75 | 0.07 | [-0.5,0.5] |
| 4                     | 2    | 650  | 1000 | 0.75 | 0.9  | 0.1  | [-0.5,0.5] |
| 5                     | 2    | 1100 | 1000 | 0.7  | 0.7  | 0.09 | [-0.5,0.5] |

Tabla 1. Valores de Parámetros de técnica HSO para cada segmento del interferograma

Una vez que se inicia la búsqueda ó estimación de la fase del patrón de franjas en estudio a partir de éste nuevo método de segmentación de interferograma aplicando las técnicas HSO+FSD se obtuvieron excelentes resultados, tales resultados se pueden observar en la figura 4.



Figura 4. Recuperación de fase aplicando segmentación de interferograma con técnicas HSO+FSD en 2 y 3 dimensiones.

# CONCLUSIONES

La metrología óptica es una rama importante de la óptica, la cantidad física a ser medida o conocida del interferograma en estudio está definida por el termino fase. Diversos métodos han sido creados para conocer dicho parámetro, el cómputo suave no ha sido la excepción. La optimización por búsqueda armónica es un algoritmo meta-heurístico que basa su funcionamiento en el proceso de improvisación musical el cual utiliza funciones algebraicas simples, números racionales, además de que no utiliza codificaciones binarias como lo requieren los algoritmos genéticos simplificando y reduciendo bastante el tiempo de procesamiento. La optimización por HS en combinación con la técnica FSD aplicados a patrones de franjas cerrados genero excelentes resultados en interferogramas sintéticos y no fue la excepción en interferogramas reales. La optimización por HS es una técnica relativamente nueva y de gran sencillez la cual requiere pocos parámetros. Mejores resultados se obtienen con la segmentación de la fase va que tiene dos grandes ventajas. La primera es que se da una idea de la manera en que quedará la estimación de la fase al momento de realizar la demodulación y la segunda ventaja es que para cada segmento se asignan los parámetros del HSO de manera independiente haciendo que el resultado converja rápidamente. Cabe aclarar que ésta técnica solo fue probada para interferogramas con 5 a 15 franjas ó segmentos con superficies simples o no bastantes abruptas con un gran número de mínimos o máximos globales.

# **BIBLIOGRAFÍA**

- 1. Lee, J. "Underwater acoustic interferometer". Panama City, FL, USA: IEEE, 1970.
- 2. Sandia National Laboratories. Synthetic Aperture Radar. *sitio web de Sandia National Laboratories*. <u>http://www.sandia.gov/radar/whatis.html</u>.
- 3. Lowell Observatory. <u>http://www.lowell.edu</u>.
- 4. <u>http://es.wikipedia.org/wiki/Interferometr%C3%ADa\_de\_moteado</u>.
- 5. Lándsberg S. G. Óptica Tomo I. Moscú: MIR Moscú, 1983.
- 6. <u>Gustavo Rodríguez-Zurita</u>, "Apuntes de Interferometría Óptica Contemporánea: Ideas fundamentales", Editorial Académica Española, 2013 - 260 páginas.
- 7. Daniel Malacara, "Óptica Básica", Ed. Fondo de Cultura Económica, México, pp. 245-281 (1989).
- 8. Malacara, Servin & Malacara, "Interferogram Analysis for Optical Testing".
- 9. Legarda Sáenz, Lugo Jímenez, "Procesamiento de patrones de franjas: conceptos fundamentales", Abstraction & Application 9, 1-10 (2013).
- 10. Kemao Q. and Soon S. H., "Sequential demodulation of single fringe pattern guided by local frequencies", Optics Letters, 32(2), 127-129 (2007).
- S. Tuo, L. Yong, and T. Zhou, "An Improved Harmony Search Based on Teaching-Learning Strategy for Unconstrained Optimization Problems", Mathematical Problems in Engineering, vol. 2013, Article ID 413565, 29 pages, 2013.
- 12. H. Wang and Q. Kemao, "Frequency guided methods for demodulation of a single fringe pattern", Optics Express, vol. 17, no. 17, pp. 15118-15127, 2009.
- 13. Mitsuo Takeda, Hideki Ina, and Seiji Kobayashi, "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry", Journal of the Optical Society of America, Vol. 72, <u>Issue 1</u>, pp. 156-160, (1982)