

DECLARACIÓN LEGAL

EDITORES:

Cristina E. Solano Sosa
María Eugenia Sánchez Morales
Gloria Verónica Vázquez García
Amalia Martínez García
Eva Liliana Ramos Guerrero

Publicación electrónica

ISBN GENERAL 978-607-8358-86-1

Tomo IV: Físico Matemáticas y Ciencias de la Tierra

ISBN 978-607-8358-90-8

El contenido de los artículos es responsabilidad de los autores.

Temacilli EDITORIAL

Lagos de Moreno, Jalisco

<http://temacilli-editorial.com>

D. R. Centro de Investigaciones en Óptica, A. C.

Loma del Bosque 115, Col. Lomas del Campestre

C. P. 37150 León, Guanajuato

México

Hecho en México

Octubre de 2020



Miscelánea Científica en México

Tomo IV:

**Físico Matemáticas y Ciencias
de la Tierra**

PREFACIO

El presente compendio reúne trabajos de investigación realizados en diversas áreas de la ciencia, cuyo objetivo principal es contribuir a la difusión del trabajo científico que se realiza en México. Con este compendio también se pretende promover el trabajo interdisciplinario entre miembros de diferentes disciplinas científicas.

Este trabajo está organizado en siete tomos los cuales corresponden a las siguientes áreas científicas: I) Biología y química, II) Biotecnología y ciencias agropecuarias, III) Ciencias sociales, IV) Físico matemáticas y ciencias de la tierra, V) Humanidades, ciencias de la conducta y divulgación científica, VI) Ingeniería, así como VII) Medicina y ciencias de la salud.

Octubre de 2020
León, Gto., México

Cristina E. Solano Sosa
María Eugenia Sánchez Morales
Gloria Verónica Vázquez García
Amalia Martínez García
Eva Liliana Ramos Guerrero

Contenido

MODELO DE PROPAGACIÓN DE UN PULSO EN UNA FIBRA ÓPTICA MONOMODAL BASADO EN LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL	3
TERMODEGRADACIÓN DE PELÍCULAS DE POLIETILENO DE ALTA Y BAJA DENSIDAD CON RADIACIÓN LÁSER DE CO ₂ (10.6μm)	8
SENSOR DUAL DE TEMPERATURA Y CURVATURA CUBIERTO CON PDMS BASADO EN MECANISMO ARROW	14
GENERACIÓN DE SOLUCIONES EN LA TEORÍA DE RASTALL A PARTIR DE SOLUCIONES EN LA TEORÍA DE RELATIVIDAD GENERAL DE EINSTEIN	18
MOMENTOS CROMOMAGNÉTICOS DE LOS QUARKS EN EL MODELO ESTÁNDAR.....	24
ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN DE UN ESCALAR EXÓTICO CON UN FOTÓN Y UN BOSÓN Z	32
FABRICACIÓN DE CELDAS FOTOVOLTAICAS PARA EL INFRARROJO	38
ESTADOS COHERENTES DE MATERIALES DIRAC BIDIMENSIONALES ANISOTRÓPICOS Y MAGNETIZADOS.....	48
UN MODELO DE GESTIÓN DE RIESGOS ADMINISTRATIVOS EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA.....	59
EFEECTO DE CAOS ELECTROMAGNÉTICO EN UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FOTÓNICO FINITA CON INCLUSIONES CILÍNDRICAS.....	68
CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES TIPO WEYL EN TEORÍA DE RASTALL	75
NEUTRINOS DEL ASTRO REY EN LOS EXPERIMENTOS ACTUALES	80
CARACTERIZACIÓN NO DESTRUCTIVA DE FORMULACIÓN DE EMPAQUES COMESTIBLES USANDO TOMOGRAFÍA DE COHERENCIA ÓPTICA	91
LA ÓPTICA FÍSICA “DETRÁS” DE LA CÁMARA OSCURA	98
REJILLAS OPTOFLUIDICAS USADAS COMO REFRACTÓMETROS	105
ENSEÑANZA DE LA FÍSICA con PROYECTOS.....	111
RESONANCIAS DE FANO EN UNA ESTRUCTURA FOTÓNICA 1D QUE PRESENTA UNA variación periódica DEL índice de refracción	115
INTENSIDADES DE CAMPO EN UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FONÓNICO TRIDIMENSIONAL.....	120
MEDICIONES DE FASE EMPLEANDO UN INTERFERÓMETRO MICHELSON Y MODULACIÓN ELECTRÓNICA UTILIZANDO UNA CELDA DE CRISTAL LÍQUIDO	128
ANÁLISIS NUMÉRICO DEL EFECTO DE ROTACIÓN DE POLARIZACIÓN NO LINEAL EN FIBRA ÓPTICA BASADO EN EL MODELO DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL	132
HIDROLOGÍA ISOTÓPICA. HERRAMIENTA PARA ENTENDER PROCESOS EN LOS ACUÍFEROS	138
ESTUDIO NUMÉRICO DE LA RESONANCIA DE LOS PLASMONES DE SUPERFICIE EN UNA ESTRUCTURA DE KRECHTSMANN HACIENDO USO DEL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL.....	150
ESTUDIO NUMÉRICO DE LOS PLASMONES DE SUPERFICIE CON DEFECTOS EN UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FOTÓNICO QUE CONTIENE INCLUSIONES DE METAMATERIAL ..	163

EL DECAIMIENTO DEL BOSÓN DE HIGGS A DOS FERMIONES CON VIOLACIÓN DE SABOR	171
ANÁLISIS MULTICRITERIO COMO HERRAMIENTA DE TOMA DE DECISIONES EN LAS CIENCIAS DE LA TIERRA.....	177
DESENVOLVIMIENTO DE FASE TEMPORAL PARA INTERFEROMETRÍA DINÁMICA EMPLEANDO UN SISTEMA POLARIMÉTRICO PIXELADO.....	187
SOLUCIONES ESTADÍSTICAS PARA EL CRECIMIENTO DE LA PLANTA SACAZIL	194
GENERACIÓN DE SUPERCONTINUO EN FIBRAS DE CRISTAL FOTÓNICO USANDO NOISE-LIKE PULSES Y PULSOS ULTRACORTOS	203
ÍNDICE DE AUTORES	206

MODELO DE PROPAGACIÓN DE UN PULSO EN UNA FIBRA ÓPTICA MONOMODAL BASADO EN LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL

Hugo Enrique Ibarra-Villalón¹, Jesús Pablo Lauterio-Cruz², Armando Gómez-Vieyra¹, Yazmin Esmeralda Bracamontes-Rodriguez³, Olivier Pottiez³

¹ Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, ² División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato-León, ³ Centro de Investigaciones en Óptica A. C.

uam.hibarra@gmail.com

RESUMEN

En el formalismo de la óptica no lineal en fibras ópticas, múltiples fenomenologías son validadas y estudiadas a partir del modelo de propagación basado en la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE) [1], el cual incluye la contribución de la dispersión y la respuesta óptica no lineal de la fibra representada como un medio centrosimétrico. Cabe destacar que en el presente formalismo es de suma importancia garantizar la convergencia y estabilidad de las soluciones numéricas de la NLSE, por lo que es necesario tener un criterio para la mejor elección del método numérico a desarrollar, como se discute en [2]. Por lo anterior, en este trabajo se propone un análisis de estabilidad de tres métodos pseudo-espectrales (método de Fourier de división del paso iterativo “SSFM”, método de Fourier simétrico de división del paso iterativo “S-SSFM” y el método de Runge-Kutta de cuarto orden en la imagen de interacción “RK4IP”) basado en la validación de la ley de conservación de la energía en la propagación de un solitón de primer y tercer orden. A partir de los resultados numéricos obtenidos en la validación de la propagación conservativa, se concluye que los métodos SSFM y S-SSFM presentan una mejor estabilidad y convergencia en comparación del método RK4IP. Adicionalmente, los resultados presentados serán un referente en trabajos futuros para garantizar la reproducibilidad de diversas fenomenologías en el formalismo de la óptica no lineal.

INTRODUCCIÓN

La propagación de un pulso en una fibra óptica es modelada por la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE, por sus siglas en inglés *nonlinear Schrödinger equation*). Esta ecuación de propagación se deduce a partir de un análisis de la teoría clásica de Maxwell, considerando un campo eléctrico cuasi-monocromático con una componente transversal (distribución del modo transversal en la fibra) y una componente longitudinal (perfil temporal del pulso), como se ilustra en la Fig. 1. Para llegar a esta ecuación, se toman en cuenta las características de la fibra óptica (vista como un medio no lineal isotrópico), una respuesta instantánea no lineal del medio, la variación pequeña del perfil temporal del pulso ($A(z, T)$) a lo largo de la distancia de propagación, entre otras consideraciones discutidas por Agrawal [1]. La NLSE es una ecuación diferencial de derivadas parciales representada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(z, T) = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} A(z, T) + i\gamma |A(z, T)|^2 A(z, T) \quad (1)$$

donde $A(z, T)$ es el perfil temporal del pulso, z es la coordenada del eje de propagación, β_2 (ps²/km) es el parámetro de dispersión, γ (W⁻¹km⁻¹) es el coeficiente no lineal de la fibra óptica y T representa a la variable temporal en un marco de referencia que se mueve a la velocidad de grupo del perfil temporal. El primer término del lado derecho de la Ec. (1) introduce la contribución de la dispersión cromática; dicha contribución es debido a la respuesta del medio al introducir una dependencia del índice de refracción en función de la frecuencia óptica. El segundo término del lado derecho de la Ec. (1) introduce la contribución no lineal del efecto Kerr, debido a la respuesta no lineal de la fibra óptica ($S_i O_2$) [1].

En general, la NLSE es una ecuación diferencial no lineal de derivadas parciales, cuya solución se obtiene a partir de métodos numéricos, ya que solo para casos aislados se tiene una solución analítica. En la literatura se han reportado dos tipos de métodos numéricos para resolver la NLSE: métodos de diferencias finitas [1,3,4] y métodos pseudo-espectrales [1,5]. Por otra parte, es importante mencionar que se han reportado múltiples fenomenologías en el formalismo de la óptica

no lineal modeladas por distintas versiones de la NLSE [1,6]. Con base en la validación y predicción de dichas fenomenologías, es de suma importancia garantizar la estabilidad y convergencia de los métodos numéricos utilizados para integrar numéricamente la NLSE.

En este trabajo se establece un análisis de estabilidad de tres métodos pseudo-espectrales basado en la ley de la conservación de la energía en el problema de propagación de un pulso en fibra óptica. En particular, el problema de propagación se centrará en un solitón de primer y tercer orden, cuyas dinámicas y fundamentos son descritos a detalle por Agrawal [1].

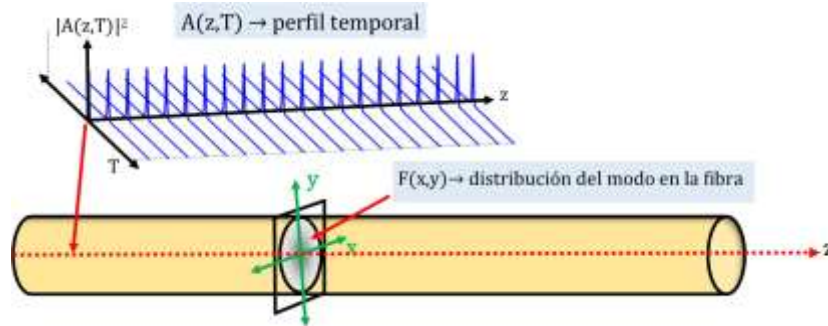


Figura 1. Esquema de la propagación de un pulso en una fibra óptica.

Análisis numérico

Análisis de estabilidad y convergencia de los métodos numéricos pseudo-espectrales en el problema de la propagación de un pulso en fibra óptica modelado por la ecuación de Schrödinger no lineal. Con la finalidad de garantizar la reproducibilidad y estabilidad de los resultados numéricos en el formalismo de la óptica no lineal, se corrobora que las soluciones numéricas sean consistentes con la ley de conservación de la energía del pulso asociada a la NLSE (Ec. 1). Esta ley de conservación bajo la imagen del principio variacional de Weiss es deducida a detalle por Ibarra y otros [2], y su definición es expresada matemáticamente como

$$E(z) = E(z_0) \tag{2}$$

donde $E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |A(z, T)|^2 dT$ es la energía del perfil temporal del pulso y z_0 es la posición inicial.

Bajo la ley de conservación de la energía (Ec. 2), se procedió a verificar su reproducibilidad en la solución numérica del perfil temporal $A(z, T)$ que describe la dinámica de un solitón de primer orden y un solitón de tercer orden, a partir de los siguientes métodos pseudo-espectrales:

- Método de Fourier de división del paso iterativo (SSFM, por sus siglas en inglés *split-step Fourier method*) [1].
- Método de Fourier simétrico de división del paso iterativo (S-SSFM, por sus siglas en inglés *symmetric split-step Fourier method*) [1].
- Método de Runge-Kutta de cuarto orden en la imagen de interacción (RK4IP, por sus siglas en inglés *Fourth-order Runge-Kutta in the interaction picture*) [5].

Partiendo del algoritmo mostrado en la Fig. 2 se llega a la solución numérica del perfil temporal $A(z, T)$ que representa a las dinámicas de pulsos propuestas. En una primera fase se define la condición inicial del perfil temporal $A(z_0, T) = \sqrt{P_0} \text{sech}(T/T_0)$ (P_0 es la potencia instantánea inicial y T_0 cuantifica el ancho temporal del pulso), los parámetros de la fibra óptica monomodal (SMF28, $\beta_2 = -21.66 \text{ ps}^2/\text{km}$ y $\gamma = 1.5/\text{W}/\text{km}$ a 1550 nm), el dominio de la variable temporal " $T \in [-250, 250] \text{ ps}$ " con un paso $k = 0.122 \text{ ps}$, la distancia de propagación final $z_f = 50 \text{ km}$ y el paso iterativo espacial $h \in [0.05, 10] \text{ m}$ para los métodos SSFM, S-SSFM y RK4IP. Posteriormente, se verifica que la potencia instantánea inicial P_0 sea consistente con el orden del solitón definido por el parámetro $\eta^2 = L_D/L_{NL}$ ($\eta = 1$ para el solitón de primer orden y $\eta = 3$ para el solitón de tercer orden), definiendo a $L_D = T_0^2/|\beta_2|$ como la longitud de dispersión y $L_{NL} = 1/(\gamma P_0)$ como la longitud no lineal. Finalmente, a partir del paso pseudo-espectral del método, tomado de su respectiva

referencia, se completa cada iteración a lo largo de la propagación hasta alcanzar la distancia de propagación final z_f . El paso iterativo del método SSFM es definido por

$$A(z_{m+1}, T) = F^{-1} \left[\exp(h\hat{D}(\omega)) F[\exp(h\hat{N}) A(z_m, T)] \right] \quad (3)$$

donde F representa a la transformada inversa de Fourier, F^{-1} representa a la transformada inversa de Fourier, $\hat{N} = i\gamma|A(z_m, T)|^2$ es el operador no lineal y $\hat{D}(\omega) = i\frac{\beta_2}{2}\omega^2$ es el operador de dispersión. El paso iterativo del método S-SSFM es

$$A(z_{m+1}, T) = F^{-1} \left\{ \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) F \left[\exp(h\hat{N}) F^{-1} \left(\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) F[A(z_m, T)] \right) \right] \right\} \quad (4)$$

Por último, el paso iterativo del método RK4IP es definido por

$$A(z_{m+1}, T) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \left(A_{IP}(z_m, T) + \frac{h}{6}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3) \right) + \frac{h}{6}\delta \quad (5)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y δ son coeficientes que involucran la evaluación iterativa del operador no lineal $\hat{N}(A(z, T)) = i\gamma|A(z, T)|^2$, cuyas expresiones matemáticas son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= F^{-1} \left[\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) F[\hat{N}(A(z_m, T)) \times A(z_m, T)] \right], \\ \alpha_2 &= \hat{N} \left(A_{IP}(z_m, T) + \frac{h}{2}\alpha_1 \right) \times \left(A_{IP}(z_m, T) + \frac{h}{2}\alpha_1 \right), \\ \alpha_3 &= \hat{N} \left(A_{IP}(z_m, T) + \frac{h}{2}\alpha_2 \right) \times \left(A_{IP}(z_m, T) + \frac{h}{2}\alpha_2 \right), \\ \delta &= \hat{N} \left(F^{-1} \left[\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) F[A_{IP}(z_m, T) + h\alpha_3] \right] \right) \times F^{-1} \left[\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) F[A_{IP}(z_m, T) + h\alpha_3] \right], \end{aligned}$$

En una segunda etapa, siguiendo el diagrama de la Fig. 2, se identifica si la solución numérica del perfil temporal representa la naturaleza conservativa del sistema, a partir de la evaluación del error relativo de la energía ($\varepsilon_{E_{rel}} \ll 1$).

En la propagación de un solitón de primer orden, el perfil temporal del pulso se preserva a lo largo de la propagación debido a un mecanismo de compensación entre la contribución de dispersión y el efecto no lineal [1,2]. Por consiguiente, las soluciones numéricas deben de validar la evolución constante del perfil de intensidad ($|A(z, T)|^2$), como se muestra en la Fig. 3.a. Por otra parte, a partir del análisis de estabilidad basado en el criterio de la ley de conservación de la energía ($\varepsilon_{E_{rel}} \ll 1$) es posible identificar que los métodos SSFM, S-SSFM y RK4IP validan la propagación conservativa, ya que el error relativo de la energía confirma variaciones despreciables en dicha cantidad ($\varepsilon_{E_{rel}} < 10^{-9}$), como se muestra en la representación del error relativo en función del tamaño del paso iterativo h en la Fig. 3.b. La tendencia que sigue la curva representativa del error relativo es conducida por el error de truncamiento y el error de tipo round-off, como se discute a detalle en [2]. La eficiencia computacional es cuantificada por el tiempo computacional requerido para completar el proceso iterativo de cada uno de los métodos, como se muestra en la Fig. 3.c. Cabe destacar que el método de RK4IP requiere un mayor tiempo computacional en comparación de los métodos SSFM y S-SSFM; esto se debe a que el paso iterativo del método RK4IP (Ec. 5) involucra la ejecución de un mayor número de operaciones en comparación de los métodos SSFM (Ec. 3) y S-SSFM (Ec. 4). En el caso anterior, los tres métodos propuestos (SSFM, S-SSFM y RK4IP) presentan una óptima convergencia y estabilidad en la solución del solitón de primer orden. Sin embargo, en el caso de la propagación de un solitón de tercer orden, al describir una dinámica que presenta una modulación periódica del perfil de intensidad del pulso (Fig. 4.a), se hace evidente que el método RK4IP no reproduce la conservación de la energía del pulso para un tamaño del paso iterativo $h \geq 1$ m, debido a que se alcanzan valores considerables del error relativo de la energía $\varepsilon_{E_{rel}} > 10^{-6}$, como se muestra en la Fig. 4.b. En contraparte, los métodos SSFM y S-SSFM garantizan la conservación de la energía en la propagación del solitón de tercer orden al presentar valores despreciables del error relativo $\varepsilon_{E_{rel}} < 10^{-6}$. Adicionalmente, el tiempo computacional del método RK4IP es mayor en

comparación del tiempo computacional de los métodos SSFM y S-SSFM, como se muestra en la Fig. 4.c.

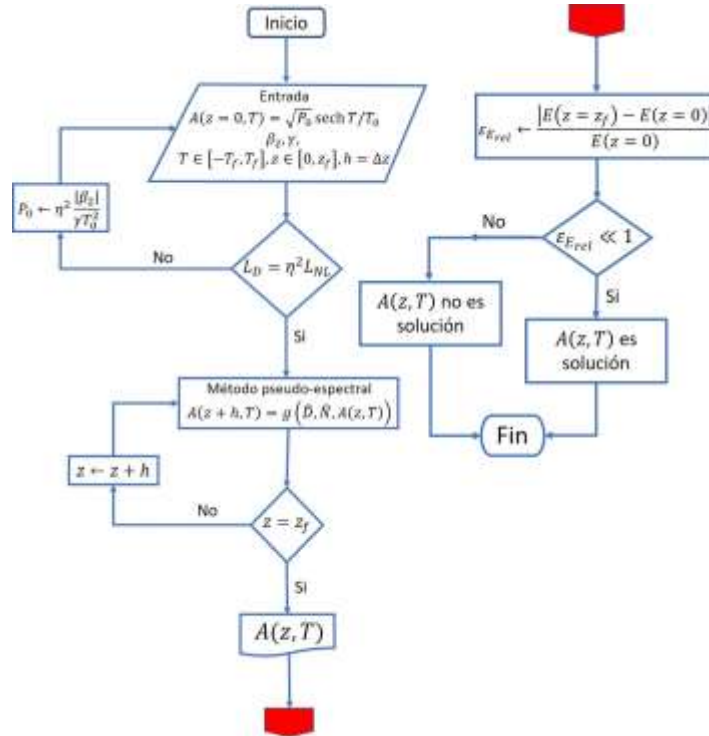


Figura 2. Diagrama del algoritmo implementado en el análisis de estabilidad y convergencia basado en la ley de conservación de la energía del pulso.

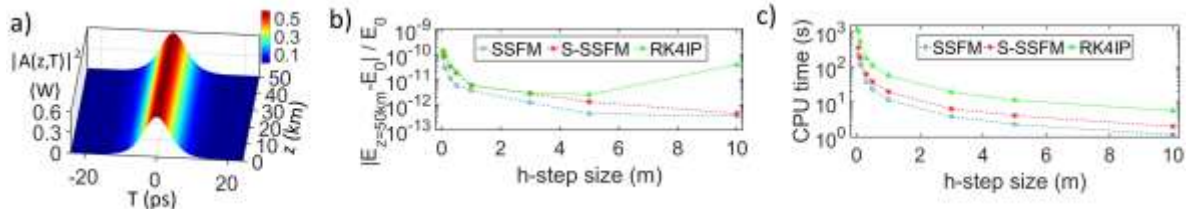


Figura 3. Estabilidad numérica para reproducir la propagación de un solitón de primer orden. a) Evolución del perfil temporal a lo largo de 50 km. b) Error numérico en función del tamaño del paso iterativo “h” para validar la conservación de la energía. La eficiencia computacional se cuantifica por e) el tiempo computacional.

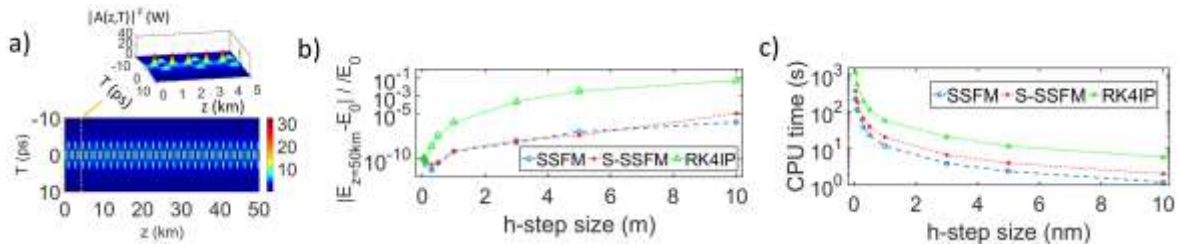


Figura 4. Estabilidad numérica para reproducir la propagación de un solitón de tercer orden. a) Evolución del perfil temporal a lo largo de 50 km. b) Error numérico en función del tamaño del paso iterativo “h” para validar la conservación de la energía. La eficiencia computacional se cuantifica por e) el tiempo computacional.

CONCLUSIONES

En base a los resultados obtenidos, se concluyó que de los tres métodos pseudo-espectrales analizados en la validación de la ley de conservación de la energía del pulso, solo los métodos SSFM y S-SSFM presentan una buena estabilidad y convergencia para reproducir el problema de propagación de un pulso modelado por la ecuación de Schrödinger no lineal.

BIBLIOGRAFÍA

1. G. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 6th ed (Academic Press, New York, 2019), Chapters 1, 2, 5.
2. H. E. Ibarra-Villalon, et. al., "Numerical approaches for solving the nonlinear Schrödinger equation in the nonlinear fiber optics formalism", J. Opt., Vol. 22, 2020, 043501.
3. Q. Chang, et. al., "Difference Schemes for Solving the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation" J. Comput Phys Vol. 148(2), 1990, pp. 397-415.
4. X. Antoine, et. al., "Computational methods for the dynamics of the nonlinear Schrödinger/Gross-Pitaevskii equations", Comput. Phys. Commun. Vol. 184(12), 2013, 2621.
5. J. Hult, "A Fourth-Order Runge–Kutta in the Interaction Picture Method for Simulating Supercontinuum Generation in Optical Fibers", J. Lightwave Technol. Vol. 25, 2007, pp. 3770-3775.
6. S. Boscolo, C. Finot, "Shaping light in nonlinear optical fiber" (John Wiley & Sons, Chichester, 2017).

TERMODEGRADACIÓN DE PELÍCULAS DE POLIETILENO DE ALTA Y BAJA DENSIDAD CON RADIACIÓN LÁSER DE CO₂ (10.6MM)

Karla Ivonne Martínez Sánchez, Ma. Rosario González Mota, Juan José Soto Bernal, Iliana Rosales Candelas.

Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Aguascalientes (TecNM/ITA)
rosario.gm@aguascalientes.tecnm.mx

RESUMEN

La baja degradabilidad y alta persistencia de materiales poliméricos de alto peso molecular, como el polietileno, generan un grave problema en la acumulación de residuos en el medio ambiente; por lo tanto, el presente trabajo tiene como objetivo caracterizar los efectos de la radiación láser de CO₂ en la degradación del polietileno de alta y baja densidad. Las películas de polietileno de alta y baja densidad se expusieron a radiación láser de CO₂, a diferentes fluencias, y fueron caracterizadas utilizando espectroscopía IR. La termodegradación del polietileno ocasiona la escisión de la cadena polimérica, dando lugar a la formación de macroradicales, formación de grupos terminales y la recristalización de la cadena polimérica. Las películas de polietileno expuestas a la radiación láser de CO₂ muestran cambios, principalmente en la fracción de fase cristalina y en formación de grupos metilo (CH₃) y metileno terminales (CH₂) los cuales incrementan y decrecen durante la exposición a la radiación láser de CO₂; este comportamiento se debe a la variación de la fluencia, el tiempo de exposición y la potencia del láser, dado que la termodegradación depende directamente de la temperatura, a mayor temperatura mayor degradación.

INTRODUCCIÓN

Los plásticos son uno de los materiales más utilizados en los últimos 50 años, cuya demanda ha incrementado constantemente debido a su gran variedad de aplicaciones; sin embargo, generan problemas de acumulación en el medio ambiente debido a que una de sus principales aplicaciones son como materiales de un solo uso y a su baja degradabilidad; además, es importante mencionar que tan sólo en el año 2015 había alrededor de 4,9 mil millones de toneladas métricas de residuos plásticos en los rellenos sanitarios [1], [2]. El polietileno (PE) representa el 62.2% de los desechos plásticos en el mundo, ya que es un polímero que, por sus propiedades físicas y mecánicas es utilizado, entre otras aplicaciones, como material de embalaje; sin embargo, el PE es un polímero no biodegradable debido a su alto peso molecular y su hidrofobicidad [3]–[6].

El PE es un material de baja biodegradabilidad debido a que está conformado por enlaces sigma (σ), C-C y C-H, cuyas moléculas están alineadas de forma compacta y son altamente hidrofóbicas; las propiedades del PE dependen principalmente de su estructura molecular, la distribución de sus cadenas poliméricas y la cantidad de ramificaciones [7]. La termodegradación es una alternativa para incrementar la degradabilidad del polietileno, ya que ocasiona la escisión de la cadena polimérica, cambios en el peso molecular y en la distribución de las cadenas poliméricas del PE. La velocidad y la eficiencia de la termodegradación dependen directamente de la temperatura, a mayor temperatura, mayor degradación incrementando la escisión de la cadena y disminuyendo la estabilidad térmica del PE [8]–[14].

Algunos autores han reportado que el PE experimenta reacciones de termodegradación al ser expuesto a radiación láser de CO₂; por lo tanto, en este trabajo películas de polietileno de baja densidad (LDPE) y de alta densidad (HDPE) fueron expuestas a radiación láser de CO₂ cuyo efecto fue caracterizado utilizando espectroscopía infrarroja con transformada de Fourier (FTIR) [8], [15]–[17].

EXPERIMENTACIÓN

Materiales.

En el presente trabajo se utilizaron películas de LDPE y HDPE comerciales de 13x20cm de 0,05 y 0,07mm de espesor, respectivamente. El LDPE y HDPE son productos sintetizados y fabricados bajo marca registrada, por lo tanto, su composición y peso molecular son información confidencial.

Irradiación con Láser de CO₂.

Las películas de LDPE y HDPE se expusieron a radiación láser de CO₂ utilizando un láser modelo Engraver C120H a una longitud de onda de 10.6µm, con spot del láser de 1.8cm de diámetro, utilizando un lente de selenuro de zinc (SeZn) de menisco negativo. Las muestras de PE se colocaron en monturas a 20cm del lente y se irradiaron a diferentes potencias 6, 9.5 y 13W, y diferentes tiempos de exposición de 10, 20 y 30min.

Espectroscopía Infrarroja (IR)

Los efectos de la radiación láser de CO₂ en las películas de LDPE y HDPE fueron caracterizadas utilizando espectroscopía infrarroja con transformada de Fourier, FTIR. Los espectros FTIR se obtuvieron en un espectrofotómetro Thermo Nicolet modelo iS10 con espejo de Germanio, Ge, con una resolución de 4cm⁻¹ y 64 barridos, en el rango de 690-4000cm⁻¹. Los espectros IR fueron normalizados con respecto a la máxima absorbancia.

Fracción de fase cristalina (α)

La fracción de fase cristalina de las películas de LDPE y HDPE se calculó mediante la razón entre el área integrada de la banda de absorción IR a 730 cm⁻¹, vibración de balanceo de los grupos metileno (CH₂) en la fase cristalina (I_{730}) y el área integrada de la banda de absorción IR a 717cm⁻¹, vibración de balanceo de los grupos metileno (CH₂) en la fase amorfa (I_{717}) mediante la Ec. 1 [18], [19]. Las áreas integradas se calcularon por el método Gaussiano.

$$\alpha = \frac{I_{730}}{I_{717}},$$

Ec.1

Índice de grupos terminales (I_{gt})

El índice de grupos terminales fue calculado mediante la razón entre la absorbancia a 1463cm⁻¹ (A_{1463}), vibración asimétrica de tijereo de los grupos terminales CH₂ y CH₃, y la absorbancia a 1472cm⁻¹ (A_{1472}), vibración simétrica de tijereo del CH₂; la ecuación del índice de grupos terminales es una fórmula propuesta por los autores tomando en cuenta el comportamiento de la banda, la cual se bifurca conforme se incrementan las ramificaciones, CH₃ terminales [20].

$$I_{gt} = \frac{A_{1463}}{A_{1472}},$$

Ec. 2.

Ángulo de contacto (θ)

El ángulo de contacto se determinó colocando una gota de agua destilada sobre las películas de PE y midiendo el ángulo de contacto entre la gota y la superficie de la película; se utilizó una cámara fotográfica profesional, modelo CANON EOS Rebel T5i EF-S 18-55 IS STM, de lente cóncavo, la muestra se colocó a 5 cm y se utilizó el programa ImageJ para medir el ángulo de contacto [21].

RESULTADOS

El espectro IR de las películas de LDPE y HDPE sin exponer a la radiación láser de CO₂ presentan las bandas características del polietileno (PE), una banda intensa bifurcada en la región de 2850-2940cm⁻¹, vibración de estiramiento simétrico y asimétrico de los grupos metileno (-CH₂-), estructura principal de la cadena polimérica del PE, una banda en la región de los 1430-1480cm⁻¹, vibración asimétrica de los grupos metilo terminales (-CH₃), una banda en la región de 720-735cm⁻¹, vibración de balanceo de los grupos metileno (-CH₂-). Los espectros IR de las películas de LDPE y HDPE expuestas a radiación láser de CO₂ presentan bifurcaciones en las bandas de la región de 1430-1480cm⁻¹, debido a la formación de grupos CH₃ terminales y en la banda de la región de 720-735cm⁻¹, relacionada con la cristalinidad de las películas, Fig.1 [11], [20].

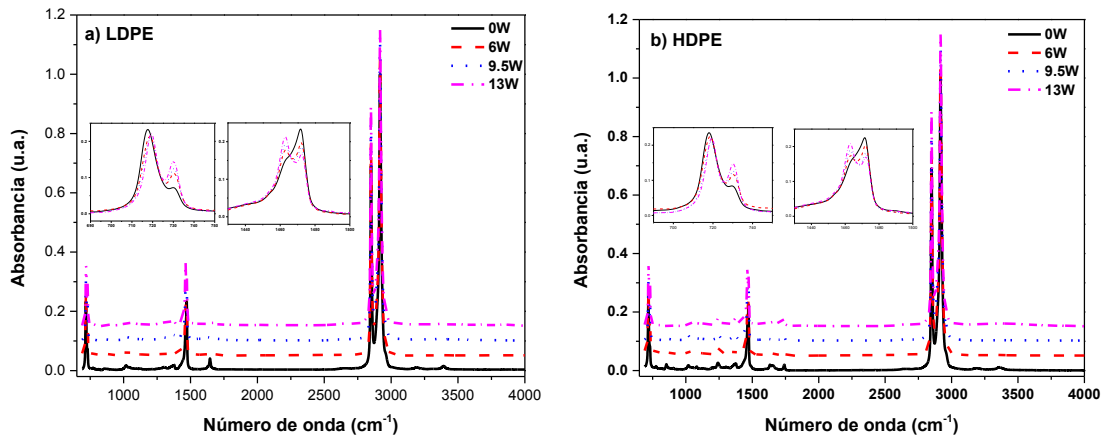


Fig. 1. Espectro IR de las películas de a) LDPE y b) HDPE expuestas a radiación láser de CO₂ a diferentes potencias láser y un tiempo de exposición de 20 minutos.

La fracción de fase cristalina se utilizó para caracterizar los cambios en la cristalinidad del LDPE y HDPE ocasionados por la radiación láser. La α del LDPE y HDPE tiende a incrementar al incrementar la potencia láser debido a que la radiación láser ocasiona la escisión de la cadena polimérica, generando cadenas moleculares de menor tamaño, las cuales tienden a recristalizarse en la misma orientación que las cadenas moleculares principales una vez que se detiene la exposición a la radiación láser. El incremento de la fracción de fase cristalina, indica la degradación de las películas de LDPE y HDPE. El incremento en la potencia láser genera un incremento en la α de las películas de LDPE y HDPE, en el LDPE el tiempo de exposición no modifica la α significativamente; sin embargo, el HDPE a 30min de exposición y a potencias de 6W y 9.5W presenta un incremento en la α , lo cual podría deberse que durante la recristalización, la estructura lineal de cadena polimérica del HDPE facilita la alineación de las cadenas moleculares de menor tamaño con la cadena principal a diferencia del LDPE que al momento de la recristalización las ramificaciones de la cadena polimérica dificultan la alineación de las cadenas del menor tamaño en el mismo sentido que la cadena principal.

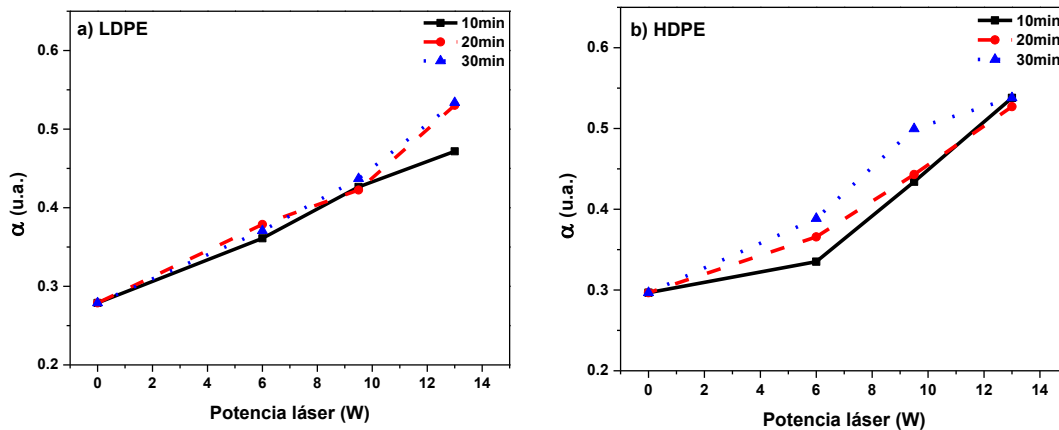


Fig.2. α del a) LDPE y b) HDPE expuestos a radiación láser, a diferentes potencias láser y tiempos de exposición.

El índice de grupos terminales, CH₃, es una cuantificación empírica de la escisión de la cadena polimérica ocasionada por la radiación láser; el incremento del I_{gt} indica un incremento en la concentración de grupos terminales debido a la escisión de la cadena polimérica, por lo tanto, a mayor potencia láser mayor I_{gt} , Fig.3. El I_{gt} en las películas de HDPE presentan incrementos

notables comparado con las películas del LDPE, debido a que el HDPE es una cadena lineal, y la escisión de la cadena ocasiona la presencia de un mayor número de grupos terminales; además, el incremento en el *Igt* indica la degradación de la cadena polimérica.

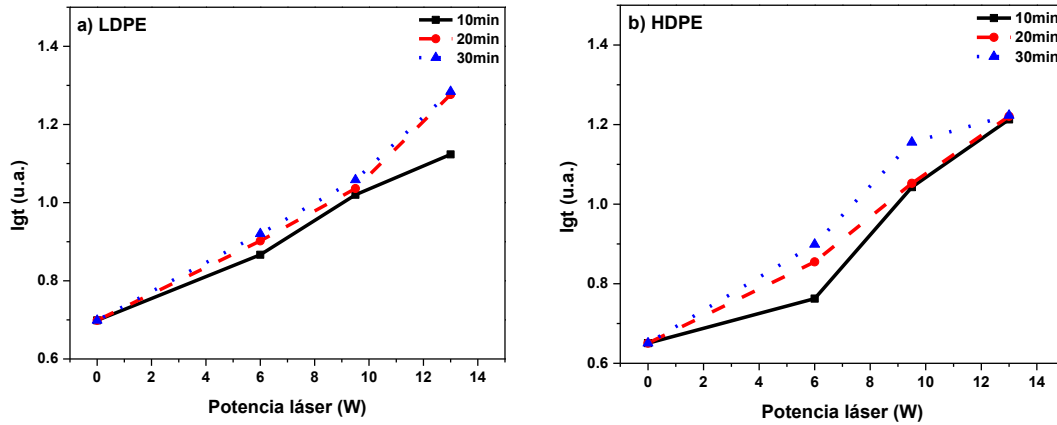


Fig.3. *Igt* del a) LDPE y b) HDPE expuestos a radiación láser, a diferentes fluencias.

El θ es un parámetro utilizado para evaluar la hidrofobicidad del material, las películas de LDPE y HDPE sin exponer a radiación láser de CO₂ presentan θ mayores a 90°, que corresponden a superficies hidrofóbicas, mientras que las películas de LDPE y HDPE expuestas a radiación láser de CO₂, presentan θ menores a 90°, que corresponden a superficies hidrofílicas; por lo tanto, estos resultados indican que las películas de LDPE y HDPE expuestas a la radiación láser de CO₂ incrementan su hidrofiliidad [21], [22]. El θ de las películas de LDPE y HDPE decrece al incrementar la potencia y tiempo de exposición a la radiación láser; el LDPE presenta el menor θ a 13W y 30min de exposición y el HDPE presenta un θ menor a 9.5W y 20min de exposición a la radiación láser. Las películas de LDPE presentan θ mayores a las del HDPE, lo cual indica que el HDPE está presentando una mayor degradación que el LDPE, ver Tabla 1.

Tabla 1. Ángulos de contacto de las películas de LDPE y HDPE expuestas a radiación láser a diferentes fluencias.

Potencia láser (W)	Tiempo de exposición (min)	θ LDPE	θ HDPE
0	0	94.8	97.7
6	10	90.8	88.2
6	20	85.1	83.1
6	30	84.2	85.2
9.5	10	84.1	83.2
9.5	20	83.7	75.2
9.5	30	79.1	76.5
13	10	84.5	84.8
13	20	82.6	71.5
13	30	78.4	75.4

CONCLUSIONES

Las películas de LDPE y HDPE expuestas a radiación láser de CO₂ presentan un incremento en la fracción de fase cristalina y en el índice de grupos terminales, y un decremento en el ángulo de contacto, lo cual indica que experimentan una degradación causada por la radiación láser. La potencia de la radiación láser provoca la escisión de la cadena y por lo tanto el incremento de la fracción de fase cristalina debido a la recristalización de la cadena polimérica; además, la escisión de la cadena ocasiona un incremento en la formación de grupos terminales CH₃. Los cambios en la fracción de la fase cristalina y en la relación de los grupos terminales dependen principalmente de la potencia láser; además, las películas de LDPE y HDPE incrementan su hidrofobicidad al incrementar la potencia láser, lo que indica que las películas se degradan con la exposición a la radiación láser, por lo tanto, la radiación láser se puede considerar como una opción de tratamiento para incrementar la degradación del LDPE y HDPE, y así contribuir en la disminución la acumulación de plásticos en el medio ambiente.

BIBLIOGRAFÍA

1. K. D. Cox, "Human Consumption of Microplastics." *Environ.Sci.Technol.*, Vol.53, 12, 2019, pp.7068-7074.
2. P.He, "Municipal solid waste (MSW) land fi ll: A source of microplastics? -Evidence of microplastics in land fi ll leachate", *Water Research*, Vol. 159, 2019, pp. 38–45.
3. M.Aldas, "Effect of the prodegradant-additive plastics incorporated on the polyethylene recycling," *Int. J. Polym. Sci.*, vol. 2018, 2018.
4. S. Dayana, "A review on pyrolysis of plastic wastes," *Energy Convers. Manag.*, Vol. 115, 2016, pp. 308–326.
5. A. Koroleva, "Oxo-biodegradability of polyethylene blends with starch, cellulose and synthetic additives," *Chem. Chem. Technol.*, Vol. 6, 4, 2012, pp. 405–413.
6. D. S. Cruz-Navarro, "Degradation of Oxo-Degradable-Polyethylene and Polylactic Acid Films Embodied in the Substrate of the Edible Fungus *Pleurotus ostreatus*," *Nat. Resour.*, Vol. 5,

- 15, 2014, pp. 949–957.
7. M. Koutny, "Biodegradation of polyethylene films with prooxidant additives" *Chemosphere*, Vol. 64, 2006, pp.1243-1252.
 8. Beyler C.; Hirschler M. "Thermal Decomposition of Polymers," In *SPE Handb. Fire Prot. Eng.*, 2001, pp. 110–131.
 9. Ray S.; Cooney R. Thermal Degradation of Polymer and Polymer Composites. In *Handbook of Environmental Degradation of Materials*, (Elsevier Inc., Auckland, New Zeland, 2012), Chapter 7, pp. 213-242.
 10. M. San Andres, "Factores responsables de la degradación química de los polímeros . Efectos provocados por la radiación lumínica sobre algunos materiales utilizados en conservación : primeros resultados," *Factores Responsab. la Restauración. 2010*, pp. 263–304.
 11. Socrates G. *Infrared and Raman characteristic group frequencies*, (JOHN WILEY & SONS, LTD: England, 2004).
 12. M. S. Yagfarov, "Recrystallization and secondary crystallization in polymers," *Polym. Sci. U.S.S.R.*, vol. 28, 5, 1986, pp. 1011–1017.
 13. Q. Yang, X. Chen, Z. He, F. Lan, and H. Liu, "The glass transition temperature measurements of polyethylene: determined by using molecular dynamic method," *RSC Adv.*, Vol. 6, 15, 2016, pp. 12053–12060.
 14. Zeus, "Thermal Degradation of Plastics," *Zeus Ind. Prod.*, 2005, pp. 1–8.
 15. T. Corrales, "Photooxidative and thermal degradation of polyethylenes : interrelationship by chemiluminescence , thermal gravimetric analysis and FTIR data," Vol. 147, 2002, pp. 213–224.
 16. S. Jipa, "LDPE degradation by IR-laser irradiation," *Polym. Test.*, Vol. 24, 6, 2005, pp. 805–809.
 17. A. Martínez, "LDPE Oxidation by CO₂ Laser Radiation (10 . 6 μm)," *International Journal of Polymer Science*, Vol. 2018, 2018.
 18. L. Guadagno, "Chemical and morphological modifications of irradiated linear low density polyethylene (LLDPE)," *Polym. Degrad. Stab.*, Vol. 72, 2001, pp. 175–186.
 19. A. Martínez, "Investigating the Degradability of HDPE, LDPE, PE-BIO, and PE-OXO Films under UV-B Radiation", *Journal of Spectroscopy*, Vol. 2015, 2015.
 20. P. Larkin, "IR and Raman Spectra-Structure Correlations: Characteristic group frequencies" in *Infrared and Raman Spectroscopy Principles and Spectral Interpretation* (Elsevier Inc., San Diego, CA, USA, 2011), Chapter 6, pp.73-115.
 21. H. Assembly, "Contact Angle Measurements Using a Simplified Experimental Setup," Vol. 87, 12, 2010, pp. 1403–1407.
 22. Y. Yuan and T. R. Lee, *Contact Angle and Wetting Properties*. In: Bracco G., (Holst B. Eds. Surface Science Techniques. Springer Series in Surface Sciences, Berlin, Heidelberg, 2013), Chapter 1, pp.3-34.

SENSOR DUAL DE TEMPERATURA Y CURVATURA CUBIERTO CON PDMS BASADO EN MECANISMO ARROW

L. A. Herrera-Piad¹, Iván Hernández-Romano², S. Marrujo-García¹, D. A. May-Arrijoja³, V. P. Minkovich³ y M Torres-Cisneros¹

¹Universidad de Guanajuato, ²Conacyt-Universidad de Guanajuato, ³Centro de Investigaciones en Óptica
la.herrerapiad@ugto.mx

RESUMEN

Esta investigación describe un método sencillo para la obtención de un sensor de temperatura y curvatura basado en el efecto ARROW. Empalmando un segmento de fibra de núcleo hueco entre dos segmentos de fibras monomodo, obtenemos la estructura deseada, la cual se fijó en una lámina de acero con la ayuda del polímero PDMS para posteriormente ser calentada y curvada.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años han aparecido varias publicaciones informando el uso de fibras ópticas de núcleo hueco (HCF por sus siglas en inglés) para fabricar sensores de fibra óptica. Las HCF se han utilizado para implementar interferómetros Fabry-Perot [1], y Mach-Zehnder [2], y también para generar el efecto de guía de onda óptica reflejante antirresonante (ARROW por sus siglas en inglés) [3]. Los sensores basados en el efecto ARROW han mostrado un buen rendimiento para medir temperatura [4], índice de refracción [5], tensión [1], y curvatura [4,6]. En este trabajo presentamos una técnica simple para fabricar un sensor de temperatura y curvatura basado en el efecto ARROW. Esta simple estructura que se montó en una delgada lámina de acero usando cinta adhesiva, nos permitió fabricar un sensor con alta sensibilidad donde el segmento de HCF es el área de detección.

Fabricación y arreglo experimental

El método de fabricación del sensor consiste en empalmar un segmento de HCF (8 cm) entre dos segmentos de fibra monomodo (SMF), donde el diámetro interno y externo de la HCF son 60 y 125 μm , respectivamente. Con el objetivo de fijar el dispositivo a la lámina de acero, se usó cinta adhesiva para definir una cuarta parte de la HCF (2 cm) y fue cubierta con polidimetilsiloxano (PDMS). Antes de colocar el polímero sobre la fibra, este fue mezclado con el agente curador en proporciones de 80 y 20 % respectivamente, esta mezcla fue dejada en reposo 45 minutos aproximadamente, para evitar la acumulación de burbujas de aire que puedan producir pérdidas en el sistema.

El arreglo experimental que se usó para probar el dispositivo se muestra en la figura 1 y consta de un diodo superluminiscente (centrado a 1550 nm), el cual se conectó al sensor y la salida fue monitoreada con un analizador de espectro óptico (OSA por sus siglas en inglés). La lámina de acero se colocó entre dos postes metálicos, de tal forma que una punta metálica montada en un tornillo micrométrico empujara la lámina en el centro por la parte posterior del sensor. Esto ocasiona que el sensor experimente diferentes curvaturas (de 0 a 2.68 m^{-1}). Además, la lámina de acero fue calentada en una parrilla eléctrica para medir los cambios en el espectro cuando la temperatura fue incrementada desde 30 °C hasta 110 °C, en intervalos de 10 °C. Es importante mencionar que los parámetros físicos nunca se midieron simultáneamente, en este caso al incrementar la temperatura la lámina de acero se mantuvo totalmente estable sin curvatura aplicada. De igual forma la temperatura se mantuvo a un valor fijo al doblar la lámina.

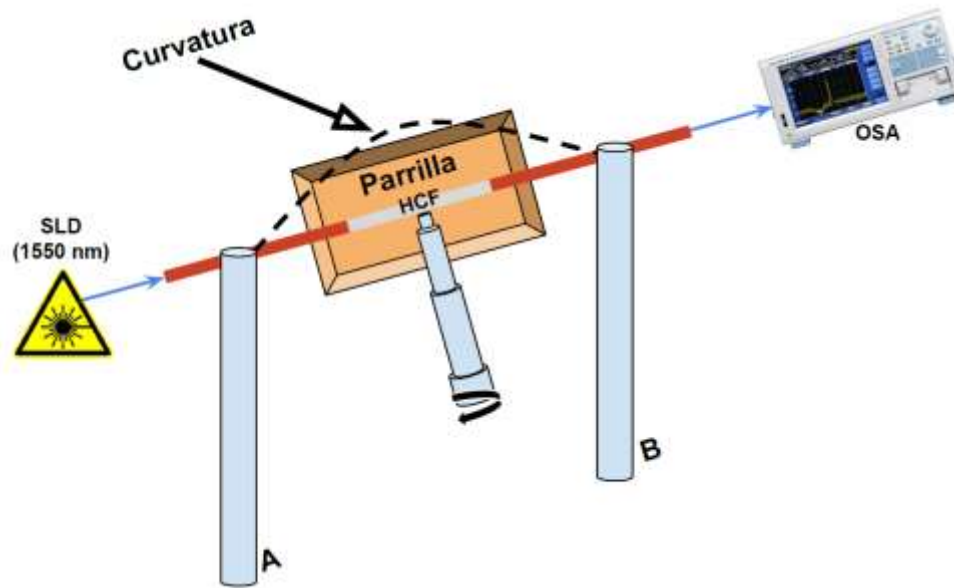


Figura 1. Arreglo Experimental

RESULTADOS

Como se mencionó anteriormente, la lámina de acero se colocó entre dos postes metálicos, para que en un tornillo micrométrico pudiera empujarla en el centro por la parte posterior del sensor, experimentando diferentes curvaturas.

En la figura 2, se puede observar una sección del espectro donde se muestra como la intensidad del valle disminuye cuando la curvatura es incrementada desde 0 hasta 2.68 m^{-1} , obteniendo una sensibilidad de $-2.04 \pm 0.03 \text{ dB/m}^{-1}$ (figura 3). Es importante mencionar que la longitud de onda no experimentó grandes cambios a medida que aumentó la curvatura, la sensibilidad que se obtuvo fue de $-89.6 \pm 0.04 \text{ pm/m}^{-1}$.

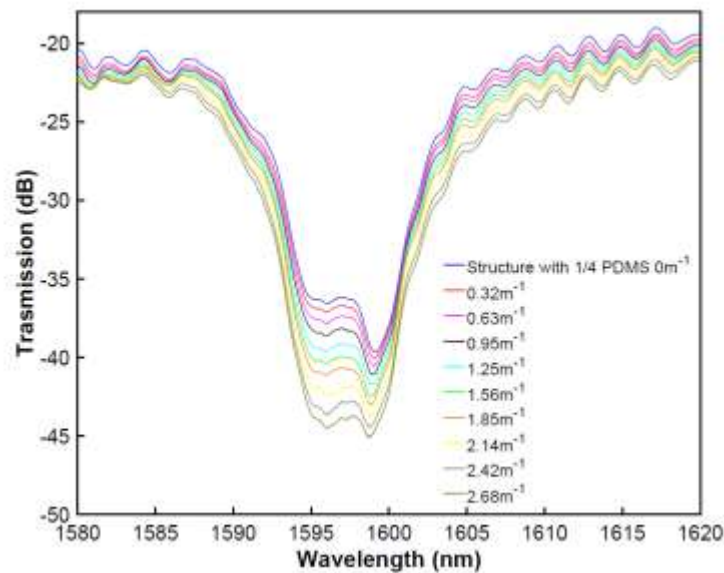


Figura 2. Espectro de la señal cuando el sensor es sometido a incrementos de curvatura.

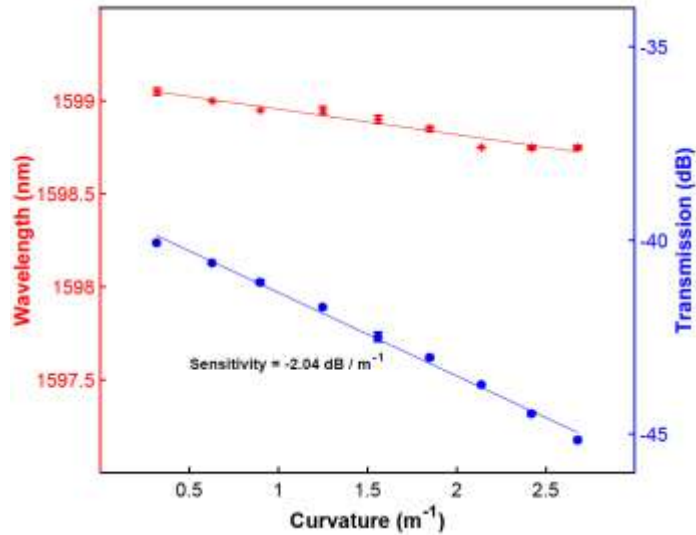


Figura 3. Sensibilidad del sensor y pequeños cambios en fase cuando la curvatura es incrementada.

Luego, la lámina de acero fue colocada en una parrilla eléctrica para medir los cambios en el espectro cuando la temperatura fue incrementada. En la figura 4, nótese el desplazamiento hacia longitudes de onda mayores cuando se produce el aumento en la temperatura, específicamente el espectro se movió un poco más de 1 nm cuando la temperatura se aumentó de 30 a 110 °C, con una sensibilidad de $13.1 \pm 0.04 \text{ pm}/^\circ\text{C}$ (figura 5). Los cambios de temperatura producen variaciones en la potencia, pero estos son mínimos (sensibilidad de $0.02 \text{ dB}/^\circ\text{C}$). Lo que demuestra que los cambios de temperatura debido al entorno no influyen en la medición de la curvatura.

Es importante mencionar que los experimentos se realizaron 5 veces para determinar el error que se cometió durante la medida. El máximo error de medición en todo el experimento es de solo 0.34 %. Como se puede apreciar el error es tan pequeño que es prácticamente imperceptible en las gráficas.

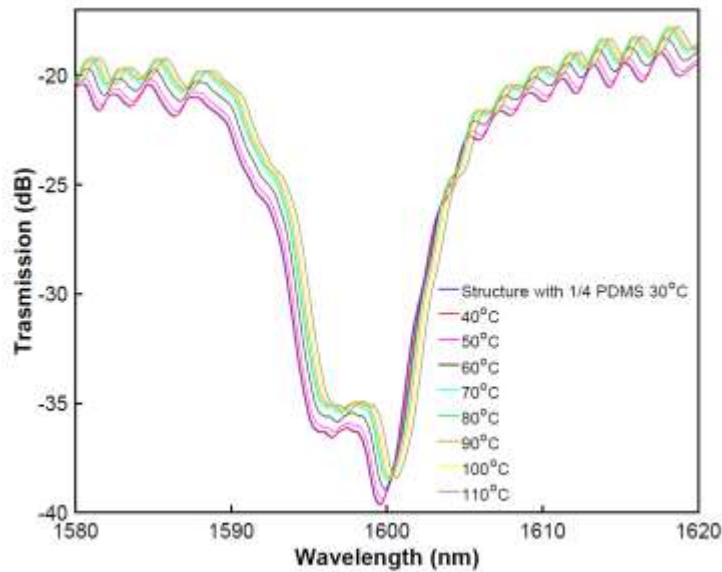


Figura 4. Espectro de la señal cuando el sensor es sometido a incrementos de temperatura.

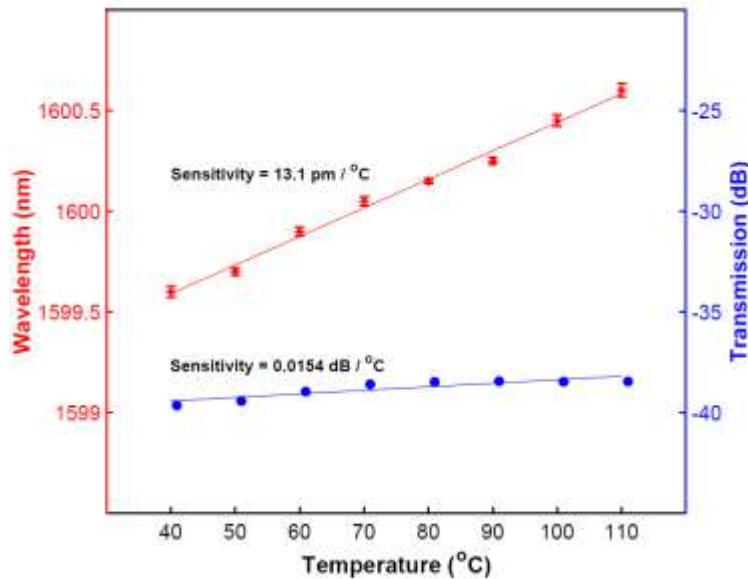


Figura 5. Sensibilidad del sensor y pequeños cambios en potencia cuando la temperatura es incrementada.

CONCLUSIONES

En resumen, se presentó y demostró experimentalmente una técnica rentable y reproducible para implementar un sensor curvatura y temperatura basado en el efecto ARROW. El sensor se fabricó empalmado un segmento de HCF entre dos SMF y este dispositivo se montó en una lámina de acero para probar sus propiedades de flexión. Además, el sensor cubierto exhibió buena sensibilidad a la temperatura, lo que muestra que los cambios de temperatura debido al entorno no alteran los valores de curvatura obtenidos con el dispositivo. Consideramos que este sensor puede tener aplicaciones en el monitoreo de estructuras mecánicas y en ingeniería civil.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al CONACyT por su apoyo por medio de los proyectos CB2017-2018-A1-S-31806, CB2016-286368 y CB2016-286629, incluyendo una beca posdoctoral de este último.

BIBLIOGRAFÍA

1. P. Zhang et al., "Cascaded fiber-optic Fabry-Perot interferometers with Vernier effect for highly sensitive measurement of axial strain and magnetic field", *Opt. Express.*, Vol. 22, 2014, pp. 1958174-19588.
2. W. Ni et al., "Single hole twin eccentric core fiber sensor based on anti-resonant effect combined with inline Mach-Zehnder interferometer", *Opt. Express*, Vol. 25, 2017, pp. 12372-12380.
3. N.M. Litchinitser et al., "Antiresonant reflecting photonic crystal optical waveguides", *Optics Letters*, Vol. 27, 2002, pp. 1592-1594.
4. H. Cheng et al., "In-Line Hybrid Fiber Sensor for Curvature and Temperature Measurement", *IEEE Photon. J.*, Vol. 11, 2019, pp. 1-11.
5. G. Salceda-Delgado et al., "Optical microfiber mode interferometer for temperature-independent refractometric sensing", *Opt. Lett.*, Vol. 37, 2012, pp. 1974-1976.
6. R. Gao et al., "Self-referenced antiresonant reflecting guidance mechanism for directional bending sensing with low temperature and strain crosstalk", *Opt. Express*, Vol. 25, 2017, pp. 18081-18091.

GENERACIÓN DE SOLUCIONES EN LA TEORÍA DE RASTALL A PARTIR DE SOLUCIONES EN LA TEORÍA DE RELATIVIDAD GENERAL DE EINSTEIN

Joaquin Estevez Delgado¹, Gabino Estevez Delgado², Julio Cesar Mendoza Rojas³ y Gabino Corona Patricio⁴

¹Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH, ²Facultad de Químico Farmacobiología de la UMSNH, ³Escuela Preparatoria Lázaro Cárdenas de la UMSNH, ⁴Instituto de Física y Matemáticas de la UMSNH

¹joaquin@fismat.umich.mx, ²gestevez.ge@gmail.com, ³merojuce@hotmail.com, ⁴gcoronap@gmail.com

RESUMEN

Una de las teorías alternativas a la relatividad general de Einstein es la propuesta por Rastall, ésta se caracteriza por ser no conservativa, cualidad presente en mecánica cuántica. Conocer las propiedades de estas teorías o poder comparar las consecuencias sobre un mismo fenómeno nos brinda información relevante para determinar cuál y hasta qué punto puede ser la más aceptable. Con el objetivo de abordar esta cuestión, en este trabajo presentamos una transformación que nos permite construir soluciones exactas en el marco de la teoría de Rastall a partir de soluciones en el marco de la teoría de la relatividad general de Einstein, para el caso en el que se tiene un fluido perfecto. Mostramos que la propiedad de isotropía, que tiene un fluido perfecto asociada a una solución en el marco de la teoría de Relatividad general de Einstein se preserva bajo la transformación propuesta para la teoría de Rastall. Sin embargo, no siempre se preservan todas las propiedades son preservadas; un caso particular es el de un fluido con densidad homogénea, para el cual la densidad no es homogénea en el marco de la teoría de Rastall.

INTRODUCCIÓN

Al ser la propuesta de Einstein una teoría, ésta requiere contrastarse con experimentos para verificar que las predicciones sean correctas. Algunos de estos experimentos son: la precesión del perihelio de mercurio, la desviación de la luz, la dilatación temporal, la existencia de ondas gravitatorias, por mencionar algunos [1, 2, 3]. Sin embargo, no es la única teoría que es consistente con las observaciones clásicas, la mayoría de los modelos teóricos de gravitación lo son. Sin embargo, no todas son capaces de tener consistencia con la cosmología, incluyendo entre éstas a la teoría de la relatividad general. Por ejemplo, la fase de la aceleración del universo no es explicable a través de la teoría de gravitación al igual que el problema de la materia oscura [4]. Existe una diversidad de teorías de gravitación que generalizan a la teoría de la relatividad general de Einstein; así que los parámetros o funciones adicionales que tienen cada teoría permite dar una explicación más satisfactoria de observaciones como la expansión del universo, por ejemplo. La primera modificación a las ecuaciones de Einstein fue planteada por el mismo Einstein cuando éste introdujo la constante cosmológica Λ , otras variantes son en donde se considera la constante cosmológica como una función de la traza del tensor de momento energía $\Lambda = \Lambda(T)$, función que es propuesta en la lagrangiana [5]. Esta teoría es más general que la gravedad $f(R)$ de Palatini $f(R)$ [6] ya que se reduce a la anterior cuando se anula la presión de la materia. Otra teoría que parte de un principio variacional, y que es más general que las antes mencionadas, es la conocida como gravedad $f(R, T)$ [7]. Sin embargo, no todas las teorías propuestas se obtienen partiendo de un principio variacional, un ejemplo de éstas es la propuesta de Rastall [8], para la que, como consecuencia de no proceder de un principio variacional, el tensor de momento energía no satisface la ecuación de conservación. Un estudio comparativo de la teoría de Rastall y la teoría de la relatividad general de Einstein fue presentado recientemente [9] en donde se propone que estas dos teorías son equivalentes, esto ha despertado el interés en discutir esta propuesta y su contraparte se ha argumentado, es decir, que las teorías no son equivalentes [10] sino que la teoría de Rastall es más general. Además, se propone que la teoría de gravedad de Rastall es una teoría "abierto" en comparación con la teoría general de la relatividad de Einstein. Por lo tanto, se espera que ésta pueda resolver los desafíos de la cosmología observacional y la gravedad cuántica. En este trabajo se presenta un mapeo de soluciones estáticas y esféricamente simétricas de la teoría de la relatividad general de Einstein y

soluciones estáticas y esféricamente simétricas de la teoría de Rastall [8]. En la siguiente sección se abordan las ecuaciones de campo que describen las teorías de Einstein y la de Rastall, estas serán de ayuda para mostrar cómo se pueden mapear las soluciones, posteriormente, se presenta un ejemplo de fluido con densidad homogénea.

Ecuaciones de rastall

Una notable diferencia de la teoría de la relatividad de Einstein y la teoría de Rastall es que la primera se puede obtener de un principio variacional y es una teoría conservativa, mientras que la segunda no se obtienen de una acción y es no conservativa. Desde el punto de vista de Rastall esta era una manera admisible para la gravitación, la ecuación que describe la relación entre la geometría y a los campos asociados a la materia es muy similar, la diferencia de esta ecuación [8]:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = kT_{ab} \tag{1}$$

y la de Einstein es la presencia del parámetro de Rastall λ , que para $\lambda = 1$ es la conocida ecuación de Einstein. Esta diferencia resulta ser substancial con respecto a la conservación del tensor de momento energía $T_{\mu\nu}$, ahora resulta que $(1 - \lambda)\nabla_\nu R = 2k\nabla_\mu T_{\mu\nu}$, desde luego, en el caso de un espacio plano no hay distinción de la ecuación de conservación de la teoría de Rastall y la teoría de Einstein, por lo que en regiones asintóticas donde la geometría es casi plana no permite diferenciar el comportamiento de la conservación o no conservación del tensor de momento energía. Aún no hay una evidencia que descarte la teoría propuesta por Rastall o que permita afirmar que esta es más conveniente que la teoría de la Relatividad General de Einstein, ambas tienen propiedades convenientes. Parte de nuestro propósito en este trabajo es mostrar que existe un mapeo de las soluciones de la teoría de la relatividad general de Einstein en soluciones de la teoría de Rastall, para el caso de un fluido perfecto:

$$T_{ab} = (c^2\rho + P)u_a u_b + P g_{ab} \tag{2}$$

donde P y ρ representan la presión y densidad, respectivamente, en un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico. En tal caso el elemento de línea puede ser expresado en la forma

$$ds^2 = -c^2 e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{3}$$

Donde (t, r, θ, ϕ) tienen valores en el rango estándar. De esta métrica y de las ecuaciones de Rastall (1), vemos que las componentes no cero son:

$$\begin{aligned} \rho(r)c^2 k &= \frac{(\lambda - 1)}{r} [2m(r) - r] \left(\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)^2 + \left[\frac{(\lambda - 1)}{r} \frac{d}{dr} m(r) + \frac{(\lambda - 1)(3m(r) - 2r)}{r^2} \right] \frac{d}{dr}\Phi(r) \\ &+ \frac{(\lambda - 1)(2m(r) - r)}{r} \frac{d^2}{dr^2}\Phi(r) \\ &+ \frac{2}{r^2} \left(\frac{d}{dr} m(r)\right) \lambda \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 P(r)k = & -\frac{(\lambda - 1)[2m(r) - r]}{r} \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 + \left[-\frac{(\lambda - 1)}{r} \frac{d}{dr} m(r) - \frac{3m(r)\lambda - 2\lambda r + m(r)}{r^2} \right] \frac{d}{dr} \Phi(r) \\
 & - \frac{(\lambda - 1)(2m(r) - r)}{r} \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) + \frac{2(\lambda - 1)}{r^2} \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) \\
 & - \frac{2m(r)}{r^3}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 P(r)k = & -\frac{[2m(r) - r]\lambda}{r} \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 + \left[-\frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} m(r) - \frac{3m(r)\lambda - 2\lambda r - 2m(r) + r}{r^2} \right] \frac{d}{dr} \Phi(r) \\
 & - \frac{(2m(r) - r)\lambda}{r} \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) - \frac{(2\lambda - 1)}{r^2} \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) \\
 & + \frac{m(r)}{r^3}
 \end{aligned} \tag{6}$$

La estructura de estas ecuaciones, a diferencia del caso de la teoría de la relatividad general de Einstein, contiene segundas derivadas en cada uno de los términos del potencial escalar Φ . Afortunadamente es posible encontrar un mapeo que permita construir soluciones del sistema (4) - (6) a partir de soluciones de la ecuación Einstein.

El mapeo de las soluciones

Una manera que permite visualizar las relaciones de las funciones ρ , P , m de soluciones del sistema de Rastall con el sistema de Einstein para un fluido perfecto, es realizar una comparación; para ello, daremos las ecuaciones que describen una solución interior en el marco de la relatividad general:

$$\begin{aligned}
 & kc^2 \rho_E(r) \\
 = & \frac{2}{r^2} \left(\frac{d}{dr} m(r) \right)
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$= -\frac{kP_E}{r^2} \left(\frac{d}{dr} \Phi \right) - \frac{2m(r)}{r^3} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 kP_E(r) = & -\frac{(2m(r) - r)}{r} \left(\frac{d}{dr} \Phi \right)^2 - \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} m(r) + \frac{m(r) - r}{r^2} \right] \frac{d}{dr} \Phi(r) - \frac{(2m(r) - r)}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi \right) \\
 & - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} m(r) \\
 & + \frac{m(r)}{r^3}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Donde P_E y ρ_E denotan la presión y densidad en el modelo de Einstein con fluido perfecto. Por medio de estas ecuaciones, podemos reescribir las ecuaciones (4) - (6) para el caso del formalismo de Rastall en la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{kc^2(3\lambda - 1)}{2\lambda - 1} \rho(r) + \frac{3}{2} \frac{k(\lambda - 1)}{2\lambda - 1} P(r) \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{(\lambda - 1)c^2 k}{2\lambda - 1} \rho(r) + \frac{1}{2} \frac{k(\lambda + 1)}{2\lambda - 1} P(r) \\ &= - \frac{2(2m(r) - r)}{r^2} \frac{d}{dr} \Phi(r) - \frac{2m(r)}{r^3} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{(\lambda - 1)c^2 k}{2\lambda - 1} \rho(r) + \frac{1}{2} \frac{k(\lambda + 1)}{2\lambda - 1} P(r) \\ &= - \frac{(2m(r) - r)}{r} \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 - \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} m(r) + \frac{m(r) - r}{r^2} \right] \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \\ & \quad - \frac{(2m(r) - r)}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi \right) - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} m(r) \\ & \quad + \frac{m(r)}{r^3} \end{aligned} \quad (12)$$

Comparando los conjuntos de ecuaciones (7)-(9) y (10)-(12) encontramos la relación lineal que existe entre las funciones de densidad y presión del sistema de Einstein (ρ_E y P_E) con las funciones de densidad y presión para el sistema Rastall (ρ y P). Para llegar a esta conclusión hemos supuesto que las funciones métricas para ambos sistemas son idénticas. Las relaciones entre las variables hidrostáticas están dadas por:

$$\begin{aligned} & kc^2 \rho_E(r) \\ &= \frac{1}{2} \frac{kc^2(3\lambda - 1)}{2\lambda - 1} \rho(r) + \frac{3}{2} \frac{k(\lambda - 1)}{2\lambda - 1} P(r) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & kP_E(r) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\lambda - 1)c^2 k \rho(r)}{2\lambda - 1} + \frac{1}{2} \frac{kP(r)(\lambda + 1)}{2\lambda - 1} \end{aligned} \quad (14)$$

Así, la densidad y la presión para el caso de Rastall quedan expresadas en función de ρ_E y P_E como:

$$\rho(r) = \left(\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \right) \rho_E - \frac{3}{2} \frac{(\lambda - 1)P_E(r)}{c^2} \quad (14)$$

$$P(r) = -\frac{1}{2} (\lambda - 1)c^2 \rho_E(r) + \frac{1}{2} (3\lambda - 1)P_E(r) \quad (15)$$

Esto muestra que cualquier solución del sistema de Einstein se mapea en una solución del sistema de Rastall. Además, una ecuación común de ambos sistemas es la que surge de imponer que el fluido es isotrópico

$$\begin{aligned} & r^2(2m(r) - r) \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right)^2 + \left[\left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 - r(3m(r) - r) \right] \left(\frac{d}{dr} \Phi(r) \right) \\ & \quad + r^2(2m(r) - r) \left(\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) \right) + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r - 3m(r) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora, podemos aplicar estas relaciones para el caso de un fluido homogéneo en el marco de la relatividad general de Einstein y demostrar que en el formalismo de Rastall la solución no corresponde a la de un fluido con densidad constante. En el sistema de Einstein se tiene que la densidad $\rho_E(r) = \rho_E$ es una constante, y la presión está dada por

$$P_E(r) = \frac{c^2 \rho_E (v - \mu \sqrt{3 - kc^2 \rho_E r^2})}{-3v + \mu \sqrt{3 - kc^2 \rho_E r^2}} \quad (17)$$

Sustituyendo (17) en (14) y (15) se obtiene la siguiente expresión para la densidad en el formalismo de Rastall

$$\rho(r) = \frac{1}{2}(\lambda + 1)\rho_E - \frac{3(\lambda - 1)\rho_E (v - \mu \sqrt{3 - kc^2 \rho_E r^2})}{-3v + \mu \sqrt{3 - kc^2 \rho_E r^2}}$$

Esto demuestra que en el modelo de Rastall la densidad no es una constante. Mientras que la presión adquiere la forma

$$P(r) = -\frac{1}{2}(\lambda + 1)c^2 \rho_E - \frac{1(3\lambda - 1)c^2 \rho_E (v - \mu \sqrt{3 - kc^2 \rho_E r^2})}{-3v + \mu \sqrt{3 - kc^2 \rho_E r^2}}$$

Las constantes de integración μ y v pueden obtenerse por medio de las condiciones de frontera; la presión debe anularse sobre la superficie de la estrella.

CONCLUSIONES

En este trabajo se calcularon las ecuaciones de campo de una región del espacio estático y esféricamente simétrico para un fluido perfecto en dos formalismos: Einstein y Rastall. A partir de estas ecuaciones hemos mostrado que existe un mapeo entre soluciones de ambos sistemas, los cuales tienen la misma forma funcional de la geometría, pero diferente comportamiento de las funciones hidrostáticas. Esto genera una serie de interrogantes, como: ¿Cuáles son las características comunes que tienen estas soluciones?, ¿Cuál es la razón de compacidad de un modelo comparado con el otro? ¿Qué ocurre con la generalización al caso de un modelo anisotrópico? Algunas de estas preguntas pueden ser resueltas en futuros trabajos.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por las facilidades brindadas para la realización del presente trabajo, así como a la CIC de la UMSNH por el apoyo brindado al proyecto de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alexandre Toubiana, Sylvain Marsat, Enrico Barausse, John G. Baker, Tests of general relativity with stellar-mass black hole binaries observed by LISA, Phys. Rev. D 101, 104038 (2020)
2. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, Tests of General Relativity with GW170817, Phys. Rev. Lett. 123, 011102 (2019)
3. Clifford M. Will, The confrontation between general relativity and experiment, Living Reviews in Relativity 17(1) · (2014).
4. T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, Modified Gravity and Cosmology, Phys. Rep. 513, 1 (2012).
5. Nikodem J. Poplawski, A Lagrangian description of interacting dark energy, gr-qc/0608031 (2006)
6. A. De Felice, S. Tsujikawa, f(R) theories, Living Rev. Rel. 13, 3 (2010), [arXiv:1002.4928 [gr-

qc]];

7. Tiberiu Harko, Francisco S. N. Lobo, Shin'ichi Nojiri, and Sergei D. Odintsov, $f(R, T)$ gravity, *Phys. Rev. D* 84, 024020 (2011)
8. P. Rastall, Generalization of the Einstein Theory, *Phys. Rev. D* 6, 3357 (1972).
9. M. Visser, Rastall gravity is equivalent to Einstein gravity, *Phys. Lett. B* 782, 83 (2018).
10. F. Darabi, H. Moradpour, I. Licata, Y. Heydarzade and C. Corda, Einstein and Rastall theories of gravitation in comparison, *Eur. Phys. J. C* 78, 25 (2018).

MOMENTOS CROMOMAGNÉTICOS DE LOS QUARKS EN EL MODELO ESTÁNDAR

Javier Montaña Domínguez¹, Brenda Quezadas Vivian², Fernando Iguazú Ramírez Zavaleta².

¹Conacyt-Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, ²Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

brendysqv19@gmail.com.

RESUMEN

Se presenta la contribución al momento dipolar cromomagnético anómalo (MDCM $\hat{\mu}_{qi}$) de los quarks en el ME, a nivel de 1 lazo, donde se toman en cuenta las contribuciones de los procesos electrodébiles y fuertes. Se demuestra que la contribución no-Abeliana del triple vértice del gluon contiene una divergencia infrarroja cuando se trabaja con el gluon en capa de masa $q^2 = 0$. Enfocamos nuestros resultados numéricos en el quark top por ser la partícula más pesada que predice el ME, y por lo tanto, la que nos da mayor aportación, ya que los quarks más ligeros estarían fuera de alcance de detección experimental. Evaluamos nuestros resultados en el escenario de capa de masa $q^2 = 0$, y fuera de capa de masa con los valores $q^2 = \pm m_Z^2$. Predecimos en nuestros cálculos un valor para el top de $\hat{\mu}_t(-m_Z^2) = -0.0224 - 0.000939i$, cuya parte real coincide con el reciente reporte experimental $\hat{\mu}_t^{EXP} = -0.024_{-0.009}^{+0.013}(stat)_{-0.011}^{+0.016}(syst)$, mientras que nuestra predicción para la parte imaginaria es debida a la parte electrodébil, que se da mediante la interacción del bosón W.

INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar (ME) de interacciones fundamentales es una teoría cuántica relativista que describe con gran precisión tres de las cuatro fuerzas fundamentales presentes en la naturaleza, que son, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza fuerte, y tiene su base matemática en el grupo de norma $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. El ME es una teoría bastante exitosa debido a que sus predicciones teóricas han concordado con las mediciones experimentales a una precisión sin precedentes, donde los resultados teóricos han sido escrutados mediante los colisionadores de partículas en las últimas décadas. Prueba de ello es el descubrimiento del Bosón de Higgs en el año 2012, el cual significó su máximo triunfo teórico experimental. Entre los ejemplos típicos de mediciones de precisión sobre el ME se encuentran las mediciones experimentales que se realizan a los momentos magnéticos anómalos de partículas elementales cargadas, como son el electrón y el muon [1,2], el cual ha sido otro de los grandes logros del ME, el cálculo del momento magnético anómalo del electrón, donde teoría y experimento han logrado concordar en 11 cifras significativas. Por tal motivo, se permite abrir una línea de investigación referente a las propiedades de los quarks, por lo que en este trabajo nos interesamos en calcular sus momentos cromomagnéticos, que se dan a través de la interacción entre los quarks y gluones en cromodinámica cuántica (QCD).

Se ha estudiado el MDCM en distintos modelos de extensión, tales como modelos de dos dobletes de Higgs, modelos extendidos con una dimensión extra, violación de sabor, MDCM del quark top inducido por un pseudoescalar masivo, etc., y en este trabajo nos enfocamos en estudiarlo en el ME, debido a que encontramos discrepancias con los valores reportados en la literatura [3], donde se argumenta que el MDCM del quark top es finito.

Nuestro interés en enfocar nuestros resultados numéricos en el quark top se debe a que actualmente estudiar las propiedades de este quark, es uno de los objetivos principales del LHC, otro de los motivos es que el quark top es la partícula más pesada que predice el ME, cuya masa es del orden de a escala de Fermi, debido a esto, es natural pensar que exista una conexión con efectos de nueva física a escala de TeVs, lo que la hace más sensible a efectos de nueva física y nos ofrecerá oportunidades para conocer más allá del ME.

Respecto al MDCM del quark top, la colaboración CMS ha reportado un reciente valor experimental para $\hat{\mu}_t$, dado por [4]:

$$\hat{\mu}_t^{EXP} = -0.024_{-0.009}^{+0.013}(stat)_{-0.011}^{+0.016}(syst), \quad (1)$$

y para el momento dipolar cromoelectrónico (MDCE) el límite:

$$|\widehat{d}_t^{Exp}| < 0.03,$$

(2)
al 95% N. C.

TEORÍA

El Lagrangiano efectivo que nos da la información del momento dipolar cromoelectromagnético está dado de la siguiente forma [5,6]:

$$L_{eff} = -\frac{1}{2} T_{AB}^a \overline{q}_A \sigma^{\mu\nu} (\mu_q + i d_q \gamma^5) q_B G_{\mu\nu}^a, \tag{3}$$

donde T_{AB}^a es el generador de color de SU (3), A y B son los índices de color, $\sigma^{\mu\nu}$ representa el momento angular de espín 1/2, μ_q es el factor de forma cromomagnético, d_q es el factor de forma cromoelectrónico y $G_{\mu\nu}^a$ es el campo de fuerza del gluon. El MDCM (μ_q) y el MDCE (d_q) se pueden definir sin dimensiones como [7,8]:

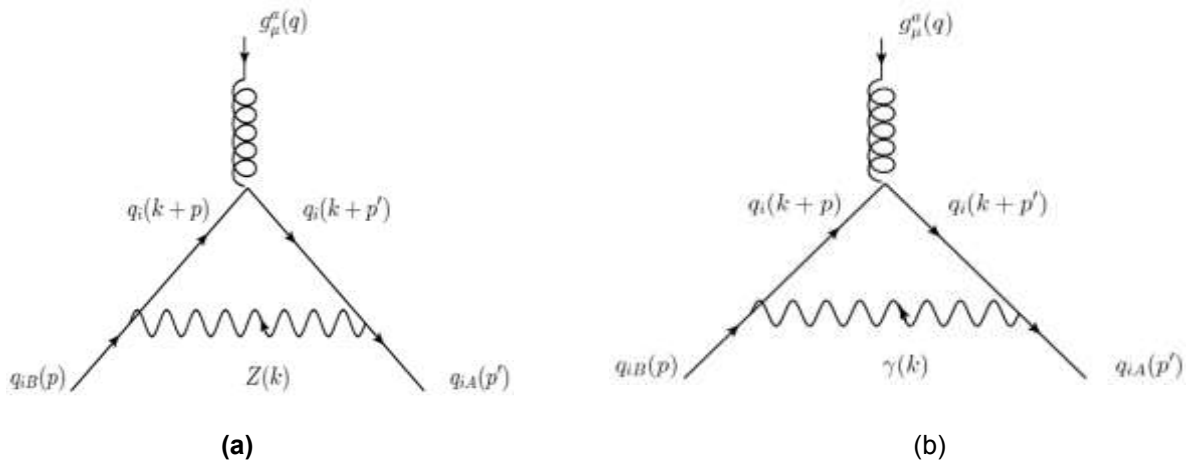
$$\widehat{\mu}_q \equiv \frac{m_q}{g_s} \mu_q, \quad \widehat{d}_q \equiv \frac{m_q}{g_s} d_q, \tag{4}$$

siendo m_q la masa del quark, y g_s la constante de acoplamiento de la interacción fuerte.

El MDCM que nos interesa estudiar en el ME, está formado por la suma de seis contribuciones:

$$\widehat{\mu}_{qi} = \widehat{\mu}_{qi}(\gamma) + \widehat{\mu}_{qi}(Z) + \widehat{\mu}_{qi}(W) + \widehat{\mu}_{qi}(H) + \widehat{\mu}_{qi}(g) + \widehat{\mu}_{qi}(3g), \tag{5}$$

cada una de las cuales corresponden (a) al fotón tipo Schwinger $\widehat{\mu}_{qi}(\gamma)$, (b) a la interacción con el bosón neutro Z $\widehat{\mu}_{qi}(Z)$, (c) al bosón cargado W $\widehat{\mu}_{qi}(W)$, (d) al bosón escalar Higgs $\widehat{\mu}_{qi}(H)$, (g) al gluon tipo Schwinger $\widehat{\mu}_{qi}$ y (f) al tri-vértice del gluon $\widehat{\mu}_{qi}(3g)$, y sus respectivos diagramas de Feynman se muestran en la Fig. 1.



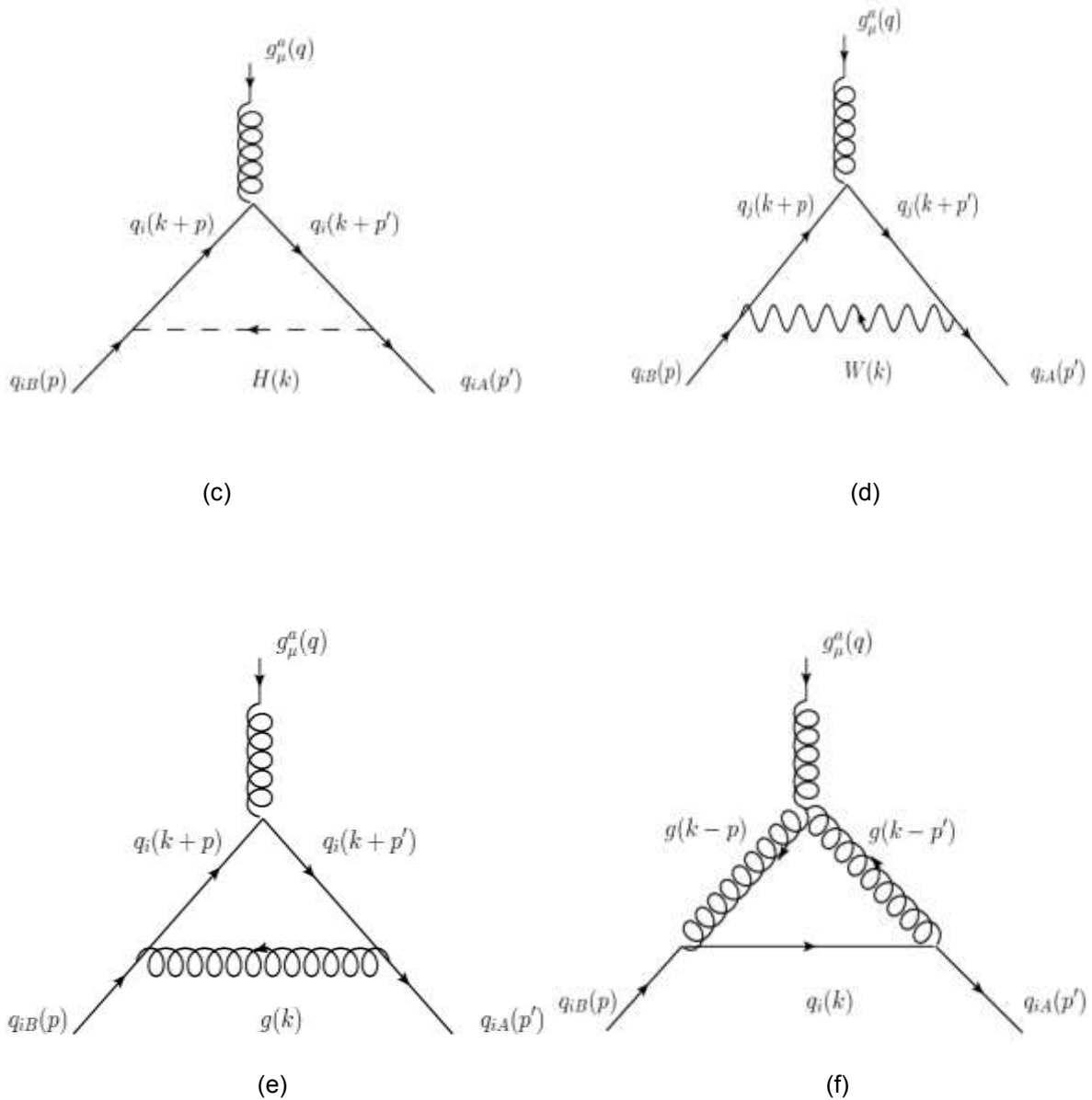


Figura 1. Contribución a nivel de un lazo al MDCM de los quarks en el ME. La contribución electrodébil es la suma de los diagramas (a) - (d), y la parte de QCD es la suma del diagrama de la contribución Abelian (e) y de la no-Abeliana (f).

Nos enfocaremos en analizar únicamente el diagrama de la Fig. 1 (f), ya que es el que se porta problemático, al presentar una divergencia de tipo infrarroja que se analizará matemáticamente mediante dos métodos distintos.

RESULTADOS

El factor de forma que nos da la información del MDCM de los quarks, recibe contribuciones de los procesos electrodébiles y fuertes. Las contribuciones fuertes están determinadas a partir de los diagramas de Feynman mostrados en la Fig. 1(e) y 1 (f). El diagrama en la Fig. 1(e), es la contribución Abelian, y es completamente similar a la corrección del vértice fermión-fotón en electrodinámica cuántica (QED), a nivel de un lazo, realizada en cálculos que presentamos en el artículo [9]. El diagrama en la Fig. 1 (f) es esencialmente no-Abeliano y aparece debido a la auto interacción del gluon. Se realizaron los cálculos de las contribuciones correspondientes, donde se obtuvo la siguiente amplitud tensorial:

$$M_{qi}^{\mu}(3g) = -\frac{3g_s^3}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{\gamma^{\alpha 1}(k+m_{qi})\gamma^{\alpha 4}g^{\alpha 1\alpha 2}}{(k^2-m_{qi}^2)(k-p')^2(k-p)^2} [(k-2p+p')^{\alpha 2}g^{\mu\alpha 3} + (-2k+p+p')^{\mu}g^{\alpha 3\alpha 2} + (k+p-2p')^{\alpha 3}g^{\alpha 2\mu}]g^{\alpha 3\alpha 4}u(p). \quad (6)$$

La integral tensorial de la Ecu. (6) se resolvió usando el método de la parametrización de Feynman [10], y usando las condiciones cinemáticas y de transversalidad necesarias.

Se realizó primero la correspondiente contracción de índices en el numerador de la Ecu. (6), se aplicaron las ecuaciones de Dirac, se utilizó el corrimiento encontrado en la parametrización de Feynman, se simplificaron los resultados y finalmente se implementó la identidad de Gordon, de donde obtuvimos la información para el MDCM de los quarks, que está dada mediante:

$$\hat{\mu}_{qi}(3g) = \frac{m_{qi}}{g_s} \frac{6g_s^3}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{m_{qi}(x+y-1)(x+y)}{m_{qi}^2(x+y-1)^2 - q^2xy}. \quad (7)$$

Después de realizar algunas simplificaciones a la Ecu. (7), llegamos a:

$$\hat{\mu}_{qi}(3g) = m_{qi}^2 \frac{3}{4\pi} \alpha_s \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{z(z-1)}{m_{qi}^2z^2 + q^2x(x+z-1)}. \quad (8)$$

Dicho integrando es inestable, característica ya identificada en la literatura [11], ya que si resolvemos la integral primeramente para el caso del gluon en capa de masa, es decir, en $q^2 = 0$, la integral de la Ecu. (8) se reduce a:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{qi}(3g) &= m_{qi}^2 \frac{3}{4\pi} \alpha_s \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{(z-1)^2}{m_{qi}^2z} = \frac{3}{4\pi} \alpha_s \int_0^1 dz \frac{(1-z)(z-1)}{z} \\ &= \frac{3\alpha_s}{4\pi} \left[-\frac{z^2}{2} + 2z - \log(z) \right] \Big|_0^1, \end{aligned} \quad (9)$$

donde podemos observar que el resultado de la integral en la Ecu. (9) no converge en $\{0\}$, por lo que tenemos una divergencia para cualquier quark cuando se toma $q^2 = 0$, obteniendo concordancia con los resultados mostrados en la Ref. [11], donde señalan esta divergencia, sin embargo, nosotros fuimos un paso más allá y analizamos la divergencia por dos métodos distintos. Esta definición es entonces problemática, ya que requiere el uso de la teoría de perturbaciones a energía cero, donde esta no es válida para interacciones fuertes. Un problema relacionado es que los valores medidos de las constantes físicas y las masas relacionadas con las interacciones fuertes se conocen a altas energías, no en $q^2 = 0$. Sin embargo, podemos usar las mismas técnicas para calcular el factor de forma anómalo cromomagnético y, por lo tanto, el MDCM en una escala de energía más alta [11]. Calculamos entonces el $\hat{\mu}_{qi}$ en una energía correspondiente a la masa del bosón Z, es decir, en un

momento de transición del gluon en un momento espacialoide $q^2 = -m_Z^2$ y temporaloide $q^2 = +m_Z^2$. Los valores numéricos obtenidos en estos momentos de transición para la contribución del tri-vértice del gluon al MDCM de los quarks resultaron ser los siguientes:

$\hat{\mu}_q(3g)$	q^2		
	$-m_Z^2$	0	$+m_Z^2$
$\hat{\mu}_u(3g)$	-3.16×10^{-10}	Divergencia IR	$3.16 \times 10^{-10} - 5.16 \times 10^{-11}i$
$\hat{\mu}_d(3g)$	-1.33×10^{-9}	Divergencia IR	$1.33 \times 10^{-9} - 2.35 \times 10^{-10}i$
$\hat{\mu}_s(3g)$	-3.59×10^{-7}	Divergencia IR	$3.59 \times 10^{-7} - 9.61 \times 10^{-8}i$
$\hat{\mu}_c(3g)$	-3.62×10^{-5}	Divergencia IR	$3.60 \times 10^{-5} - 1.72 \times 10^{-5}i$
$\hat{\mu}_b(3g)$	-2.54×10^{-4}	Divergencia IR	$2.43 \times 10^{-4} - 1.78 \times 10^{-4}i$
$\hat{\mu}_t(3g)$	-2.13×10^{-2}	Divergencia IR	$-1.21 \times 10^{-2} - 2.55 \times 10^{-2}i$

Tabla 1: $\hat{\mu}_q(3g)$ para todos los quarks en el momento transferido del gluon $q^2 = -m_Z^2, 0, +m_Z^2$.

Los mismos resultados se obtuvieron con un segundo método, el método de descomposición tensorial de las funciones escalares de Passarino-Veltman (PV), donde se corrobora y se muestra más claramente la divergencia infrarroja encontrada, cuando se trabaja con el gluon en capa de masa.

Mediante este método de parametrización de Feynman, se obtuvieron las contribuciones totales al MDCM del quark top, de los diagramas mostrados en la Fig. 1, dichos valores numéricos se muestran a continuación:

$\hat{\mu}_t$	q^2		
	$-m_Z^2$	0	$+m_Z^2$
γ	2.64×10^{-4}	2.76×10^{-4}	2.90×10^{-4}
Z	-1.80×10^{-3}	-1.86×10^{-3}	-1.92×10^{-3}
H	1.89×10^{-3}	1.94×10^{-3}	2.01×10^{-3}
W	$-3.43 \times 10^{-5} - 9.39 \times 10^{-4}i$	$-2.81 \times 10^{-6} - 1.23 \times 10^{-3}i$	$1.44 \times 10^{-4} - 1.18 \times 10^{-3}i$
g	-1.50×10^{-3}	-1.57×10^{-3}	-1.64×10^{-3}
3g	-2.13×10^{-2}	Divergencia IR	$-1.22 \times 10^{-2} - 2.56 \times 10^{-2}i$
Total	$-2.24 \times 10^{-2} - 9.39 \times 10^{-4}i$	Divergencia IR	$-1.34 \times 10^{-2} - 2.68 \times 10^{-2}i$

Tabla 2: MDCM del quark top en el momento transferido del gluon $q^2 = -m_Z^2, 0, +m_Z^2$.

Donde podemos observar que numéricamente la contribución del diagrama del tri-vértice del gluon, presenta la divergencia infrarroja cuando trabajamos con el gluon en capa de masa.

Podemos observar también en la Fig. 2, el comportamiento y valor total de $\hat{\mu}_t$, en los dos escenarios, $-m_Z^2$ y m_Z^2 .

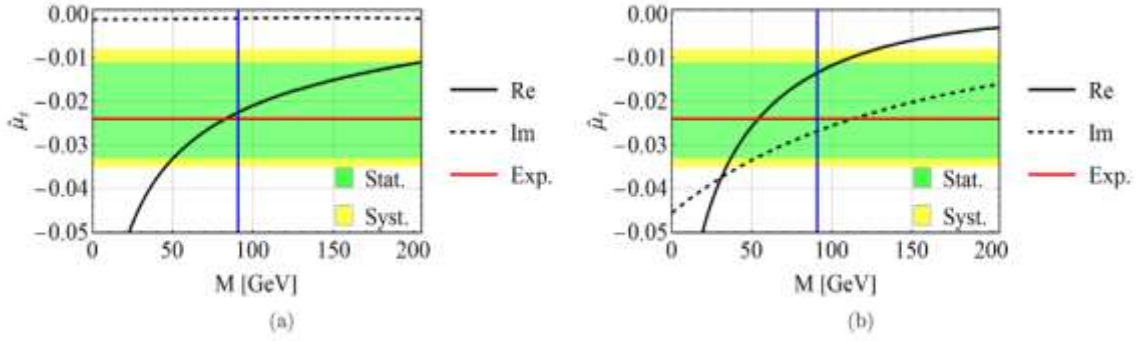


Figura 2. MDCM del quark top como función del momento transferido del gluon $q^2 = \pm M^2$, $M = [0, 200] \text{ GeV}$, la línea azul indica $M = m_Z$, en (a) se aprecia el comportamiento correspondiente al momento espacialoide $q^2 = -m_Z^2$ y en (b) el temporaloide $q^2 = +m_Z^2$. Se muestra también la comparación respecto del valor experimental $\hat{\mu}_t^{EXP} = -0.024_{-0.009}^{+0.013}(\text{stat})_{-0.011}^{+0.016}(\text{syst})$.

Trabajando ahora el mismo problema de $\hat{\mu}_q(3g)$, pero ahora usando el método de reducción tensorial de las funciones escalares de PV obtenemos fuera de capa de masa $q^2 \neq 0$ el siguiente resultado:

$$\hat{\mu}_q(3g) = \frac{3\alpha_s}{4\pi} \frac{m_q^4}{(q^2 - 4m_q^2)^2} \left[8 - \frac{2q^2}{m_q^2} + \left(8 + \frac{q^2}{m_q^2} \right) (B_{01}^{3g} - B_{02}^{3g}) - 6q^2 C_0^{3g} \right] \quad (10)$$

Donde $B_{01}^{3g} \equiv B_0(m_q^2, 0, m_q^2)$, $B_{02}^{3g} \equiv B_0(q^2, 0, 0)$, y $C_0^{3g} \equiv C_0(m_q^2, m_q^2, q^2, 0, m_q^2, 0)$. Dichos resultados los obtuvimos ayudados del software Mathematica, FeynCalc y Package-X. El término

$$B_{01}^{3g} - B_{02}^{3g} = -\log\left(-\frac{m_q^2}{q^2}\right), \quad (11)$$

es responsable del mal comportamiento del gluon en capa de masa, específicamente debido a B_{02}^{3g} . Este logaritmo problemático también se indicó en la Ref. [12], pero no se mostró la función escalar correspondiente que lo genera, mientras que en la Ref. [11] no es proporcionado analíticamente, pero este problema se identificó numéricamente en sus gráficas.

En el escenario en capa de masa $q^2 = 0$, regularizamos dimensionalmente la función de PV $B_{02}^{3g} \equiv B_0(q^2, 0, 0)$, mediante la función escalar de dos puntos [13] para revelar el polo divergente IR $1/\epsilon_{IR}$, inducido cuando $q^2 \rightarrow 0$, lo que nos lleva al resultado:

$$B_{02}^{3g} \equiv B_0(0, 0, 0) = \Delta_{UV} - \Delta_{IR} = \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}}, \quad (12)$$

además, el último término de la Ecu. (10) desaparece, ya que

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} q^2 C_0^{3g} = 0. \quad (13)$$

Por lo tanto, el MDCM que corresponde al diagrama del tri-vértice del gluon, cuando el gluon está en capa de masa, toma la forma final

$$\hat{\mu}_q(\mathbf{3}g) = \frac{3\alpha_s}{8\pi} \left(\Delta_{IR} + \log \frac{\mu^2}{m_q^2} + 3 \right), \quad (14)$$

donde Δ_{IR} contiene el polo $1/\epsilon_{IR}$, de naturaleza infrarroja.

Hemos comprobado entonces también por este método de descomposición tensorial de PV, la divergencia de $\hat{\mu}_q(\mathbf{3}g)$, cuando trabajamos con el gluon en capa de masa $q^2 = 0$.

CONCLUSIONES

Se revisó el MDCM de los quarks en el ME, por dos métodos distintos, el método de parametrización de Feynman y el método de regularización dimensional de las funciones escalares de Passarino-Veltman, y se mostró matemáticamente por los dos métodos que el diagrama correspondiente al tri-vértice del gluon contiene una divergencia infrarroja cuando se trabaja con el gluon en capa de masa $q^2 = 0$. Por lo que, el MDCM debe ser evaluado fuera de capa de masa, específicamente evaluamos nuestros resultados numéricos en el momento de transferencia del gluon espacialoide $q^2 = -m_Z^2$ y temporaloide $q^2 = +m_Z^2$. La predicción más importante de nuestro trabajo es la evaluación del MDCM del quark top en el valor espacialoide $\hat{\mu}_t(-m_Z^2) = -0.0224 - 0.000939i$, cuya parte real coincide con el reciente reporte experimental $\hat{\mu}_t^{EXP} = -0.024_{-0.009}^{+0.013}(stat)_{-0.011}^{+0.016}(syst)$ [4], mientras que nuestra predicción para la parte imaginaria es debida a la parte electrodébil que se da mediante la interacción del bosón W.

Por otro lado, el quark top es la partícula más pesada que predice el ME, y es más sensible a efectos de nueva física, lo que nos ofrecerá oportunidades de información sobre física más allá del ME.

BIBLIOGRAFÍA

1. B. Odom, D. Hanneke, B D'urso and Gabrielse, "New Measurement of the Electron Magnetic Moment Using a One-Electron Quantum Cyclotron", Phys.Rev Lett. 97,030801 (2006).
2. G.W. Bennett et al., "Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL", Phys. Rev. D73, 072003 (2006).
3. R. Martínez, M. A. Pérez and N. Poveda, "Chromomagnetic Dipole Moment of the Top Quark Revisited," Eur. Phys. J.C 53, 221 (2008).
4. A. M. Sirunyan et al. [CMS Collaboration], "Measurement of the top quark forward-backward production asymmetry and the anomalous chromoelectric and chromomagnetic moments in pp collisions at $\sqrt{s} = 13 TeV$," arXiv: 1912.09540 [hep-ex].
5. V. Khachatryan et al. [CMS Collaboration], "Measurements of t t-bar spin correlations and top quark polarization using dilepton final states in pp collisions at $\sqrt{s} = 8 TeV$ ", Phys. Rev. D 93, no. 5, 052007 (2016).
6. W. Bernreuther and Z. G. Si, "Top quark spin correlations and polarization at the LHC: standard model predictions and effects of anomalous top chromo moments", Phys. Lett. B 725, 115 (2013). Erratum: [Phys. Lett. B 744, 413 (2015)].
7. V. Khachatryan et al. [CMS Collaboration], "Measurements of t t-bar spin correlations and top quark polarization using dilepton final states in pp collisions at $\sqrt{s} = 8 TeV$," Phys. Rev. D 93, no. 5, 052007 (2016).
8. M. Tanabashi et al. [Particle Data Group], "Review of Particle Physics", Phys. Rev. D 98, no. 3, 030001 (2018).
9. J.I. Aranda, D. Espinosa-Gómez, J. Montaño, B. Quezadas-Vivian, F. Ramírez-Zavaleta, E.S. Tututi, "Flavor violation in chromo- and electromagnetic dipole moments induced by Z' gauge bosons and a brief revisit of the Standard Model". Phys.Rev. D98 (2018) no.11, 116003.
10. Michael E. Peskin and D. V. Schroeder, "An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley P.C". (1996).
11. Ishita Dutta Choudhury and Amitabha Lahiri, "Anomalous chromomagnetic moment of quarks", Modern Physics Letters A, Vol. 30, No. 23(2015)1550113.

12. R. Bermudez, L. Albino, L. X. Gutiérrez-Guerrero, M. E. Tejeda-Yeomans and A. Bashir, "Quark-gluon Vertex: A Perturbation Theory Primer and Beyond," *Phys. Rev. D* 95, no. 3, 034041 (2017).
13. V. Ilisie, "Concepts in Quantum Field Theory," Springer International Publishing, Switzerland, 2016.

ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN DE UN ESCALAR EXÓTICO CON UN FOTÓN Y UN BOSÓN Z

Jorge Isidro Aranda Sánchez, Eligio Cruz Albaro, Javier Montaña Domínguez, Fernando Iguazú
Ramírez Zavaleta

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de
Hidalgo.

elicruzalbaro88@gmail.com

RESUMEN

Con el descubrimiento del bosón de Higgs en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) se abren nuevas líneas de investigación y se da inicio a una nueva etapa de exploración del universo. Sería el comienzo para determinar si el bosón descubierto corresponde al Higgs predicho por el modelo estándar (ME) o es un Higgs de una teoría más general; se buscará también establecer si hay más partículas de las ya descubiertas o sólo existen aquéllas que ya se han identificado en el laboratorio. Para su estudio se han propuesto distintas extensiones del ME, una de ellas se le conoce como el modelo Bestest Little Higgs (BLH). Este modelo resulta interesante porque genera nuevas partículas con masas del orden de los TeVs y proporciona una posible explicación al problema de la jerarquía de masa del bosón de Higgs, que es otra de las cuestiones fundamentales que aún deja sin respuesta el modelo estándar. De esta manera, la propuesta en este trabajo consiste en estudiar las propiedades de un escalar exótico masivo (denotado como σ) en el marco del BLH. En particular, se analiza la interacción del nuevo escalar con un fotón y un bosón Z que se induce a nivel de un lazo a través de contribuciones virtuales del quark top del ME.

Para el proceso mencionado, se determinaron la fracción de decaimiento y su correspondiente sección eficaz de producción vía fusión de gluones. Estos parámetros están en función de la escala de energía a la cuál surge el modelo BLH y proponemos un escenario de energías comprendido entre 700 GeV y 3000 GeV para su estudio fenomenológico. Así, nuestras predicciones fueron: $\text{Br}(\sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-8}, 10^{-9}]$ y $\sigma(gg \rightarrow \sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-6}, 10^{-9}]$ fb para la escala de energía establecido. En la región de análisis encontramos que el parámetro $\text{Br}(\sigma \rightarrow \gamma Z)$ está bastante suprimida ya que nos genera una contribución muy pequeña para la sección eficaz asociada. Tomando en cuenta que la luminosidad integrada esperada en el LHC se ha proyectado a $3\,000 \text{ fb}^{-1}$ [1, 2], en este escenario sería muy difícil observar algún evento relacionado al proceso $\sigma \rightarrow \gamma Z$.

INTRODUCCIÓN

Actualmente el ME es un modelo bastante exitoso debido a que describe de manera satisfactoria los componentes de la materia y sus interacciones, sin embargo, no es la teoría final ya que con el descubrimiento del bosón de Higgs se han ido generando nuevas teorías conocidas como extensiones del ME, estas nuevas teorías buscan determinar si el Higgs descubierto corresponde al del ME o es de una teoría más general, además pretenden explicar algunos de los misterios que aún prevalecen en nuestro universo, como la materia y energía oscura o el problema de la jerarquía de masa, sólo por mencionar algunos ejemplos. En particular, el BLH es un modelo que proporciona una solución elegante al problema de la jerarquía introduciendo nuevas partículas a la escala de tera-electronvoltios para cancelar las divergencias cuadráticas a la masa del bosón de Higgs. Otra característica del modelo mencionado es que no está limitado por datos de precisión electrodébil como lo están los modelos Little Higgs (LH) [3, 4, 5], esto se debe a la presencia de una simetría de custodia y a su particular manera de incorporar dos simetrías distintas que se rompen en subgrupos diagonales a diferentes escalas, permitiendo así que los nuevos bosones y fermiones obtengan sus masas a distintas escalas. Estas peculiaridades establecen la viabilidad del modelo.

En el sector fermiónico del BLH se generan cuatro compañeros del quark top ($T, T_5, T_6, T^{2/3}$) de carga $2/3$, un compañero del quark bottom (B) de carga $-1/3$ y un quark exótico ($T^{5/3}$) de carga $5/3$. En cuanto al sector de norma, los nuevos bosones que surgen son: Z' y W'^{\pm} . Mientras que en el sector escalar, se generan cinco estado físicos del Higgs: tres campos neutros (h_0, H_0 y A_0) y dos campos cargados (H^{\pm}). En este sector aparece también un escalar pesado (σ) que será crucial para generar un acoplamiento cuártico de Higgs exitoso pero también será el objeto de nuestro estudio.

TEORÍA

El BLH está basado en dos modelos sigma no lineales independientes (Σ y Δ): el valor de expectación del vacío (vev) del campo Σ , $\langle \Sigma \rangle = \mathbf{1}_6$, rompe la primera simetría global $\mathbf{SO}(6)_A \times \mathbf{SO}(6)_B$ al grupo diagonal $\mathbf{SO}(6)_V$ a la escala de energía $f \sim 1$ TeV, y un campo Δ con su vev $\langle \Delta \rangle = \mathbf{1}_6$, rompe la segunda simetría global $\mathbf{SU}(2)_C \times \mathbf{SU}(2)_D$ al subgrupo diagonal $\mathbf{SU}(2)$ a la escala $F \sim 3$ TeV. Después del rompimiento de la simetría $\mathbf{SO}(6)_A \times \mathbf{SO}(6)_B$ se generan nuevas partículas (15 pseudobosones de Nambu-Goldstone) que están parametrizados como ϕ^a y η^a , $a = 1, 2, 3$, dos vectores de Higgs h_1 y h_2 de $\mathbf{SO}(4)$ y un escalar real σ . La incorporación de los campos mencionados al campo Σ se estructura de la siguiente manera:

$$\Sigma = e^{\frac{i\sigma}{f}} e^{\frac{2i\eta_h}{f}} e^{\frac{i\pi}{f}}, \quad (1)$$

siendo Π y Π_h matrices complejas y antisimétricas dados por

$$\Pi = \begin{pmatrix} i(\phi^a T_L^a + \eta^a T_R^a)_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{i\sigma}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{0} & -\frac{i\sigma}{\sqrt{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Pi_h = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & h_1 & h_2 \\ -h_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -h_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

los $T_{L,R}^a$ representan a los generadores del grupo $\mathbf{SO}(6)$ [6]. Con respecto a la segunda simetría global, los bosones de Nambu-Goldstone están parametrizados en Δ como

$$\Delta = F e^{2i\Pi_d}, \quad \Pi_d = \frac{1}{2} (\chi_a \tau^a), \quad (3)$$

donde χ_a representan los bosones de Nambu-Goldstone y τ^a las matrices de Pauli generadores de la simetría $\mathbf{SU}(2)$.

En el sector escalar del modelo BLH, el potencial de Higgs se construye a partir de los campos de Higgs h_1 y h_2 [6, 7, 8],

$$V = \frac{1}{2} m_1^2 h_1^T h_1 + \frac{1}{2} m_2^2 h_2^T h_2 - B_\mu h_1^T h_2 + \frac{\lambda_0}{2} (h_1^T h_2)^2. \quad (4)$$

A través de este potencial se genera el rompimiento espontáneo de la simetría que se logra cuando V alcanza su estado de mínima energía, a lo que se traduce en transformar las primeras componentes de h_1 y h_2 por sus respectivos vevs, v_1 y v_2 relacionados entre sí por el siguiente ángulo de mezcla

$$\tan \beta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5)$$

Estos vevs se relacionan con el vev del ME, como $v^2 = v_1^2 + v_2^2$. En este sector, a partir de la diagonalización de la matriz de masa se generan tres campos escalares físicos neutros (h_0, H_0, A_0) y dos campos escalares físicos cargados (H^\pm). En el potencial de Higgs los cuatro parámetros m_1, m_2, B_μ y λ_0 [8], se expresan en términos de las masas de los bosones h_0 y A_0 que son parámetros bastante accesibles fenomenológicamente,

$$\lambda_0 = \frac{m_{h_0}^2}{v^2} \left(\frac{m_{h_0}^2 - m_{A_0}^2}{m_{h_0}^2 - m_{A_0}^2 \sin^2 2\beta} \right), \quad (6)$$

$$B_\mu = \frac{1}{2}(m_{A0}^2 + \lambda_0 v^2) \sin 2\beta, \quad (7)$$

$$m_{H^\pm}^2 = m_{A0}^2 = m_1 + m_2, \quad (8)$$

$$m_{H0}^2 = \frac{B_\mu}{\sin 2\beta} + \sqrt{\left(\frac{B_\mu}{\sin 2\beta}\right)^2 - 2\lambda_0 B_\mu v^2 \sin 2\beta + (\lambda_0 v^2 \sin 2\beta)^2}, \quad (9)$$

$$m_\sigma^2 = 2\lambda_0 f^2 K_\sigma. \quad (10)$$

La masa del escalar σ está en términos de λ_0 y del parámetro libre K_σ . Por las condiciones de perturbatividad se impone que $\lambda_0 < 4\pi$ [7], en consecuencia

$$1 < \tan \beta < \frac{2 + 2\sqrt{\left(1 - \frac{m_{h0}^2}{m_{A0}^2}\right)\left(1 - \frac{m_{h0}^2}{4\pi v^2}\right)}}{\frac{m_{h0}^2}{m_{A0}^2}\left(1 + \frac{m_{A0}^2 - m_{h0}^2}{4\pi v^2}\right)} - 1 \quad y \quad 1 < K_\sigma < \frac{16\pi^2}{\lambda_0(8\pi - \lambda_0)}. \quad (11)$$

Para llevar a cabo el cálculo de la amplitud a nivel de un lazo del proceso $\sigma \rightarrow \gamma Z$ se requerirá la siguiente regla de Feynman mostrada en la Tabla 1. En tabla, y_t representa el acoplamiento de Yukawa del quark top. Para el proceso de nuestro interés, en la fluctuación cuántica están involucrados el quark top del ME y sus compañeros T, T_5, T_6 que son partículas propias del modelo BLH. Sin embargo, en este trabajo sólo se considerará la contribución del quark top, pues resulta ser la dominante (ver Figura 1).

Interacciones	Reglas de Feynman
$\sigma \bar{t} t$	$\frac{-v y_t \cos \beta}{\sqrt{2} f}$

Tabla 1. Vértice en el modelo BLH.

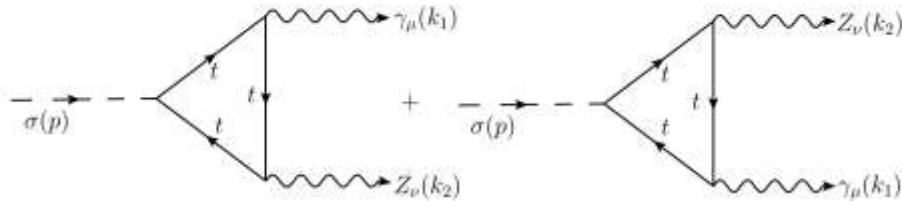


Figura 1. Diagramas de Feynman que contribuyen al decaimiento $\sigma \rightarrow \gamma Z$.

Para el decaimiento $\sigma \rightarrow \gamma Z$ tenemos que su amplitud asociada es

$$\mathcal{M}(\sigma \rightarrow \gamma Z) = A^{\gamma Z} \left((m_Z^2 - m_\sigma^2) g^{\mu\nu} + 2 k_1^\nu k_2^\mu \right) \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2), \quad (12)$$

con el factor de forma

$$A^{\gamma Z} = \frac{1}{72\sqrt{2}\pi^2 \cos \theta_W (m_Z^2 - m_\sigma^2)^2 f} (i \cos \beta g^2 m_t \sin \theta_W (8 \sin^2 \theta_W - 3) v y_t \\ \times ((m_Z^2 - m_\sigma^2) ((m_Z^2 + 4m_t^2 - m_\sigma^2) C_0(1) + 2) + 2m_Z^2 (B_0(2) \\ - B_0(1))) , \quad (13)$$

siendo $C_0(1) = C_0(m_Z^2, m_\sigma^2, 0, m_t^2, m_t^2, m_t^2)$, $B_0(1) = B_0(m_\sigma^2, m_t^2, m_t^2)$ y $B_0(2) = B_0(m_Z^2, m_t^2, m_t^2)$ las funciones escalares de Passarino-Veltman. Para este proceso, la anchura de decaimiento que se obtiene es lo siguiente

$$\Gamma(\sigma \rightarrow \gamma Z) = \frac{1}{24} \frac{(m_\sigma^2 - m_Z^2)^3}{\pi m_\sigma^3} |A^{\gamma Z}|^2. \quad (14)$$

Presentamos también un estudio de la sección eficaz de producción, vía fusión de gluones del escalar σ decayendo a un fotón y un bosón Z. Para este propósito, hacemos uso de las fracciones de decaimiento $Br(\sigma \rightarrow gg)$ y $Br(\sigma \rightarrow \gamma Z)$. De manera que al considerar el propagador de Breit-Wigner, la sección eficaz en la resonancia tiene la siguiente forma

$$\sigma(gg \rightarrow \sigma \rightarrow \gamma Z) = \frac{\pi Br(\sigma \rightarrow gg) Br(\sigma \rightarrow \gamma Z)}{12 m_\sigma^2}. \quad (15)$$

RESULTADOS

En el modelo BLH se establecen dos escenarios de estudio:

1. el escenario general, asume que h_0 es ligero y representa el bosón de Higgs del ME mientras que las masas de los otros bosones de Higgs H_0, A_0 pueden variar, y
2. el escenario cuasi-degenerado, con una ligera degeneración entre la masas de h_0 y A_0 .

En este trabajo hemos elegido como escenario de estudio el caso general, debido a que está en mejor acuerdo con los resultados del LHC [7]. Existe además ciertas limitaciones experimentales y teóricas que se demandan sobre el modelo BLH. La primera, $m_{A_0} > 350$ GeV para $\tan \beta < 5$ de acuerdo a las restricciones más recientes proporcionadas por las colaboraciones ATLAS y CMS [9,10]. La segunda, la escala de energía f tomará valores en el intervalo $700 < f < 3000$ GeV [7,11] como resultado de escanear todos los valores posibles de y_t obedeciendo la condición de perturbatividad, $y_t < 4\pi$ [12].

A continuación, estableceremos dos escenarios de estudio para la masa del bosón A_0 esto debido a su estrecha relación con la masa del escalar σ de nuestro interés: 1) $m_{A_0} = 500$ GeV, y 2) $m_{A_0} = 1000$ GeV. Tomando en cuenta la relación de m_{A_0} con el parámetro β en la ecuación (10) derivamos el siguiente espacio de parámetros para el escenario 1, $1 < \tan \beta < 6.83$, y para el escenario 2, $1 < \tan \beta < 10.45$. Sin embargo, debemos restringir el parámetro $\tan \beta$ a los valores derivados del análisis experimental en el BLH [9,10], es decir, $\tan \beta < 5$. De esta manera, elegimos trabajar con el valor fijo de $\tan \beta = 3$. Respecto al parámetro K_σ , a través de la ecuación (11), para los dos escenarios obtenemos 1) $1 < K_\sigma < 7.95$ y 2) $1 < K_\sigma < 8.74$; por lo tanto, para nuestras evaluaciones numéricas elegimos valores fijos de $K_\sigma = 2, 6$ que satisfacen ambos escenarios. Resumimos estos dos escenarios en la Tabla 2.

Escenario 1		Escenario 2	
$m_{A_0} = 500$ GeV		$m_{A_0} = 1000$ GeV	
$K_\sigma = 2$	$K_\sigma = 6$	$K_\sigma = 2$	$K_\sigma = 6$

Tabla 2. Escenarios de estudio para la masa del escalar m_{A_0} , con $\tan \beta = 3$.

Para los dos escenarios de estudio establecidos, determinamos las fracciones de decaimiento (ver Figura 2) correspondiente al proceso de nuestro interés, para su cálculo se ha considerado la

anchura total Γ_σ como la suma de las anchuras parciales de los siguientes modos de decaimiento: $\bar{t}t, \gamma\gamma, \gamma Z, gg$. Enumeramos algunos valores específicos de $Br(\sigma \rightarrow \gamma Z)$ en la Tabla 3 para el escenario 1 y escenario 2, respectivamente.

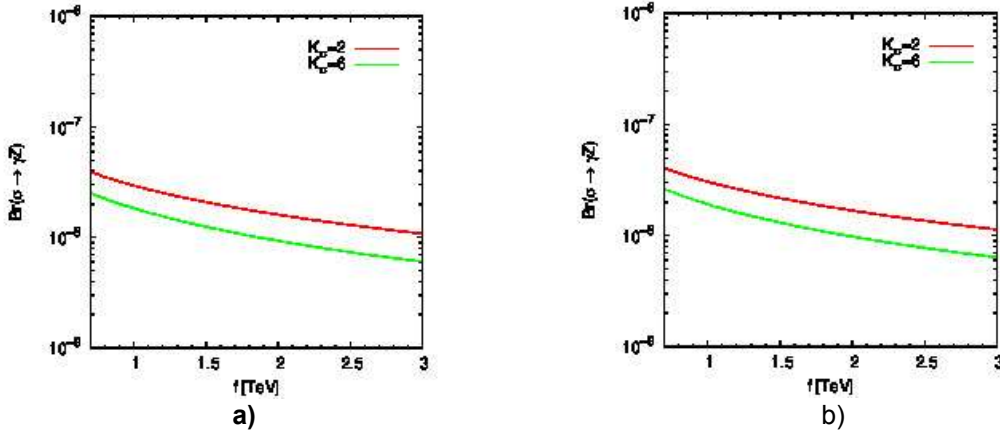


Figura 2. Las fracciones de decaimiento para $\sigma \rightarrow \gamma Z$: (a) escenario 1 y (b) escenario 2.

f [TeV]	$Br(\sigma \rightarrow \gamma Z)$			
	Escenario 1		Escenario 2	
	$K_\sigma = 2$	$K_\sigma = 6$	$K_\sigma = 2$	$K_\sigma = 6$
0.7	3.90×10^{-8}	2.50×10^{-8}	4.04×10^{-8}	2.61×10^{-8}
1.0	2.93×10^{-8}	1.83×10^{-8}	3.05×10^{-8}	1.91×10^{-8}
2.0	1.60×10^{-8}	9.31×10^{-9}	1.68×10^{-8}	9.79×10^{-9}
3.0	1.08×10^{-8}	6.02×10^{-9}	1.13×10^{-8}	6.35×10^{-9}

Tabla 3. Algunos valores de $Br(\sigma \rightarrow \gamma Z)$ en los dos escenarios de estudio.

En la Figura 3 mostramos también el comportamiento de la sección eficaz de producción del escalar σ vía fusión de gluones como función de la escala de energía $f = [0.7, 3]$ TeV. De acuerdo a la figura, la contribución ligeramente dominante surge en el escenario 2 particularmente para $K_\sigma = 2$, obteniéndose $\sigma(gg \rightarrow \sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-6}, 10^{-8}]$ fb; mientras que la contribución suprimida se logra en el escenario 1 cuando $K_\sigma = 6$, obteniéndose $\sigma(gg \rightarrow \sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-7}, 10^{-9}]$ fb.

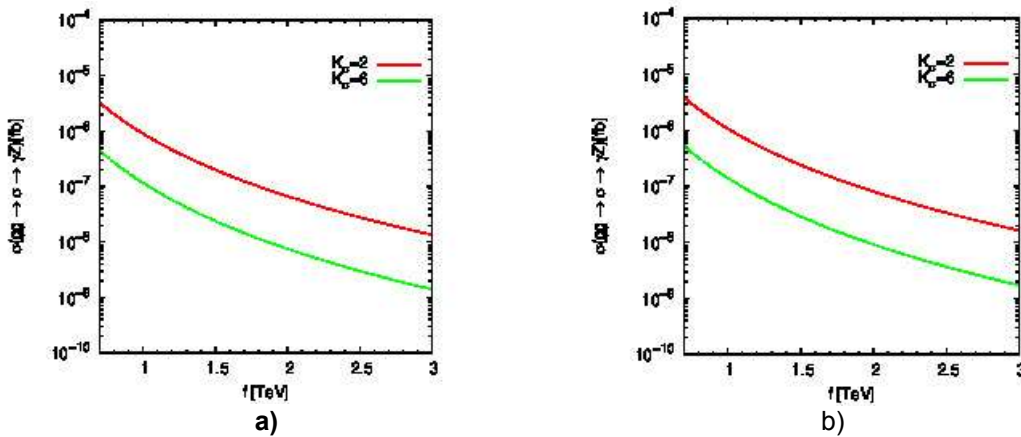


Figura 3. Sección eficaz de producción del escalar σ vía fusión de gluones con un fotón y un bosón Z como estados finales: (a) escenario 1 y (b) escenario 2.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos realizado el estudio fenomenológico del escalar pesado σ en el escenario del BLH debido a que en la literatura no se ha llevado a cabo estudios referentes a este partícula exótica, pero sí para escalares como A_0 y H_0 que surgen también en modelos con dos dobletes de Higgs (2HDM) tipo II, tipo III y tipo IV. En cuanto al modelo BLH su característica principal es poseer una simetría de custodia [13] después del rompimiento de la simetría global, haciendo que el modelo sea finito, lo cual no sucedía con otros modelos tipo Little Higgs. Otra característica propia del BLH consiste en tener a un escalar masivo σ , dicho escalar desempeña una papel importante en la teoría ya que elimina las divergencias que surgen en algunas interacciones, especialmente en el sector cuártico.

Particularmente, en el BLH se determinó la fracción de decaimiento y la sección eficaz del proceso $\sigma \rightarrow \gamma Z$ a nivel de un lazo en el escenario de masas no degenerado de los escalares h_0 y A_0 con una escala de energía de estudio de $f = [0.7, 3]$ TeV y $m_{A_0} > 350$ GeV para $\tan \beta < 5$ [9,10]. Se elige este escenario de estudio porque está de acuerdo con las restricciones más recientes proporcionadas por el LHC. Nuestros resultados numéricos que se obtuvieron para las fracciones de decaimiento de nuestro interés son: $Br(\sigma \rightarrow \gamma Z) \sim 10^{-8}$ para $K_\sigma = 2$ en el escenario 1 y escenario 2, y $Br(\sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-8}, 10^{-9}]$ para $K_\sigma = 6$ en los dos escenarios mencionados anteriormente. En cuanto a la sección eficaz, $\sigma(gg \rightarrow \sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-6}, 10^{-8}]$ fb para $K_\sigma = 2$ y $\sigma(gg \rightarrow \sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-7}, 10^{-9}]$ fb cuando $K_\sigma = 6$, esto se cumple en ambos escenarios. De acuerdo a los valores numéricos, las fracciones de decaimiento están bastante suprimidos ya que nos generan secciones eficaces de producción vía fusión de gluones del escalar σ no relevantes. Esto se debe a que para obtener una estimación del número de sucesos para un evento particular necesitamos conocer la sección eficaz (σ), es decir, la probabilidad de que una colisión dé lugar a ese evento. Entonces para determinar el número de sucesos que se producen de un determinado proceso físico, será necesario conocer la sección eficaz de producción y la luminosidad integrada de dicho proceso. Por lo tanto, la expresión para el número de eventos de un proceso en un determinado tiempo es:

$$\text{No. de eventos} = \text{Sección eficaz} \times \text{Luminosidad integrada.}$$

De acuerdo a la fórmula anterior, con el valor de $\sigma(gg \rightarrow \sigma \rightarrow \gamma Z) = [10^{-6}, 10^{-9}]$ fb y considerando que la luminosidad integrada esperada del LHC se proyecta que alcance los 3 000 fb^{-1} [1,2] dentro de unos años, sería muy difícil observar algún evento relacionado con el decaimiento $\sigma \rightarrow \gamma Z$ ya que el proceso genera una baja sección eficaz de producción por lo que es necesaria una gran luminosidad integrada para su observación, concluimos que dicha interacción aún no está dentro del rango de detección del LHC.

BIBLIOGRAFÍA

1. V. Barger, L. L. Everett, C. B. Jackson and G. Shaughnessy, Phys. Lett B 728, 433 (2014).
2. ATLAS (Collaboration) 2013, arXiv:1307.7292.
3. M. Perelstein, Prog. Part. Nucl. Phys. 58, 247 (2007).
4. N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, E. Katz and A. E. Nelson, JHEP 0207, 034 (2002).
5. M Schmaltz, JHEP 0408, 056 (2004).
6. M. Schmaltz, D. Stolarski and J. Thaler, JHEP 1009, 018 (2010).
7. Kalyniak P., Martin T. y Moats K.. 2015. Phys. Rev. D 91, no. 1, 013010.
8. Kanemura S., Okada Y., Senaha E. y Yuan C.-P.. 2004. Phys. Rev. D 70, 115002.
9. Aad G. et al. (ATLAS Collaboration). 2015. Phys. Lett. B 744, 163.
10. CMS Collaboration (CMS Collaboration). 2018. CMS-PAS-HIG-18-005.
11. Godfrey S., Gregoire T., Kalyniak P., Martin T. A. W. y Moats K. 2012. JHEP 1204, 032.
12. Altmannshofer W. y Straub D. M. 2010, JHEP 1009, 078 (2010).
13. R. A. Diaz and R. Martinez, Rev. Mex. Fis. 47, 489 (2001).

FABRICACIÓN DE CELDAS FOTOVOLTAICAS PARA EL INFRARROJO

Claudia Verónica Silva Juárez¹, Víctor Hugo Compeán Jasso², Francisco Javier de Anda Salazar¹, Andrei Gorbachev¹, Amparo Rodríguez Cobos¹, Vyatcheslav Mishourny¹, Ulises Zavala Morán¹.

¹Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Instituto de Investigación en Comunicación Óptica, México. ²Cátedra CONACYT-Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Instituto de Investigación en Comunicación Óptica, México.
a126554@alumnos.uaslp.mx

RESUMEN

Hoy en día se busca fabricar sistemas generadores de energía alternativos a los tradicionales como lo son las celdas fotovoltaicas solares para uso común y/o industrial. Los sistemas termofotovoltaicos han sido considerados seriamente por diversas compañías¹ para aplicaciones en vehículos eléctricos, sistemas residenciales (calefacción y generación de electricidad) y generadores de uso militar. Un atractivo adicional de este tipo de generadores es que su funcionamiento no depende solamente de la radiación solar sino también del calor generado dentro del entorno en el que se encuentren integrados. Actualmente, se ha reportado para estos generadores una eficiencia del 5-10%² que comparada con la eficiencia de las celdas fotovoltaicas (aprox. 30 %) es aún baja.

En este trabajo se busca mejorar la eficiencia de las celdas termofotovoltaicas empleando en la fabricación de los dispositivos materiales de los grupos III-V de la tabla periódica como son: Galio (Ga), Indio (In), Arsénico (As) y Antimonio (Sb) que absorben entre el infrarrojo cercano y el medio lo que se traduce en fuentes de calor aprovechables de menor temperatura (1200-1600 °C).

Con este fin se hicieron crecimientos epitaxiales mediante la técnica de Epitaxia en Fase Líquida (LPE) incorporando Nitrógeno (N) durante el proceso como lo fue agregando pequeñas cantidades de Nitruro de Galio (GaN) y también tratando con el disolvente Ácido Nítrico (HNO₃), ya que anteriormente se ha reportado que la incorporación de N expande el espectro de emisión de estos materiales³.

Reportamos la caracterización que se hizo mediante rayos-X de GaSbN para evaluar la posibilidad de que en las deposiciones quinarias pudiera haber presencia de N. Además, se caracterizó la fotoluminiscencia de los materiales crecidos (GalnAsSbN y GalnAsSb) a 13°K y 300°K observando principalmente que, a bajas temperaturas, la aleación quinaria en comparación con la cuaternaria mostró un pico de emisión más y emite a temperatura ambiente.

Finalmente, reportamos el trabajo llevado a cabo en la fabricación de fotodiodos en base a estos materiales. Este trabajo se hace en un cuarto limpio y de entre las técnicas utilizadas en este proceso tenemos la deposición de soluciones mediante spinner, el proceso de fotolitografía convencional y el método del lift-off, así como también la deposición de metales por evaporación.

INTRODUCCIÓN

Un sistema Termofotovoltaico (TPV) se encarga de convertir radiación de baja energía proveniente de un emisor (generalmente radiación en el cercano infrarrojo) en electricidad por medio de dispositivos fotovoltaicos similares a las celdas fotovoltaicas solares convencionales. Dicha radiación puede ser dirigida a celdas Termofotovoltaicas que pueden ser fabricadas con semiconductores con un bandgap (banda prohibida) más reducido que el de las celdas solares convencionales. Entre los materiales que cumplen dicho requisito están el Antimoniuro de Galio (GaSb), semiconductor III-V (ver tabla 1) con un bandgap directo de 0.72 eV a 300°K (que le permite extender su respuesta espectral hasta los 1.75 micrómetros) o el Germanio (Ge) con un bandgap indirecto de 0.66 eV (y una respuesta espectral hasta 1.86 micrómetros).

Las aleaciones de GaSb con los materiales de los grupos III-V de la tabla periódica pueden llegar a presentar emisiones infrarrojas con posibilidades de presentar una reducción notable en su bandgap⁴. Algunas de estas aleaciones III-V pueden presentar emisiones infrarrojas cercanas a 2.5 micrómetros (Fig. 1). Aunque reducir el bandgap en estos materiales se considera una ventaja, dichas aleaciones III-V en contraparte, deterioran de cierta manera las propiedades optoelectrónicas y cristalinas de los mismos.

Grupo III	Grupo V
B	N
Al	P
Ga	As
In	Sb
Tl	Bi

Tabla 1. Elementos de la tabla periódica de los grupos III y V

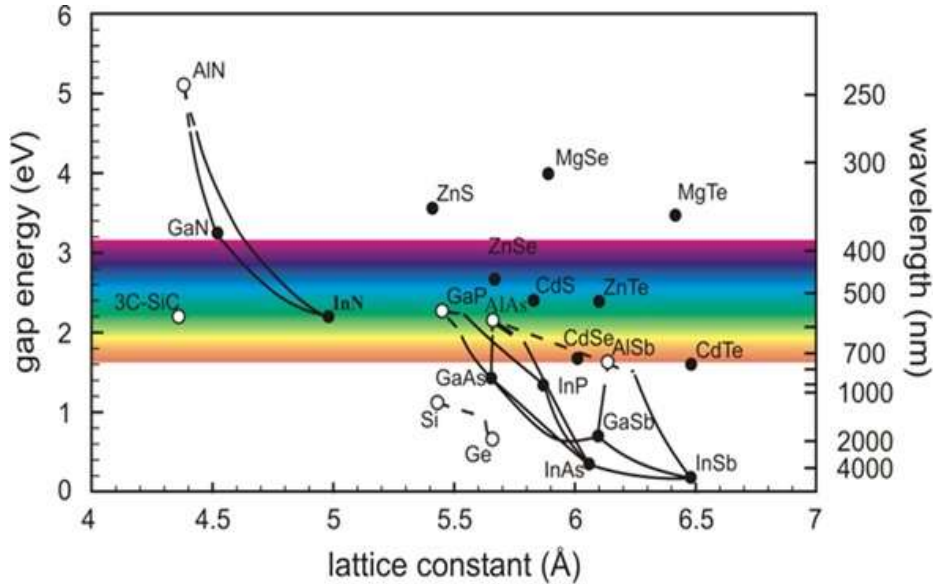


Fig.1 BandGaps de los semiconductores cúbicos elementales y binarios más importantes versus constante de red a 300°K^{5,6}.

Una de las posibles aplicaciones de las aleaciones de materiales III-V es la elaboración de celdas fotovoltaicas en sistemas Generadores de Energía Termofotovoltaicos (TFV o TPV). El rango de longitudes de onda de emisión de estos materiales es de gran relevancia para el desarrollo y mejoramiento en las eficiencias de este tipo particular de generadores (TFV) de energía.

Uno de los principales problemas por lo que estos sistemas Termofotovoltaicos no son explotados en la actualidad es su baja eficiencia de conversión. La eficiencia de este tipo de generadores de energía puede ser mejorada adaptando las longitudes de onda de la radiación proveniente del emisor con la región espectral en la que las celdas TPV presentan mayores eficiencias de conversión, así como ocurre con los sistemas fotovoltaicos iluminados con luz monocromática cuyas eficiencias han alcanzado valores cercanos al 30%⁷.

Es posible crecer heteroestructuras epitaxiales sobre sustratos (principalmente de GaSb) con mejores propiedades optoelectrónicas y cristalinas que las que se reportan actualmente en la literatura. Dichos materiales pueden ser convertidos en celdas fotovoltaicas que pueden ser adecuadas para el desarrollo de Generadores de Energía Termofotovoltaicos (TPV).

En un trabajo previo⁸ se desarrollaron crecimientos epitaxiales (uniones PN y NP) de GaInAsSb sobre sustratos de GaSb con la técnica de Epitaxia en Fase Líquida (LPE) con una muy buena calidad cristalina. Con estos mismos crecimientos se fabricaron dispositivos fotodetectores con características electrónicas que no habían sido reportadas en la literatura. La exploración de aleaciones III-V como opción para su uso en conversión Termofotovoltaica, así como también el uso de los materiales convencionales como GaInAsSb aunado con los resultados de dicho trabajo son muy llamativos y prometedores para mejorar la eficiencia de este tipo de convertidores.

El estudio de los nitruros diluidos III – V es interesante hoy en día debido a su propiedad de reducir el bandgap del semiconductor III – V mediante la introducción de cantidades marginales de nitrógeno en las capas epitaxiales. Recientemente se ha demostrado que los nitruros diluidos, basados en el del grupo III–antimoniuro, podrían actuar como materiales alternativos en la fabricación de dispositivos optoelectrónicos emisores en $1,55 \mu\text{m}^9$, así como en la región del infrarrojo medio¹⁰. La técnica MBE se ha utilizado principalmente para el crecimiento de dichos materiales, mientras que técnicas como la epitaxia metalorgánica en fase de vapor (MOVPE por sus siglas en inglés) y la implantación de iones se han utilizado para el crecimiento de otros nitruros diluidos III-V. Mondal³ informa el crecimiento de las capas de GaSbN con la técnica LPE utilizando GaN policristalino como fuente de nitrógeno. La incorporación de GaN en el crecimiento de LPE en materiales III-V podría expandir el espectro y podrían desarrollarse celdas termofotovoltaicas con una eficiencia de conversión relativamente mejor.

El procedimiento reportado por Mondal³ para incorporar nitrógeno consiste en agregar polvo de Nitruro de GaN como fuente de N a la fase líquida y hornearlo a temperaturas entre 600 y 800°C con In o Ga pero sin control de peso¹¹. Un problema con este material es que su coeficiente de segregación en materiales como Ga e In parece ser relativamente bajo y su incorporación en la fase líquida es muy limitada a temperaturas inferiores a 1300°K. En la Fig.2 se puede observar el diagrama de fase líquida de GaN rich–Ga, en el lado izquierdo de la figura podemos ver la sección aumentada del área en la cual se está trabajando.

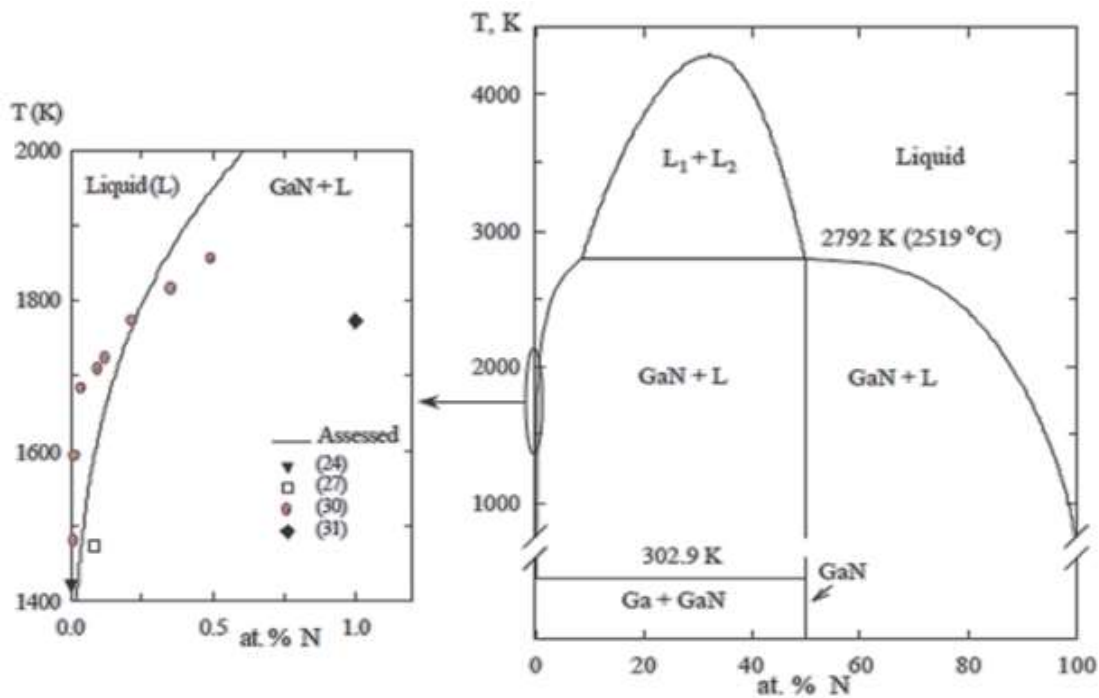


Fig.2 Diagrama de fase líquida de GaN rich–Ga¹².

PARTE EXPERIMENTAL

Crecimiento de los materiales.

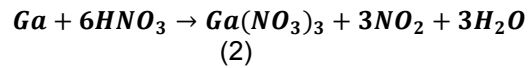
En este trabajo se trató de incorporar N en la fase líquida de una aleación de Ga-In As-Sb para después hacer crecimientos de capas epitaxiales de una aleación GaInAsSbN sobre un sustrato de GaSb. El crecimiento y la cocción se realizaron en un sistema LPE horizontal convencional utilizando la técnica de regla deslizante en un bote de zafiro. Los materiales utilizados fueron Ga, In, Sb y GaAs

y GaSb policristalinos de alta pureza, empleando la composición de la fase líquida ya conocida¹³ que es:

$$\begin{aligned} X_{Ga} &= 0.184 \\ X_{In} &= 0.575 \\ X_{As} &= 0.003 \\ X_{Sb} &= 0.238 \end{aligned} \quad (1)$$

En los experimentos realizados con estas concentraciones se obtuvo una temperatura de liquidus de 540°C; en base a esta temperatura se hicieron los crecimientos a 532°C.

Para la incorporación de N se utilizaron dos técnicas, la primera es incorporando a la fase líquida polvo de GaN para posteriormente hacer los crecimientos epitaxiales, la segunda técnica fue empleando una técnica novedosa implementada en nuestro laboratorio usando como fuente de N el Ga tratado con HNO₃ en la fase líquida acorde a la siguiente reacción:



El método consiste en humedecer un trozo de Ga esperando que la reacción anterior se realice esperando unas 24 horas hasta que se detenga la reacción. Luego lo hornearamos junto con el resto de In y Ga, a una temperatura de 850 ° C, esperando que se incorpore algo de N en la fase líquida.

Fabricación de los dispositivos

En el esquema de la Fig.3 tenemos la estructura mesa del dispositivo final a fabricar. Como se puede observar, consta de un substrato de GaSb el cual está dopado con Telurio (Te), una capa epitaxial de GaInAsSbN y sobre esta capa y bajo el substrato se tienen los contactos óhmicos. El contacto inferior, bajo el substrato, tiene la aleación oro (Au)- germanio (Ge), y el contacto superior, en contacto con la parte activa de la capa epitaxial tiene una aleación de oro (Au)-Zinc (Zn)- oro (Au).

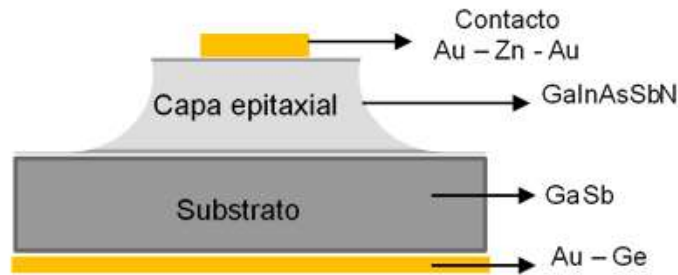


Fig. 3. Esquema de la estructura mesa del dispositivo final a fabricar

La fabricación de los dispositivos se llevó a cabo en un cuarto limpio, y de entre las técnicas utilizadas en este proceso tenemos la deposición de soluciones mediante el spin coating (spinner), el proceso de fotolitografía convencional y el método del lift-off, así como también la deposición de metales por evaporación. En la fotolitografía se utilizó fotoresina positiva shipley 1818. Los metales depositados

fueron Au – Zn – Au para la capa activa (tipo P) y Au – Ge para el sustrato (tipo N) para terminar con la técnica de lift – off.

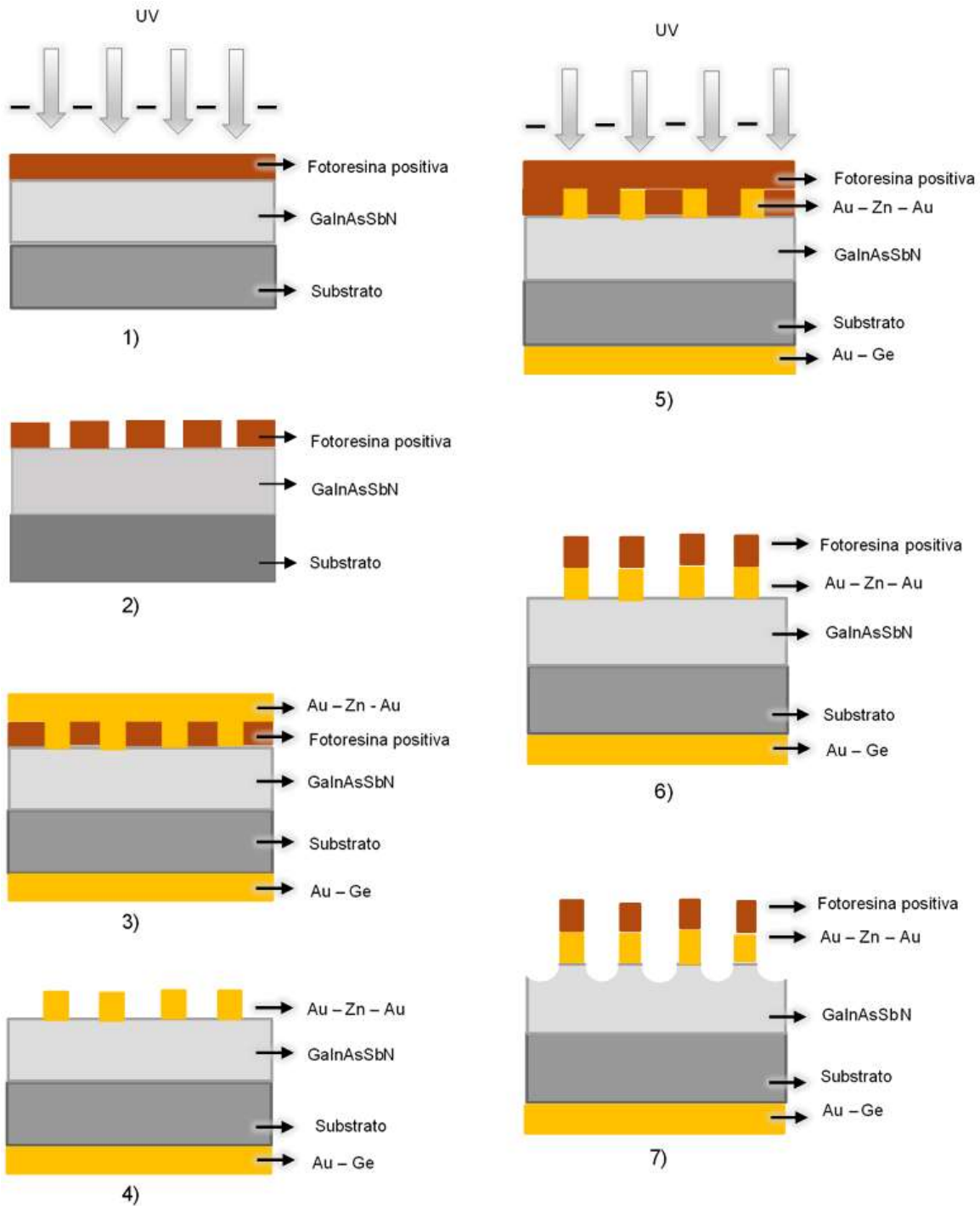


Fig. 4. Esquema de la técnica de fotolitografía y lift off empleadas en la fabricación de los fotodiodos.

El proceso de fabricación de los dispositivos se resume en la Fig.4. y a continuación se describen cada una de las etapas:

1. Primera deposición de la fotoresina. Se aplican 2 gotas de fotoresina sobre la muestra ya crecida por medio de LPE y se hace el centrifugado para tener una película uniforme, el “spinner” se programa a 6000 rpm y con un tiempo de rotación de 40 segundos, después del depósito se hace un horneado de 30 minutos a 90°C.
2. Insolación y revelado de la resina. Una vez que las muestras se han enfriado, se procede con la insolación de la fotoresina durante el tiempo suficiente para que la luz penetre todo el espesor depositado. Este proceso se lleva a cabo en una alineadora de luz UV, al término de la insolación se hace el revelado de la fotoresina por 15 segundos, después se enjuaga con abundante agua para eliminar el químico y se seca con nitrógeno comprimido.
3. Evaporación de contactos. Una vez que se tienen los motivos se procede a la evaporación de contactos óhmicos. Se evaporó una aleación de Au (12Å) – Zn (40Å) – Au (280Å) para la capa epitaxial con conductividad P (capa superior) y Au (280Å) – Ge (40Å) para el substrato con conductividad N (capa inferior).
4. Lift-off. Después de que se hace la deposición de metales se prosigue con la técnica de lift – off para remover la fotoresina y quedarnos únicamente con el oro, para ello se sumerge la muestra en el revelador el tiempo que sea necesario para la eliminación total de la resina. Después de remover la resina, se hornea la muestra con el fin de asegurar una buena adherencia de la aleación de oro, se utiliza un horno Annealing Oven AO 500 a una temperatura de 350°C durante un minuto y medio por cada lado.
5. Segunda deposición de fotoresina. Posteriormente al recocido se hace otra deposición de fotoresina utilizando los mismos parámetros de la etapa 1 para proceder con una segunda insolación, la cual definirá cada uno de los diodos de otros y para definir el área sensible de los mismos.
6. Revelado de la resina. Al revelar la resina y enjuagar la muestra los motivos de oro quedan cubiertos por la fotoresina la cual servirá para protegerlos durante la última etapa del proceso.
7. Ataque del GaInAsSb. Para finalizar se sumerge la muestra en una solución elaborada a base de HF (ácido fluorhídrico) para atacarla químicamente, el tiempo que se deja va dependiendo del espesor de la capa epitaxial, aproximadamente son 5 segundos para atacar 1 micrómetro de la capa, el área subyacente al ataque químico permitirá el poder separar físicamente cada uno de los diodos.

RESULTADOS

Caracterización de los materiales

Las muestras crecidas por LPE se caracterizaron en fotoluminiscencia. En la Fig. 5 podemos observar los espectros obtenidos, se grafica la intensidad en función de la longitud de onda de emisión. Podemos observar que, a bajas temperaturas, las Figs. 4a y 4d tienen un pico de emisión alrededor de 2.05 μm que podría deberse a la incorporación de nitrógeno. La posición del pico principal no cambia en comparación con las capas cuaternarias crecidas sin N (Fig. 4c) y esto podría explicarse suponiendo que la concentración de N es tan pequeña que se comporta como una impureza. Además, las capas que crecen a partir de soluciones que contienen N emiten a temperatura ambiente (Fig. 4b) pero las capas sin él no lo hacen y es bien sabido que el N forma centros de emisión muy eficientes¹⁴. Todas las capas crecidas en el laboratorio tenían superficies lisas tipo espejo, esto quiere decir que, el material crecido es de buena calidad sin tantos defectos por lo que pudiera mejorar la eficiencia del fotodiodo.

También se analizaron las muestras en rayos-X para comprobar la presencia de N en las capas epitaxiales, para dicho análisis se usaron muestras de GaSbN sobre substratos de GaSb; en la Fig. 6a se puede observar la gráfica de rayos-X del GaSb el cual tiene un ángulo de difracción en la dirección (004) de $\theta = 30.36267^\circ$ ¹⁵, en la Fig. 6b se muestra la gráfica de GaSbN la cual muestra un pico más en comparación con la gráfica del GaSb por lo que es evidente que si hay presencia de nitrógeno.

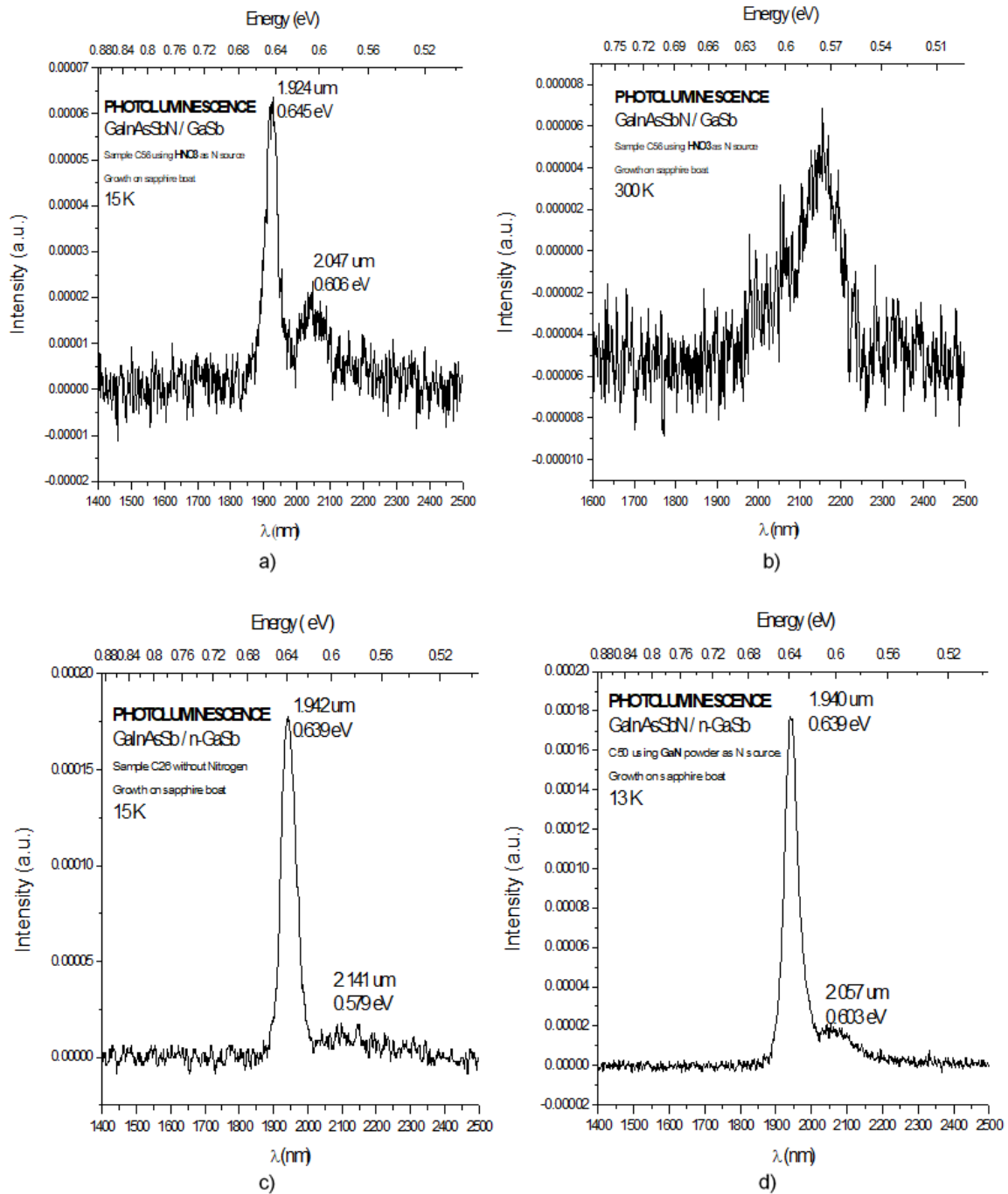
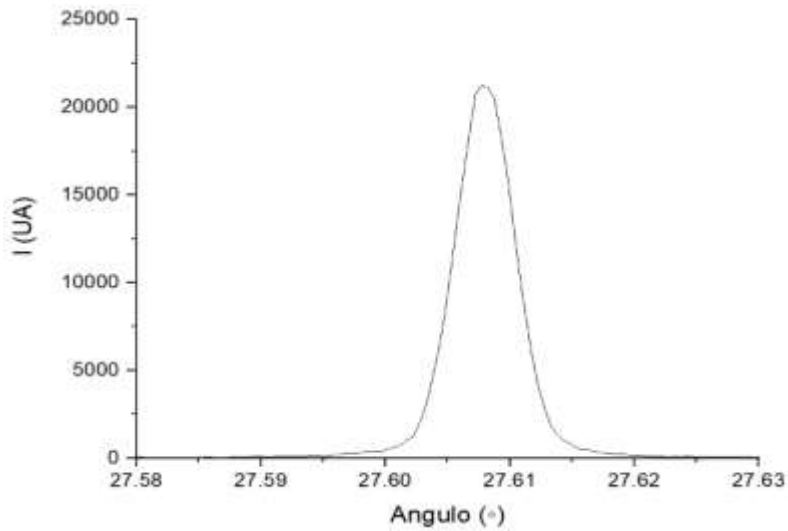
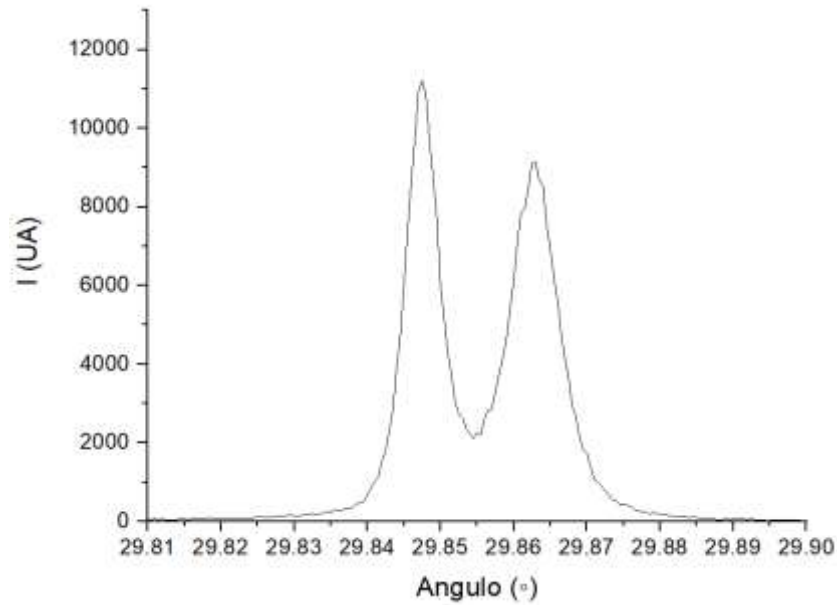


Fig.5 Gráficas de Fotoluminiscencia de diferentes muestras. a) y b) GaInAsSb con HNO_3 como fuente de N, c) una capa simple de GaInAsSb sin N, d) y b) GaInAsSb con polvo de GaN como fuente.



a



b

Fig.6 Caracterización en Rayos – X y comparación de las muestras crecidas a) sin incorporación de N y b) con incorporación de N.

Fabricación de los dispositivos

Las primeras etapas de la fabricación de nuestros dispositivos nos permitieron optimizar los parámetros involucrados en la deposición, insolación y revelados de las fotoresina. Esto lo reportamos en la tabla 2.

Velocidad de rotación SPINNER (rpm)	Tiempo de rotación (seg)	Tiempo de insolación (seg)	Tiempo de revelado (seg)	Espesor de la resina (μm)
1000	45	90	10	$\approx 4\mu m$
6000	40	50	15	$\approx 1\mu m$

Tabla 2. Parámetros optimizados para la fotoresina positiva.

En nuestro caso es más conveniente utilizar el espesor de $1\mu m$ debido que se facilita remover la fotoresina al momento de implementar la técnica del lift-off una vez que se han depositado los metales.

En la tabla 3 listamos los metales depositados, así como sus espesores respectivos. Cabe mencionar que estos espesores son determinados por el sensor de espesores que está dentro de la evaporadora de metales.

Deposición de oro	Espesor
Oro – Zinc - Oro	$12\text{Å} - 40\text{Å} - 280\text{Å}$
Oro – Germanio	$280\text{Å} - 40\text{Å}$

Tabla 3. Espesores de los metales depositados.

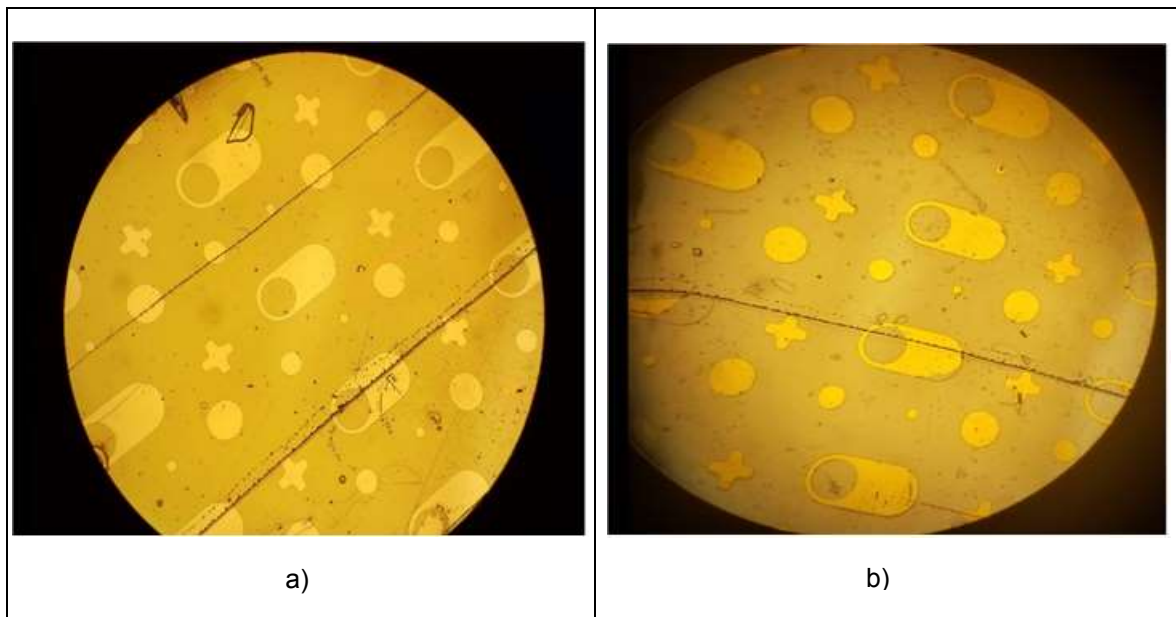


Fig.7 Fotografías tomadas desde un microscopio convencional. a) muestra con la técnica de fotolitografía, b) muestra con lift-off.

En las imágenes que se muestran en la Fig. 7 podemos observar los motivos que serán los fotodiodos una vez que se termine todo el proceso de fabricación antes mencionado. Estas imágenes fueron tomadas al observar las muestras en el microscopio. En la Fig. 7a podemos ver una muestra a la cual se le ha hecho el proceso de fotolitografía; es decir, cuando se le ha depositado la fotoresina y se le ha hecho la insolación y revelado; mientras que en la Fig. 7b además de la fotolitografía, la muestra tiene la deposición de aleación de oro y se le aplicó la técnica de lift-off. Un problema que

se ha presentado con ésta técnica es que en algunas partes se empieza a levantar el oro en los límites de los motivos.

CONCLUSIONES

Hemos crecido capas de GaInAsSbN mediante la técnica convencional de LPE utilizando polvo de GaN policristalino y HNO₃ como fuente de nitrógeno en la solución de crecimiento. El efecto parece ser que la incorporación de N podría ser igual que el de un dopante. Debido a los diagramas de fase Ga-N¹² no esperamos una aleación con alto contenido de N en GaInAsSb. Las evidencias de una posible incorporación de N en las capas epitaxiales son sus espectros de luminiscencia y rayos-X. Se tienen optimizados los parámetros para la fabricación de los dispositivos, se requiere hacer más pruebas para que al momento de remover la resina no se elimine también parte del motivo, se está buscando la manera en que esto no suceda. En el futuro, desarrollaremos dispositivos para estos materiales, como las celdas fotodetectoras que podrían usarse en la conversión térmica de energía termoeléctrica con la esperanza de mejorar la eficiencia de conversión que se informa para estos materiales.

BIBLIOGRAFÍA

1. Nelson, R.E A brief History of thermophotovoltaic Semiconductor Science and Technology, 1, S141 – S143 (2003).
2. H.H. Kolm "Solar – battery power source" Quartely progress report, solid state research, group 35 MIT – Lincoln Laboratory, Lexington, MA (USA) p. 13 May 1956.
3. Mondal et al. Journal of Crystal Growth 297 (2006) 4–6.
4. M. Weyers, M. Sato, and H. Ando, Jpn. J. Appl. Phys., Part 2 31, L853 (1992).
5. H. Ibach and H. Lueth. *Solid-State Physics*. Springer Verlag, 2003
6. Rizzi. Private communications, 2001
7. Wolfson, "Photovoltaic Solar Energy" in *Energy, Environment, and Climate*, 2nd ed., New York, NY: W.W. Norton & Company, 2012, ch. 9, sec. 5, pp. 244-252
8. V.H. Compeán-Jasso et al. / *Infrared Physics & Technology* 79 (2016) 32–35 35
9. G. Ungaro et al, *Electron. Lett.* 35 (1999) 1246.
10. W. Li, J. B. Héroux, and W. I. Wang. *Appl. Phys.* 94 (2003) 4248.
11. A. Mondal et al. *Journal of Crystal Growth* 297 (2006) 4–6.
12. Davydov et al. in "III-V Nitride Materials and Processes III", Ed.: T.D.oustakas, S.E. Mohny, and S.J. Pearton, ECS (Boston, MA, 1998), PV 98-18, pp. 38-49.
13. J. C. DeWinter, M. A Pollack, A. K. Srivastava and J. L. Zyskind. *Journal of Electronic Materials*, Vol. 14, No. 6, 1985.
14. Simon M. Sze, Kwok K. Ng, *Physics of Semiconductor Devices*, JOHN WILEY & SONS, JNC 2006 . ISBN-I 3: 978-0-47 1-1 4323-9
15. Peter Capper, Michael Mauk, *Liquid Phase Epitaxy of Electronic, Optical and Optoelectronic Materials*, Ed. Wiley

ESTADOS COHERENTES DE MATERIALES DIRAC BIDIMENSIONALES ANISOTRÓPICOS Y MAGNETIZADOS

Yajaira Concha Sánchez¹, Erik Díaz Bautista², Maurice Oliva Leyva² y Alfredo Raya Montaña³

¹Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, ²Departamento de Física, CINVESTAV, ³Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
yconcha@umich.mx.

RESUMEN

En este trabajo, construimos estados coherentes para electrones en materiales anisotrópicos de Dirac bidimensionales sumergidos en un campo magnético uniforme ortogonal a la muestra. Con el fin de describir los efectos bidimensionales sobre la dinámica de los electrones en un enfoque semiclásico, adoptamos la norma simétrica para describir el campo magnético externo a través de un potencial vectorial. Resolvemos una ecuación de tipo Dirac con una velocidad de Fermi anisotrópica, definimos dos conjuntos de operadores escalera generalizados que son los generadores del álgebra de Heisenberg-Weyl o $su(1, 1)$ y construimos estados coherentes como estados propios de los operadores de aniquilación generalizados con valores propios complejos. Para ilustrar los efectos de la anisotropía en estos estados, obtenemos su densidad de probabilidad y su valor medio de energía. Dependiendo de la anisotropía, expresada por la relación entre las velocidades de Fermi a lo largo de los ejes x y y , la forma de la densidad de probabilidad se modifica en el plano xy con respecto al caso isotrópico y de acuerdo con la dinámica clásica.

INTRODUCCIÓN

La ciencia de los materiales ha experimentado una tremenda revolución después del primer aislamiento de muestras de grafeno [1-3], el primer miembro de una larga clase de materiales hoy en día denominado genéricamente como materiales de Dirac bidimensionales, que incluyen aislantes topológicos [4, 5] y conductores orgánicos [6, 7]. En general, estos materiales se caracterizan porque a baja energía, el comportamiento de sus portadores de carga es bastante similar a la de los fermiones ultra-relativistas, dada la naturaleza lineal de su relación de dispersión. Como una consecuencia, estas cuasi-partículas se describen mejor mediante una ecuación de tipo Dirac, en lugar de la ecuación de Schrödinger ordinaria con una típica relación de dispersión parabólica. Tal descripción codifica el comportamiento quiral y pseudo-relativista de los portadores de carga que producen dificultades para confinar estas cuasi-partículas a través de, por ejemplo, barreras electrostáticas. Varias propuestas han sido planteadas para abordar este problema, entre ellas, para inducir cuasi-limitados estados de fermiones de Dirac sin masa por la influencia de los campos magnéticos. Otra alternativa para controlar el confinamiento y el transporte de portadores de carga en materiales que no son intrínsecamente anisotrópicos, como el grafeno, proviene de la ingeniería de estiramientos. En este sentido, la ingeniería de estiramientos [8] surgió como el campo que explora cómo las deformaciones mecánicas de las capas de grafeno modifican sus propiedades eléctricas [9]. Hoy en día, hay un creciente interés por explorar los efectos de la anisotropía para controlar otras propiedades de materiales de Dirac bidimensionales, por ejemplo, su rigidez, resistencia y conductividad óptica [10], han surgido. De esta manera, la construcción de estados coherentes en el grafeno prístino como se lleva a cabo en [11] puede extenderse a sistemas de fermión de Dirac anisotrópicos para dar una descripción semiclásica de los fenómenos relacionados con los efectos combinados de los campos magnéticos y la anisotropía [12]. Este último permite analizar una variedad de propiedades físicas interesantes de estos materiales [13-18].

Siguiendo el enfoque anterior, el problema físico de una partícula sin espín que se mueve en el plano xy bajo la acción de un campo magnético uniforme \vec{B}_0 se ha resuelto en la llamada norma simétrica [19-21]

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}_0 \times \vec{r}) = \frac{\vec{B}_0}{2}(-y, x, 0), \quad (1)$$

y en la que ha sido posible construir estados coherentes [22] como generalizaciones bidimensionales de los estados Glauber [23], a partir de los resultados obtenidos por Landau [24]. Por lo tanto, comenzamos con la ecuación de Dirac anisotrópica independiente del tiempo [6, 25-26],

$$H\Psi = (v_x\sigma_x\pi_x + v_y\sigma_y\pi_y)\Psi = E\Psi, \quad (2)$$

donde $v_{x/y}$ es la velocidad de la partícula en la dirección x/y y que es modificada por la anisotropía aunque la velocidad de Fermi tiene un carácter tensorial en un sentido general, uno puede escoger un sistema de coordenadas apropiadas donde el tensor es diagonal [27], $\sigma_{x/y}$ son las matrices de Pauli, $\pi_{x/y} = \mathbf{p}_{x,y} + (e/c)\mathbf{A}_{x/y}$ es el momento canónico con \vec{A} dado en la ecuación (1) y $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ son las dos componentes de las funciones de onda. Este marco puede ser considerado como una generalización de [28,29].

TEORÍA

Hamiltoniano de Dirac anisotrópico

Considerando el potencial vectorial en la norma simétrica de (1) en la ecuación (2), el Hamiltoniano de Dirac H se reescribe de la siguiente manera

$$H = \sqrt{\omega_B \hbar v'_F} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -iA^- \\ iA^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde los operadores de escalera son

$$A^\pm = \frac{\mp i}{\sqrt{\omega_B \hbar}} \left[\zeta^{1/2} \left(\mathbf{p}_x - \frac{eB_0}{2c} \mathbf{y} \right) \pm \frac{i}{\zeta^{1/2}} \left(\mathbf{p}_y + \frac{eB_0}{2c} \mathbf{x} \right) \right], \quad (4)$$

que satisfacen la relación de conmutación

$$[A^-, A^+] = \mathbf{1}, \quad (5)$$

donde $\omega_B = 2eB_0/c\hbar$ es la frecuencia de ciclotrón, $v'_F = \sqrt{v_x v_y}$ y $\zeta = v_x/v_y$ dependen de la dirección de anisotropía (ver Figura 1).

Los valores propios de la ecuación (3) dan lugar a dos ecuaciones acopladas que se pueden desacoplar para obtener las siguientes ecuaciones para cada componente de pseudo-espinor,

$$\mathcal{H}^- \psi_1(x, y) = A^- A^+ \psi_1(x, y) = \varepsilon \psi_1(x, y), \quad (6a)$$

$$\mathcal{H}^+ \psi_2(x, y) = A^+ A^- \psi_2(x, y) = \varepsilon \psi_2(x, y), \quad (6b)$$

donde $\varepsilon \equiv (E/\hbar v'_F \sqrt{\omega_B})^2$. Así, tenemos dos ecuaciones de Schrödinger, cada una correspondiente a un oscilador armónico, pero cuyos valores propios están relacionados como

$$\varepsilon_{1,n-1} = \varepsilon_{2,n} = n, \quad n \geq 1, \quad \varepsilon_{2,0} = 0, \quad (7)$$

tal que el espectro de energía resulta ser

$$E_n = \pm \hbar v_F' \sqrt{n\omega_B}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

donde la energía positiva (negativa) corresponde a los electrones en la banda de conducción (valencia). Como parte de nuestra discusión, solo consideramos los electrones en la banda de conducción.

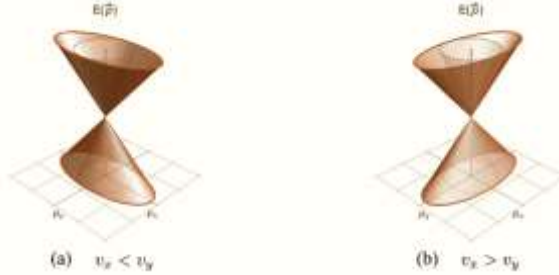


Figura 1: Conos de Dirac para un caso isotrópico (contorno gris discontinuo) y anisotrópico (contorno café sólido). Las proyecciones del cono de Dirac en el plano horizontal son elipses cuyo eje semi-mayor está a lo largo del eje \mathbf{p}_x cuando (a) $v_x < v_y$ o del eje \mathbf{p}_y cuando (b) $v_x > v_y$.

Procediendo como en [30], las funciones propias normalizadas del Hamiltoniano \mathcal{H}^+ resultan ser [19]

$$\psi_{m,n}(\rho, \theta) = (-1)^{\min(m,n)} \sqrt{\frac{\omega_B \min(m,n)!}{4\pi \max(m,n)!}} \left(\frac{\sqrt{\omega_B}}{2} \rho \right)^{|n-m|} \exp\left(-\frac{\omega_B}{8} \rho^2 + i(n-m)\theta\right) \times L_{\min(m,n)}^{|n-m|} \left(\frac{\omega_B}{4} \rho^2 \right), \quad (9)$$

con $n, m = 0, 1, 2, \dots$ y $L_a^b(x)$ representando los polinomios asociados de Laguerre. Notemos que las funciones propias normalizadas del Hamiltoniano \mathcal{H}^- se obtienen simplemente como $\psi_{m,n-1} = A^- \psi_{m,n} / \sqrt{n}$.

Como podemos ver, los estados propios de los Hamiltonianos \mathcal{H}^\pm están etiquetados por dos números enteros positivos, m, n , que corresponden a los valores propios de dos operadores número M y N , respectivamente (ver Apéndice A):

$$\psi_1(\xi, \theta) \equiv \psi_{m,n-1}(\xi, \theta), \quad \psi_2(\xi, \theta) \equiv \psi_{m,n}(\xi, \theta). \quad (10)$$

De la ecuación (A.7), podemos concluir que los estados $\psi_{m,n}$ son también estados propios del operador tipo momento angular $L_z = N - M$ con valores propios $m_z = n - m$.

Finalmente, definimos la componente z del operador de momento angular total como $\mathbb{J}_z = L_z \otimes \mathbb{I} + \sigma_z/2$, tenemos que

$$\mathbb{J}_z \Psi_{m,n}(x, y) = \left(m_z - \frac{1}{2}\right) \Psi_{m,n}(x, y) = j \Psi_{m,n}(x, y), \quad (11)$$

es decir los estados $\Psi_{m,n}(x, y)$ son también estados propios de \mathbb{J}_z con un valor propio racional $j \equiv m_z - 1/2$.

RESULTADOS

Operadores de aniquilación

Vamos a definir dos operadores de aniquilación independientes A^- y B^- como

$$A^- = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{N+1}} A^- & \sin(\delta) \frac{1}{\sqrt{N+1}} (A^-)^2 \\ -\sin(\delta) \sqrt{N+1} & \cos(\delta) A^- \end{bmatrix}, \tag{12a}$$

$$B^- = \begin{bmatrix} \cos(\eta) B^- & \sin(\eta) \frac{B^-}{\sqrt{N+1}} A^- \\ -\sin(\eta) \frac{B^-}{\sqrt{N+1}} & \cos(\eta) B^- \end{bmatrix}, \tag{12b}$$

tal que $\delta, \eta \in [0, 2\pi]$ y para $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$:

$$A^- \Psi_{m,n} = \frac{\exp(i\delta)}{\sqrt{2^{\delta_{1n}}}} \sqrt{n} \Psi_{m,n-1}, \tag{13a}$$

$$B^- \Psi_{m,n} = \sqrt{m} \omega_n \Psi_{m-1,n}, \tag{13b}$$

con $\omega_n \equiv \cos(\eta) + i \sin(\eta)(1 - \delta_{0n})$.

Adicionalmente, consideramos el siguiente operador

$$K^- = A^- B^- \equiv \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{N+1}} A^- B^- & \sin(\gamma) \frac{1}{\sqrt{N+1}} (A^-)^2 B^- \\ -\sin(\gamma) \sqrt{N+1} B^- & \cos(\gamma) A^- B^- \end{bmatrix}, \tag{14}$$

donde $\gamma = \delta + \eta \in [0, 2\pi]$ debido a la periodicidad de las funciones seno y el coseno, tal que para $m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, se verifica que

$$K^- \Phi_{m_z,n} = \frac{\exp(i\gamma)}{\sqrt{2^{\delta_{1n}}}} \sqrt{n(n - m_z)} \Phi_{m_z,n-1}, \tag{15}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, con (ver Figura 2)

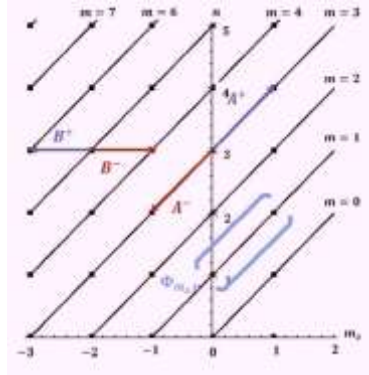


Figura 2: El espacio de estados escalares $\Phi_{m_z,n}$ está representado unívocamente por coordenadas (m_z, n) . Las líneas inclinadas conectan estados con el valor $m = n - m_z$. El plano se divide en dos sectores de acuerdo a $m_z \geq 0$ (sector derecho) o $m_z < 0$ (sector izquierdo).

$$\Phi_{m_z, n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2^{(1-\delta_{0n})}}} \begin{pmatrix} (1 - \delta_{0n}) \phi_{m_z-1, n-1}(x, y) \\ i \phi_{m_z, n}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Vale la pena señalar que, dependiendo de los valores de δ , η y γ , podemos trabajar con operadores de matriz diagonales o no diagonales.

Por otro lado, los estados coherentes bidimensionales, $\Psi_{\alpha, \beta}(x, y) \equiv \langle x, y | \alpha, \beta \rangle$, se definen como estados propios comunes de los operadores de aniquilación generalizados \mathbb{A}^- y \mathbb{B}^- [22, 30, 31]:

$$\mathbb{A}^- \Psi_{\alpha, \beta}(x, y) = \alpha \Psi_{\alpha, \beta}(x, y), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (17a)$$

$$\mathbb{B}^- \Psi_{\alpha, \beta}(x, y) = \beta \Psi_{\alpha, \beta}(x, y), \quad \beta \in \mathbb{C}. \quad (17b)$$

Similarmenete, es posible construir otra clase de estados coherentes, $\Phi_{\tau}^{m_z}(x, y) \equiv \langle x, y | \tau, m_z = n - m \rangle$ que también son estados propios del operador \mathbb{J}_z , es decir,

$$\mathbb{K}^- \Phi_{\tau}^{m_z}(x, y) = \tau \Phi_{\tau}^{m_z}(x, y), \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad (18a)$$

$$\mathbb{J}_z \Phi_{\tau}^{m_z}(x, y) = j \Phi_{\tau}^{m_z}(x, y), \quad j = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \quad (18a)$$

A continuación, vamos a construir estados coherentes bidimensionales [32,33] en el grafeno para algunos valores particulares de los parámetros, δ , η y γ .

Estados coherentes bidimensionales

En general, los estados bidimensionales son una combinación lineal de todos los estados estacionarios $\Psi_{m, n}(x, y)$ [31]:

$$\Psi_{\alpha, \beta}(x, y) = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n d_m \Psi_{m, n}(x, y) = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_{\beta}^n(x, y) = \mathcal{N} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \Psi_{\alpha}^m(x, y), \quad (19)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización y los estados $\Psi_{\alpha}^m(x, y)$, $\Psi_{\beta}^n(x, y)$ son los estados propios de los operadores \mathbb{A}^- y \mathbb{B}^- , es decir,

$$\mathbb{A}^- \Psi_{\alpha}^m(x, y) = \alpha \Psi_{\alpha}^m(x, y), \quad (20a)$$

$$\mathbb{B}^- \Psi_{\beta}^n(x, y) = \beta \Psi_{\beta}^n(x, y). \quad (20b)$$

Por lo tanto, la ecuación (19) proporciona una primer manera de obtener la construcción de estados coherentes bidimensionales $\Psi_{\alpha}^m(x, y)$ o $\Psi_{\beta}^n(x, y)$ y luego reunirlos correctamente. La expresión explícita que obtenemos para estados coherentes bidimensionales es

$$\Psi_{\alpha, \beta}(x, y) = \frac{\exp\left(\left[\frac{\beta-z}{2}\right]z^* - \frac{|\beta|^2}{2}\right)}{\sqrt{\pi(2 \exp(|\alpha|^2) - 1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!} \begin{pmatrix} \sqrt{n}(z - \beta)^{n-1} \\ i(z - \beta)^n \end{pmatrix}, \quad (21)$$

donde $z = \frac{\sqrt{\omega_B}}{2}(\zeta^{-1/2}x + i\zeta^{1/2}y)$ y $\tilde{\alpha} = \alpha \exp(-i\delta)$. Notemos que el parámetro δ introduce un factor de fase para el valor propio de α .

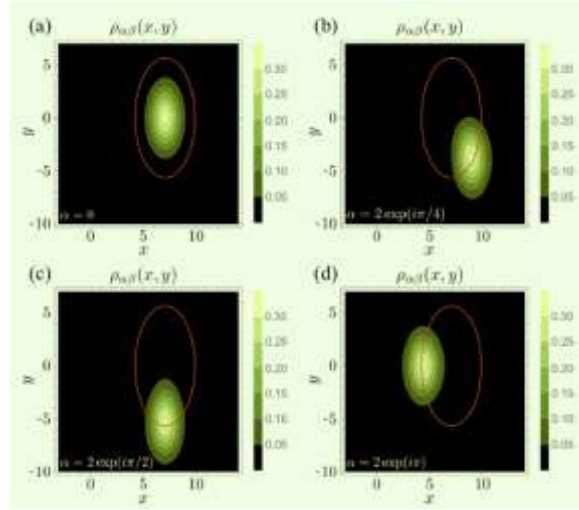


Figura 3: Para los estados coherentes bidimensionales $\Psi_{\alpha,\beta}(x, y)$, la densidad de probabilidad $\rho_{\alpha,\beta}(x, y)$, se muestra para algunos valores de α . En todos los casos $\beta = 5$, $\mathbf{B}_0 = \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{1}/2$ y $\omega_B = 1$. Las curvas naranjas en el plano xy describen la trayectoria clásica de un portador de carga en un campo magnético: las coordenadas del centro de la elipse se determinan por β mientras que α nos da las coordenadas en la cuál la amplitud de probabilidad máxima se puede encontrar con respecto a ese punto.

Finalmente, tomando $\delta = \mathbf{0}$, la correspondiente densidad de probabilidad $\rho_{\alpha,\beta}(x, y)$ y el valor medio de energía $\langle H \rangle_\alpha$ son, respectivamente (ver Figuras 3-5):

$$\rho_{\alpha,\beta}(x, y) = \Psi_{\alpha,\beta}^\dagger(x, y)\Psi_{\alpha,\beta}(x, y) = \frac{\exp(-|z - \beta|^2)}{\pi(2\exp(|\alpha|^2) - 1)} \left[\mathbf{1} + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha(z - \beta)]^n}{n!} \right|^2 + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha(z - \beta)]^n \sqrt{n}}{n!(z - \beta)} \right|^2 + 2\Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha(z - \beta)]^n}{n!} \right] \right], \quad (22a)$$

$$\langle H \rangle_\alpha = \frac{2\sqrt{\omega_B} \hbar v_F'}{2\exp(|\alpha|^2) - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \sqrt{n}. \quad (22b)$$

Las Figuras 3 y 4 muestran que los parámetros complejos α y β determinan conjuntamente dónde está el máximo de la densidad de probabilidad en el plano xy . Además, la densidad de probabilidad $\rho_{\alpha,\beta}(x, y)$ exhibe una forma estable independientemente de los valores de α y β , de modo que el comportamiento de la función $\rho_{\alpha,\beta}(x, y)$ se asemeja a los estados coherentes comprimidos en la representación del espacio de fase, en el cual el producto de las variaciones de los operadores de posición x y del momento p_x minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg $(\Delta x)(\Delta p_x) = \mathbf{1}/4$ con $(\Delta x)^2 = \exp(-2r)/4$ y $(\Delta p_x)^2 = \exp(2r)/4$, donde $r = |\lambda|$ se llama parámetro comprimido y $\lambda \in \mathbb{C}$. En nuestra discusión, la cantidad $\tau = \frac{1}{2} \ln(\zeta)$ puede considerarse como un parámetro de tipo comprimido para la variable z .

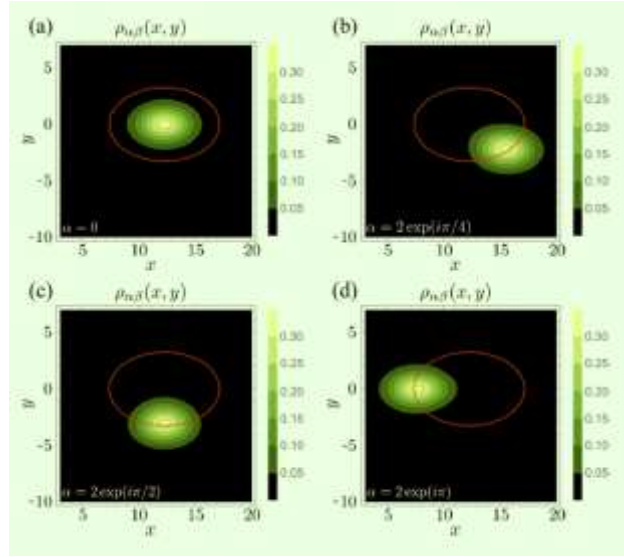


Figura 4: Para los estados coherentes bidimensionales $\Psi_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la densidad de probabilidad $\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se muestra para algunos valores de α . En todos los casos $\beta = 5$, $\mathbf{B}_0 = \zeta = 1/2$ y $\omega_B = 1$. Las curvas naranjas en el plano xy describen la trayectoria clásica de un portador de carga en un campo magnético: las coordenadas del centro de la elipse se determinan por β mientras que α nos da las coordenadas en cuál la amplitud de probabilidad máxima se puede encontrar con respecto a ese punto.

Además, como podemos ver, los valores propios de α y $\beta = |\beta| \exp(i\varphi)$ están relacionados con los parámetros geométricos de la trayectoria elíptica clásica de una partícula cargada en un campo magnético en el plano xy (ver las Figuras 3 y 4):

$$\frac{(x-x_0)^2}{4\zeta|\alpha|^2} + \frac{(y-y_0)^2}{4\zeta^{-1}|\alpha|^2} = 1, \tag{23}$$

donde los puntos

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{2\zeta^{1/2}|\beta|}{\sqrt{\omega_B}} \cos(\varphi), \frac{2\zeta^{-1/2}|\beta|}{\sqrt{\omega_B}} \sin \varphi \right), \tag{24}$$

determinan las coordenadas del centro de la curva con respecto al origen $(0, 0)$, mientras que la excentricidad ε , esta dada por

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \text{para } v_x < v_y, \tag{25a}$$

$$\varepsilon_y = \sqrt{1 - \zeta^{-2}}, \quad \text{para } v_x > v_y, \tag{25b}$$

Por lo tanto, cuando la anisotropía se dirige a lo largo de la dirección x , el pico de la probabilidad máxima se encuentra en una curva elíptica cuyo eje semi-mayor es paralelo al eje y (Figura 3), mientras que si la anisotropía está a lo largo de la dirección y , el eje semi-mayor es paralelo al eje x (Figura 4). Además, para el caso isotrópico tenemos que $\zeta = 1$ y $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, es decir, obtenemos una densidad de probabilidad $\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que tiene una forma de tipo Gaussiana y cuyo valor máximo se encuentra en una curva circular.

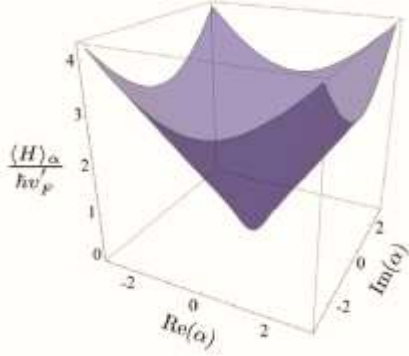


Figura 5: La energía media $\langle H \rangle_\alpha / \hbar v_F'$ como una función de α con $B_0 = 1/2$ y $\omega_B = 1$.

CONCLUSIONES

En este trabajo, para analizar los efectos bidimensionales de la anisotropía en materiales Dirac bidimensionales sobre la dinámica de sus portadores de carga, hemos obtenido estados coherentes bidimensionales a través de un potencial vectorial en una norma simétrica para la interacción entre tales partículas y un campo magnético ortogonal homogéneo. Tales estados coherentes se han obtenido como estados propios de operadores de aniquilación generalizados que satisfacen álgebras de Heisenberg-Weyl o $su(1, 1)$.

Para el potencial vectorial en la ecuación (1), el espectro de energía del Hamiltoniano de Dirac anisotrópico H tiene una degeneración infinita debido a la simetría rotacional, $[H^\pm, L_z] = 0$, mientras que sus soluciones tienen simetría axial. Además, podemos identificar dos conjuntos de operadores escalar de tipo escalar que satisfacen dos copias independientes del álgebra de Heisenberg-Weyl y con el cual, es posible definir un conjunto de operadores de aniquilación generalizados \mathbb{A}^- , \mathbb{B}^- y \mathbb{K}^- (ecuaciones (12a), (12b) y (14)). Al emplear estos operadores de aniquilación, al menos dos diferentes tipos de estados coherentes, $\Psi_{\alpha,\beta}(x, y)$ y $\Phi_\tau^{m_z}(x, y)$ se obtienen, cada uno con diferentes características.

La familia de estados coherentes $\Psi_{\alpha,\beta}(x, y)$, exhibe una forma estable para cualquier valor de los valores propios α y β (Figura 3), que determinan la ubicación del máximo pico de probabilidad. Además, la Figura 4 muestra el efecto de la anisotropía en estos estados: como el parámetro ζ crece, es decir, pasamos de un cono de Dirac alineado en la dirección p_x a uno alineado a la dirección p_y , la densidad de probabilidad es alineada siendo paralela al eje y para ser paralela al eje x , adquiriendo una proyección elíptica o circular sobre el plano xy . Cuando $\zeta = 1$, recuperamos los resultados en [29], por lo que podemos considerar esos como un caso particular de los estados coherentes aquí presentados.

La familia de estados coherentes $\Phi_\tau^{m_z}(x, y)$ se discute ampliamente en [34].

APÉNDICE A.

Estructura algebraica y estados propios

Para obtener las relaciones algebraicas asociadas a este sistema, hacemos la siguiente transformación de coordenadas

$$x = \zeta^{1/2} \rho \cos(\theta), \quad y = \zeta^{-1/2} \rho \sin(\theta), \tag{A.1}$$

que corresponden a la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{\zeta \rho^2} + \frac{y^2}{\zeta^{-1} \rho^2} = 1. \tag{A.2}$$

Así, definiendo la variable adimensional ξ como

$$\xi = \frac{\sqrt{\omega_B}}{2} \rho, \quad (\text{A.3})$$

los operadores del Hamiltoniano correspondientes en la ecuación (2) [19, 21, 30] pueden factorizarse en términos de dos conjuntos de operadores diferenciales, a saber [30, 35, 36],

$$\mathcal{H}^+ = A^+ A^- = B^+ B^- + L_z, \quad \mathcal{H}^- = \mathcal{H}^+ + 1, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$A^- = \frac{\exp(-i\theta)}{2} \left(\partial_\xi - \frac{i\partial_\theta}{\xi} + \xi \right), \quad A^+ = (A^-)^\dagger, \quad (\text{A.5})$$

$$A^- = \frac{\exp(-i\theta)}{2} \left(\partial_\xi - \frac{i\partial_\theta}{\xi} + \xi \right), \quad A^+ = (A^-)^\dagger, \quad (\text{A.6})$$

$$L_z = -i\partial_\theta = N - M, \quad (\text{A.7})$$

siendo $L_z = (\zeta^{-1} x p_y - \zeta y p_x) / \hbar$ la componente z de un operador similar al momento angular y $N = A^+ A^-$ y $M = B^+ B^-$ son operadores número. Los operadores anteriores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[A^-, A^+] = 1, \quad [B^-, B^+] = 1, \quad (\text{A.8})$$

$$[A^\pm, B^\pm] = 0, \quad [A^\pm, B^\mp] = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$[L_z, A^\pm] = \pm A^\pm, \quad [L_z, B^\pm] = \mp B^\pm, \quad (\text{A.10})$$

Estas relaciones implican que cada conjunto de operadores escalera A^\pm y B^\pm son generadores del álgebra de Heisenberg-Weyl y también son independientes entre sí.

La ecuación (A.10) implica que los operadores A^+ y A^- , al actuar sobre un estado propio de L_z , aumenta o disminuye, respectivamente, el valor propio de L_z en una unidad; mientras tanto, los operadores B^\pm tienen el efecto contrario.

Además, la acción de los operadores A^\pm y B^\pm en los estados $\psi_{m,n}$ son (ver Figura A1)

$$A^- \psi_{m,n} = \sqrt{n} \psi_{m,n-1}, \quad A^+ \psi_{m,n} = \sqrt{n+1} \psi_{m,n+1}, \quad (\text{A.11})$$

$$B^- \psi_{m,n} = \sqrt{m} \psi_{m-1,n}, \quad B^+ \psi_{m,n} = \sqrt{m+1} \psi_{m+1,n}. \quad (\text{A.12})$$

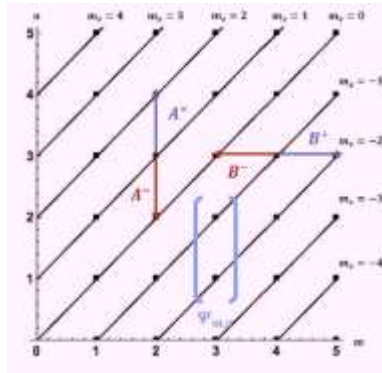


Figura A1: El espacio de estados escalares $\psi_{m,n}$ está unívocamente representado por las coordenadas (m, n) . Las líneas inclinadas conectan estados con el mismo momento angular $m_z = n - m$. El plano se divide en dos sectores de acuerdo a $m_z \geq 0$ (sector superior) o $m_z \leq 0$ (sector inferior).

Además, debido a la elección de la norma, está presente la simetría rotacional $[\mathcal{H}^\pm, L_z] = 0$ y las soluciones escalares $\psi_{m,n}$ en la ecuación (9) tienen simetría axial y degeneración infinita. En el sentido de sistemas dinámicos integrables, se dice que el problema abordado es integrable debido a que el operador de simetría L_z , conduce a la componente z del operador de momento angular siendo una cantidad conservada.

BIBLIOGRAFÍA

1. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva and A. A. Firsov, "Electric field effect in atomically thin carbon films", *Science*, 306 666, 2004.
2. Y. Zhang, Y-W Tan, L. S. Horst and P. Kim, "Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene", *Nature*, 438 201, 2005.
3. A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A. K. Geim, "The electronic properties of graphene", *Rev. Mod. Phys.*, 81 109, 2009.
4. M. Z. Hasan and C. L. Kane, "Colloquium: topological insulators", *Rev. Mod. Phys.*, 82 3045-67, 2010.
5. X-L Qi and S-C Zhang, "Topological insulators and superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, 83 1057-110, 2011.
6. S. Katayama, A. Kobayashi and Y. Suzumura, "Electronic properties close to Dirac cone in two-dimensional organic conductor α -(BEDT-TTF) $_2$ I $_3$ ", *Eur. Phys. J B*, 67 139-48, 2009.
7. K. Kajita, Y. Nishio, N. Tajima, Y. Suzumura and A. Kobayashi, "Molecular dirac fermion systems—theoretical and experimental approaches", *J. Phys. Soc. Japan*, 83 072002, 2014.
8. V. M. Pereira, A. H. Castro Neto and N. M. R. Peres, "Tight-binding approach to uniaxial strain in graphene", *Phys. Rev. B*, 80 045401, 2009.
9. G. G. Naumis, S. Barraza-Lopez, M. Oliva-Leyva and H. Terrones, "Electronic and optical properties of strained graphene and other strained 2D materials: a review", *Rep. Prog. Phys.*, 80 096501, 2017.
10. M. Oliva-Leyva and C. Wang C, "Magneto-optical conductivity of anisotropic two-dimensional DiracWeyl materials", *Ann. Phys.*, NY, 384 61-70, 2017.
11. E. Díaz-Bautista and D. J. Fernández, "Graphene coherent states", *Eur. Phys. J Plus*, 132 499, 2017.
12. E. Díaz-Bautista, Y. Concha-Sánchez and A. Raya, "Barut-Girardello coherent states for anisotropic 2D-Dirac materials", *J. Phys.: Condens. Matter*, 31 435702, 2019.

13. J. R. Klauder and B-S Skagerstam, "Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics" (Singapore: World Scientific) (<https://doi.org/10.1142/0096>), 1985.
14. A. Feldman and A. H. Kahn, "Landau diamagnetism from the coherent states of an electron in a uniform magnetic field", *Phys. Rev. B*, 1 4584-9, 1970.
15. F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, "Atomic coherent states in quantum optics", *Phys. Rev. A*, 6 2211-37, 1972.
16. Y. K. Wang and F. T. Hioe, "Phase transition in the dicke model of superradiance", *Phys. Rev. A*, 7 831-6, 1973.
17. W-M Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, "Coherent states: theory and some applications", *Rev. Mod. Phys.*, 62 867-927, 1990.
18. S. T. Ali, J. P. Antoine and J. P. Gazeau, "Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations 2nd edn" (New York: Springer) (<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8535-3>), 2014.
19. V. Fock, "Bemerkung zur quantelung des harmonischen oszillators im magnetfeld", *Z. Phys.*, 47 446, 1928.
20. L. Page, "Deflection of electrons by a magnetic field on the wave mechanics", *Phys. Rev.*, 36 444, 1930.
21. C. G. Darwin, "The diamagnetism of the free electron", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 27 86, 1931.
22. I. A. Malkin and V. I. Man'ko, "Coherent states of a charged particle in a magnetic field", *Sov. Phys.—JETP*, 28 527, 1969.
23. R. J. Glauber, "Coherent and incoherent states of the radiation field", *Phys. Rev.*, 131 2766, 1963.
24. L. Landau, "Diamagnetismus der Metalle", *Z. Phys.*, 64 629, 1930.
25. M. Oliva-Leyva and G. G. Naumis, "Understanding electron behavior in strained graphene as a reciprocal space distortion", *Phys. Rev. B*, 88 085430, 2013.
26. N. Goldman, A. Kubasiak, A. Bermudez, P. Gaspard, M. Lewenstein and M. A. Martin-Delgado, "Non-Abelian optical lattices: anomalous quantum Hall effect and dirac fermions", *Phys. Rev. Lett.*, 103 035301, 2009.
27. M. Oliva-Leyva and C. Wang, "Magneto-optical conductivity of anisotropic two-dimensional DiracWeyl materials", *Ann. Phys.*, NY, 384 61-70, 2017.
28. E. Díaz-Bautista and D. J. Fernández, "Graphene coherent states", *Eur. Phys. J Plus*, 132 499, 2017.
29. E. Díaz-Bautista, J. Negro and L. M. Nieto, "Partial coherent states in graphene", *J. Phys.: Conf. Series*, 1194 012025, 2019.
30. E. Drigho-Filho, Ş. Kuru, J. Negro and L. M. Nieto, "Superintegrability of the Fock-Darwin system", *Ann. Phys.*, NY 383 101, 2017.
31. V. V. Dodonov, "Coherent States and their Generalizations for a Charged Particle in a Magnetic Field" (Berlin: Springer) pp 311-38, 2018.
32. M. M. Novaes and J. P. Gazeau, "Multidimensional generalized coherent states", *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36 199, 2002.
33. A. Dehghani, H. Fakhri and B. Mojaveri, "The minimum-uncertainty coherent states for Landau levels", *J. Math. Phys.*, 53 123527, 2012.
34. E. Díaz-Bautista, M. Oliva-Leyva, Y. Concha-Sánchez and A. Raya, "Coherent states in magnetized anisotropic 2D Dirac materials", *J. Phys. A: math. Theor.*, 53 105301, 2020.
35. D. J. Fernández, J. Negro and M. A. del Olmo, "Group approach to the factorization of the radial oscillator equation", *Ann. Phys.*, NY 252 386, 1996.
36. K. Kikoin, M. Kiselev and Y. Avishai, "Dynamical Symmetries for Nanostructures: Implicit Symmetries in Single-Electron Transport Through Real and Artificial Molecules" (Berlin: Springer) (<https://doi.org/10.1007/978-3-211-99724-6>), 2012.

UN MODELO DE GESTIÓN DE RIESGOS ADMINISTRATIVOS EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA

Gabino Estevez Delgado¹, Lorena Franco Rios², Gabriela Cochran Tapia¹, Joaquin Estevez Delgado¹

¹Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo ²Secretaría de Educación del Estado de Michoacán. Unidad de Desarrollo Organizacional.
gabino.estevez@umich.mx.

RESUMEN

Si bien es cierto que la cultura de la prevención no es tan nueva y que en algunos campos del desarrollo de actividades humanas se han atendido, lo cierto es que los esfuerzos se dieron de manera aislada, hasta transformarse en procesos normados y regulados, inclusive se han construido técnicas que han permeado las normatividades más importantes como lo es la norma ISO 9001. Los consensos sobre cómo regular los riesgos y peligros han llevado a la construcción de directrices para generar modelos de gestión de riesgos, como es la norma ISO 31000, que de manera paralela acompañen a los sistemas de gestión de calidad, empatándose en la búsqueda del cumplimiento de objetivos propuestos por las empresas. Como parte del acompañamiento de los sistemas de gestión de riesgos se han agrupado técnicas para poder abordar los riesgos, y tener una gama de posibilidades que se adecuen a las actividades y a los objetivos planteados, de igual manera marcados como directrices en la norma ISO 31010. Sin embargo, la aplicación de las técnicas a fin de cumplan con el objetivo de reducción de riesgos o la erradicación de estos, requiere de un estudio profundo para quienes aplican las técnicas, lo que llega a complicar su objetivo. Como parte de la búsqueda de una técnica que permita poder abordar de manera eficaz los riesgos y que permita la toma de decisiones oportunas, se construyó una técnica basada en el análisis de las frecuencias relativas de los procesos medidos y empatada con la matriz de riesgos planteada en la misma norma. Al comparar el análisis de los resultados de riesgos observados en la atención a estudiantes que ingresan a una institución educativa en los procesos administrativos a partir de la técnica AMFE, Análisis Modal de Fallas y Efectos, y la técnica propuesta, se observó coincidencia de los resultados en un 98% de los casos, además que el modelo de análisis propuesto si permite anticiparse ante que se puedan materializar los riesgos y conllevar a la atención de no conformidades a diferencias de la técnica AMFE, como una de las técnicas más utilizadas, en el que las tendencias no se pueden anticipar en la gran mayoría de los casos. Por lo que podemos concluir que el modelo propuesto, no solo puede ser un modelo alternativo a los modelos de gestión de riesgos de uso común, sino que además puede ser utilizado de manera formal, pero sin recurrir a consideraciones poco formales como lo es la técnica de lluvia de ideas para la consideración de consecuencias de la ocurrencia de un evento determinado que lleve a incumplimiento de objetivos. Lo que además resulta oportuno en la atención administrativa de los estudiantes que inician un proceso determinado, como lo es la obtención de una inscripción, una constancia, una verificación de sus procesos administrativos, entre los más importantes.

INTRODUCCIÓN

Estar seguro de que en nuestras actividades hemos tomado, o tomaremos, la mejor decisión producto de considerar todas las aristas con las que se puede ver un planteamiento para la realización de una actividad, es un argumento casi imposible, por que nada nos asegura que conocemos todos los posibles escenarios. Más allá del pensamiento filosófico. sobre la nula seguridad de conocer todos los caminos de las decisiones que puede haber, lo que si podemos hacer es la construcción de las acciones a realizar sobre lo que hemos identificado, de tal forma que lo elegido tenga las menores eventualidades que nos aleje de lo planteado. Aquí surge diversas interrogantes que nos llevan a reflexiones de análisis, tales como: ¿qué elementos me permiten identificar la mejor opción? ¿cuándo es el momento de poder llevar el análisis?, ¿quiénes son las personas idóneas para poder llevar a cabo el análisis y sobre todo sobre las acciones a seguir para evitar eventos adversos?, ¿es factible anticiparnos a los eventos a priori, a fin de tener un control sobre las adversidades?, entre otras interrogantes, observamos que lo primero que debemos hacer

es identificar con claridad cuál es el objetivo que pretendemos. Si iniciamos por tener claridad en los objetivos tendremos respuestas concretas con mejores oportunidades de éxito, cuando hablamos de dar cumplimiento a un objetivo generamos diversos escenarios tanto para llevarlo a cabo como para adaptarnos ante los escenarios más adversos. Es en este momento, es oportuno considerar un concepto que nos permita la gestión de los posibles escenarios y conducirlo al mejor de todos ellos, o por lo menos plantear otros que nos permiten evitar un impacto negativo al tomar las decisiones, de tal forma que hablaremos de un concepto llamado riesgo, definido como la incertidumbre que se genera el cumplimiento de un objetivo. Cuando hablamos de incertidumbre estamos directamente relacionando el concepto de variabilidad, de tal forma que entre mas variabilidad tengamos mayor es la incertidumbre que se genera, esta relación directa sobre el concepto de riesgo, incertidumbre y variabilidad nos plantea la posibilidad de construir andamios cognitivos que nos permiten categorizar el nivel de riesgo, clasificarlos de acuerdo a los valores que se determinen, pero sobre todo anticiparnos a los eventos adversos, de tal forma que el nivel de prevención de un riesgo será de acuerdo a la categoría. De manera particular, en el campo de la administración, la toma de decisiones se realiza sobre proyectos que son planificados sobre objetivos concretos que buscan dar cumplimiento a estándares de entrega de bienes o prestación de servicios. Las variaciones que se pueden presentar en el cumplimiento de los objetivos de una acción administrativa nos alejan, primero de su logro y segundo del impacto que puede tener el cumplir parcialmente con el objetivo, lo cual generará riesgos y consecuencias sobre lo que se espera.

Cuando administrativamente se trabaja con estándares de calidad, las variaciones que se generan en el cumplimiento de los objetivos en un marco de regulaciones, la ventaja que se tiene es que podemos identificar las tendencias y anticiparnos a priori en las posibles desviaciones que nos permitan adecuar estrategias de atención. La principal ventaja de la planeación en un sistema de calidad implantado es que se puede medir el nivel de impacto de una posible variación y anticiparnos a los eventos adversos.

Un escenario que nos permite un espacio de actuación sobre la calidad, son las certificaciones y las acreditaciones en el que de manera explícita se solicita la atención de requisitos plasmados en las normatividades y con ello la ejecución de procesos o procedimientos tendientes a poder asegurar el cumplimiento de un objetivo y niveles de actuación ante variaciones que nos pueden alejar del cumplimiento de objetivos concretos.

Generar un escenario de calidad nos lleva a la implementación de un Sistema de Gestión de la Calidad, sujeto al cumplimiento de normatividades, como es el caso de las normas con estándares internacionales, tal como lo es la norma ISO 9001 cuyos lineamientos permiten garantizar que se tiene el compromiso de llevar a cabo lineamientos de calidad, reducir las variaciones en el servicio, tener políticas de actuación ante posibles desviaciones y sobre todo garantizar que los objetivos declarados, como políticas de calidad por parte de las instituciones, puedan garantizar la satisfacción de los clientes o usuarios que reciben un producto o servicio.

Llevar a cabo de manera armónica el cumplimiento de un objetivo y reducir las variaciones en la entrega de un resultado no siempre es tarea fácil, en múltiples ocasiones además de lo plasmado, se requiere anticiparse a escenarios y generar procedimientos para la actuación ante las variaciones, y en el peor de los escenarios, a establecer políticas de actuación que den respuesta a las inconformidades. Para llevar a un mejor terreno el cumplimiento de la calidad, se ha optado en la última versión de la norma ISO 9001, la cual nos permite construir de manera paralela al Sistema de Gestión de la Calidad un Sistema de Gestión de Riesgos, con la finalidad de cambiar la visión tradicional de actuar sobre la corrección o la prevención.

A raíz de las necesidades de no solo tener Sistemas de Gestión de la Calidad (International Organization for Standardization, ISO 9001:2015, 2019), se construyó lineamientos para generar un Sistema de Gestión de Riesgos (International Organization for Standardization, ISO 31000:2009, 2020), en el que en conjunto de ambos sistemas se puedan tomar mejores decisiones en el marco del cumplimiento de lo declarado en las normatividades o de lo que las propias empresas se han establecido. Una vez que se tienen lineamientos para tener un sistema de gestión de riesgos, tomando en consideración que los conceptos formales descansan sobre una base sólida de técnicas estadísticas (International Organization for Standardization, ISO 31010:2009, 2020). Dependiendo de las características del tipo de riesgo, dado de prevención, condiciones de operación,

pero sobre todo, de las consideraciones propias de la empresa, en el que la forma de atención puede ser solo cualitativa o cuantitativa. En este sentido, a partir de las exigencias de generar análisis de riesgos en todas las actividades declaradas en las normatividades en diversos rubros, se ha buscado técnicas que llenen las expectativas de análisis, pero que además sean lo mas completas posibles. Una de estas técnicas es la técnica de AMFE, Análisis Modal de Fallos y Efectos, resulta de bastante utilidad porque a partir de un valor llamado índice de prioridad de fallo, se puede determinar la categoría del riesgo que se puede presentar al llevar a cabo cada objetivo. La rentabilidad de las técnicas se convierte en potencial se articula de manera adecuada la información con la que se dispone, generalmente históricos de lo que se ha observado o se puede documentar sobre la incidencia de hechos que evalúan el incumplimiento del objetivo propuesto, la posibilidad de un análisis incorrecto al utilizar esta técnica de AMFE es que no se pueda determinar de manera robusta o que de manera subjetiva se evalúe: la probabilidad de las incidencias, la probabilidad de detección, o la severidad o impacto y que en consecuencias los resultados del análisis nos lleve a tomar decisiones incorrectas. De tal forma que cuando no se cuenta con información suficiente corremos estamos expuestos a generar análisis confiables, la forma de ir cubriendo las necesidades de análisis de información en estos casos es a través de técnicas poco confiable como son las lluvias de ideas o estudios sobre la opinión de lo que llamamos expertos, que si bien no son despreciables si llegan a carecer de objetividad e inclusive es difícil identificar que la experiencia es suficiente. En ese sentido, se debe buscar técnicas formales, que involucren un menor número de pasos o variables y que nos de la confianza que las técnicas de análisis de riesgos nos lleve a un análisis menos subjetivo.

TEORÍA

Analicemos la definición de riesgo antes de realizar una propuesta de análisis para los riesgos que pueden generarse producto de las actividades, lo que puede dar una mejor óptica sobre la obtención de la técnica propuesta. Como se ha mencionado el concepto de riesgo esta determinado a partir de la incertidumbre que se genera en el cumplimiento de un objetivo, el concepto involucra el constructo de incertidumbre el cual se bifurca a su vez a dos conceptos: la ley de propagación de los errores y el concepto de probabilidad. Derivado de esta proyección se puede observar la pertinencia del concepto de probabilidad, que además históricamente se ha incorporado en las temáticas de certeza sobre lo que se requiere, tal como el caso de la mecánica cuántica, teoría del error, teorías del estado sólido, en la metrología entre otras. Y el canal de la ley de propagación de los errores, que de manera natural se incorpora una densidad de probabilidad a cada una de las variaciones. De tal manera que cuando hablamos de la generación de un posible error intrínsecamente estamos generando distribuciones de probabilidad de los errores. Como punto de partida, podemos considerar que lo mas adecuado es suponer que los eventos son de carácter normal, considerando que tenemos información suficiente para poder inferir algún evento a partir de densidades de probabilidad paramétrica. Así, independiente de cuál sea la técnica de análisis sobre los riesgos, tendremos que suponer que al habla de incertidumbre o dispersión vamos a suponer que la información obtenida para dar una valoración sobre el acontecimiento tiene un respaldo con la información normalizada. Hablemos ahora de la técnica mas popular en varios sectores, pero de manera particular tomemos el sentido administrativo, la técnica de AMFE, requiere construir un valor determinado que se llama índice de probabilidad de prioridad de riesgo (IPR) el cual estará ligado a la obtención de los valores de probabilidad de lo que ocurra (P) y la importancia de ese evento que puede ocurrir lo que genera desviación sobre el cumplimiento del objetivo. A su vez, los valores de probabilidad de una desviación del objetivo están fundamentados sobre una distribución normal, en la que se determina por áreas el comportamiento con respecto de valores, considerando el grado que nos alejamos de un valor promedio y de acuerdo con las desviaciones estándar de ese valor. La importancia o consecuencia de materializarse un riesgo, es decir, en el caso de ocurrir el evento adverso al cumplimiento del objetivo se determina como una especie de daño, debido a ello en ocasiones también a la importancia o consecuencia también se le llama severidad.

La forma tradicional es obtener el factor de impacto de acuerdo a la siguiente expresión:

$$IPR = (g)(f)(d) \quad (1)$$

Donde: g es la gravedad si es que se presenta el evento, f la frecuencia con que suele ocurrir el evento de acuerdo a lo que se conoce de datos históricos y d el grado de detección, generalmente este esta referido a las complicaciones que resulta detectar una posible incidencia de los errores. La presente tabla permite categoriza los valores del riesgo de acuerdo con el índice de prioridad del riesgo

Tabla 1. Valoración del riesgo

Nivel de riesgo	IPR	Criterio de riesgo	Abreviatura
Bajo	<10	Aceptable	A
Medio	20-30	A controlar	C
Alto	>30	Inaceptable	I

De igual manera, en la siguiente tabla se presenta los valores mínimos y máximos permitidos

Tabla 2. Índice de prioridad de riesgo (IPR)

Valores	f	g	d	IPR
Mínimos	1	1	1	1
Máximos	10	10	10	1000

Sus criterios son determinados por la tabla siguiente:

Tabla 3. Puntuaciones para la determinación del índice de prioridad de riesgo, incluye escala de gravedad, frecuencia y detección

Puntuación	Frecuencia (f)	Gravedad (g)	Detección (d)
10	Muy alta	Peligrosos, pueden ocurrir sin previo aviso	Absolutamente seguro que no se detectará
9	Muy alta	Peligrosos, pueden ocurrir con previo aviso	Muy remota
8	Alta	Gravedad alta	Remota
7	Alta	Alta	Muy baja
6	Moderada	Moderada	Baja
5	Moderada	Baja	Moderada
4	Baja	Muy baja	Moderadamente alta
3	Baja	Menor	Alta
2	Baja	Mínima	Muy alta
1	Remota	Ninguna	Casi con toda seguridad se detectará

La asignación de valores está íntimamente ligada a lo que se menciona en la norma ISO 3100, sobre la matriz de riesgos y los valores se pueden adecuar al tamaño de la misma, particularmente podemos considerar una matriz de acuerdo a las consecuencias del materializarse un riesgo y de la probabilidad con que ocurra, de tal forma que una matriz de riesgos con 5 aspectos para la probabilidad y los mismos para la ocurrencia o el grado de severidad de presentarse el evento. Los valores asignados para las probabilidades a considerar están sujetos a la periodicidad con la que se presentan, así por ejemplo si el análisis se desarrolla de manera anual, los valores de asignación pudieran dividirse en eventos que ocurren a o largo de una semana, un mes, un trimestre, un semestre o un años, condición que podría modificarse si el evento a analizar se realiza en un periodo

más pequeño. La probabilidad asignada de materializarse un riesgo tendrá un valor más grande si se presenta en un periodo más corto de tiempo y podrá ser menor en un periodo de tiempo mas largo. Siguiendo el ejemplo de un evento que se analiza a lo largo de un año asignaríamos los siguientes valores: una probabilidad muy alta, asignándole 5 puntos, si el evento se presenta una o dos veces por semana; una probabilidad alta, asignándole 4 puntos, si el evento se presenta una vez al mes; una probabilidad media, asignándole 3 puntos; si el evento se presenta una vez al trimestre; una probabilidad baja, asignándole 2 puntos, si el la incidencia se puede presentar una vez al semestre y finalmente una probabilidad muy baja si el evento se presenta una vez al año, asignándole 1 punto. Para la severidad del daño o la consecuencia del mismo, se construyen criterios similares en las escalas como se hizo para el riesgo, de tal forma que un valor de consecuencia o severidad muy alto es el en el que los daños son catastróficos, asignándole un valor de 5 puntos; para el caso de un nivel alto es en que se detecta que los daños serán significativos, asignándole un valor de 4 puntos; en tanto que si consideramos que la consecuencia de ocurrir un daño este es severo en el cumplimiento del objetivo se le asignara un valor de 3 puntos; un escenario menos grave es la probabilidad de que pueda haber daño es baja, asignando un valor de 2 puntos, en tanto que si la probabilidad de un evento de daño en el evento analizar es muy bajo, prácticamente nulo, este se le asignara un valor de 1 punto

El enunciado de si se consideran consecuencias o severidad de la incidencia, así como la forma en que tomamos los eventos de probabilidad puede cambiar el contexto dependiendo de la temporalidad, por lo que podemos presentar la matriz de riesgos únicamente con valores de puntuaciones como se muestra a continuación:

Tabla 4. Matriz de riesgo (probabilidades y consecuencias)

Probabilidad	5	5	10	15	20	25
	4	4	8	12	16	20
	3	3	6	9	12	15
	2	2	4	6	8	10
	1	1	2	3	4	5
	Puntuaciones	1	2	3	4	5
	Severidad					

Para la generación de valores con los colores indicados, estos se pueden generar a partir de una tabla de frecuencias de los valores que aparecen en la tabla:

Tabla 5. Tabla de frecuencias para la asignación de colores

Valor	fi	Hi	fi x Hi	Nivel de Riesgo	Color
25	1	0.04	1	Riesgo alto	Rojo
20	2	0.12	1.6		
16	1	0.16	0.64		
15	2	0.24	1.2		
12	2	0.32	0.96	Riesgo moderado	Amarillo
10	2	0.4	0.8		
9	1	0.44	0.36		
8	2	0.52	0.64		
6	2	0.6	0.48		
5	2	0.68	0.4		
4	3	0.8	0.48	Riesgo bajo	Verde
3	2	0.88	0.24		
2	2	0.96	0.16		
1	1	1	0.04		

De acuerdo al valor de la frecuencia relativa se asigna el color, así el color rojo correspondiente a un valor de riesgo alto el cual representa los valores que corresponden al 20 % del área total, en tanto que el valor verde determina el otro 20 %, para tener en consideración el área máxima correspondiente al valor de los riesgos moderados. Recordando que existe una analogía entre el teorema de Laplace para el concepto de probabilidad y frecuencia relativa, de allí la posibilidad de darle un tratamiento a las frecuencias en correspondencia con el concepto de probabilidad.

Para el procedimiento propuesto, a contrastar, iniciemos por considerar el teorema de Bayes, en el que definimos una serie de eventos a los que llamaremos efectos o resultados como B_1, B_2, \dots, B_m , sujetos a otros eventos que le anteceden, de tal forma que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento B_j , está sujeto a un evento A_i , representado por su probabilidad condicional como $P(B_j/A_i)$, luego el teorema de Bayes expresa una forma particular el caso del teorema de Laplace para las probabilidades como:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)} \tag{2}$$

Donde: $P(A_i)$ son las probabilidades a priori, $P(B/A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis A_i $P(A_i/B)$ son las probabilidades a posteriori.

Si bien los datos que podremos alimentar nuestro valor de análisis pueden ser de diferente origen tal como datos que permitan identificar el riesgo, como es el caso de estudios de Fortalezas, Oportunidades, Debilidades y Amenazas (FODA), partamos de un estudio de escalar Likert, que bien diseñado podría implicar evaluaciones en teorías del test. Al momento de realizar una prueba podemos esta llevarla a frecuencias relativas de tal forma que las colocaremos de la siguiente forma:

Tabla 6. Formato para el vaciado de los valores de la escala likert

Frecuencia	Excelente	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
Absoluta					
Relativa					

De acuerdo con el nivel de asignación para las variables Malo, e inclusive el aspecto Regular, se podrán dar las siguientes consideraciones: si el nivel dado es superior a 0.1, debemos realizar el análisis por que se requiere atención para determinar si el riesgo puede ser moderado o alto, de ser inferior. consideraremos que no requiere de análisis por que no es un valor que ponga en riesgo el objetivo propuesto.

Tabla 7. Analisis considerando las escalas de riesgo (valor máximo de escala y valor máximo gaussiano) VME-VMG

CASO MALO	SECCIÓN DE ASIGNACIÓN DE NIVEL	Valor máximo de la escala Lickert	Valor máximo de la matriz de riesgo
		Valor obtenido en la característica Malo	Valor correspondiente con en la matriz
	CONCLUSIÓN SOBRE EL NIVEL DE RIESGO	Nivel de riesgo	

La comparación entre valores resulta natural si suponemos que la escala de valores lickert esta normalizada, lo que garantiza que los valores asignados provienen de una muestra robusta. Recordamos que en una distribución normal, los valores de la media y mediana coinciden y cuando hay moda también esta última. De tal forma que la comparación de valores máximos de escala lickert obtenida de la tabla 6 y el valor máximo de la matriz de la tabla 5 son comparaciones de curvas normales. El valor de comparación de aspecto desfavorable es el correspondiente al valor asignado correspondiente a la matriz de riesgos, de lo que deriva el último renglón en la comparación de riesgo. De aplicar alguna segunda consideración sobre la acción estaríamos aprovechando la determinación de la comparación de la tabla 7 y el teorema de Bayes de la ecuación de tal manera que las evaluaciones subsecuentes valorarían la eficacia de las acciones sobre el nivel de riesgo. En la siguiente sección pondremos un ejemplo sobre un aspecto administrativo que tiene que ver con los posibles riesgos de rebasar en nivel de atención declarados como un objetivo de calidad

PARTE EXPERIMENTAL

Se declaró el tiempo de atención de un servicio en ventanilla de no más de 30 minutos, en la que desde luego el tiempo y las características de cada proceso son un elemento que influye en el total del tiempo en la atención de servicio además de considerar elementos que no siempre son objetivos, tales como la capacitación del personal, la hora en al que se atiende al usuario, la entrega de requisiciones al usuario, la validación de la información presentada, y los elementos tecnológicos que puedan limitar la atención, entre lo más importante. Por un lado, se estimó por al menos una semana una encuesta de satisfacción del usuario, con 1200, cuya naturaleza es en escala lickert; a la par se determinó mediante el índice de prioridad de riesgo, considerando los valores obtenidos con personal que han atendido los procesos administrativos por al menos 5 años a fin de valorar un estudio AMFE. El conclusión del valor de AMFE, del valor de índice de prioridad de riesgo, nos llevó a determinar que el problema sobre el que puede incluir un riesgo es el procesamiento de la información, dando lugar a otro análisis sobre aspectos tecnológicos y de carácter psicológico sobre la carga de trabajo del personal.

Al evaluar el estudio propuesto VME-VMG, llevo a las mismas determinaciones, encontrándose las mismas coincidencias, al involucras en el análisis otros aspectos de apreciación sobre lo que apreciaron los usuarios, se encontraron coincidencias en los aspectos analizados de al menos un 98%.

RESULTADOS

Al realzar la comparación entre las dos técnicas tanto la de AMFE como la VME-VMG se observaron coincidencias pero resultaron importantes los siguientes aspectos mostrado en la presente tabla:

Tabla 8. Comparación de la técnica de AMFE contra la técnica propuesta VME-VMG

Aspecto	Fortalezas de los Métodos	Coincidencias o diferencias Diferencias
Tiempo de análisis	En el caso de VME-VMG el método reduce el tiempo de análisis.	En ambos el proceso es similar al poderse automatizar, sin embargo se invierte bastante en la generación de los valores a asignar mediante el método AMFE, pero coincidieron en el estudio en al menos 98% de los valores
Anticipación en algún nivel de atención posterior	El método de AMFE requiere volver a insertar nuevos datos para poder realizar una inferencia sobre lo que puede pasar, lo que limita en desarrollar un análisis posterior, traduciéndose en costos En tanto el método VME.VMG permite generar la simulación de cuál variable modificar y el nivel que se podría tener, lo que permite tomar acciones a priori.	El método AMFE es limitado para una segunda acción.
Número de participantes en el diseño del estudio	Mediante AMFE se requiere de expertos, sin ello no hay forma de mantener la confianza en el estudio, en tanto con el uso de la escala Likert se requiere un diseño adecuado de la misma, inclusive indagar sobre pruebas normalizadas para los cuestionarios o entrevistas.	Ambos requieren pruebas normalizadas.
Uso de matriz de riesgo	Ambos hacen uso del concepto de probabilidad y de evaluación del riesgo sobre un valor de la distribución normal, lo que garantiza la robustez de la prueba.	Los criterios del valor del riesgo es equiparable en ambas técnicas.

CONCLUSIONES

Se puede observar que se de acuerdo a la comparación de la técnica de AMFE y la propuesta generada a partir del concepto de probabilidad, VME-VMG, se tienen una técnica que involucra un menor número de análisis, pero que además involucra la mismas matriz de riesgos descrita en la técnica de AMFE o de otro tipo de técnicas, dando las mismas condiciones en la toma de decisiones. Haciendo uso de las frecuencias en presentadas podemos observar al modificar el valor de estas en donde debemos priorizar las estrategias de análisis, lo que particularmente resulta bastante útil como una oportunidad de mejora cuando el valor de las frecuencias queda en el límite de la categoría de análisis y que se convierta en un modelo que permita la gestión del riesgo. En el caso administrativo, las acciones a tomar derivado del análisis de la categoría del riesgo puede llevar a reducción de gastos en las acciones o la atención mas adecuada lo que se transforma en la satisfacción de servicios en calidad de atención, en la reducción de tiempos y en la construcción de criterios mas objetivos sobre el servicios, pero no menos importante resultan las acciones en las que podemos observar cuando podemos trasladar el riesgo a un tercero a través de la contratación de servicios como lo pueden ser los seguros sobre el posible daño o deterioro de nuestros insumos o de la propiedad misma del cliente, siendo las decisiones a partir del análisis lo que puede llevar a este análisis.

BIBLIOGRAFÍA

1. International Organization for Standardization, ISO 31000:2009. (01 de 01 de 2020). ISO 31000:2009. Risk management — Principles and guidelines. Obtenido de <https://www.iso.org/standard/43170.html>
2. International Organization for Standardization, ISO 31010:2009. (01 de 01 de 2020). IEC 31010:2009, Risk management — Risk assessment techniques. Obtenido de <https://www.iso.org/standard/51073.html>
3. International Organization for Standardization, ISO 9001:2015. (12 de 11 de 2019). ISO 9001:2015(en) Quality management systems- Requirements. Obtenido de <https://www.iso.org/ui/#iso:std:iso:9001:ed-5:v1:en>

EFFECTO DE CAOS ELECTROMAGNÉTICO EN UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FOTÓNICO FINITA CON INCLUSIONES CILÍNDRICAS

Alejandro Bucio Gutiérrez, Hugo Enrique Alva Medrano, Héctor Pérez Aguilar y Alberto Mendoza Suárez

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Alejandrobg_sonic@hotmail.com, hugoalva9@gmail.com, hiperezag@yahoo.com, amendozas777@yahoo.com.mx

RESUMEN

El estudio de las propiedades estadísticas de los sistemas desordenados es de fundamental importancia porque conduce a fenómenos tales como localización débil (retroesparcimiento reforzado) y fuerte (Anderson), fluctuaciones de conductancia universal y correlaciones de intensidad. Además, recientes desarrollos en la teoría de sistemas desordenados basados en modelos no lineales o usando la teoría de supersimetría han llevado al reconocimiento de que el límite difusivo extremo de los sistemas desordenados también se comporta de manera similar a los sistemas caóticos cuánticos. Entre estos últimos sistemas que son de creciente interés son las guías de onda cuánticas. Estos sistemas se utilizan para estudiar posibles aplicaciones tecnológicas y efectos cuánticos, como los efectos Aharonov-Bohm. De igual manera se ha investigado la presencia del caos en el transporte clásico a través de guías de ondas, mostrando un comportamiento diferente para la resistividad cuando el sistema es regular o caótico. Teniendo esto en cuenta, en nuestro trabajo consideramos un sistema electromagnético compuesto por dos superficies planas perfectamente conductoras y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares que forman una guía de ondas de cristal fotónico (PCW). Este sistema periódico tiene una estructura de bandas dada por una relación de dispersión que nos permite caracterizar los modos normales del sistema. Sin embargo, una PCW realista tiene siempre una longitud finita y para ello consideramos un número de periodos suficiente que representan la PCW perfectamente periódica. La técnica numérica aplicada se le conoce con el Método de la Ecuación Integral y permite calcular las intensidades de campo correspondientes a los modos normales en un amplio rango de frecuencias. Además, se calcularon las propiedades estadísticas espaciales de la densidad de probabilidad; en particular, la función de autocorrelación y la longitud de correlación. Cuando esta última es muy pequeña, el sistema presenta patrones desordenados de intensidades de campo. Así bajo ciertas condiciones, el sistema correspondiente presenta un comportamiento caótico. Por lo tanto, se puede concluir que el efecto del caos electromagnético contribuye a la presencia de patrones de campo desordenados que podrían tener varias aplicaciones como en criptografía.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la propagación y esparcimiento de ondas clásicas y cuánticas es un tema de gran interés tanto para científicos como para ingenieros. Esto no es de sorprenderse puesto que las ondas son uno de los pilares de la comunicación, detección y medición. Fenómenos tales como la difusión de electrones en potenciales aleatorios [1], la difusión del spin [2], las oscilaciones periódicas en la magnetoresistencia de anillos de aluminio sometidos a campos magnéticos [3] e interacciones de haces de luz polarizados incidiendo en superficies rugosas de PEC [4] han sido estudiadas teóricamente a partir de las propiedades estadísticas de cada sistema. Siendo las propiedades estadísticas las que vislumbran comportamientos desordenados en estos sistemas. De la teoría de supersimetría [5] resulta que el límite difusivo extremo de los sistemas desordenados clásicos también se comporta de manera similar a los sistemas caóticos cuánticos. Pudiendo relacionar estos sistemas clásicos desordenados con un comportamiento caótico. Entre los sistemas con comportamiento desordenado destacan las guías de ondas tratadas como cristales fotónicos que muestran comportamientos diferentes dadas las condiciones que se toman en algunos de los cuales presentan comportamientos caóticos [6-10]. Por otro lado también se han obtenido resultados experimentales sobre comportamiento caótico en este tipo de sistemas, tal es el caso de las fibras ópticas con sección transversal no circulares donde los rayos de luz exhiben una dinámica caótica [11]. También se conoce que el fenómeno de interferencia aleatoria básica que subyace a los

patrones desordenados tiene grandes similitudes en muchas otras ramas de la física y la ingeniería [7]. Estos patrones irregulares se describen mejor mediante métodos de teoría de probabilidad y estadísticas. Para explicar estos patrones irregulares en algunos trabajos se ha considerado que la geometría de las guías de onda infinitas son como un sistema de billar, lo que permite estudiar sus propiedades de transporte cuánticas y clásicas [12]. Además es bien sabido que una guía de ondas compuesta por conductores perfectos puede ser tratada como un cristal fotónico lo que permite obtener su estructura de bandas [13] que es de vital importancia en el estudio de propiedades estadísticas en este tipo de sistemas. Vale la pena mencionar que el uso de geometrías similares al sistema aquí propuesto para modelar el campo electromagnético en una guía de ondas clásica (o cuántica [14] o acústica [17]), generalmente conducen a un comportamiento caótico cuando se consideran valores de frecuencias altos [12-17]. Un entendimiento pleno del caos en este tipo de sistemas ya sean clásicos o un sistema análogo de ondas cuánticas podría dar lugar a grandes aportes en áreas como la criptografía y en circuitos ópticos integrados. Para dar una satisfactoria explicación, es necesario comenzar este trabajo hablando de la teoría para una PCW infinita con inclusiones cilíndricas circulares para posteriormente relacionarlo con un sistema análogo finito. Así evitaremos perder de vista que este trabajo trata de examinar una PCW finita compuesta por dos superficies planas de PEC con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares de PEC. En las siguientes secciones se describe brevemente como se obtiene la intensidad del campo reflejada para un campo incidente con polarización TE, usando el método de la ecuación integral para su resolución. A su vez, se describe el cómo se obtiene la longitud de correlación (desviación estándar de la función de autocorrelación ACF) para finalmente dar las conclusiones de estos resultados.

TEORÍA

Iniciaremos por simplicidad con el sistema infinito compuesto de dos placas de PEC con inclusiones cilíndricas circulares también de PEC (Fig. 1), el cual puede ser tratado como un cristal fotónico bidimensional con una infinidad de celdas unitarias formadas por un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares en la dirección x [13]. Asumimos que este sistema es invariante a lo largo de todo el eje z.

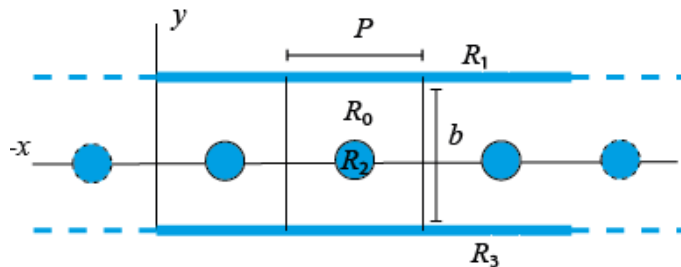


Figura 1. Diagrama de una PCW infinita con inclusiones cilíndricas circulares de PEC.

Para calcular numéricamente las intensidades correspondientes de los modos propios del sistema, usamos el método de la ecuación integral [12-15]. Asumiendo una dependencia armónica del tiempo para los campos electromagnéticos con polarización TE o TM, $\vec{E} = E(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \hat{k}$, al cual puede aplicarse el teorema de Bloch debido a la periodicidad de la guía de ondas, $\vec{E}(x-P, y) = \vec{E}(x, y) \exp(-i\vec{K}P)$ donde \vec{K} es el vector unidimensional de Bloch. Consideramos la ecuación de onda para el medio j, la cual es transformada en la ecuación de Helmholtz

$$[\nabla^2 + k_j^2] E_j(\vec{r}) = 0, \tag{1}$$

$$k_j = n_j(\omega) \frac{\omega}{c}, \tag{2}$$

donde \vec{r} es el vector de posición en el plano xy, con n_j el índice de refracción del medio j. La Ec. (1) puede ser representada en forma integral para el medio j, considerando como solución la función de Green bidimensional y la segunda identidad del teorema de Green [12,13]. Así, es obtenida la forma general de la ecuación integral de Helmholtz para el medio j,

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial E(\vec{r}')}{\partial n'} - E(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] ds' = E(\vec{r}) \Theta(\vec{r}), \quad (3)$$

con

$$G(R) = \frac{i}{4} H_0^1(kR), \quad (4)$$

siendo $H_0^1(\zeta)$ la función de Hankel de primer tipo y orden cero, $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$ y $\Theta(\vec{r})=1$ si \vec{r} está dentro de la región j y $\Theta(\vec{r})=0$ en caso contrario. Dada la geometría, el problema se debe plantear como un sistema de n ecuaciones (una por cada región o interfaz entre medios homogéneos distintos) en las que se deben satisfacer las condiciones de frontera para la polarización TE:

$$E^j = E^{j'}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\epsilon_j} \frac{\partial E^j}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_j'} \frac{\partial E^{j'}}{\partial n}. \quad (6)$$

Para conductores perfectos el problema se simplifica notablemente; por ejemplo, en el caso de la polarización TE, el campo es cero por lo que no hay campo dentro de los conductores perfectos. Para resolver la Ec. (3) numéricamente, es necesario hacer una discretización dividiendo la curva Γ de la región j en segmentos de curva Γ_i de longitud de arco Δs lo suficientemente pequeños para que el campo y su derivada normal sean constantes. Así, las integrales de la Ec. (3) para la región j pueden aproximarse como sigue:

$$\oint_{\Gamma} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial E(\vec{r}')}{\partial n'} \right] ds' \approx \sum_n \Phi_n L_{mn}, \quad (7)$$

$$\oint_{\Gamma} \left[E(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] ds' \approx \sum_n \Psi_n N_{mn}, \quad (8)$$

siendo

$$\Phi_n = \left. \frac{\partial E(\vec{r}')}{\partial n'} \right|_{\vec{r}'=\vec{r}'_n}, \quad (9)$$

$$\Psi_n = E(\vec{r}')_{\vec{r}'=\vec{r}'_n}, \quad (10)$$

$$L_{mn} = \int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} G(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (11)$$

y

$$N_{mn} = \int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} ds'. \quad (12)$$

En las expresiones anteriores el subíndice m denota el punto de observación y n el de integración. Sustituyendo la Ec. (4) en las Ecs. (11) y (12) para obtener formas explícitas, es necesario además considerar que la función de Green tiene una singularidad removable en el caso bidimensional en $\vec{r} = \vec{r}'$; ya que en este punto es donde se localiza la fuente puntual que da origen a esta función. Se llega entonces a que las Ecs. (11) y (12) son respectivamente:

$$L_{mn} = [1 - \delta_{mn}] \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}(k_j |\vec{r}_m - \vec{r}_n|) + \left[\frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left(k_j \frac{\Delta s}{2\epsilon_j} \right) \right] \delta_{mn}, \quad (13)$$

$$N_{mn} = [1 - \delta_{mn}] \frac{i\Delta s k_j}{4} \hat{n}_n \cdot \frac{(\vec{r}_m - \vec{r}_n)}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|} H_1^{(1)}(k_j |\vec{r}_m - \vec{r}_n|) + \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{n}_n \cdot \hat{t}_n' \right] \delta_{mn}, \quad (14)$$

siendo \hat{n}_n la normal y \hat{t}_n' el vector de curvatura.

Por tanto, hemos convertido el conjunto de ecuaciones integrales de la Ec. (3) en un sistema de ecuaciones lineales que puede ser representado por matrices como:

$$F(\vec{K}, \omega) M(\vec{K}, \omega) = 0, \quad (15)$$

donde M es la matriz representativa asociada al sistema, la cual depende de la frecuencia ω y el vector de Bloch \vec{K} . Dado que el sistema de ecuaciones es homogéneo, se puede obtener una solución no trivial si el determinante de dicha matriz es cero. Es posible determinar la estructura de bandas al encontrar la relación de dispersión $\omega = \omega(\vec{K})$ y con ella los modos propios del sistema. Para ello, definimos la función determinante:

$$D(\vec{K}, \omega) = \text{Ln}(|\det(M(\vec{K}, \omega))|), \quad (16)$$

la cual presenta puntos mínimos locales que darán la relación de dispersión numérica, que determina los modos propios del sistema para una frecuencia específica.

Guías de ondas de cristal fotónico finita

Como el sistema a desarrollar en este proyecto es finito, puede ser tratado como un cristal fotónico bidimensional con celdas unitarias truncadas formadas por un arreglo de varias inclusiones cilíndricas circulares como se muestra en la Fig. 2. El haz de luz ilumina el sistema a incidencia normal; así que además de la teoría ya mencionada se considera un haz incidente (en la región $j=0$) y el cálculo del campo esparcido como respuesta de la guía de ondas [13].

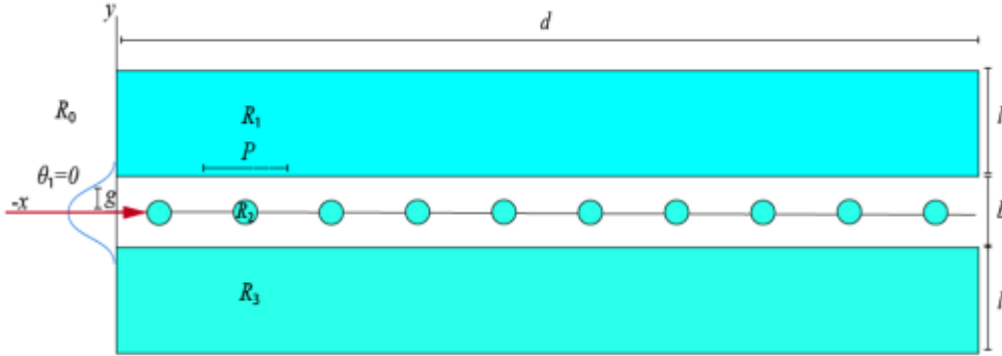


Figura 2. Diagrama de la guía de ondas finita de conductor perfecto con inclusiones cilíndricas circulares.

Para evitar los efectos de borde lo iluminamos con un haz Gaussiano cuya intersección con el plano de la guía tiene un ancho medio g . Este parámetro debe ser más pequeño que la longitud total del sistema $L_y=2l+b$, pero mucho más grande que la anchura de la abertura de la guía de ondas b (ver Fig. 2). Así se puede considerar un haz incidente en la Ec. (3) en términos de un espectro denotado por $A(q,0)$ [15]:

$$E_{inc}(\vec{r}) = \int_{-\omega/c}^{\omega/c} \frac{dq}{2\pi} A(q,0) \exp\{i(qx - \alpha_0(q)y)\}, \tag{16}$$

siendo

$$\alpha_0(q) = [(\omega/c)^2 - q^2]^{1/2}, \tag{17}$$

$$A(q,0) = \psi_0 \sqrt{\pi} g \exp\left\{\frac{(gq)^2}{4} + i\alpha_0(q)d\right\}, \tag{18}$$

donde la parte real e imaginaria de α_0 son positivos, ψ_0 es una constante con unidades apropiadas y d es la separación de las placas que se muestra en la Fig. 2. Similarmente los campos esparcidos transmitido ($x > d$) y reflejado ($x < 0$) con polarización TE, pueden ser escritos con el signo + para el campo reflejado y el - para el transmitido [13,15]:

$$E_{sc}^{\pm}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^{\pm}(q,\kappa) \exp\{-i(qx \pm \alpha_0(q)y)\}, \tag{19}$$

$$S^{\pm}(q,\kappa) = \frac{i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^B \left[\int_{\Gamma_j} \left[-\frac{\partial E^0(\vec{r})}{\partial n} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_n} \right] \exp\{-i(qx \mp \alpha_0(q)y)\} ds, \tag{20}$$

siendo B el número de cuerpos existentes que en nuestro caso son 12 (las dos placas y las 10 inclusiones). Para la propagación de ondas, podemos identificar las componentes del vector de onda dado como $q = k \sin(\theta_s)$ y $\alpha_0(q) = k \cos(\theta_s)$, donde θ_s es el ángulo de esparcimiento ya sea reflejado o el transmitido. Con estas formas de los campos incidente, reflejado y transmitido se pueden obtener las potencias incidente y esparcida y con ello la reflectancia y transmitancia. Para mayor detalle se pueden consultar las Refs. [13,15].

RESULTADOS

En métodos computacionales es común introducir valores adimensionales, por lo que nuestros resultados se expresan en términos de un vector de Bloch reducido dado por $\vec{K}_r = (P/2\pi)\vec{K}$ y una frecuencia reducida dada por $\omega_r = (P/2\pi)\omega$. Para la obtención de resultados confiables en el caso de altas frecuencias, es necesario utilizar intervalos de discretización pequeños. Para nuestros cálculos

se utilizó $\Delta s=(P/\omega_{rMax})/20$ en los sistemas infinito y finito de guías de ondas con inclusiones cilíndricas circulares. Esta sección comienza con los resultados del campo obtenido para un sistema de una PCW infinita con periodicidad $P=2\pi$ de inclusiones cilíndricas circulares de radio $a=0.3b$, donde $b=1.5$ es la separación entre las placas (ver Fig. 1). Estas intensidades del campo tomadas de la Ref. [17] para dos frecuencias reducidas $\omega_r=1.2101$ y $\omega_r=70.0224$ son mostradas en las Figs. 3(a) y (c), respectivamente; las cuales serán comparadas con nuestros resultados del caso finito. Para ambos casos, se calcularon las correspondientes funciones de autocorrelación (ACFs) (Figs. 3(b) y (d)) y sus longitudes de correlación σ definidas como la desviación estándar de la función de autocorrelación. Para la PCW infinita, por simplicidad se consideró el vector de Bloch reducido $\vec{K}_r=0$ bajo la polarización TM.

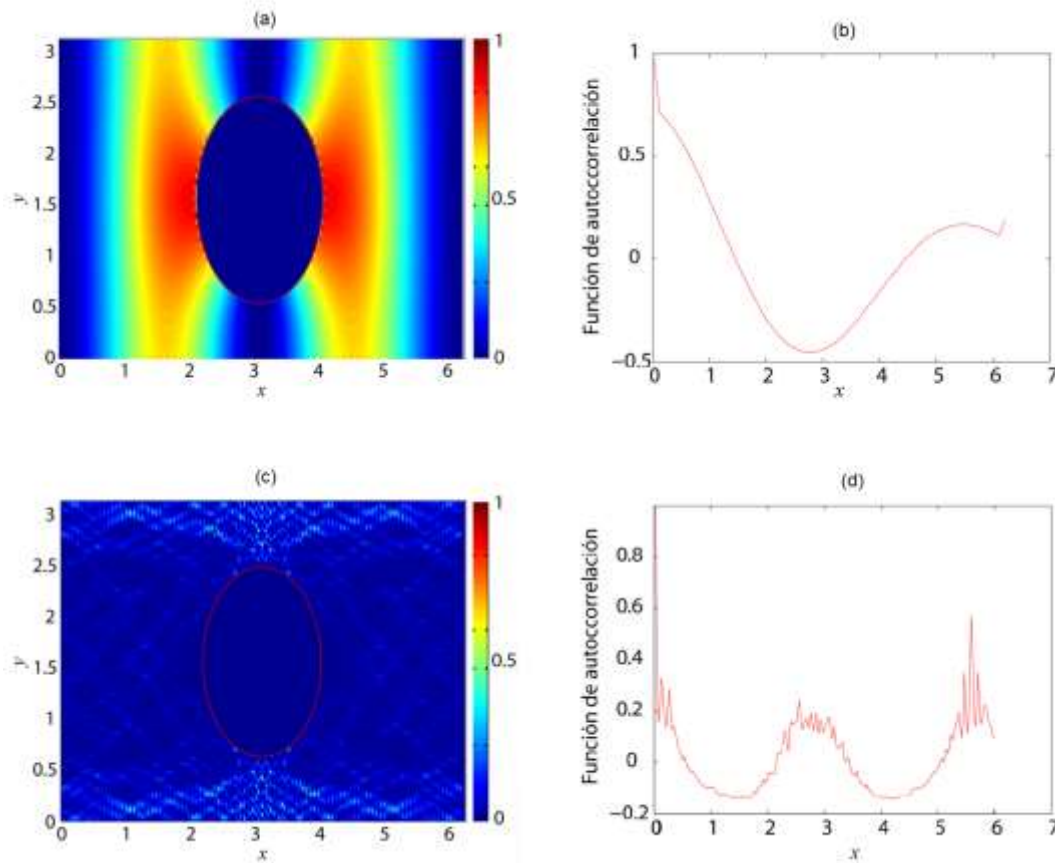


Figura 3. Intensidades del campo para una PCW infinita con inclusiones cilíndricas de PEC para la frecuencia reducida (a) $\omega_r=1.2101$ con su ACF en (b) y (d) $\omega_r=70.0224$ con su ACF en (d).

Para la frecuencia más baja, la longitud de correlación obtenida es $\sigma=0.3461$ y para la frecuencia más alta se obtiene una menor de $\sigma=0.0744$. En especial para la frecuencia más alta se puede apreciar en la Fig. 3(c) que muestra una distribución de los patrones del campo con mayor desorden. Los cálculos mostrados nos llevan a pensar que la intensidad del modo propio es una variable aleatoria no correlacionada en función de un punto (x,y) en la celda unitaria; por lo que podría ser una manifestación del caos de ondas electromagnéticas. Los patrones desordenados de los modos de la intensidad de campo de la Fig. 3(c) no son suficientes para garantizar la presencia del caos en el sistema; sin embargo, algunos sistemas clásicos con geometría similar, como los billares de Sinai [16], presentan un comportamiento caótico, y éste es nuestro principal argumento para interpretar estos resultados como una manifestación de caos electromagnético.

PCW realista

En los resultados anteriores, asumimos una PCW de longitud infinita; sin embargo, las guías de ondas que podemos analizar experimentalmente son de longitud finita. Por consiguiente, vamos a ver si el patrón del campo desordenado de la PCW ideal (longitud infinita) aparece en el caso de una PCW de longitud finita. Para ello, vamos a considerar una PCW con 10 inclusiones cilíndricas circulares iluminada con un haz incidente con polarización TE a incidencia normal. El sistema está formado por dos bloques de PEC que forman la guía de ondas con separación entre las placas de $b=4\pi$, espesor $l = 1.71$ y longitud $d=20\pi$, con inclusiones cilíndricas de radio $a=0.1b$ (ver Fig. 2). Como ejemplo para las frecuencias reducidas $\omega_r=1.7607$ y $\omega_r=4.9302$, las intensidades de campo obtenidas se muestran en las Figs. 4(a) y (c). Las curvas de las ACFs de las Figs. 4(b) y (d) fueron obtenidas con la región superior de la celda debido a la simetría de la PCW. Además las longitudes de autocorrelación fueron $\sigma=0.2807$ para la frecuencia menor y para la frecuencia mayor de $\sigma=0.3278$, observando que esta última no decrece abruptamente debido a que la frecuencia no es suficientemente grande para exhibir el comportamiento caótico. De acuerdo a nuestros estudios, con frecuencias reducidas del orden de 70 es posible observar el fenómeno de caos en el sistema electromagnético de la Fig. 3(c). Tenemos la hipótesis de que a frecuencias del orden similar en el sistema finito serán suficientes para observar el fenómeno de caos; sin embargo no hemos podido hacer cálculos a frecuencias de ese orden debido al poder computacional requerido.

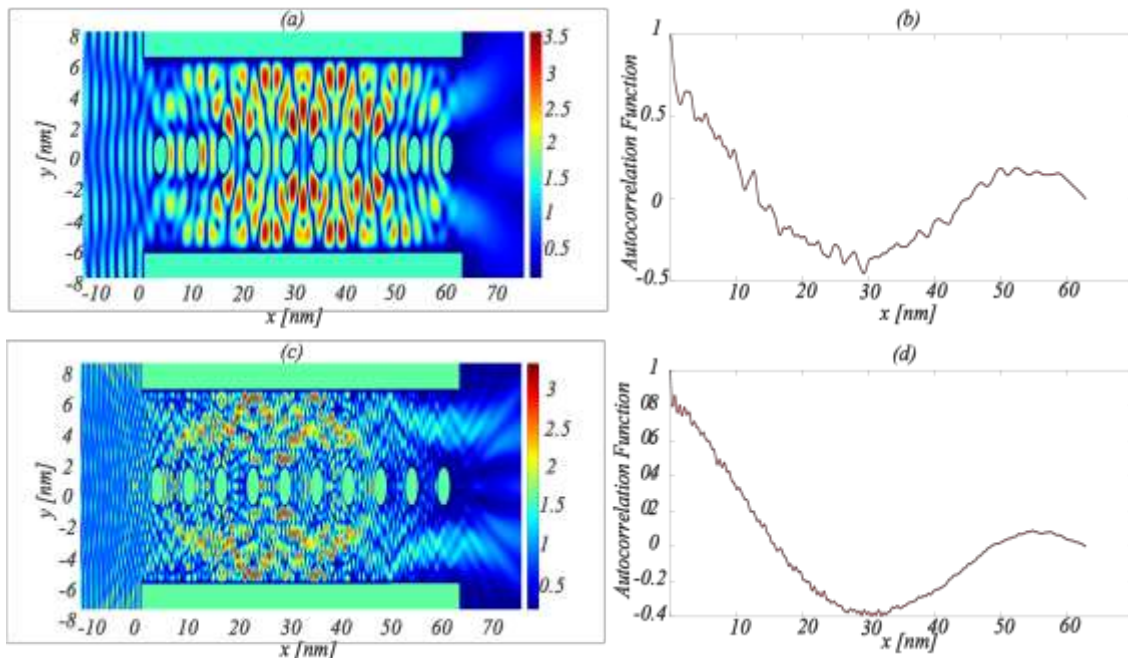


Figura 4. Intensidades del campo para una PCW finita con 10 inclusiones cilíndricas de PEC para frecuencias reducidas (a) $\omega_r=1.7607$ con su ACF en (b) y (c) $\omega_r=4.9302$ con su ACF en (d).

CONCLUSIONES

Se aplicó un método integral numérico a la ecuación de Helmholtz para estudiar el fenómeno de caos electromagnético en una PCW de longitud finita e infinita con inclusiones cilíndricas circulares. Para la PCW infinita con frecuencias reducidas altas (valor alrededor de 70), se obtienen patrones desordenados de la intensidad del campo. Estos patrones desordenados están asociados con sistemas caóticos, por lo que este resultado confirma que una PCW con inclusiones cilíndricas circulares también presenta este fenómeno. Otra forma de corroborar esta aseveración es mediante el valor de la longitud de correlación de la función de autocorrelación que tiende a cero cuando el sistema clásico correspondiente es caótico. Creemos que un fenómeno, como el mostrado en el caso de la PCW infinita, para patrones de intensidades de campo desordenados, debe comenzarse a

observar en la guía finita para frecuencias reducidas del orden de 70. Sin embargo, requiere un poder computacional muy alto. No obstante, son interesantes estos resultados ya que tienen posibles aplicaciones en criptografía.

BIBLIOGRAFÍA

1. Sheng, P., "Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media," World Scientific Publishing, Singapore, (1990).
2. Anderson, P. W., "Absence of diffusion in certain random lattices," *Phys. Rev.*, Vol. 109, No. 5, pp. 1492-1505, (1958).
3. Webb, R. A. and Washburn, S. and Umbach, C. P. and Laibowitz, R. B., "Observation of the Aharonov-Bohm oscillations in normal-metalrings," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 54, No. 25, pp. 2696-2699, (1985).
4. Michel, T. R. and O'Donnell, K. A. "Angular correlation functions of amplitudes scattered from a one-dimensional, perfectly conducting rough surface," *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 9, No. 8, pp. 1374-1384, (1992).
5. A.D. Mirlin, A. Mullergroeling, M.R. Zirnbauer, "Conductance fluctuations of disordered wires: Fourier analysis on supersymmetric spaces," *Ann. Phys.*, Vol. 236, No. 2, pp. 325-373, (1994).
6. C.M. Natarajan, A. Peruzzo, S. Miki, M. Sasaki, Z. Wang, B. Baek, S. Nam, R.H. Hadfield, J.L. O'Brien, "Operating quantum waveguide circuits with superconducting single-photon detectors," *Appl. Phys.* Vol. 96, No. 21, 211101, (2010).
7. J.-T. Shen and S. Fan, "Two-electron transport in a quantum waveguide having a single Anderson impurity," *New J. Phys.*, Vol. 11, No.11, 113024, (2009).
8. J.-B. Xia, "Quantum waveguide theory for mesoscopic structures," *Phys. Rev. B*, Vol. 45, No. 7, pp. 3593-3599, (1992).
9. Luna-Acosta, G. A. and Krokhin, A. A. and Rodríguez, M. A. and Hernández-Tejeda, P. H., "Classical chaos and ballistic transport in a mesoscopic channel," *Phys. Rev. B*, Vol. 54, No. 16, 11410, (1996).
10. I.F. Herrera-González, G. Arroyo-Correa, A. Mendoza-Suárez, E.S. Tututi, "Study of the resistivity in a channel with dephased ripples," *Int.J. Mod. Phys. B.*, Vol. 25, pp. 683-698, (2011).
11. Valérie Doya, Olivier Legrand, and Fabrice Mortessagne, "Light Scarring in an Optical Fiber," *Phys. Review Letters*, Vol. 88, No. 1, 014102, (2002).
12. H. Pérez-Aguilar, A. Mendoza-Suárez, E. S. Tututi, and Ivan F. Herrera-González, "Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces," *Progress In Electromagnetics Research B.*, Vol. 48, pp. 329-346, (2013).
13. A. Mendoza-Suárez, H. Pérez-Aguilar, and F. Villa-Villa, "Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves as a photonic cristal," *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 121, pp. 433-452, (2011).
14. H. Pérez-Aguilar, A. Mendoza-Suárez, E.S. Tututi, I.F. Herrera-González, "Chaotic behavior of a quantum waveguide," *Physica B*, Vol. 411, pp. 93-98, (2013).
15. H. Pérez-Aguilar and C. I. Valencia, E. R. Méndez and J. A. Sánchez-Gil, "On the transmission of diffuse light through thick slits," *J. Opt. Soc. Am. A.*, Vol. 26, No. 4, (2009).
16. Ya.G. Sinai, "On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics," *Doklady Akademii Nauk SSSR (in Russian)*, (1963).
17. H. E. Alva Medrano, A. Mendoza Suárez y H. Pérez Aguilar, "Guía de ondas de cristal fotónico que presenta patrones de intensidad de campo desordenados," publicado en las memorias del 14º Congreso Estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación celebrado el 29 y 30 de octubre de 2019, Morelia, Mich.

CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES TIPO WEYL EN TEORÍA DE RASTALL

Joaquin Estevez Delgado¹, Gabino Estevez Delgado² y Jesús Iván Mejía Navarro³

¹Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH, ²Facultad de Químico Farmacobiología, UMSNH, ³Escuela Preparatoria Melchor Ocampo de la UMSNH

¹joaquin@fismat.umich.mx, ²gestevez.ge@gmail.com, ³jimn2409@gmail.com

RESUMEN

La estructura de las ecuaciones en teorías de gravedad implica restricciones sobre la existencia de soluciones para una geometría y una fuente de materia dadas. Un ejemplo conocido sobre las restricciones que el tensor momento impone sobre la geometría (en el formalismo de Einstein) es en el que se considera un espacio tiempo estático y axialmente simétrico con fuentes formadas por un campo escalar; en este caso no es posible construir soluciones tipo Weyl. En este trabajo expondremos las condiciones que debe satisfacer el tensor de momento energía para la existencia de soluciones tipo Weyl en el marco de la teoría de gravitación de Rastall; además, demostraremos que, si la traza del tensor de momento energía es cero y existen soluciones tipo Weyl en el marco de la relatividad general de Einstein, entonces existen soluciones tipo Weyl en el marco de la teoría de Rastall.

INTRODUCCIÓN

El poder construir soluciones en una teoría es relevante debido a que nos permite entender el tipo de estructuras que estas implican. En el caso de teorías de gravitación, las soluciones nos ayudan a entender la naturaleza del espacio-tiempo, así como sus propiedades [1]. Esto ha permitido describir, de una manera aceptable el universo [2], a través del modelo estándar de cosmología [3], predecir la existencia de agujeros negros [4], entre otros. Para poder obtener una solución exacta o incluso construir una solución mediante métodos numérico es necesario imponer restricciones sobre la geometría, estas son conocidas como simetrías [4], el tipo de simetrías permite representar la métrica asociada a estas en una forma particular mediante la adaptación de las coordenadas a las simetrías, relacionadas con vectores de Killing [5]. Una de las simetrías es la estática y axialmente simétrica, en la que existen dos campos vectoriales de Killing uno temporal y otro axialmente simétrico que conmutan entre sí, la métrica de Weyl tiene esta simetría y adicionalmente existe una función que es armónica, y permite reducir el número de funciones para representar la geometría únicamente con dos funciones. La importancia de que a partir de un tensor de momento energía se puedan tener soluciones tipo Weyl radica en que en esta carta coordenada se puede tener superposición de las soluciones [6]. En el caso de las ecuaciones de Einstein en el vacío, las dos funciones μ y ν que definen la métrica satisfacen las ecuaciones [1]

$$-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \mu(\rho, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mu(\rho, z) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \mu(\rho, z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \nu(\rho, z) = \rho \left[\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \mu(\rho, z) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} \mu(\rho, z) \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \nu(\rho, z) = 2\rho \left(\frac{\partial}{\partial z} \mu(\rho, z) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \mu(\rho, z) \right)$$

Para construir una solución primero damos una solución de la primera ecuación (ecuación de Laplace en un espacio plano de tres dimensiones) y determinamos la función ν de las otras dos ecuaciones. La linealidad de la ecuación de Laplace nos permite hacer una superposición de soluciones de Weyl. Si la materia admite este tipo de métrica, las ecuaciones de Einstein en tal caso se expresan en una manera similar al dado en el sistema anterior [7]. En este trabajo nos centramos al análisis de las

condiciones a imponer sobre el tensor de momento energía para la existencia de soluciones tipo Weyl en la teoría de Rastall [8].

Espacio tiempo estatico y esfericaente simetrico

Nuestro interés se centra en el análisis de la condición que se debe imponer sobre el tensor de momento energía en la teoría de Rastall, la cual descrita por la ecuación

$$= kT_{ab} \qquad R_{ab} - \frac{1}{2}R\lambda g_{ab} \qquad (1)$$

para poder obtener soluciones tipo Weyl. Éstas corresponden a un espacio tiempo estático y axialmente simétrico con elemento de línea

$$ds^2 = -e^{2\mu(x,y)} dr^2 + \rho(x,y)^2 e^{-2\mu(x,y)} d\phi^2 + e^{2\nu(x,y)-2\mu(x,y)} (dx^2 + dy^2) \qquad (2)$$

pero con sólo dos funciones métricas y no con tres como las que aparecen en la ecuación (3). La métrica (3) representa la geometría cuando se tienen dos vectores de Killing. Uno temporal $\frac{\partial}{\partial t}$ que es ortogonal a una hipersuperficie, con $t \in (-\infty, \infty)$. Y otro espacial $\frac{\partial}{\partial \phi}$ axialmente simétrico con $\phi \in (0, 2\pi)$. Esta propiedad requiere que los coeficientes métricos g_{ab} sean independientes de (t, ϕ) y que además no se tengan terminos cruzados $g_{t,\phi}, g_{t,x}, g_{t,y}, g_{\phi,x}$ y $g_{\phi,y}$. Con respecto a este elemento de línea las componentes de las ecuaciones de Rastall diferentes de cero son:

$$k \left[T^t_t + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1 - 2\lambda} \right] = -e^{2\mu(x,y)-2\nu(x,y)} \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right] \right] \qquad (3)$$

$$k \left[T^\phi_\phi + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1 - 2\lambda} \right] = e^{2\mu(x,y)-2\nu(x,y)} \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right] \right] \qquad (4)$$

$$k \left[T^x_x + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1 - 2\lambda} \right] = e^{2\mu-2\nu} \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right] \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & k \left[T^y_x + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1 - 2\lambda} \right] \\
 & = e^{2\mu - 2\nu} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} - 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] \right] \tag{6}
 \end{aligned}$$

Puesto que queremos obtener la condición que se debe imponer sobre el tensor de momento energía, sólo hemos representado sus componentes en forma simbólica, ya que no tenemos un tipo de materia específico. Sumando las ecuaciones (3) y (4) llegamos a la siguiente relación

$$\begin{aligned}
 & k \left(T^t_t + \frac{\lambda T}{1 - 2\lambda} + T^\phi_\phi \right) \\
 & = -\frac{1}{\rho} e^{2\mu - 2\nu} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) \tag{7}
 \end{aligned}$$

en la que únicamente aparecen derivadas para la función ρ y que será empleada para introducir la métrica de Weyl.

La métrica de Weyl y la teoría de Rastall

La métrica de Weyl es un caso particular de un espacio tiempo estático y axialmente simétrico, que no necesariamente existe para cualquier tensor de momento energía. Su existencia requiere que la función ρ satisfaga

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \\
 & = 0 \tag{8}
 \end{aligned}$$

Pero, de la Ec. (7), encontramos que el tensor de momento energía debe satisfacer la condición:

$$k \left(T^t_t + \frac{\lambda T}{1 - 2\lambda} + T^\phi_\phi \right) = 0 \tag{9}$$

Esta relación es una condición necesaria para la existencia de soluciones con métrica de Weyl. Supongamos que el tensor momento energía satisface (9), puesto que la ecuación (8) corresponde a la ecuación armónica, es conveniente introducir la función armónica conjugada de $\rho = (x, y)$: $z = z(x, y)$. Así

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Si hacemos el cambio de variable $(x, y) \rightarrow (\rho, z)$, el elemento de línea (2) adquiere la forma de la métrica de Weyl

$$ds^2 = -e^{2\mu(\rho, z)} dt^2 + \rho^2 e^{-2\mu(\rho, z)} d\phi^2 + e^{-2\mu(\rho, z) + 2\nu(\rho, z)} (d\rho^2 + dz^2) \tag{10}$$

esta únicamente requiere de dos funciones para μ y ν ya que ahora ρ es una coordenada. Con respecto a esta métrica, las componentes no nulas de las ecuaciones de Rastall son:

$$\begin{aligned}
 & k \left(T^t_t + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1-2\lambda} \right) \\
 = & -e^{2\mu-2\nu} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \tag{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k \left(T^\phi_\phi + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1-2\lambda} \right) \\
 = & -e^{2\mu-2\nu} \left[-\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right] \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k \left(T^\rho_\rho + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1-2\lambda} \right) \\
 = & e^{2\mu-2\nu} \left[\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \right) \right] \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k \left(T^z_\rho + \frac{1}{2} \frac{\lambda T}{1-2\lambda} \right) \\
 = & e^{2\mu-2\nu} \left[-2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right) \right] \tag{14}
 \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones vemos que

$$\begin{aligned}
 & k \left(T^t_t + \frac{\lambda T}{1-2\lambda} + T^\phi_\phi \right) \\
 = & 0, \tag{15}
 \end{aligned}$$

Es decir, recuperamos la condición (9). Finalmente aplicaremos esta condición para un tensor de momento energía que describe un campo escalar:

$$\begin{aligned}
 & T_{ab} \\
 = & \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \Phi \nabla_c \Phi \tag{16}
 \end{aligned}$$

reemplazando en (15) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & k \left(T^t_t + \frac{\lambda T}{1-2\lambda} + T^\phi_\phi \right) \\
 = & - \frac{k(1-\lambda) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]}{(1-2\lambda)e^{-2\mu+2\nu}} \tag{17}
 \end{aligned}$$

Esta expresión se anula sólo si $\lambda = 1$, el cual corresponde al caso de la teoría de la relatividad general de Einstein, esto muestra que la teoría de Rastall es más restrictiva con respecto a la existencia de soluciones tipo Weyl. En particular no existen soluciones de Weyl en la teoría de Rastall, salvo el caso límite $\lambda = 1$. Finalmente notemos que, si la traza del tensor de momento energía es cero, entonces la condición requerida para la existencia de soluciones de Weyl es la misma en ambas teorías.

CONCLUSIONES

En este trabajo realiza una revisión de la definición de un espacio tiempo estático y axialmente simétrico, es mostrado que para su descripción se requieren de tres funciones que dependen de dos

coordenadas. Posteriormente se obtiene la conocida para que se tenga una métrica de Weyl, caracterizada porque únicamente se requieren de dos funciones para representar una geometría estática y axialmente simétrica. A partir de esto se muestra que la teoría de Rastall es más restrictiva con respecto a la construcción de soluciones estáticas y axialmente simétricas. Es decir, la condición que debe satisfacer el tensor de momento energía, para que existan soluciones con métrica tipo Weyl puede cumplirse en el marco de la teoría de relatividad general de Einstein, pero no en el marco de la teoría de Rastall.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por las facilidades brindadas para la realización del presente trabajo, así como a la CIC de la UMSNH por el apoyo brindado al proyecto de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

1. H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Second Edition, Cambridge University Press (2003)
2. Steven Weinberg, Cosmology, Oxford University Press, First Edition (2008)
3. Thomas Buchert, Alan A. Coley, Hagen Kleinert, Boudewijn F. Roukema, David L. Wiltshire, Observational Challenges for the Standard FLRW Model, Int. J. Mod. Phys. D 25, 1630007 (2016) (arXiv:1512.03313)
4. C. Dewitt, Houches Lectures: Black Holes (Les Houches Lectures) 1972
5. Eisenhart, L.P. (1949). Riemannian geometry (Princeton Univ.Press., Princeton).
6. S. Chandrasekhar, The mathematical theory of black holes, Oxford Univ.Press (1983)
7. Gary W. Gibbons, Mikhail S. Volkov, Weyl metrics and wormholes, JCAP 039, 1705 (2017).
8. P. Rastall, Generalization of the Einstein Theory, Phys. Rev. D 6, 3357 (1972).

NEUTRINOS DEL ASTRO REY EN LOS EXPERIMENTOS ACTUALES

M. del R. Aparicio-Méndez¹, E. Barradas-Guevara², O. Félix-Beltrán¹, F. González-Canales¹, A. M. Sánchez-Tomay¹

¹Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

²Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
mariadelrocio.aparicio@correo.buap.mx

RESUMEN

Los neutrinos provenientes del sol han jugado un papel muy importante en la física de partículas, gracias a ellos se ha podido explicar exitosamente el espectro continuo de la energía en la desintegración beta, así como la discrepancia entre el Modelo Estándar Solar y el Modelo Estándar de las Partículas Elementales. La teoría que mejor ha descrito cómo interactúan las partículas elementales es el Modelo Estándar, sin embargo, éste es una teoría en proceso de elaboración, ya que en su marco teórico los neutrinos no tienen masa, por lo cual no se puede explicar el fenómeno observado de oscilación de neutrinos y/o la violación de CP leptónica. Para generar la masa a los neutrinos solares, en este trabajo se propone un estudio independiente de modelos, en el cual los términos de masa de los neutrinos son del tipo Majorana. En particular, la forma de la matriz de masas de los neutrinos se fija con el llamado patrón Tri-Bi-Máximo, mientras que para establecer la forma de la matriz de masas de los leptones cargados, se proponen varias clases de equivalencia. Estas clases se diferencian entre sí por el número de ceros de textura presentes en las matrices que las componen. Por consiguiente, al construir la matriz de mezclas del sabor leptónico, PMNS, en términos de las masas de los leptones cargados, se puede obtener una desviación al patrón TBM. En otras palabras, en las expresiones teóricas para los ángulos de mezclas, se sustituye el valor experimental actual de las masa de los leptones cargados y se varían en sus rangos de validez los respectivos parámetros libres, de tal forma que se reproduzcan los datos experimentales actuales sobre oscilaciones de neutrinos. Así obtuvimos que únicamente dos de las matrices de la clase de equivalencia con dos ceros de textura, son capaces de reproducir correctamente los valores experimentales para los ángulos de mezcla solar, atmosférico y del reactor, con lo cual se predice un rango de valores para la fase de violación de CP tipo-Dirac, y las dos fases tipo-Majorana. Además, se obtuvieron las implicaciones de estos valores de las fases de violación de CP en los experimentos actuales y futuros sobre oscilación de neutrinos con base-larga como lo son T2K, NOvA y DUNE. En estos experimentos están involucradas las oscilaciones de los neutrinos (antineutrinos) solares y atmosféricos. Por consiguiente, se puede concluir que es posible mantener el patrón TBM para la matriz de masas de los neutrinos, siempre y cuando se considere que la matriz de masas de los leptones cargados no sea diagonal. Es decir, una matriz de masa no trivial de los leptones cargados genera una perturbación en la matriz PMNS, la cual se refleja en la probabilidad de oscilación del neutrino (antineutrino) solar a neutrino (antineutrino) atmosférico. Así, se podría sugerir a qué distancia se debería colocar el detector en los experimentos de oscilación de neutrinos en materia.

INTRODUCCIÓN

En 1930 el físico Wolfgang Pauli propuso la existencia de los neutrinos, en un esfuerzo por preservar el principio de conservación de la energía, dando con ello una explicación del espectro continuo de la energía en la desintegración β de los neutrones, $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$. Las propiedades con las que Pauli dotó a esta hipotética partícula fueron; carga eléctrica cero y espín $\frac{1}{2}$. En un inicio, tanto Pauli como otros físicos de la época consideraban que el neutrino nunca sería detectado, debido principalmente al hecho que el neutrino es una partícula de carga eléctrica nula y apenas interactúa con la materia convencional de la que están constituidos los objetos cotidianos, incluidos los seres vivos. Sin embargo, en 1956 los físicos Clyde Cowan y Frederick Reines demostraron experimentalmente la existencia del neutrino, lo hicieron basándose en la desintegración β inversa $n + \bar{\nu}_e \rightarrow p^+ + e^-$. A este experimento se le conoció como el *experimento del neutrino* [1].

Hay diversas fuentes en donde se originan los neutrinos, algunas de estas son: *i)* fenómenos astrofísicos, como las supernovas tipo-II donde los neutrinos son los responsables de desencadenar la explosión de gran parte de la masa de la estrella; *ii)* radiación cósmica de fondo, aquí se supone que en el Universo existe un fondo de neutrinos de energía baja, los cuales son remanentes del *Big Bang*; *iii)* en la Tierra, las desintegraciones de isótopos radiactivos a través de la desintegración β producen una pequeña cantidad de neutrinos; y *iv)* fuentes artificiales, como lo son las centrales nucleares o los aceleradores de partículas. Sin embargo, el Sol, conocido como el astro rey, es la principal fuente de los neutrinos que llegan a la Tierra; a este tipo de neutrinos se les conoce como *neutrinos solares* y se producen principalmente en el proceso de conversión de hidrógeno en helio. En acuerdo con la nucleosíntesis estelar, la cual describe el conjunto de reacciones de nucleares que tiene lugar en las estrellas, la conversión de hidrógeno en helio está dominada principalmente por la cadena protón-protón, cuyo esquema general es $4p + 2e^- \rightarrow {}^4\text{He} + 2\nu + 26.7 \text{ MeV}$. Se estima que a la Tierra llegan aproximadamente 66,000 millones de neutrinos solares por centímetro cuadrado y por segundo. Así, al considerar todas las posibles fuentes de neutrinos, se puede estimar que alrededor de 100,000 millones de neutrinos pasan por la uña de un pulgar en un segundo. Pero a pesar de ser una partícula muy abundante en la Tierra, detectar neutrinos es extremadamente difícil, debido a que son partículas neutras. Para detectar neutrinos se requiere usar dispositivos muy grandes y precisos, además de evitar las interferencias que causan otros fenómenos naturales. Por consiguiente, los experimentos para detectar los neutrinos se deben instalar en las profundidades de la Tierra o el Mar [2]. Algunos ejemplos de experimentos situados en minas son: *Homestake* [3], *Super-Kamiokande* [4] y *SNO* [5]. Mientras que el experimento *ANTARES* está situado en las profundidades del Mar mediterráneo [6]. En los experimentos anteriormente mencionados se puede detectar el fenómeno mecánico cuántico de oscilación de neutrinos. Este fenómeno consiste en que el sabor del neutrino (neutrino del electrón, neutrino del muon, neutrino tau) cambia a media que este viaja por el espacio, por ello el sabor del neutrino que se emite en la fuente no necesariamente es el mismo que se detecta en el experimento. Además, para tener la oscilación de sabor es necesario que los neutrinos tengan una masa no nula [2].

Durante muchos años hubo una discrepancia entre los resultados obtenidos en los experimentos de oscilaciones de neutrinos y los predichos por los modelos teóricos, esta anomalía fue conocida como el *problema de los neutrinos solares*. En otras palabras, los experimentos terrestres habían detectado mucho menos neutrinos electrónicos procedentes del Sol de los que la nucleosíntesis estimaba. En 2002, esta discrepancia fue resuelta por el experimento *SNO*, al poder medir el flujo total de neutrinos y no solo los neutrinos electrónicos como los hacían los otros experimentos. Los resultados de *SNO* confirmaron que muchos de los neutrinos del electrón producidos en el interior del Sol cambian a otros sabores del neutrino antes de llegar a la Tierra [7].

El Modelo Estándar (ME) que gobierna la dinámica de cómo interactúan entre sí las partículas fundamentales, contiene tres neutrinos sin masa, los cuales son tratadas como partículas de Dirac: el neutrino del electrón, neutrino del muon y neutrino del tau. Sin embargo, actualmente es un hecho bien establecido por los experimentos de neutrinos solares, atmosféricos y de reactores, que el neutrino cambia de sabor mientras viaja debido a su pequeña mezcla de masa y sabor. Por lo tanto, esta es una clara evidencia de física más allá del ME. El lograr comprender por qué la masa de los neutrinos es extremadamente pequeña (del orden meV) y por qué la magnitud de la mezcla entre los diferentes sabores de los neutrinos es tan grande, son cuestiones muy estudiadas actualmente en la Física de Partículas.

La pequeñez en la escala de masa de los neutrinos se explica bien por medio del mecanismo de subibaja, el cual la vincula a una nueva escala física en la naturaleza [8]. Sin embargo, la mezcla del sabor de los neutrinos presenta un patrón interesante, en el cual dos ángulos de mezcla de un escenario de tres sabores parecen ser máximos, mientras que el tercero sigue siendo muy pequeño. Se han explorado distintos esquemas de mezcla de sabor leptónico como el Tri-Bi-Máximo (TBM) [9], Bi-máximo (BM) [10] y la mezcla democrática (DC) [11] para explicar los datos experimentales de mezcla de neutrinos. Todos estos escenarios de mezcla leptónica tienen la misma predicción para el ángulo de mezcla del reactor, $\theta_{13} = 0$. El ángulo de mezcla atmosférico es $\theta_{23} = 45^\circ$ para el BM

y TBM, mientras que para DC toma el valor $\theta_{23} = 54.7^\circ$. El ángulo de mezcla solar es máximo, es decir, $\theta_{12} = 45^\circ$ para BM y DC, mientras que para TBM toma el valor $\theta_{23} = 35.3^\circ$.

En 2011, el experimento de línea base larga T2K [12] observando los eventos correspondientes a la probabilidad de transición $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, reportó la siguiente estimación de valores para el ángulo del reactor, $5^\circ (5.8^\circ) < \theta_{13} < 16^\circ (16.8^\circ)$, para una jerarquía normal (invertida) en el espectro de masas. Sin embargo, el experimento de Daya Bay [13] basado en reactores presentó el primer resultado concluyente de tener un ángulo del reactor θ_{13} diferente de cero. El valor del ángulo de mezcla 13 a un nivel de confianza del 90% es: $\sin^2 2\theta_{13} = 0.092 \pm 0.016(stat) \pm 0.05(sys)$. A partir de los resultados anteriores es evidente que los escenarios BM, TBM y DC no pueden considerarse en su valor nominal, por consiguiente, deben investigarse para determinar posibles desviaciones a los mismos.

Los valores numéricos de los parámetros que gobiernan las oscilaciones de neutrinos obtenidos a partir del ajuste global de los datos reportados por los experimentos, para una jerarquía normal (JN, $m_{\nu 3} > m_{\nu 2} > m_{\nu 1}$) e invertida (JI, $m_{\nu 2} > m_{\nu 1} > m_{\nu 3}$), son [14]:

Parámetro	BFP $\pm 1\sigma$	Rango 2σ	Rango 3σ
$\Delta m_{21}^2: [10^{-5} \text{eV}^2]$	$7.55^{+0.20}_{-0.16}$	7.20 – 7.94	7.05 – 8.14
$\Delta m_{31}^2: [10^{-3} \text{eV}^2]$ (JN)	2.50 ± 0.03	2.44 – 2.57	2.41 – 2.60
$\Delta m_{13}^2: [10^{-3} \text{eV}^2]$ (JI)	$2.42^{+0.03}_{-0.04}$	2.34 – 2.47	2.31 – 2.51
$\sin^2 \theta_{12}/10^{-1}$	$3.20^{+0.20}_{-0.16}$	2.89 – 3.59	2.73 – 3.79
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}$ (JN)	$5.47^{+0.20}_{-0.30}$	4.67 – 5.83	4.45 – 5.99
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}$ (JI)	$5.51^{+0.18}_{-0.30}$	4.91 – 5.84	4.53 – 5.98
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$ (JN)	$2.160^{+0.083}_{-0.076}$	2.03 – 2.34	1.96 – 2.41
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$ (JI)	$2.220^{+0.074}_{-0.076}$	2.07 – 2.36	1.99 – 2.44
δ_{CP}/π (JN)	$1.32^{+0.21}_{-0.15}$	1.02 – 1.75	0.87 – 1.94
δ_{CP}/π (JI)	$1.56^{+0.13}_{-0.15}$	1.27 – 1.82	1.12 – 1.94

En las expresiones anteriores BFP significa punto de mejor ajuste, $\Delta m_{ij}^2 = m_{\nu i}^2 - m_{\nu j}^2$ es la diferencia de los cuadrados de las masas de los neutrinos, y δ_{CP} es la fase de violación de CP del tipo Dirac. Esta última es la única fase asociada a la violación de CP que está involucrada en las amplitudes de transición de las oscilaciones de neutrinos. Con los datos anteriores se puede concluir fácilmente que la física de los neutrinos está en su etapa de precisión respecto a la determinación de sus parámetros fundamentales.

Una de las características principales de los neutrinos es tener carga eléctrica nula, por lo cual, en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos, estas partículas pueden ser representadas como partículas de Dirac o Majorana. Así, los neutrinos aparte de ser camaleónicos al cambiar su sabor mientras viajan de la fuente al detector, también tienen un problema de identidad. En otras palabras, hasta este momento, si se consideran los datos experimentales existentes, no se puede determinar la naturaleza de los neutrinos. Sin embargo, en extensiones mínimas del ME considerar a los neutrinos como partículas de Majorana explica muy bien la pequeñez de la masa de estos.

Los experimentos de línea base larga tienen el objetivo principal de obtener medidas precisas sobre los parámetros de las oscilaciones de neutrinos. En particular, los experimentos T2K, DUNE, y NOvA toman mediciones de la amplitud de transición entre los neutrinos solares y atmosféricos, $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, para determinar con precisión el valor numérico de la fase de violación de CP tipo Dirac. En el experimento T2K, el haz de neutrinos tiene una energía media de 0.6 GeV y un ancho de aproximadamente 0.3 GeV, viaja desde el acelerador J-PARC hasta el detector SuperKamiokande que se encuentra a 295 km de distancia [12]. En el experimento NOvA, el haz de neutrinos viaja una distancia de 810 km, y tiene una energía entre 1 y 3 GeV, sin embargo, la señal máxima está

alrededor de 2 GeV [15]. En el experimento DUNE, el haz de neutrinos es de alta intensidad con una energía media de 2.8 GeV, las partículas viajan una distancia de 1300 km hasta el detector [16].

La desintegración doble beta sin neutrinos, $0\nu\beta\beta$, es una reacción nuclear de segundo orden que aún no ha sido observada, pero permite dilucidar si los neutrinos son partículas de Dirac o de Majorana, ya que únicamente en este último caso existe esta desintegración. En la $0\nu\beta\beta$, la observable física a medir es la amplitud de decaimiento $T_{1/2}^{0\nu}$, la cual es sensible a las fases de Majorana asociadas a la violación de CP y proporcional a la masa efectiva de Majorana, cuya forma es $\langle m_{ee} \rangle = |\sum_j m_{\nu j} U_{ej}|$, donde los U_{ej} son los elementos de la primera fila la matriz de mezclas del sabor leptónico [17].

En este trabajo se propone un estudio independiente de modelos, en el cual los términos de masa de los neutrinos son del tipo Majorana. En particular, la forma de la matriz de masas de los neutrinos se fija con el llamado patrón TBM, mientras que para establecer la forma de la matriz de masas de los leptones cargados, se proponen varias clases de equivalencia. Estas clases se diferencian entre sí por el número de ceros de textura presentes en las matrices que las componen. La matriz de mezclas del sabor leptónico, PMNS, se expresa en términos de las masas de los leptones cargados, obteniendo así una desviación al patrón TBM. Además, predice un rango de valores para las fases de violación de CP y la masa efectiva de Majorana en la desintegración doble beta sin neutrinos.

TEORÍA

Las oscilaciones de los neutrinos de baja energía se describen a través del lagrangiano [8]

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu + \frac{1}{2} \bar{\nu}_R^c M_\nu \nu_L - \bar{\ell}_R M_\ell \ell_L + h.c. \quad (1)$$

El primer término del Lagrangiano representa las corrientes cargadas, el segundo es el término de masa tipo Majorana para los neutrinos, y el tercero es el término de masa tipo Dirac para los leptones cargados. En general, las matrices de masa de los leptones cargados y los neutrinos son matrices complejas de 3×3 ; mientras que la matriz de los neutrinos es simétrica, la matriz de los leptones cargados no tiene ninguna característica en especial. Respectivamente, las matrices de masa de los leptones cargados y neutrinos son diagonalizadas por las siguientes transformaciones unitarias:

$$\mathbf{M}_\nu = U_\nu^* \Delta_\nu U_\nu^\dagger, \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_\ell = V_\ell^\dagger \Delta_\ell U_\ell, \quad (2)$$

donde $\Delta_\nu = \text{diag}(m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3})$ y $\Delta_\ell = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$. Las matrices unitarias V_ℓ y U_ℓ se obtiene al aplicar el teorema de descomposición en valores singulares a la matriz de los leptones cargados. De las ecs. (1) y (2), el término de las corrientes cargadas toma la forma

$$\mathcal{L}_{cc} = \bar{\ell}'_L \gamma^\mu U_{PMNS} \nu'_L, \quad (3)$$

donde $\ell'_L = U_\ell \ell_L$, $\nu'_L = U_\nu \nu_L$ y $U_{PMNS} = U_\ell^\dagger U_\nu$. Esta última es la matriz de mezclas del sabor leptónico, conocida como matriz PMNS y rige los acoplamientos de los neutrinos y los leptones.

Para obtener el patrón TBM en las mezclas del sabor leptónico, se debe de considerar que la matriz de masas de los leptones cargados es diagonal y que los ángulos de mezcla solar, atmosférico y del reactor tienen los valores $\sin \theta_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta_{23} = \frac{\pi}{4}$ y $\theta_{13} = 0$, respectivamente. Además, no violan la simetría de carga paridad, por lo cual los factores de fase en cualquier parametrización deben ser nulos. Por consiguiente, la matriz PMNS toma la forma [9]

$$U_{\text{PMNS}} = U_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

En este escenario, la matriz de masas de los neutrinos es expresada como:

$$\mathbf{M}_\nu = \begin{pmatrix} b_\nu & a_\nu & -a_\nu \\ a_\nu & b_\nu + d_\nu & b_\nu + c_\nu \\ -a_\nu & b_\nu + c_\nu & b_\nu + d_\nu \end{pmatrix}, \quad (5)$$

donde $a_\nu = \frac{1}{3}(m_{\nu 2} - m_{\nu 1})$, $b_\nu = \frac{1}{3}(2m_{\nu 1} + m_{\nu 2})$, $c_\nu = \frac{1}{2}(m_{\nu 3} + \frac{4}{3}m_{\nu 2} + \frac{5}{3}m_{\nu 1})$ y $d_\nu = \frac{1}{2}(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})$. Pero en acuerdo con los datos experimentales actuales sobre oscilaciones de neutrinos, el patrón TBM no es realista, ya que tanto el ángulo del reactor y la fase de violación de CP son distintos de cero.

Motivados por la necesidad de apartarse de la forma más simple, a primer orden, para el patrón TBM, ec. (4), y considerando que desde un punto de vista teórico, la matriz de mezcla del sabor leptónico PMNS proviene de la discordancia entre la diagonalización de la matriz de masas de los leptones cargados y la de los neutrinos, aquí proponemos una versión generalizada del TBM. En esta, la forma de la matriz de masas de los neutrinos está dada por la ec. (5), mientras que para establecer la forma de la matriz de masas de los leptones cargados, se proponen varias clases de equivalencia. Estas clases se diferencian entre sí por el número de ceros de textura presentes en las matrices que las componen. En particular, se considera que la matriz de masas de los leptones cargados es representada a través de una matriz hermitiana, con lo cual la clase de equivalencia se expresa como

$$\mathbf{M}_\ell^i = U_\ell^i \Delta_\ell U_\ell^{i\dagger}, \quad (6)$$

donde $U_\ell^i = T_i^\dagger P_\ell^\dagger O_\ell$ ($i = 0, \dots, 6$). Aquí, las T_i son los elementos de la representación real del grupo de permutaciones de tres objetos S_3 [19]. P_ℓ es la matriz diagonal de factores de fase, la cual se obtiene al escribir a la matriz de masas de los leptones cargados en forma polar. Finalmente, O_ℓ es una matriz ortogonal real. Así, la matriz PMNS toma la forma

$$U_{\text{PMNS}} = O_\ell^T P_\ell T_i U_{\text{TBM}}. \quad (7)$$

Ahora, hace falta establecer la forma de la matriz de masas de los leptones cargados, \mathbf{M}_ℓ^i , para poder determinar la forma explícita de la matriz O_ℓ . Entonces, para una clase de equivalencia con dos ceros de textura, la forma explícita es:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\ell^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & a_\ell & \mathbf{0} \\ a_\ell^* & b_\ell & c_\ell \\ \mathbf{0} & c_\ell^* & d_\ell \end{pmatrix} & \mathbf{M}_\ell^1 &= \begin{pmatrix} b_\ell & a_\ell^* & c_\ell \\ a_\ell & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ c_\ell^* & \mathbf{0} & d_\ell \end{pmatrix} & \mathbf{M}_\ell^2 &= \begin{pmatrix} d_\ell & c_\ell^* & \mathbf{0} \\ c_\ell & b_\ell & a_\ell^* \\ \mathbf{0} & a_\ell & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_\ell^3 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_\ell \\ \mathbf{0} & d_\ell & c_\ell^* \\ a_\ell^* & c_\ell & b_\ell \end{pmatrix} & \mathbf{M}_\ell^4 &= \begin{pmatrix} d_\ell & \mathbf{0} & c_\ell^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_\ell \\ c_\ell & a_\ell^* & b_\ell \end{pmatrix} & \mathbf{M}_\ell^5 &= \begin{pmatrix} b_\ell & c_\ell & a_\ell^* \\ c_\ell^* & d_\ell & \mathbf{0} \\ a_\ell & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

donde $d_\ell = 1 - \delta_\ell$,

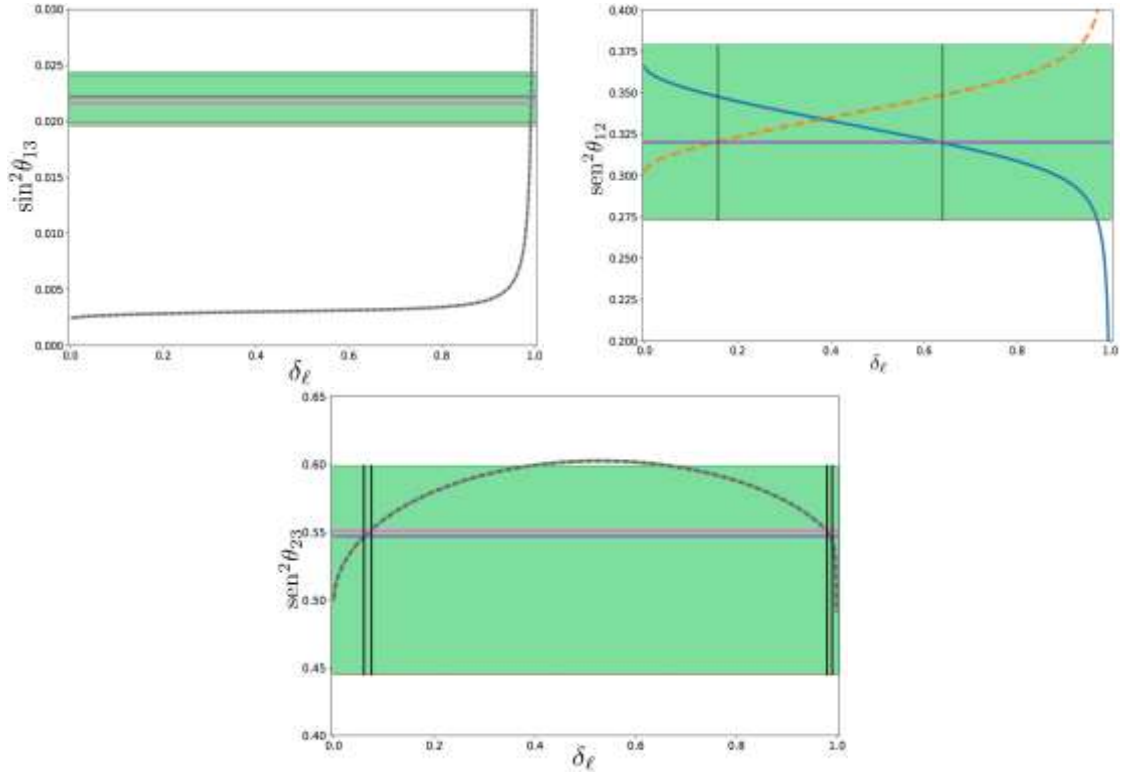


Figura 5: En los paneles superiores izquierdo y derecho se muestra el ángulo de mezcla del reactor y solar, respectivamente. En el panel inferior se muestra el ángulo atmosférico. La zona verde se obtienen con los datos experimentales actuales sobre los ángulos de mezclas, a 3σ , para una jerarquía invertida y normal. El BFP para la jerarquía normal se representa por la línea rosa, mientras que para la jerarquía invertida se representa con la línea morada. Aquí, las fases se fijaron en los valores $\phi_a = 0.9 \text{ rad}$ y $\phi_c = 1.78 \text{ rad}$. La línea sólida azul y la discontinua naranja corresponden a las matrices M_ℓ^0 y M_ℓ^3 , respectivamente.

$$\mathbf{a}_\ell = \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu}{1-\delta_\ell}} e^{i\phi_a}, \quad \mathbf{b}_\ell = \tilde{m}_e - \tilde{m}_\mu + \delta_\ell, \quad \mathbf{c}_\ell = \sqrt{\frac{\delta_\ell}{1-\delta_\ell}} f_{\ell 1} f_{\ell 2} e^{i\phi_c}, \quad (9)$$

con $f_{\ell 1} = 1 - \tilde{m}_e - \delta_\ell$, $f_{\ell 2} = 1 + \tilde{m}_\mu - \delta_\ell$, $\phi_a = \arg\{\mathbf{a}_\ell\}$, $\phi_c = \arg\{\mathbf{c}_\ell\}$, $\tilde{m}_e = \frac{m_e}{m_\tau}$, y $\tilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{m_\tau}$. El parámetro δ_ℓ debe de satisfacer las condiciones $0 < \delta_\ell < 1 - \tilde{m}_e$ y $\delta_\ell \neq \tilde{m}_\mu - \tilde{m}_e$. En este caso, la matriz de fase es $\mathbf{P}_\ell = \text{diag}(1, e^{i\phi_a}, e^{i(\phi_a+\phi_c)})$. La matriz ortogonal \mathbf{O}_ℓ toma la forma

$$\mathbf{O}_\ell = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu f_{\ell 1}}{D_{\ell 1}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e f_{\ell 2}}{D_{\ell 2}}} & \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \delta_\ell}{D_{\ell 3}}} \\ \sqrt{\frac{\tilde{m}_e (1-\delta_\ell) f_{\ell 1}}{D_{\ell 1}}} & \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu (1-\delta_\ell) f_{\ell 2}}{D_{\ell 2}}} & \sqrt{\frac{\delta_\ell (1-\delta_\ell)}{D_{\ell 3}}} \\ -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \delta_\ell f_{\ell 2}}{D_{\ell 1}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \delta_\ell f_{\ell 1}}{D_{\ell 2}}} & \sqrt{\frac{f_{\ell 1} f_{\ell 2}}{D_{\ell 3}}} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

donde $D_{\ell 1} = (1 - \delta_\ell)(\tilde{m}_e + \tilde{m}_\mu)(1 - \tilde{m}_e)$, $D_{\ell 2} = (1 - \delta_\ell)(\tilde{m}_e + \tilde{m}_\mu)(1 + \tilde{m}_\mu)$, y $D_{\ell 3} = (1 - \delta_\ell)(1 + \tilde{m}_\mu)(1 - \tilde{m}_e)$.

RESULTADOS NUMÉRICOS

En la parametrización simétrica, la matriz PMNS tiene la forma [18]:

$$\begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12}e^{-i\phi_{12}} & s_{13}e^{-i\phi_{13}} \\ -c_{23}s_{12}e^{-i\phi_{12}} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{-i(\phi_{23}-\phi_{13})} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{-i(\phi_{12}+\phi_{23}-\phi_{13})} & c_{13}s_{23}e^{-i\phi_{13}} \\ s_{23}s_{12}e^{i(\phi_{12}+\phi_{23})} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\phi_{13}} & -s_{23}c_{12}e^{i\phi_{23}} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{-i(\phi_{12}-\phi_{13})} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ y $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. La parametrización anterior y la estándar del PDG se pueden conectar entre sí a través de la expresión $U_{\text{PDG}} = KU_{\text{Sim}}$, donde $K = \text{diag}(1, e^{i\frac{\beta_1}{2}}, e^{i\frac{\beta_2}{2}})$ con $\delta_{\text{CP}} = \phi_{13} - \phi_{23} - \phi_{12}$, $\beta_1 = -2\phi_{12}$, $\beta_2 = -2(\phi_{12} + \phi_{23})$. Los ángulos de mezcla en términos de las entradas de la matriz PMNS tiene la forma siguiente [19]:

$$\sin^2 \theta_{13} = |(U_{\text{PMNS}})_{13}|^2, \sin^2 \theta_{12} = \frac{|(U_{\text{PMNS}})_{12}|^2}{1 - |(U_{\text{PMNS}})_{13}|^2}, \sin^2 \theta_{23} = \frac{|(U_{\text{PMNS}})_{23}|^2}{1 - |(U_{\text{PMNS}})_{13}|^2}. \quad (12)$$

Estas expresiones son invariantes ante reparametrizaciones de la matriz PMNS.

Con el objetivo general de encontrar una forma de la matriz de masas de los leptones cargados, que pueda desviar al ángulo del reactor del valor nulo que originalmente se tiene en el patrón TBM, y que reproduzca correctamente los valores reportados para los ángulos solar y atmosférico, aquí se realiza un análisis numérico. En este análisis se tiene en cuenta lo siguiente: los valores para las masas de los leptones cargados (en GeV) son

$$m_e = 0.5109998928 \pm 0.000000011, \quad m_\mu = 105.6583715 \pm 0.0000035, \quad m_\tau = 1776.82 \pm 13 \quad (13)$$

Así, las razones de masa son del orden de $\tilde{m}_e \sim 10^{-4}$ y $\tilde{m}_\mu \sim 10^{-2}$. El parámetro δ_ℓ es libre de variar en el intervalo $(0, 1 - \tilde{m}_e)$ y debe cumplir la condición $\delta_\ell \neq \tilde{m}_\mu - \tilde{m}_e$. Los factores de fase ϕ_a y ϕ_c pueden variar en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Finalmente, con base en lo anterior y a partir de las expresiones en las ecs. (7), (10) y (12), uno de los primeros resultados obtenidos en este análisis es que la expresión teórica del ángulo de mezcla del reactor depende más fuertemente de la fase ϕ_a que de la fase ϕ_c . Además, las únicas matrices de masa de la clase de equivalencia, ec. (8), que reproduce correctamente el actual valor experimental del ángulo del reactor son M_ℓ^0 y M_ℓ^3 . En la Figura 5 se muestra el comportamiento de las expresiones teóricas de los ángulos de mezclas solar, atmosférico y del reactor. Para obtener estas gráficas, los factores de fase se fijaron en los valores $\phi_a = 0.9 \text{ rad}$ y $\phi_c = 1.78 \text{ rad}$. De la gráfica para el ángulo del reactor se puede concluir fácilmente que el BFP del ajuste global se obtiene para valores grande del parámetro δ_ℓ . En particular se puede considerar que $\delta_\ell = 0.9$. El valor experimental del ángulo solar a 3σ se puede reproducir prácticamente para cualquier valor del parámetro δ_ℓ . En el caso de la gráfica del ángulo atmosférico, el BFP del ajuste global se obtiene para el siguiente conjunto de valores para el parámetro δ_ℓ ; para la jerarquía normal

$$\delta_\ell = 0.06 \quad \text{o} \quad \delta_\ell = 0.98 \quad (14)$$

y para la jerarquía invertida

$$\delta_\ell = 0.07 \quad \text{o} \quad \delta_\ell = 0.99. \quad (15)$$

A partir de las tres gráficas en la Figura 5 se puede concluir que, para $\delta_\ell = 0.9$, $\phi_a = 0.9$ rad y $\phi_c = 1.78$ rad, se pueden reproducir correctamente los valores experimentales de los tres ángulos de mezcla del sabor leptónico, los cuales son el ángulo solar, atmosférico y del reactor.

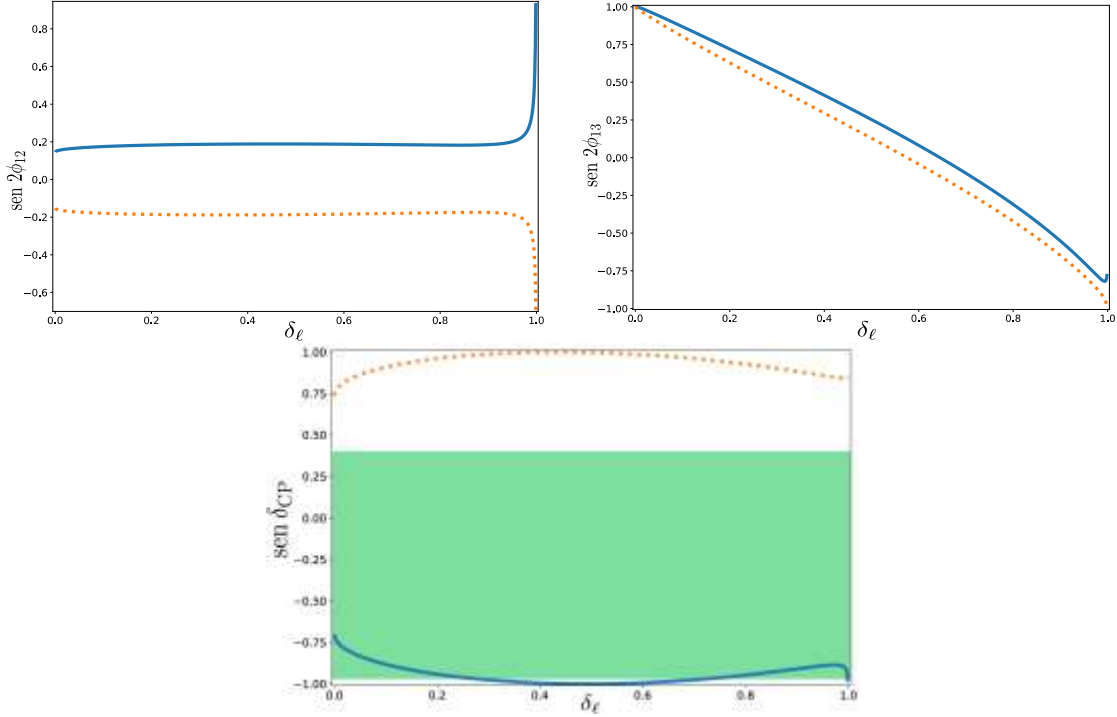


Figura 6: En los paneles superiores se muestran las gráficas del seno de las fases de violación de CP tipo Majorana. En el panel inferior se muestra el seno de la fase de violación de CP tipo Dirac. La zona verde se obtienen con los datos experimentales actuales sobre los ángulos de mezclas, a 3σ , para una jerarquía invertida y normal. Aquí, las fases se fijaron en los valores $\phi_a = 0.9$ rad y $\phi_c = 1.78$ rad. La línea sólida azul y la discontinua naranja corresponden a las matrices M_ℓ^0 y M_ℓ^3 , respectivamente.

Las fases asociadas a la violación de CP tiene la formas:

$$\text{sen}^2 \delta_{\text{CP}} = \frac{J_{\text{CP}} (1 - |(U_{\text{PMNS}})_{13}|)^2}{|(U_{\text{PMNS}})_{11}| |(U_{\text{PMNS}})_{12}| |(U_{\text{PMNS}})_{13}| |(U_{\text{PMNS}})_{23}| |(U_{\text{PMNS}})_{33}|} \quad (16)$$

$$\text{sen}(-2\phi_{12}) = \frac{I_1}{|(U_{\text{PMNS}})_{11}|^2 |(U_{\text{PMNS}})_{12}|^2}, \quad \text{sen}(-2\phi_{13}) = \frac{I_2}{|(U_{\text{PMNS}})_{11}|^2 |(U_{\text{PMNS}})_{13}|^2}.$$

En las expresiones anteriores se tiene que $J_{\text{CP}} = \text{Im}\{(U_{\text{PMNS}})_{13}(U_{\text{PMNS}})_{23}^*(U_{\text{PMNS}})_{11}^*(U_{\text{PMNS}})_{21}\}$ es el invariante de Jarlskog, el cual está asociado a la violación de CP tipo Dirac. Además, $I_1 = \text{Im}\{(U_{\text{PMNS}})_{12}^2(U_{\text{PMNS}})_{11}^*\}$ y $I_2 = \text{Im}\{(U_{\text{PMNS}})_{13}^2(U_{\text{PMNS}})_{11}^*\}$ son los invariantes asociados a las fases de violación de CP tipo Majorana [19]. En la Figura 6 se muestran las gráficas del seno de las fases de violación de CP de los tipos Majorana y Dirac.

La probabilidad de transición en materia para las oscilaciones entre los neutrinos solares y atmosféricos, las cuales son $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ y $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$, pueden ser descrita a través de las expresiones [19],

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &\approx P_{\text{atm}} + P_{\text{sol}} + 2\sqrt{P_{\text{atm}}P_{\text{sol}}}\sin(\Delta_{32} + \delta_{\text{CP}}), \\ P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) &\approx P_{\text{atm}} + P_{\text{sol}} + 2\sqrt{P_{\text{atm}}P_{\text{sol}}}\cos(\Delta_{32} - \delta_{\text{CP}}), \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$\sqrt{P_{\text{sol}}} = \cos \theta_{23} \sin 2\theta_{12} \frac{\sin aL}{aL} \Delta_{21}, \quad (18)$$

$$\sqrt{P_{\text{atm}}} = \sin \theta_{23} \sin 2\theta_{13} \frac{\sin(\Delta_{31} - aL)}{\Delta_{31} - aL} \Delta_{31}, \quad (19)$$

$$\sqrt{P_{\text{atm}}} \sin \theta_{23} \sin 2\theta_{13} \frac{\sin(\Delta_{31} + aL)}{\Delta_{31} + aL} \Delta_{31}.$$

En las expresiones anteriores, L es la línea base,

$$\Delta_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}, \quad a = \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Aquí, E es la energía del haz de neutrinos, N_e es la densidad de electrones y G_F es la constante de Fermi. El parámetro a tiene el valor aproximado de $(3500 \text{ km})^{-1}$. En la Figura 7, se muestran las probabilidades de transición $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ y $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$, para cuando la matriz de masas de los leptones cargados es representada a través de las matrices M_ℓ^0 y M_ℓ^3 . Además, los factores de fase se fijan en $\phi_a = 0.9 \text{ rad}$ y $\phi_c = 1.78 \text{ rad}$.

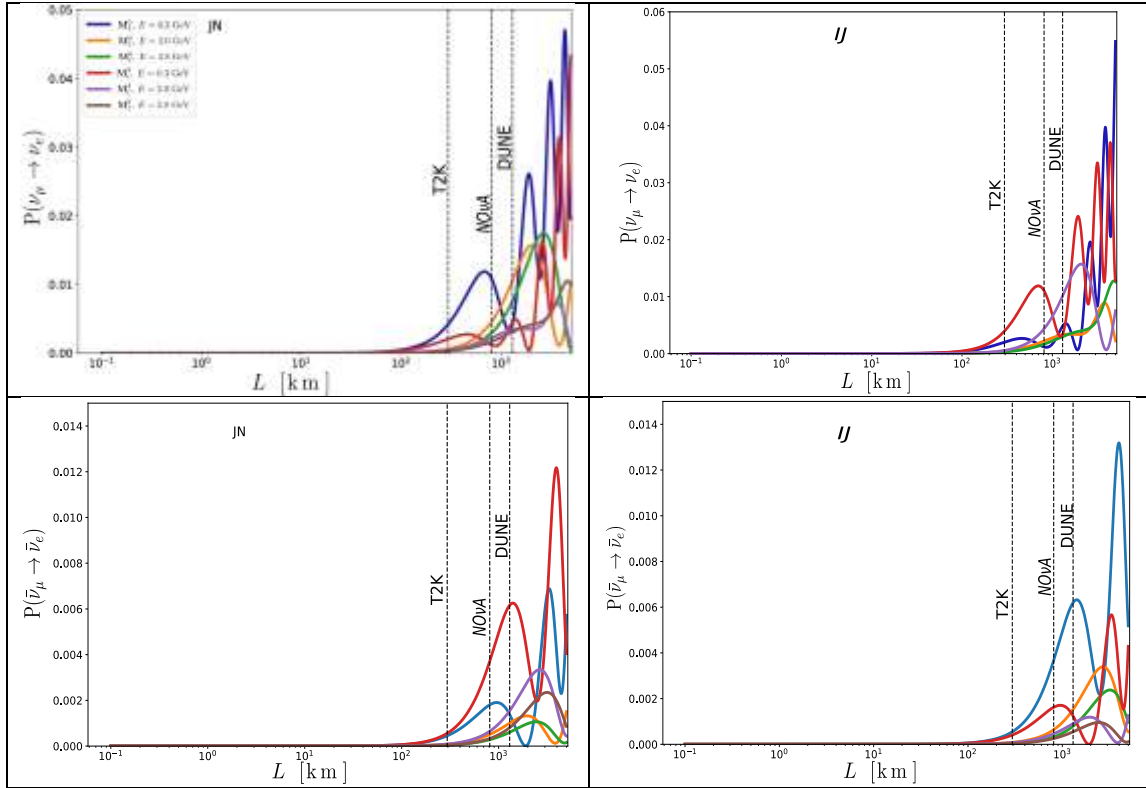


Figura 7: Probabilidades de transición $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ y $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ para una jerarquía invertida (IJ) y normal (JN). Los factores de fase se fijan en los valores $\phi_a = 0.9 \text{ rad}$ y $\phi_c = 1.78 \text{ rad}$. La columna de la izquierda corresponde a la jerarquía normal, mientras que la derecha es para la jerarquía invertida. Las líneas de color azul, naranja, y verde corresponde a la matriz M_ℓ^0 , para una energía de 0.3, 2.0 y 2.8 GeV, respectivamente. Las líneas de color rojo, morado y café corresponden a la matriz M_ℓ^3 , para energías de 0.3, 2.0, y 2.8 GeV, respectivamente.

En la parametrización simétrica de la matriz de mezclas PMNS, ec. (11), la masa efectiva de Majorana en el decaimiento doble beta sin neutrinos, $0\nu\beta\beta$, toma la forma [19]:

$$\langle m_{ee} \rangle = |m_{\nu 1} \cos^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} + m_{\nu 2} \sin^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} e^{-i2\phi_{12}} + m_{\nu 3} \sin^2 \theta_{13} e^{-i2\phi_{13}}|. \quad (21)$$

En la expresión anterior, ϕ_{12} y ϕ_{13} son las fases de Majorana dadas en ec. (16). Para hacer un análisis del comportamiento de la masa efectiva $\langle m_{ee} \rangle$, las masas de los neutrinos se reescriben en función de Δm_{ij}^2 y de la masa del neutrino más ligero, para cada una de las jerarquías en el espectro de masas del neutrino. Para una jerarquía normal (JN),

$$m_{\nu 2} = \sqrt{\Delta m_{21}^2 + m_{\nu 1}^2} \text{ y } m_{\nu 3} = \sqrt{\Delta m_{31}^2 + m_{\nu 1}^2}. \quad (22)$$

Para una jerarquía invertida (JI),

$$m_{\nu 1} = \sqrt{\Delta m_{13}^2 + m_{\nu 3}^2} \text{ y } m_{\nu 2} = \sqrt{\Delta m_{13}^2 + \Delta m_{21}^2 + m_{\nu 3}^2}. \quad (23)$$

En la Figura 8 se muestra la masa efectiva del neutrino (m_{ee}), para las matrices de masa M_ℓ^0 y M_ℓ^3 , fijando los valores de las fases a $\phi_a = 0.9 \text{ rad}$ y $\phi_c = 1.78 \text{ rad}$.

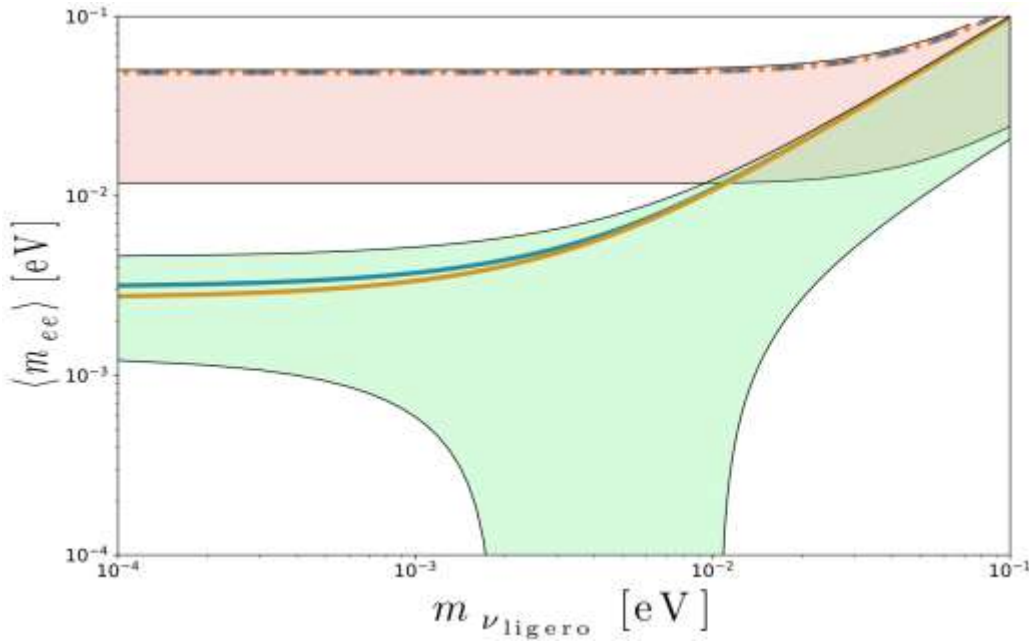


Figura 8: Masa efectiva de Majorana, $\langle m_{ee} \rangle$. Las zonas roja y verde se obtienen con los datos experimentales actuales sobre oscilaciones de neutrinos, a 3σ , para una jerarquía invertida y normal, respectivamente. Las líneas continua y discontinua de color naranja corresponden a la predicción obtenida para la matriz de masa M_ℓ^3 . Las líneas continua y discontinua de color azul corresponden a la predicción obtenida para la matriz de masa M_ℓ^0 . Los factores de fase se fijaron a los valores $\phi_a = 0.9 \text{ rad}$ y $\phi_c = 1.78 \text{ rad}$.

CONCLUSIONES

En el marco teórico de un estudio independiente de modelos, se considera que la matriz de masas de los neutrinos de Majorana es representada a través de una matriz que posee el patrón de mezclas TBM. Para los leptones cargados se exploran las seis matrices que integran la clase de equivalencia con dos ceros de textura, esto con la finalidad de encontrar un forma de la matriz de masas de los leptones cargados que pueda desviar al ángulo del reactor del valor nulo que originalmente se tiene en el patrón TBM y que reproduzca correctamente los valores reportados para los ángulos solar y atmosférico. Se obtuvo que únicamente las matrices M_ℓ^0 y M_ℓ^3 , de la clase de equivalencia con dos ceros de textura, ec. (8), son capaces de reproducir correctamente los valores de los ángulos de mezcla solar, atmosférico y del reactor. Además, se pudieron obtener predicciones para los valores

de las fases de violación de CP de tipo Dirac y Majorana. Por consiguiente, se mostraron las implicaciones fenomenológicas de estos valores de las fases para experimentos actuales y futuros de oscilaciones de neutrino en materia, como lo es el experimento DUNE. Además, se da un rango de valores para la masa efectiva de Majorana en el decaimiento doble beta sin neutrinos

BIBLIOGRAFÍA

1. C. L. Cowan, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, A. D. MacGuire, "Detection of the Free Neutrino; a Confirmation" *Science*, Vol 124, 3212, July 1956, pp. 103-4.
2. Sergio Pastor Carpi, "Los neutrinos", Colección: ¿Qué sabemos de...? (Consejo Superior de Investigación Científica; Los libros de la Catarata, Madrid, España, 2014), ISBN: 978-84-00-09863-6, pp. 1-128.
3. John N. Bahcall, Raymond Davis, "Solar Neutrino: A Scientific Puzzle" *Science*, Vol 191, 4224, Jan. 1976, pp. 264-267.
4. S. Fukuda, *et al* (*Super-Kamiokande Collaboration*), "The Super-Kamiokande detector", *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, Vol. 501, no. 1-2, April 2003, pp. 418-462.
5. Q. R. Ahmad, *et al* (*SNO Collaboration*), "Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8Be Solar Neutrino at the Sudbury Neutrino Observatory". *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, August 2001, pp. 071301.
6. S. Adrián-Martínez, *et al* (*ANTARES Collaboration*), "Measurement of atmospheric neutrino oscillations with ANTARES neutrino telescope", *Phys. Lett. B*, Vol. 714, no. 1-2, August 2012, pp. 224-230.
7. A. Bellerive *et al* (*SNO Collaboration*), "The Sudbury Neutrino Observatory", *Nucl. Phys. B*, Vol. 908, July 2016, pp. 30-51.
8. P. A. Zyla *et al* (*Particle Data Group*) to be *Prog. Theor. Exp. Phys.*, Vol. 083C01, 2020, pp. 1-600.
9. P. F. Harrison, D. H. Perkins, W. G. Scott, "Tri-Bimaximal Mixing and the neutrino Oscillation Data", *Phys. Lett. B*, Vol. 530, no. 167, March 2002, pp. 167-173.
10. V. D. Barger, S. Pakvasa, T. J. Weiler, K. Whisnant, "Bi-Maximal Mixing of Three Neutrinos", *Phys. Lett. B*, Vol. 467, no. 1-2, October 1998, pp. 107-116.
11. H. Fritzsch and Z. Z. Xing, "Lepton mass hierarchy and neutrino oscillations", *Phys. Lett. B*, Vol. 372, no. 3-4, April 1996, pp. 265-270.
12. K. Abe *et al* (*T2K Collaboration*), "Indication of electron neutrino appearance from accelerator produced off-axis muon neutrino beam" *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 107, July 2011, 041801.
13. F. P. An *et al* (*DAYA-BAY Collaboration*), "Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya-Bay", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 108, April 2012, pp. 171803.
14. P. F. de Salas, D. V. Forero, C. A. Ternes, M. Tortola, J. W. F. Valle, "Status of neutrino oscillations 2018: 3σ hint for normal mass ordering and improved CP sensitivity", *Phys. Lett. B*, Vol. 782, July 2018, pp. 633-640.
15. P. Adamson *et al* (*NOvA Collaboration*), "First measurement of muon neutrino disappearance in NOvA", *Phys. Rev. D*, Vol. 93, March 2016, pp. 051104(R).
16. B. Abi, *et al* (*DUNE Collaboration*), "The DUNE far detector design report volume 1: Physics, Technology and Strategies", *ArXiv:1807.10334*, Vol. 1, July 2018, pp. 1-83.
17. Peng Chen, Gui-Jun Ding, F. González-Canales, J. W. F. Valle, "Generalized $\mu - \tau$ reflection symmetry and leptonic CP violation", *Phys. Lett. B*, Vol. 753, February 2016, pp. 644-652
18. W. Rodejohann, J. W. F. Valle, "Symmetrical Parametrizations of the lepton mixing matrix", *Phys. Rev. D*, Vol. 84, Oct 2011, pp. 073011.
19. E. Barradas-Guevara, O. Félix-Beltrán, F. González-Canales, M. Zeleny-Mora, "Lepton CP violation in a $\nu 2\text{HDM}$ with flavor", *Phys. Rev. D*, Vol. 97, February 2018, pp. 035003.

CARACTERIZACIÓN NO DESTRUCTIVA DE FORMULACIÓN DE EMPAQUES COMESTIBLES USANDO TOMOGRAFÍA DE COHERENCIA ÓPTICA

Saira Mariela Rivera González, Manuel de Jesús Briones Reyes, Giovanna Rossi Márquez, Cristian Aarón Dávalos Saucedo y María Helguera Martínez

Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel y Henríquez Campus Lagos de Moreno
manuel.briones@lagos.tecmm.edu.mx

RESUMEN

Los empaques comestibles son una alternativa a los materiales plásticos y pueden ser utilizados para la protección de alimentos prolongando su vida de anaquel. En la actualidad, la mayoría de los métodos de estudio de los materiales se basan en pruebas destructivas, lo que implica un gasto mayor y una pérdida del material en estudio. En este trabajo se presentarán desarrollos innovadores de dichos empaques comestibles creados con alginato de sodio y proteínas del suero de leche que fueron evaluados mediante pruebas no destructivas como la tomografía de coherencia óptica (OCT). A diferencia de otras técnicas ópticas que permiten evaluar la superficie de las muestras, la tomografía accede a las capas internas de éstas, proporcionando información de los cambios estructurales debidos al proceso de descomposición de los alimentos, así como la evaluación del espesor del recubrimiento.

Las películas comestibles fueron desarrolladas utilizando polímeros naturales como las proteínas del suero de leche y el alginato de sodio. Se realizaron titulaciones potenciométricas y mediciones de turbidez para la determinación de la mejor proporción entre los dos componentes. Se utilizó la técnica de vaciado para la formación de las películas usando cajas Petri de plástico y dejando evaporar el contenido de agua en condiciones controladas de temperatura y humedad. El sistema OCT utiliza una fuente de iluminación de baja longitud de coherencia centrada en 840nm y con un ancho espectral de 40nm. El haz de iluminación es dirigido hacia un divisor que lo separa en el brazo de referencia y brazo objeto. El haz recombinado contiene los patrones de interferencia producidos por las distintas capas de la muestra. Para separar la información de las distintas longitudes de onda se utiliza una rejilla de difracción que separa angularmente la información y la proyecta sobre el sensor. La no linealidad producida por la rejilla se corrigió con algoritmos de linealización. Se utilizó una cámara en conjunto con una tarjeta de prototipado controlada mediante Python® y MatLab® para la adquisición, procesamiento y análisis de imágenes.

Las titulaciones potenciométricas y mediciones de turbidez permitieron definir la proporción 4:1 de los compuestos como la mejor. Los resultados obtenidos muestran que en presencia de un agente plastificante las películas tienen un espesor uniforme de 0.4mm. Mientras que las películas sin plastificante presentan un espesor de 0.1mm.

En conclusión, los materiales de empaque plásticos pueden ser remplazados por biomateriales ayudando a combatir el problema de contaminación. La metodología de titulación potenciométrica es una herramienta útil en la formación de complejos entre proteínas de suero y alginato de sodio además de que ayudan a determinar la mejor proporción entre los dos componentes. Por otro lado, la técnica de OCT demostró su utilidad como técnica no destructiva en la caracterización de las películas comestibles.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la Comisión para la Cooperación Ambiental (CCA), se desperdician alrededor de 28 millones de toneladas de comida en México, siendo el segundo país de América del Norte con mayor índice de desperdicio. Esto representa dinero perdido para empresas, hogares y gobiernos, a la vez que agrava la inseguridad alimentaria. Cuando los alimentos se desperdician, también se pierden todas las emisiones de agua, fertilizantes y tierras de cultivo asociados con esos alimentos.

Por esto, resulta de gran interés atacar esta problemática fortaleciendo el desarrollo de empaques y películas comestibles que demuestren ser una buena alternativa para mejorar la vida de anaquel de productos (Campos et al., 2011), (Di Pierro et al., 2013). Este tipo de materiales pueden ser realizados a partir de diferentes compuestos naturales como proteínas, carbohidratos, lípidos, o una

mezcla de ellas en diferentes proporciones que permiten un amplio espectro de posibilidades, incluyendo el uso de ceras para mejorar las propiedades de permeabilidad de las películas.

Es importante durante el diseño de los empaques comestibles tener en cuenta las características del material y del alimento en donde se va a aplicar para aprovechar de mejor manera las propiedades del empaque comestible.

Tradicionalmente, la caracterización de empaques comestibles consiste en el estudio de sus propiedades mecánicas y de permeabilidad, usando dinamómetros y permeabilímetros respectivamente, destruyendo el material para analizar con el respectivo aumento de costos de producción (Porta, et al., 2015). Actualmente, se buscan alternativas que permitan el estudio y caracterización de empaques comestibles, tanto en su forma de película como de recubrimiento, pero que permitan un análisis rápido, sencillo y sobre todo no destructivo (García-Betanzos, et al., 2016; Saberi et al., 2017).

La organización de las Naciones Unidas para la Alimentación (FAO por sus siglas en inglés) reconoce la necesidad de proveer a la población con alimentos inocuos en cantidad suficiente sin necesidad de manipularlos directamente y exponerlos a agentes contaminantes (FAO, Manual de inspección de los alimentos basada en el riesgo, ISSN 1014-2916, Roma). Atendiendo a esta directiva, las técnicas que se usarán para caracterizar estos materiales son remotas y no invasivas y pueden ser empleadas en distintos tipos de películas comestibles y/o recubrimientos en condiciones in-vitro o in-situ.

La aproximación de la óptica como herramienta para caracterizar y estandarizar nuevos materiales es algo que aún no se explota en nuestro país, a pesar de que ofrece mejoras sustanciales en el estudio de las propiedades mecánicas de los materiales como: resolución micrométrica y nanométrica, no invasiva, no destructiva, de campo completo.

Entre la diversidad de técnicas ópticas, la tomografía de coherencia óptica destaca por su capacidad para acceder a las capas internas de una muestra de bajo esparcimiento proporcionando información de los cambios estructurales debidos al proceso de descomposición de los alimentos, así como la evaluación del espesor del recubrimiento.

En este trabajo se evaluaron modelos de películas y recubrimientos comestibles a base de suero de leche de vaca utilizando tomografía de coherencia óptica. El uso de esta técnica pretende dar elementos que permitan conocer, en etapas tempranas, las características de interés de estos empaques durante el tiempo que sean empleadas para cubrir alimentos perecederos. La caracterización óptica proporcionará una alternativa para, potencialmente, coadyuvar a resolver problemas de acceso alimenticio de suma importancia para la población mexicana e incrementará el conocimiento sobre este tipo de películas y recubrimientos al poder estudiarlas desde una perspectiva de ingeniería de materiales.

TEORÍA

Muestras

Los polímeros son materiales resultado de la unión covalente de monómeros. Estos materiales se pueden encontrar en la naturaleza, algunos ejemplos son: caucho, celulosa, lana, seda. Estos materiales naturales han sido utilizados en gran medida en todo el mundo. Sin embargo, la necesidad de buscar materiales sustitutos que pudieran realizar las mismas funciones, pero con mejor eficiencia, derivó en la fabricación de polímeros sintéticos (sobre todo a partir de la Segunda Guerra Mundial). Estos materiales sintéticos ofrecieron avances en distintas áreas de la industria, y propiciaron la investigación y búsqueda de nuevos materiales poliméricos que ofrecieran una versión mejorada de los anteriores.

Un ejemplo de material polimérico es el alginato de sodio que se fabrica a partir de algas pardas. La combinación del alginato con el suero de leche de vaca permite crear películas con ciertas características mecánicas que resultan de interés en el área de alimentos.

Los polímeros naturales como los carbohidratos y/o proteínas son capaces de interactuar entre ellos gracias a la formación de complejos. Para lograrlo es necesario crear nuevos enlaces entre las moléculas de proteínas, a través de sus cargas positivas, con las cargas negativas del alginato de sodio. Esto es posible mediante la técnica de titulación potenciométrica y la medición de turbidez de los polímeros a estudiar (Di Pierro et al., 2013).

Óptica

La tomografía de coherencia óptica espectral (SOCT) es una técnica que aprovecha la baja coherencia de una fuente con ancho de banda espectral para generar patrones de interferencia que permitan reconstruir la estructura interna de la muestra (Huang, 1991). En un arreglo de tomografía de coherencia óptica, se disponen de dos brazos ópticos, uno de referencia que incluye un espejo cuya cara principal sirve como plano de referencia para la reconstrucción interna de la muestra; y uno que incluye a la muestra a observar. La diferencia de camino óptico entre éstos debe ser cercano a cero y no exceder la profundidad de campo del arreglo.

Las características de un arreglo SOCT dependerán de la apertura numérica de las lentes, del ancho espectral de la fuente y de la resolución de la cámara.

En la figura 1 se muestra el esquema de un arreglo SOCT. La disposición del arreglo es tipo Michelson, por lo que la sensibilidad del sistema es fuera del plano, esto permite que se obtenga la mayor resolución axial debido a que el ángulo de incidencia del haz es paralelo al de observación.

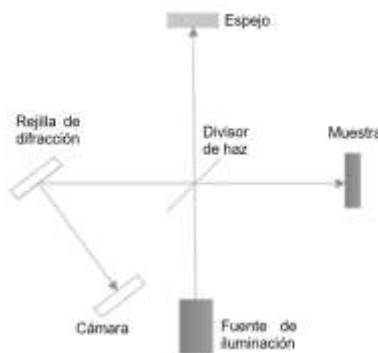


Figura 1. Esquema de un arreglo SOCT.

Una limitante de los arreglos SOCT, es que, la estructura transversal de un objeto se ve representada múltiples veces, una de ellas desplazada de las demás proporcionalmente a la diferencia de camino óptico de los brazos objeto y referencia del arreglo. Las demás representaciones de la estructura se ven superpuestas, pues son generadas por la autocorrelación de las distintas capas internas de la muestra.

La representación de la estructura interna de las muestras se obtiene al realizar la transformada de Fourier del interferograma capturado por la cámara (Takeda, 1982). La ecuación que representa dicha representación en el interferograma está dada por:

$$I(\lambda, y) = \sum_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} 2\sqrt{I_R(y)I_S(\lambda, y) \cos(\delta(\lambda, y))} \quad \text{Ec.1}$$

Donde λ es longitud de onda, y es la altura de un punto de la muestra, δ es la diferencia de fase, I es la intensidad, los subíndices R y S hacen alusión a la referencia y objeto respectivamente.

PARTE EXPERIMENTAL

Para la determinación de la mejor proporción de proteínas de suero y alginato de sodio (P/A) que permita la formación de complejos se realizaron titulaciones potenciométricas de diferentes proporciones de las soluciones a estudiar (ver tabla 1). Las soluciones fueron llevadas desde un pH de 10 hasta 2 usando ácido clorhídrico (HCl) con una concentración 0.1N. Al mismo tiempo, en cada unidad de pH, fue tomada una muestra y analizada su turbidez a 600nm. Los resultados fueron graficados y la mejor proporción de P/A fue determinada estudiando la gráfica de titulación e identificando la primera proporción que se separa del resto de las líneas.

Tabla 1. Cantidades usadas para el estudio de titulaciones potenciométricas.

Proporción	Proteínas de suero (gr)	Alginato de sodio (gr)
Control 1	25	-----
Control 2	-----	-----
1:1	25	25
2:1	25	12.5
4:1	25	6.2
6:1	25	4.1
8:1	25	3.1

Una vez determinada la mejor proporción, se preparó una solución filmógena (con la mejor proporción entre P/A) y se vaciaron 30 ml en una caja Petri de poliestireno de baja densidad. La solución fue dejada secar en condiciones controladas de humedad relativa (50%) y temperatura (40°C). La película obtenida fue despegada y conservada para estudios posteriores. Para mejorar las propiedades de flexibilidad de la película obtenida, se realizó otra solución filmógena de P/A usando 50% sorbitol no cristalizante y se realizó el mismo procedimiento de secado. El sistema propuesto en este proyecto se muestra en la Figura 2.

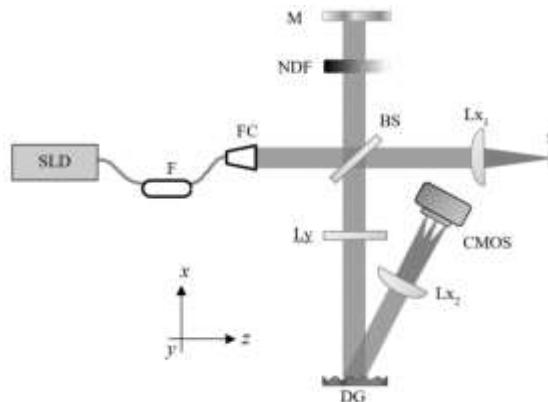


Figura 2. Diagrama esquemático del arreglo óptico. Donde SLD representa el diodo superluminiscente y su controlador, F es el aislador de Faraday, FC es el colimador de fibra, Lx1, Lx2 y Ly son lentes para el escaneo y enfoque y resolución del sistema, BS es el divisor de haz 50:50, M es el espejo de referencia, NDF es el filtro neutro de densidad, S es la muestra, DG es la rejilla de difracción y CMOS es la cámara.

En el arreglo OCT se utiliza una fuente de iluminación de baja longitud de coherencia centrada en 840nm y con un ancho espectral de 40nm con su respectivo controlador y colimador de fibra con conexión FC/APC. El haz de la fuente de iluminación es dirigido hacia un divisor de haz que envía parte de la luz hacia el brazo de referencia donde se encuentra el espejo plano con recubrimiento de plata; mientras que en el brazo objeto se encuentra el sistema con lentes para realizar el escaneo que permite generar B-scans y C-scans. Es necesario el uso de una lente de escaneo que permite enfocar el haz sobre la muestra y captar la luz retroesparcida para ser recombinada con la luz proveniente del brazo de referencia.

El haz recombinado contiene los patrones de interferencia producidos por las distintas capas de la muestra y las longitudes de onda del haz, todo esto en un haz colimado. Para separar la información de las distintas longitudes de onda se utiliza una rejilla de difracción que separa angularmente (y por lo tanto no lineal) la información y la proyecta sobre el sensor. Para corregir la no linealidad producida por la rejilla, se puede utilizar algoritmos de linealización que se basan en el número de onda y el ancho espectral del haz.

Para la adquisición de datos se utilizan una cámara en conjunto con una tarjeta de prototipado rápido para la adquisición de imágenes (Raspberry Pi ZeroW) que se controlan mediante Python y MatLab. Estas plataformas sirven, al mismo tiempo, para el procesamiento y análisis de datos.

La información obtenida de este proceso corresponde a la información estructural de la muestra para una imagen tomográfica que representa la estructura de una sección transversal de la muestra.

RESULTADOS

Las titulaciones potenciométricas entre las diferentes proporciones de P/A así como la de los componentes aislados (proteínas y alginato de sodio) se muestran en la figura 3. La primera línea de la gráfica que se separa del grupo de proporciones entre proteínas y alginato de sodio es la que corresponde a la proporción P/A de 4:1, es decir, en esta proporción aumenta el consumo de HCl, lo que corresponde a un mayor número de complejos P/AHa sido demostrado que a mayor número de complejos entre proteínas y carbohidratos, los empaques comestibles tienen mejores propiedades mecánicas y de permeabilidad (Di Pierro et al., 2013).

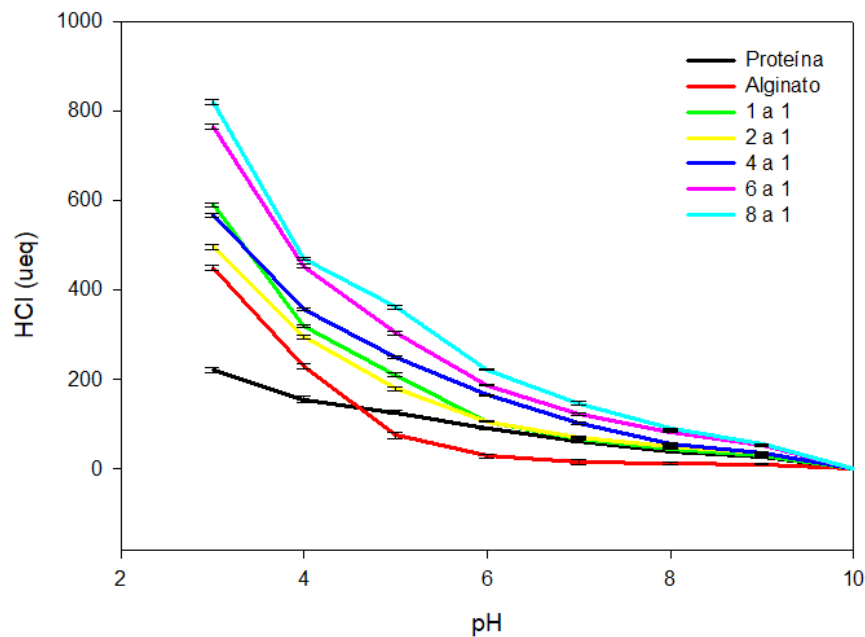
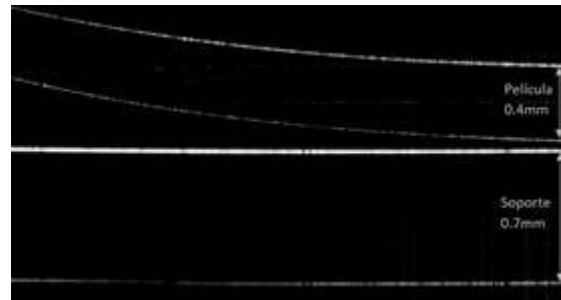


Figura 3. Resultados de la titulación potenciométrica de soluciones P/A.

Las mejores condiciones de secado de la solución filmógena con una proporción 4:1 fueron de 45°C y 50% de humedad relativa. Las películas obtenidas mostraron buena flexibilidad y fueron conservadas a 50% de humedad relativa y temperatura ambiente hasta su análisis con el sistema de tomografía de coherencia óptica.

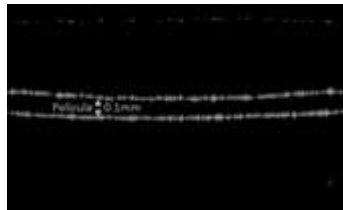
La figura 4 muestra la imagen tomográfica 2D de una película a base de proteínas de suero y alginato de sodio, en una proporción 4:1 secada a 45°C. En ésta se observa que el grosor de la película se mantiene en 0.4mm.



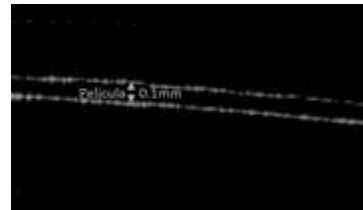
a)

Figura 4. Imagen tomográfica de una película secada a 45°C.

En la figura 5, se muestran las imágenes tomográficas de una muestra sin plastificante (sorbitol) para evaluar el efecto de esta componente secada a 45°C. En ambas se observa que el grosor de la muestra es de 0.1mm; sin embargo, la película presentó curvatura que puede deberse al proceso de secado.



a)



b)

Figura 5. Película sin sorbitol secada a 45°C. a) Imagen tomográfica de la película obtenida de la zona lateral izquierda de una muestra, b) imagen tomográfica de la película de obtenida de la zona lateral derecha de la misma muestra.

CONCLUSIONES

Los empaques comestibles son una alternativa a los materiales plásticos puesto que contribuyen a reducir la contaminación ambiental. Este tipo de empaques se producen a partir de componentes naturales como proteínas o carbohidratos, sin embargo, la formación de interacciones entre los dos componentes, en forma de complejos, favorece la formación de empaques flexibles.

Por otro lado, en la actualidad los métodos de estudio de empaques se basan en técnicas destructivas, lo que se traduce en una pérdida económica y generación de basura.

Con la tomografía de coherencia óptica, se pudieron analizar las características físicas de las muestras, como el espesor y la uniformidad de éste. Además, la técnica permitió realizar las mediciones sin necesidad de retirar la película del recipiente donde se fabricaron, evitando así cualquier alteración provocada por adhesión de la película al soporte. En comparación con las técnicas tradicionales, se obtuvieron las mediciones a escala micrométrica y de campo completo.

Como trabajo a futuro, se plantea el análisis mecánico para determinar qué alimentos se beneficiarían al ser envueltos o recubiertos con empaques cuyas propiedades han sido caracterizadas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Campos, Carmen A.; Gerschenson, Lía N.; Flores, Silvia K. "Development of edible films and coatings with antimicrobial activity". Food and bioprocess technology, 2011, vol. 4, 6, 2011, p. 849-875.

2. Porta, Raffaele, et al. "Microstructure and properties of bitter vetch (*Vicia ervilia*) protein films reinforced by microbial transglutaminase". *Food hydrocolloids*, vol. 50, 2015, p. 102-107.
3. García-Betanzos, Claudia Idalid, et al. "The evaluation of mechanical, thermal, optical and microstructural properties of edible films with solid lipid nanoparticles-xanthan gum stored at different temperatures and relative humidities". *Food and Bioprocess Technology*, vol. 9, 10, 2016, p. 1756-1768.
4. Saberi, Bahareh, et al. "Physical and mechanical properties of a new edible film made of pea starch and guar gum as affected by glycols, sugars and polyols". *International journal of biological macromolecules*, vol. 104, 2017, p. 345-359.
5. P. Di Pierro et al., "Effects of Transglutaminase on the Mechanical and Barrier Properties of Whey Protein/Pectin Films prepared at Complexation pH", *J. Agri. Food. Chem.*, Vol. 61, 19, 2013, pp. 4593-4598.
6. Huang, David, et al. "Optical coherence tomography". *science*, vol. 254, no 5035, 1991, p. 1178-1181.
7. Takeda, Mitsuo; INA, Hideki; KOBAYASHI, Seiji. "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry". *JosA*, vol. 72, 1, 1982, p. 156-160.

LA ÓPTICA FÍSICA “DETRÁS” DE LA CÁMARA OSCURA

¹María del Rayo A. Aparicio Fernández, ²Cristina E. Solano Sosa

¹ Centro Universitario de los Lagos, UDG, mdevasnik@yahoo.com.mx,

² Centro de Investigaciones en Óptica A. C., csolano@cio.mx

RESUMEN

Una cámara oscura es, en esencia, una caja cerrada con una perforación circular pequeña (llamada estenopo o “pinhole”, en inglés) en una de sus caras. En el interior de la cámara, en la superficie opuesta al estenopo, este forma una imagen de algún objeto que se encuentra, en el exterior de la cámara, frente de él. El funcionamiento y aplicaciones de la cámara oscura es un tema que ha causado fascinación en las mentes científicas desde hace siglos y “detrás” de la imagen que forma este sencillo dispositivo hay toda una teoría de la óptica física. Con frecuencia se piensa que el funcionamiento de la cámara oscura puede explicarse utilizando óptica geométrica, cuando en realidad esto es un tema del ámbito de la óptica física, ya que la imagen formada por la luz que atraviesa el “pinhole” es una cuestión de difracción de la luz. Para explicar la formación de la imagen en la cámara oscura, se construyó un dispositivo utilizando MDF y varios orificios de diferentes diámetros (D) perforados en láminas de aluminio. Como pantalla para la observación de la imagen se usó un vidrio esmerilado que podía desplazarse (acercarse o alejarse del “pinhole”), para experimentar con la formación de la imagen. Se realizaron un conjunto de experimentos bajo diferentes condiciones: primero se trabajó con un diámetro fijo de “pinhole” y se varió la distancia (d) entre este y la pantalla buscando la posición en donde se obtuviera la mejor imagen. Posteriormente se dejó la distancia, d, fija y se varió, D, para lo cual fue necesario cambiar el “pinhole”. Con estos experimentos se pudo comprobar la dependencia que tiene la nitidez de la imagen respecto de D, así como la relación matemática entre, D y d. Estos experimentos se llevaron a cabo con luz blanca y también con luz láser de $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Con los experimentos realizados con la cámara oscura fue posible corroborar las expresiones matemáticas de la teoría de la óptica física, que relacionan D, d y la longitud de onda de la luz.

INTRODUCCIÓN

La historia de la cámara oscura o estenopeica es muy antigua ya que se tiene constancia de que en el año 400 a.C., el filósofo chino Mo-Tzu (Mozi), describió, cómo la luz proyecta imágenes invertidas al pasar por una pantalla que posee un orificio. Aristóteles (384-322 a.C.) observó que los espacios entre las hojas de los árboles actuaban como pequeños agujeros que proyectaban en el suelo, la imagen de un eclipse solar parcial y replicó este resultado utilizando una placa de metal con un orificio, para proyectar un eclipse sobre una superficie. Se tienen contribuciones del físico árabe Ibn al-Haytham, Alhazen, en su libro de óptica en el año de 1021. Leonardo da Vinci (1452-1519) realizó la primera descripción completa de la cámara oscura. La utilizó para profundizar en el funcionamiento de la visión, el comportamiento de la luz y las leyes de la perspectiva geométrica, todo ello relacionado con las prácticas de la pintura. Giovanni Battista della Porta (1538-1615), fue considerado el inventor de la cámara oscura por su descripción de una cámara oscura estenopeica en la primera edición de su "Magia Naturalis" (1558) y Sir David Brewster (1781-1868), acuñó el término "pinhole" utilizado por primera vez en su libro "The Stereoscope", en 1856.

TEORÍA

Francesco Grimaldi (1618-1663) llevó a cabo el primer estudio detallado del fenómeno de *Difracción* en el cual un cuerpo transparente u opaco, colocado al paso de una onda luminosa, o la simple propagación de un frente de onda, alteraba la amplitud o la fase de una región de la misma (Hecht 1977). El término difracción lo definió Sommerfeld como "Cualquier desviación de los rayos luminosos que no puede interpretarse como reflexión o refracción". Este fenómeno es general y su estudio llevó a aceptar de manera definitiva la naturaleza ondulatoria de la luz.

Christian Huygens en 1678 propuso la teoría ondulatoria de la luz, suponiendo que cada punto del frente de onda pudiera considerarse una nueva fuente de ondas secundarias.

Cuando se tiene luz proveniente de una fuente puntual, incidiendo sobre una pantalla con una abertura, y un plano de observación paralelo a la pantalla, se proyectará sobre este plano una imagen de la abertura cuya forma es bastante parecida a la misma, a pesar de que se presentan unas débiles franjas que se observan alrededor de su periferia. Conforme la pantalla de observación se aleja de la abertura la imagen sigue teniendo la misma forma aunque es posible ver que las franjas se intensifican y van adquiriendo más estructura. Este fenómeno se llama difracción de Fresnel o de campo cercano.

La figura 1 muestra los parámetros considerados en la teoría de difracción, donde la abertura se encuentra en el plano (x,y) y el patrón de difracción se observa en el plano (ξ,η)

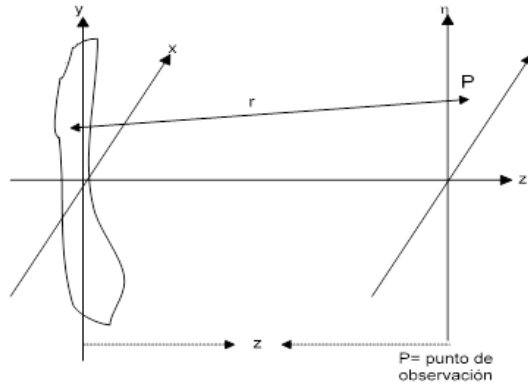


Fig. 1 Geometría utilizada para las aproximaciones de Fresnel y Fraunhofer.

El patrón de difracción se encontrará a la distancia

$$z \ll \frac{\pi}{4\lambda} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]_{\max}^2, \tag{1}$$

donde λ , es la longitud de onda de la luz utilizada.

Al alejar aún más el plano de observación las franjas sufrirán un cambio continuo y a una gran distancia la distribución de la irradiancia se habrá extendido considerablemente, teniendo muy poco o nada de parecido con la abertura. De ahí en adelante el movimiento del plano de observación cambiará esencialmente el tamaño de la distribución pero no su forma. Este fenómeno es conocido como difracción de Fraunhofer o de campo lejano (Hecht, 1977), que tendrá que cumplir la condición

$$z \ll \frac{k(x^2 + y^2)_{\max}}{2} \tag{2}$$

La distribución de la irradiancia debido a la difracción de la luz por una abertura circular fue observada y estudiada por Sir George Biddell Airy (1801-1892), quien fue el primero en obtener una expresión matemática que explicaba los resultados obtenidos.

Como se observa en las figuras 2 y 3 ese patrón consiste en un disco central de máxima irradiancia (disco de Airy) rodeado de anillos concéntricos más débiles. El disco de Airy está rodeado por el primer anillo oscuro, el radio q_1 de ese anillo es considerado como el radio del disco de Airy y está dado por

$$q_1 = 1.22z\lambda/2a \tag{3}$$

donde z es la distancia entre la abertura y al plano de observación, a es el radio de la abertura y λ es la longitud de onda de la luz.

La expresión matemática de la irradiancia debida a una abertura circular de diámetro ($2a$) estará dada por,

$$I(\rho) = \left(\frac{\pi a^2}{\lambda z} \right)^2 \left[\frac{J_1(k 2a\rho/z)}{k 2a\rho/z} \right]^2$$

Donde $\rho = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}$

Esta función se encuentra graficada en la, figura 2 y su fotografía se observa en la figura 3.

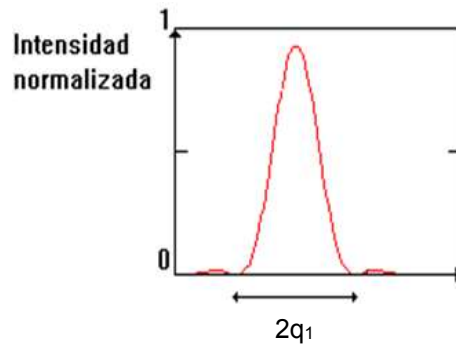


Fig. 2 Sección transversal del patrón de difracción de una abertura circular



Fig.3 Fotografía del patrón de difracción de una abertura circular, conocido como patrón de Airy.

Cualquier sistema óptico se verá afectado por efectos de difracción debido al tamaño finito de la abertura de la lente. En el caso de la cámara oscura, como este dispositivo no tiene lente alguna que sea la responsable de la imagen que se proyecta en la pared interior opuesta al "pinole" será este el que provocará el efecto de difracción en la imagen.

En el diagrama de la cámara oscura de las figuras 4 y 5, podemos observar que el estenopo actúa en realidad como un filtro, que selecciona una pequeña cantidad de luz a la que permite continuar su trayectoria hasta el plano de registro o de observación y, debido a su tamaño, estos rayos luminosos formarán el patrón de difracción correspondiente.

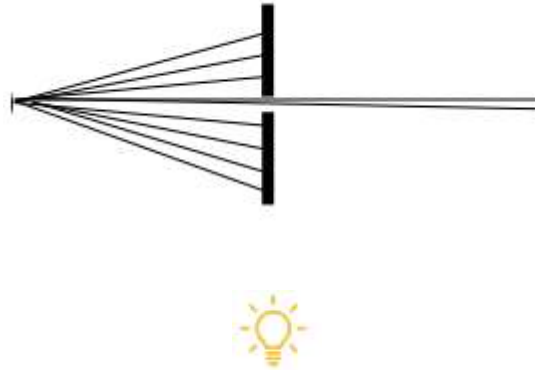


Fig. 4 Diagrama del paso de la luz por el estenopo.

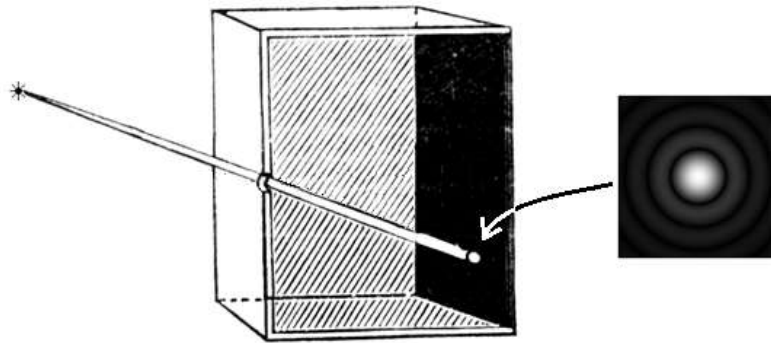


Figura 5. Patrón de difracción de campo lejano de una abertura circular.

Al considerar un objeto extendido en lugar de una fuente puntual, cada uno de los puntos del objeto emiten o reflejan luz, actuando como fuentes puntuales de luz. La abertura formará un patrón de difracción para cada una de esas fuentes, de tal forma que la imagen completa del objeto será un conjunto de patrones de Airy superpuestos (figura 6). Se debe notar también que la imagen obtenida es invertida respecto del objeto real, debido a la propagación rectilínea de la luz.

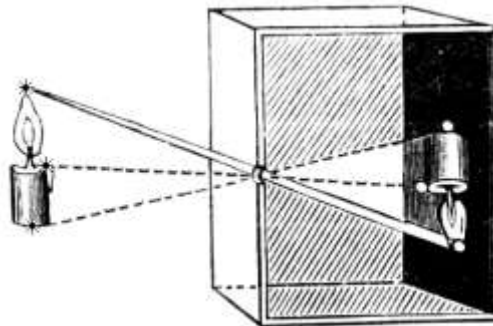


Figura 6 Formación de imágenes de un objeto extendido.

De acuerdo con la Ec. 3 observamos que el diámetro del patrón de difracción es inversamente proporcional al radio del orificio (a). Por lo que se podría proponer aumentar el diámetro del orificio para eliminar los efectos de difracción, lo que traería la ventaja de reducir el tiempo de exposición en el caso de utilizar la cámara obscura como cámara fotográfica. Sin embargo, el resultado sería de una imagen poco definida ya que de acuerdo con la figura 6 cada punto del objeto se vería iluminado por luz que no pertenece a este y la imagen será muy borrosa.

Idealmente, un estenopo debería dejar pasar sólo un rayo de luz para obtener la mayor nitidez posible en la imagen proyectada, sin embargo en este caso la difracción debida al tamaño del orificio provocaría que los efectos de difracción sean más visibles. Se puede deducir entonces que el tamaño del agujero deberá ser lo suficientemente pequeño como para formar el círculo de imagen más pequeño –y nítido– posible y lo suficientemente grande como para que el efecto de difracción no perjudique la calidad de la imagen.

PARTE EXPERIMENTAL

Para determinar el efecto en la calidad de la imagen obtenida por la cámara obscura se analizarán las imágenes obtenidas al variar el diámetro de los estenopos y la distancia entre ellos a la pantalla de observación.

En este trabajo se utilizaron aberturas electroformadas, circulares de 400 y 500 micras de diámetro, la distancia máxima entre la abertura y la pantalla de observación era de 25 cm, que aplicando la ecuación (2) comprobamos que esta longitud es muy grande comparada con las dimensiones de la abertura, por lo cual podemos esperar que en el plano de observación se presente el patrón de difracción de Fraunhofer para una abertura circular, figuras 2 y 3.

La imagen obtenida es invertida, respecto del objeto real, y se ha determinado experimentalmente, (Renner 2009) que existe una posición de la pantalla de observación en la cual la se tiene la mejor calidad de imagen, esta distancia está dada por una relación matemática entre el diámetro de la abertura (D) y la distancia al plano de observación (d) (ver ecuación 4).

$$D = 0.0016 d \quad \dots\dots(4)$$

Para observar las imágenes producidas por la cámara obscura, se diseñó y construyó una cámara utilizando MDF, (ver figura 7). Se utilizaron como aberturas dos estenopos de diámetros 400 μm y 500 μm , y como pantalla para la observación de la imagen se usó un vidrio esmerilado, montado sobre un soporte que (introducido en la parte posterior de la cámara) podía desplazarse para acercarse o alejarse del “pinhole”.

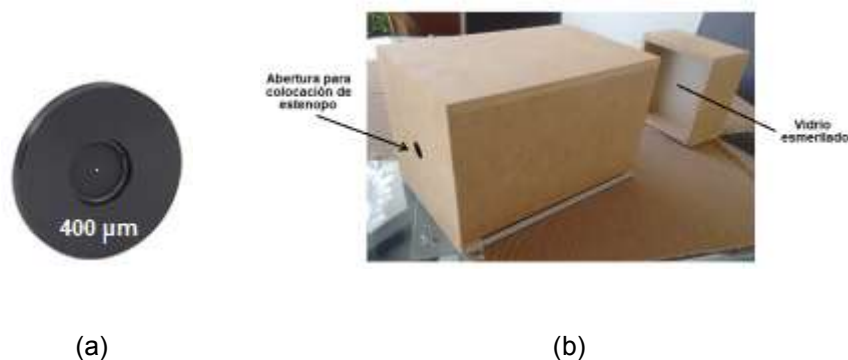


Figura 7. (a) Estenopo o “Pinhole” con montura. (b) Cámara obscura utilizada en las pruebas.

Para evaluar con precisión la calidad de la imagen se utilizó como objeto una tarjeta de pruebas USAF-1951 (figura 8), que permite determinar la diferencia de la resolución de las diferentes imágenes obtenidas observando los diferentes grupos correspondientes en la tarjeta.

Como fuente de iluminación se utilizó una lámpara de luz blanca y un láser de longitud de onda de 550 nm. Las imágenes fueron fotografiadas con una cámara digital.

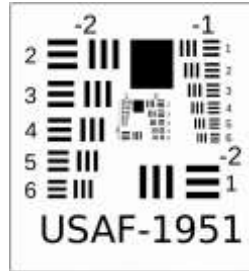


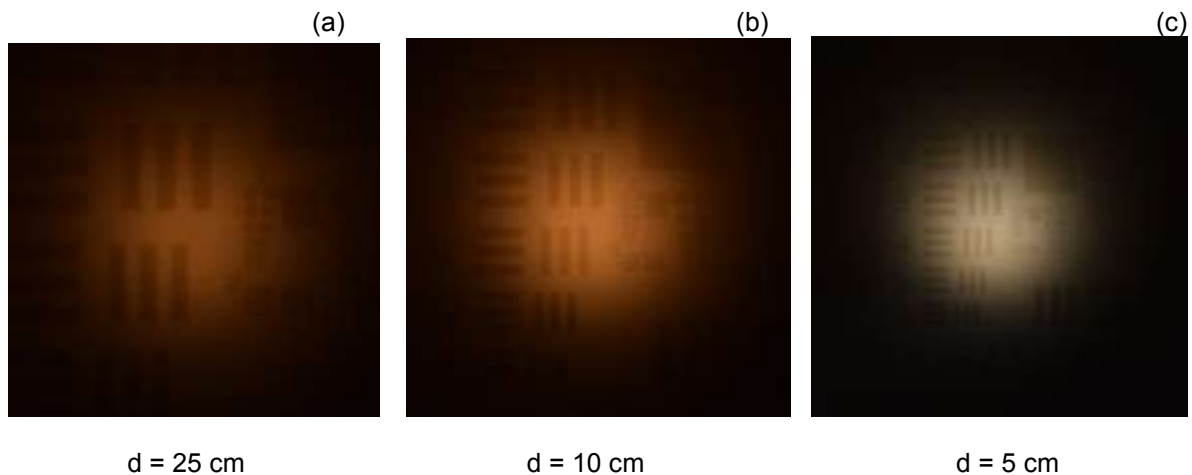
Figura 8. Tarjeta USAF- 1951

Se realizaron un conjunto de pruebas con diferentes parámetros donde los resultados más importantes se muestran a continuación.

RESULTADOS

A continuación se muestran las series de fotografías para los estenopos de 400 μm y 500 μm , para diferentes distancias (d) entre estos y la pantalla. En todos los casos se buscó la distancia donde la imagen obtenida fuera la mejor imagen.

Para un diámetro de pinole de 400 micras, Fig. 9(a, b, c):



Para un diámetro de estenopo de 500 micras, Fig. 9 (d, e, f):

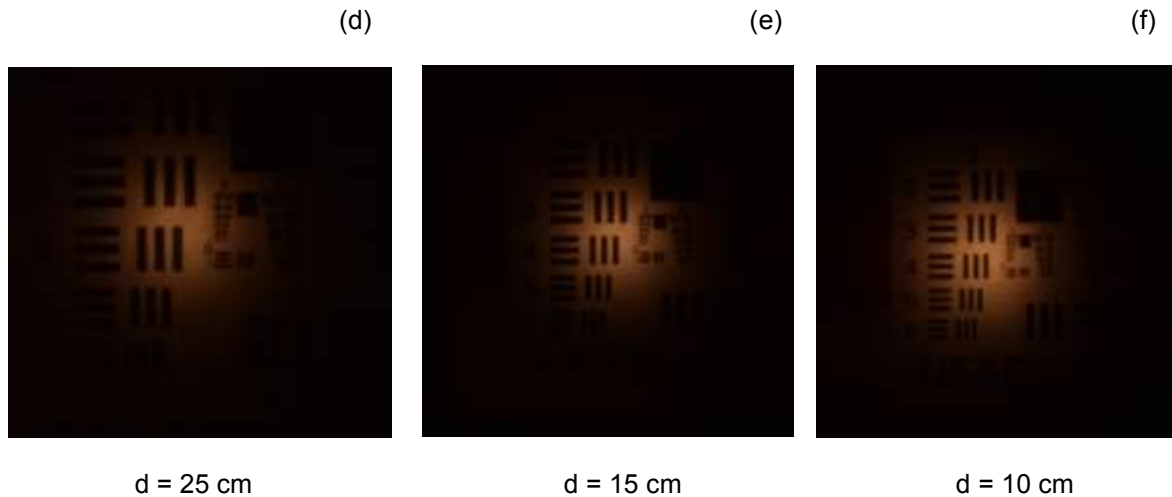


Fig. 9. Resultados obtenidos para estenopos de 400 y 500 μm .

La ecuación (4) predice que la mejor imagen para $D = 400 \mu\text{m}$ se encuentra para la posición del plano de observación en $d = 10 \text{ cm}$. Si se comparan las figuras 9a, 9b y 9c puede observarse que las tres líneas horizontales marcadas con 0-1 en la tarjeta de prueba (al centro) definen el límite de resolución de las imágenes y la mejor resolución se presenta para $d = 10 \text{ cm}$, lo cual cumple con la predicción de la ecuación (4) según puede observarse.

Por otra parte, al comparar las figuras 9d, 9e y 9f, para $D = 500 \mu\text{m}$, las tres líneas horizontales marcadas con 0-1 en la tarjeta de prueba tiene la mejor resolución para $d = 15 \text{ cm}$. En este caso la ecuación (4) predice que la mejor imagen se encuentra en $d = 15.62 \text{ cm}$.

CONCLUSIONES

Con estos experimentos se pudo comprobar la dependencia que tiene la nitidez de la imagen respecto del diámetro del estenopo D , así como la relación matemática entre este parámetro D y la distancia entre el estenopo y la pantalla de observación, d . Además, al comparar el contraste entre las fotografías obtenidas con los dos estenopos de diferente diámetro se puede observar que estas son más nítidas con el estenopo de $500 \mu\text{m}$ debido a que los efectos de difracción son menos notables al incrementar el diámetro.

BIBLIOGRAFÍA

1. Hecht E. & Zajac A. (1977). Óptica. E.U.A.: *Fondo Educativo Interamericano S.A.*, pp. 466-471.
2. Malacara D. (1988). *Geometrical and instrumental optics, Methods of experimental physics*. USA: Academic Press Inc.
3. Malacara D. (2004). *Óptica Básica*. México: Fondo de Cultura Económica.
4. Pedrotti F. & Pedrotti L. (1993). *Introduction to optics*. USA: Prentice Hall.
5. Renner E. (2009). *Pinhole Photography: From historic technique to digital application*, 4 ed. Amsterdam: Elsevier.

Nota: Las imágenes de las figuras 5 y 6 son de uso libre, etiquetadas para reutilizar con modificaciones.

Modificadas de: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/Camera_obscura_1.jpg

REJILLAS OPTOFLUIDICAS USADAS COMO REFRACTÓMETROS

Sergio Calixto¹, Valeria Piazza¹, Alan M. Gonzalez-Suarez², Jose L. Garcia-Cordero², Neil C. Bruce³, Martha Rosete-Aguilar³ y Guillermo Garnica¹

¹Centro de Investigaciones en Optica A.C., Loma del Bosque 115, Leon, Guanajuato, Mexico.

²Centro de Investigacion y de Estudios avanzados del Instituto Politecnico Nacional, Unidad Monterrey, Via del conocimiento 201, Parque PIIT, Apodaca, Nuevo Leon, CP 66628, Mexico.

³Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnologia, UNAM, Ciudad Universitaria, CP 04510, Mexico. City, Mexico.
scalixto@cio.mx

RESUMEN

Hay diferentes clases de refractómetros. Algunos de ellos tienen un uso general y otros están diseñados para una aplicación en particular. Ellos están basados en métodos interferométricos, goniometría y elipsometría, por mencionar algunos. Aquí proponemos un refractómetro que usa rejillas de superficie como elemento principal para medir índices de refracción de líquidos o mezclas de ellos. Las rejillas muestran un perfil cuadrado. Ellas se pueden colocar ya sea a) dentro de una celda de vidrio donde el líquido al cual se le va a medir el índice de refracción es vertido o b) las rejillas están dentro de un bloque de silicona formando un “serpentin” por donde fluye el líquido. En este caso se usan solo unos picolitros de sustancia. Para hacer las rejillas se utilizaron dos métodos: a) método de copiado por contacto de una rejilla “master”, b) litografía. Las profundidades de los surcos fueron de 1 micra, 10 micras y 37 micras. Se desarrolló la teoría que describe la intensidad del primer orden como función del índice de refracción. También se muestra la sensibilidad, el contraste del orden cero y el comportamiento del primer orden como función de la longitud de onda de la luz. Cuando la luz se envía a la rejilla es difractada y entonces aparecen diferentes órdenes. La intensidad de estos órdenes es una función del índice de refracción del líquido. Los parámetros de la rejilla son la profundidad de los surcos, el ancho de los canales, y el periodo. Se muestran curvas de calibración que consideran la intensidad del primer orden difractado como función del índice de refracción.

INTRODUCCION

Los fenómenos físicos en los cuales trabajan los refractómetros son variados. Entre ellos tenemos el de la interferometría, gonometría, elipsometría y otros. Con los métodos interferométricos¹ las medidas se hacen al comparar el retraso de la luz, cuando es transmitida al atravesar el medio que se estudia, con un haz de luz que viaja por una trayectoria de referencia. Estos refractómetros interferométricos son muy sensibles a vibraciones externas o fluctuaciones del índice de refracción y a la periodicidad de la curva de transmisión por mencionar algunas dificultades. Entre estos refractómetros tenemos al llamado Jamin y el Mach-Zehnder. Los refractómetros que usan la elipsometría² también presentan debilidades tales como el tener conocimiento preciso del grosor y el índice de refracción del sustrato.

Por estas razones aquí proponemos el uso de rejillas de difracción de relieve como una alternativa para medir el índice de refracción de líquidos. Presentamos la teoría de las rejillas de difracción que muestran un perfil cuadrado. Luego comentamos sobre los materiales y métodos que se utilizaron para fabricar las rejillas. Además presentamos los arreglos experimentales utilizados así como ejemplos de curvas de calibración para diferentes líquidos.

Rejilla de difracción con perfil cuadrado (teoría)

Suponemos que tenemos una rejilla de superficie que consiste de un conjunto de rendijas paralelas que tienen un ancho (w) y una altura (h). Entre estas rendijas hay otro conjunto de ellas, cada una con un ancho (i). El periodo de la rejilla es (p), $p=w+i$. Los dos conjuntos de rejillas transmiten luz, Cuando la luz es enviada a la rejilla esta es difractada y aparecerán varios órdenes. La intensidad del primer orden está descrito por la ecuación siguiente:

$$I_1(x) = I_0 (w/p)^2 \text{sinc}^2 (w/p) 2 (1 - \cos \phi)$$

Donde $\phi = (2\pi/\lambda)h(n_2 - n_1)$, n_1 es el índice de refracción de la rejilla y n_2 el índice del líquido en el cual esta inmersa.

En la Fig. 1 mostramos el comportamiento teórico, usando la ecuación 1, de la intensidad del primer orden en función del índice de refracción del líquido donde esta inmersa. El parámetro es la profundidad de la rejilla (h) y se supuso que el índice de refracción de la rejilla fue de 1.40.

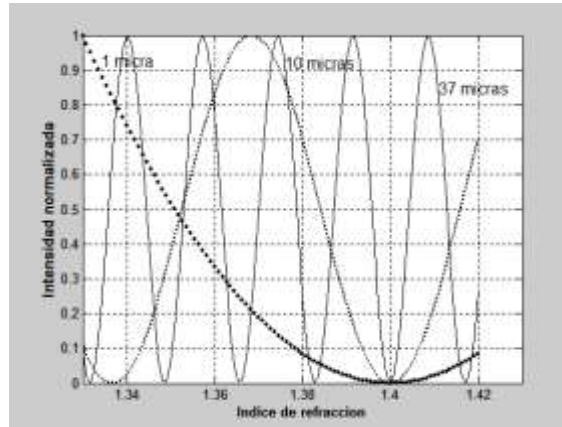


Fig. 1. Intensidad del primer orden en función del índice de refracción del líquido en el cual esta inmersa la rejilla.

Fabricación de las rejillas.

El material que se debe usar para fabricar las rejillas para esta aplicación debe cumplir con diferentes requisitos o cualidades como ser transparente para la luz visible, hidrofóbico, estable con la temperatura, de bajo costo, no debe presentar “encogimiento” y otros. El material que escogimos fue la silicona (PDMS).

Usamos dos métodos para fabricar las rejillas. Uno fue la copia por contacto y el otro por litografía. Las rejillas fabricadas tenían profundidades (h) de 1 μm , 10 μm y 37 μm , Fig. 2. El ancho de las rendijas fue de 200 μm y la separación entre rendijas también se escogió de 200 μm . Con estos valores la sensibilidad fue máxima. Las superficies de las rejillas fueron revisadas con un microscopio de fuerza atómica y con un perfilómetro.

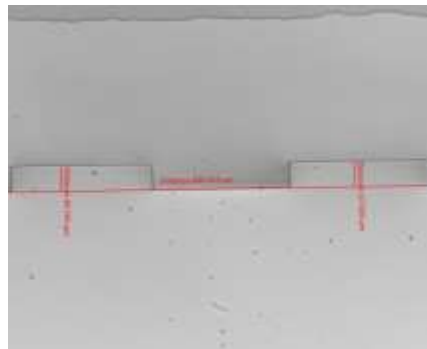


Fig. 2. Rejilla de relieve.

Aparte de las rejillas de relieve, mencionadas en el párrafo anterior, se fabricaron otras usando métodos de circuitos microfluidicos³. En este método se usó la litografía. Una de estas rejillas se muestra en las Fig. 3 y 4.

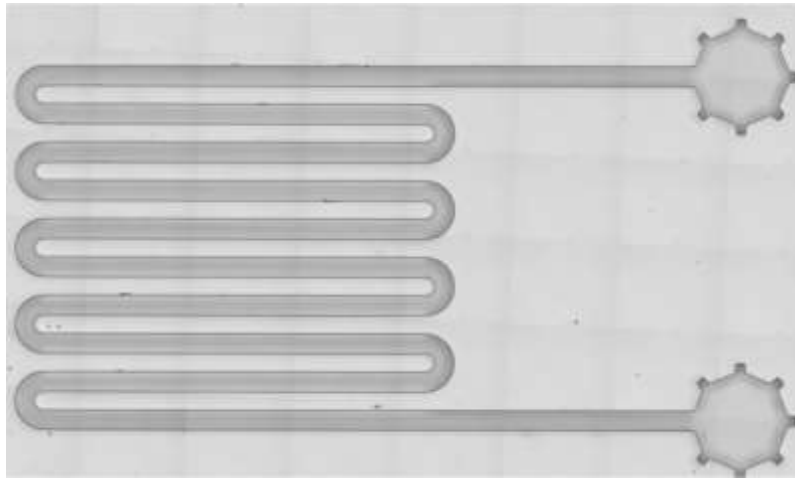


Fig. 3. Rejilla microfluidica fabricada con el método de litografía.

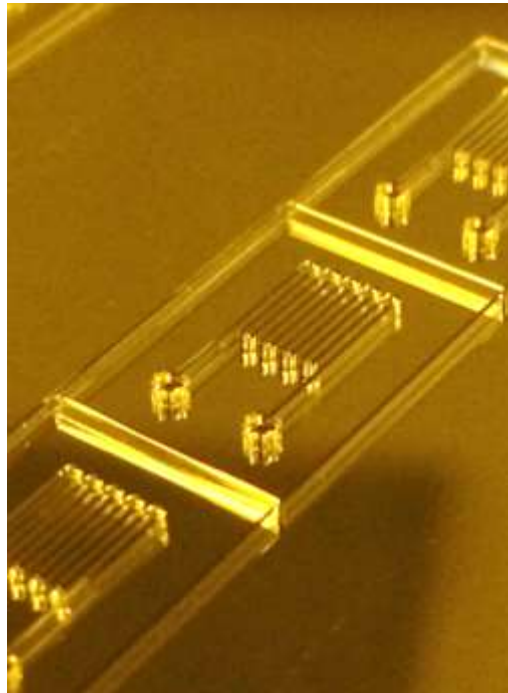


Fig. 4. Fotografía de una rejilla microfluidica.

Arreglo óptico

Para estudiar el comportamiento de las rejillas se utilizó el dispositivo siguiente, Fig. 5. Un laser He-Ne estabilizado ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$) se usó como fuente de luz. Se construyó una celda de vidrio donde se pegó la rejilla en uno de sus lados interiores. La luz al atravesar la rejilla fue difractada dando varios órdenes. Con la ayuda de un radiómetro se monitoreó la intensidad del primer orden difractado.

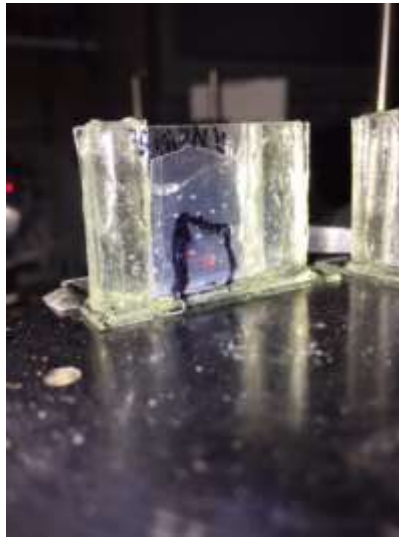


Fig. 5. Rejilla dentro de una celda de vidrio.

Otro dispositivo experimental se utilizó para cuando se usaron los circuitos microfluidicos, Fig. 6. El mismo laser fue utilizado.

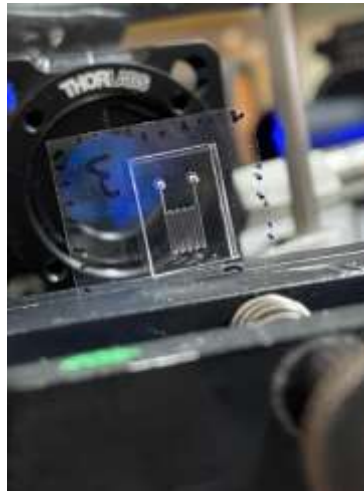


Fig. 6. Dispositivo experimental usado cuando se tenía una rejilla microfluidica.

Respecto a los líquidos utilizados para la prueba y calibración de las rejillas se usaron las siguientes mezclas: agua-glicerina, agua-Thiodietanol (TDE) y una mezcla de buffer (pH 10) con albumen (clara de huevo). Los índices de refracción para las muestras mencionadas variaron desde 1.3385 a 1.403, 1.339 a 1.44 y 1.357 hasta 1.33 para cada una de las muestras respectivamente.

Curvas de calibración. Rejillas en celda de vidrio.

Para obtener las curvas de calibración se usaron las mezclas mencionadas anteriormente. Las rejillas de difracción mostraron las profundidades mencionadas en los párrafos de arriba. Las rejillas se colocaron dentro de la celda de vidrio (Fig. 5) donde se iba vertiendo, uno a uno, cada líquido. A la vez se medía la intensidad del primer orden difractado. Como resultado obtuvimos las gráficas mostradas en las Figs. 7, 8 y 9 donde se usaron tres rejillas cada una con una profundidad de surco dada.

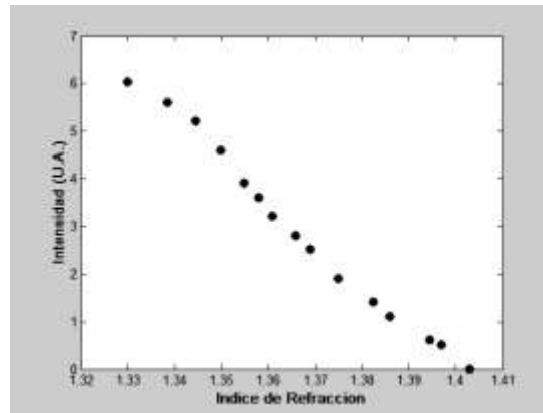


Fig. 7. Curva de calibración para la rejilla con rendijas de 1 micra de profundidad.

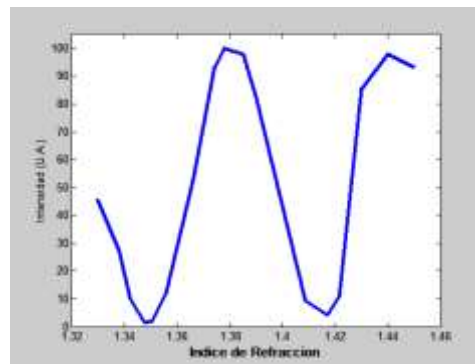


Fig. 8. Curva de calibración para la rejilla con rendijas de 10 micras de profundidad.

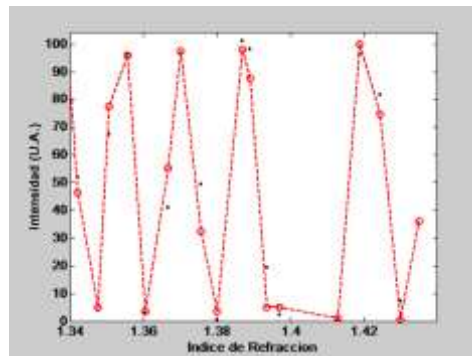


Fig. 9. Curvas de calibración para las rejillas con 37 micras de profundidad.

Curvas de calibración para sustancias orgánicas inyectadas en circuitos microfluidicos. Las rejillas de perfil también pueden ser utilizadas cuando se tienen sustancias orgánicas. Para este caso utilizamos albumen (clara de huevo) que se disolvió en un buffer (pH 10). En la Fig. 10 se muestra el comportamiento del índice de refracción de las mezclas en función de la cantidad del buffer cuando fue mezclado en 2 ml de albumen. Estas mezclas se inyectaron, una a una, en el circuito microfluidico y a la vez se media la intensidad del primer orden difractado. Con esto se obtuvo la curva de calibración mostrada en la Fig. 11.

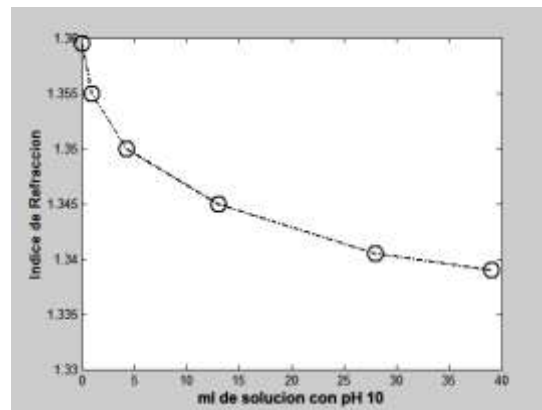


Fig. 10. Índice de refracción en función de la cantidad de buffer disuelta en 2 ml de albumen.

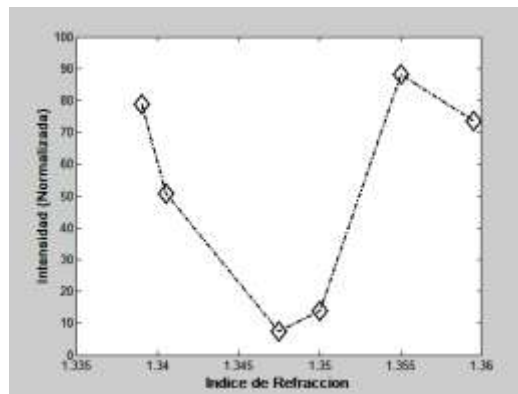


Fig. 11. Curva de calibración para circuitos microfluidicos.

CONCLUSIONES

Hemos mostrado que con el uso de rejillas de difracción, que muestren un perfil cuadrado, se puede medir el índice de refracción de líquidos al monitorear la intensidad del primer orden. Se han presentado dos arreglos ópticos. Uno con una celda de vidrio, que contiene la rejilla de difracción, y otro con un circuito microfluidico con canales de 37 micras de profundidad y 200 micras de ancho.

REFERENCIAS

1. R.S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics*, (Longman, London, 1973).
2. F.A. Jenkins and H.E. White, *Fundamentals of Optics* (Mcgraw-Hill, New York, 1975).
3. O.J.A. Schueller, D.C. Duffy, J.A. Rogers, S.T. Brittain, and G.M. Whitesides, "Reconfigurable diffraction gratings based on elastomeric microfluidic devices." *Sensors and Actuators* 78, 149-159 (1999).

ENSEÑANZA DE LA FÍSICA CON PROYECTOS

Julio Cesar Mendoza Rojas, Javier Humberto Mares Arcila, Pablo Abraham Tea Ruiz, Alberto Zavala Cerda y Tsanda Sánchez Rico

Escuela Preparatoria "Gral. Lázaro Cárdenas", UMSNH
merojuce@hotmail.com

RESUMEN

El proceso enseñanza – aprendizaje de la Física y el desarrollo de la actividad científica en estudiantes de Nivel Medio Superior y Superior, presenta mucha apatía y desinterés, que se ve reflejado en el bajo promedio de calificaciones y altos índices de reprobación. Analizando esta problemática surge la necesidad de implementar una estrategia didáctica para mejorar el aprovechamiento escolar de los estudiantes y reducir los índices de reprobación. En esta propuesta didáctica se desarrolló un diseño instruccional sustentado en las teorías del aprendizaje basado en proyectos, para desarrollar la actividad científica y el trabajo en equipo, lograr una mayor motivación y despertar el interés de los jóvenes en la asignatura de Física III (Electricidad y Magnetismo), inducirlos a las actividades científicas con la elaboración de experimentos y artículos científicos, con la finalidad de disminuir los índices de reprobación y mejorar el aprovechamiento escolar. Se realizó un análisis estadístico descriptivo de una muestra formada por los estudiantes del Bachillerato de Ciencias Químico – Biológicas de la Escuela Preparatoria “Gral. Lázaro Cárdenas” dependiente de la U.M.S.N.H. En la primera etapa el grupo muestra recibió la enseñanza de forma tradicional, utilizando: papel, lápiz y libros de texto en los temas de electricidad y magnetismo, al final se aplicó una evaluación parcial escrita. En la segunda etapa desarrollaron proyectos por equipos para presentar un experimento y un artículo científico explicando los fenómenos eléctricos y magnéticos, así como las leyes que los fundamentan. La evaluación de proyectos se realizó con rúbricas específicas. Al comparar los resultados de las evaluaciones se obtuvieron los siguientes resultados: en los porcentajes de reprobación se redujo en un 37.55 %. Al principio los estudiantes externaron que se sentían estresados porque los experimentos no les funcionaban, pero al final estaban muy emocionados y motivados cuando los mejoraban y lograban su funcionamiento, en la parte del desarrollo del artículo científico presentaron algunas deficiencias que se deben mejorar con la práctica, sobre todo en la redacción y síntesis.

INTRODUCCIÓN

El proceso enseñanza – aprendizaje de la Física y el desarrollo de la actividad científica en estudiantes de Nivel Medio Superior y Superior, presenta mucha apatía y desinterés, que se ve reflejado en el bajo promedio de calificaciones y altos índices de reprobación. Analizando esta problemática surge la necesidad de implementar una estrategia didáctica para mejorar el aprovechamiento escolar de los estudiantes y reducir los índices de reprobación.

En la enseñanza de la asignatura de Física en el Nivel Medio Superior (NMS), se observan deficiencias en fundamentos teóricos y prácticos, sobre todo del área de matemáticas y asignaturas previas de la misma asignatura. Con la finalidad de fortalecer y mejorar la enseñanza en esta área los docentes implementan estrategias y técnicas pedagógicas facilitando el proceso enseñanza – aprendizaje. Hernández, U. S. (2018) menciona que “El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) es una forma atractiva para las partes de la dupla estudiante-docente porque propone a ambos situaciones en las que hay que desarrollar trabajo conjunto para el cual no hay una receta o procedimiento bien establecido”, además presenta un resumen de las características del modelo ABP, que son: 1) Se plantean preguntas o problemas reales con dispositivos experimentales que buscan responderlas. 2) Se generan productos y se obtienen datos empíricos. 3) El problema genera un contexto para aprender y una situación que propicia la necesidad por investigar y aprender de parte del estudiante. 4) Se adquieren aprendizajes significativos en el desarrollo de los proyectos. 5) Se trabaja en un entorno colaborativo. 6) Requiere manejar formas de comunicación y expresión de los estudiantes. 7) El docente tutela a los estudiantes en la dirección de sus proyectos. Con esta metodología se desarrollan en el estudiante aprendizajes significativos, basados en un trabajo colaborativo, mejorando la forma en que se expresa y comunica.

La enseñanza de las Ciencias Físico – Matemáticas presenta muchas dificultades, entre ellas está el obstáculo de los estudiantes al tener una predisposición y renuencia por aprenderlas, al considerar que son asignaturas difíciles y que no están al alcance de todos, que no son necesarias y las consideran abstractas, sobre todo cuando el docente las imparte con un enfoque completamente teórico y con ejemplos ideales. Martínez, M. D. R. A. H., & Torres, M. V. (2017) Concluye que “El diseño e implementación de actividades lúdicas permite hacerles conscientes de que el estudio de la ciencia puede resultar agradable y que su concepción de la Física como una materia difícil de entender y aprender era equivocada.”

TEORÍA

La estrategia didáctica se implementó para la enseñanza de la asignatura de Física en el Nivel Medio Superior basada en proyectos (EBP) con la finalidad de involucrar más al estudiante con su aprendizaje y realizar aplicaciones de los conceptos y leyes de la Física en el desarrollo de actividades cotidianas. Sáez, F. T. (2012) considera que “la enseñanza basada en proyectos o tareas integradas supone hoy la mejor garantía didáctica para una contribución eficaz al desarrollo de las competencias básicas y al aprendizaje de los contenidos del currículo”

La enseñanza de la Física con proyectos representa una oportunidad para que el estudiante asimile los conceptos básicos, aplique las fórmulas que representan y describen las leyes físicas de los fenómenos eléctricos y magnéticos, Barros, E. C (2014) considera que “El ABP es un ambiente de aprendizaje activo centrado en los/las estudiantes y es una técnica didáctica que se enfoca en un producto o en un proceso que los/las estudiantes tienen que planificar, diseñar y desarrollar a través de un proyecto”. Además, la estrategia didáctica se complementa con las teorías del aprendizaje significativo y el desarrollo del pensamiento crítico. Moreira M.A. (1997) concluye que “el concepto de aprendizaje significativo es subyacente, no sólo a la integración constructiva de pensamiento, sentimientos y acciones preconizada por Novak, sino también a los constructos de los demás autores y a la internalización de instrumentos y signos de Vygotsky.” Es decir, el aprendizaje significativo está ligado al aprendizaje constructivista con base a los conocimientos previos. Tuyarot, D., & Arriassecq, I. (2015) Concluye que “enseñar Física a través de proyectos se configura en una práctica positiva que permite al alumno involucrarse de forma activa, permite contextualizar el conocimiento presentado y establecer un dialogo entre todos los participantes de las clases promoviendo la comprensión un aprendizaje significativo para el alumno.”

PARTE EXPERIMENTAL

La estrategia didáctica se implementó a un grupo muestra formado por los estudiantes de quinto semestre, del Bachillerato de Ciencias Químico – Biológicas de la Escuela Preparatoria “Gral. Lázaro Cárdenas” dependiente de la U.M.S.N.H., con el objetivo de promover la actividad científica y el trabajo en equipo, para lograr una mayor motivación y despertar el interés de los jóvenes en la asignatura de Física III (Electricidad y Magnetismo), inducirlos a las actividades científicas con la elaboración de experimentos y artículos científicos, con la finalidad de disminuir los índices de reprobación y mejorar el aprovechamiento escolar. En la enseñanza de la asignatura de Física en forma tradicional es común que la actitud del estudiante sea pasiva, limitándose a tomar apuntes de la clase, memorizar formulas y procedimientos para resolver procedimientos, pero generalmente se presentan problemas de aprendizaje en el dominio de fenómenos físicos y en la interpretación de leyes físicas.

En la primera etapa el grupo recibió la enseñanza de forma tradicional, utilizando: papel, lápiz y libros de texto en los temas de electricidad y magnetismo, al final se aplicó una evaluación parcial, para dicha evaluación se realizó el examen escrito, el trabajo de clase apuntes y ejercicios de tarea y la asistencia.

En la segunda etapa se desarrollaron proyectos, que permitió al alumno comprender a fondo los temas de electricidad y magnetismo, dichos proyectos consistían en desarrollar un motor eléctrico y un generador eléctrico, ambos caseros realizados con materiales accesibles además de entregar su respectivo reporte de práctica para cada uno de los proyectos, el trabajo se realizó por equipos como producto final presentaron un experimento que cumple con los requisitos de funcionamiento para cada uno de los casos y el reporte de práctica explicando de manera general, la introducción, revisión

bibliográfica, objetivos, material utilizado en el experimento, métodos que siguieron para su elaboración, los resultados obtenidos, las conclusiones, bibliografía y anexos; todo fundamentado con las leyes que rigen los fenómenos eléctricos y magnéticos. La evaluación de proyectos se realizó con rúbricas específicas que se les compartieron con antelación y que deberían incluir en su reporte.

RESULTADOS

Los proyectos finales desarrollados por los estudiantes fueron: la elaboración de un motor eléctrico y un generador eléctrico, los cuales fueron elegidos por su propia cuenta, donde el objetivo principal fue que cumpliera con el funcionamiento básico. Obteniendo los siguientes resultados: un 84% de los proyectos finales logró su funcionamiento en la fecha de entrega, un 10 % al momento de entregar su trabajo no logró su funcionamiento, pero se verificó a través de un video grabado por ellos mismos que el arreglo funcionó en sus casas, esto se pudo suscitar por el manejo del mismo y poca precaución que tuvieron para trasladarlo hasta el lugar de la entrega, el 6% de los proyectos no lograron demostrar su funcionamiento.

Durante el desarrollo de los proyectos, los estudiantes externaron que se sentían estresados porque los experimentos no les funcionaban en el primer intento, algunos de ellos incluso cambiaron entre las dos opciones que se les presentaron con la finalidad de lograr su funcionamiento; después de varios intentos y de modificaciones en sus arreglos experimentales se sentían emocionados y motivados cuando lograban hacerlos funcionar. Con respecto al desarrollo del reporte de práctica presentaron algunas deficiencias, principalmente porque no fundamentaban bien el marco teórico y no cumplían con todas las especificaciones de la rúbrica que se les proporcionó, la redacción no cumplió con la sintaxis mínima requerida, en algunos casos faltó mejorar el uso de las citas y referencias bibliográficas. Considerando que son los primeros acercamientos en la elaboración de un reporte que cumple con las especificaciones de un artículo científico tiene mucho que mejorarse pero se pretende seguir trabajando para que los estudiantes de NMS estén en condiciones de realizar una revisión bibliográfica a su nivel, mejorando su redacción y sintaxis.

Se realizó un análisis estadístico descriptivo de las evaluaciones realizadas en cada una de las etapas, al comparar los resultados de las evaluaciones, se observó que el porcentaje de reprobación se redujo en un 37.55 %.

CONCLUSIONES

Se observó una mejor comprensión de los fenómenos y leyes físicas que describen la electricidad y el magnetismo por parte de los estudiantes, logrando un aprendizaje significativo, al principio los estudiantes se desanimaban y se desesperaban porque el proyecto no funcionaba al primer intento, lo mejoraron varias veces con las revisiones periódicas por parte del docente, hasta lograr un funcionamiento óptimo, los equipos que lograron buenos resultados en sus proyectos expresaron sentirse motivados y entusiasmados, incluso mencionaron que la asignatura realmente no les interesaba y les parecía aburrida, además solo era un requisito para cumplir el bachillerato necesario para ingresar al Nivel Superior, pero después de los buenos resultados en su proyecto se sentían motivados y cambio su percepción de la asignatura, ahora les parecía interesante y divertida. La enseñanza de la asignatura de Física con proyectos permite motivar a los alumnos a aprender, desarrollando en ellos la curiosidad que a su vez está ligada a estimular el gusto por la investigación y por el aprendizaje.

La enseñanza basada en el aprendizaje por proyectos, permite que el joven desarrolle la autonomía, siendo ellos los protagonistas del proceso educativo, ya que, también al trabajar de manera colaborativa les permite planificar, distribuir tareas, conjuntar ideas, tomar decisiones y finalmente elaborar el producto.

Otro aspecto positivo en este tipo de enseñanza, es que fomenta el espíritu autocrítico, porque son jueces de su trabajo, aprenden de sus errores y les permite ser creativos para considerar las estrategias e ideas posibles que permitan elaborar el producto.

BIBLIOGRAFÍA

1. Barros, E. C., Galarza, C. B., & Herrera, J. F. (2014). El aprendizaje basado en proyectos y la autoeficacia de los/las profesores/as en la formulación de un plan de clase. *Alteridad*, 9(1), 56-64.
2. Hernández, U. S. (2018). Aprendizaje Basado en Proyectos con Arduino para los cursos de física en Bachillerato. *Latin-American Journal of Physics Education*, 12(4), 13.
3. Martínez, M. D. R. A. H., & Torres, M. V. (2017). Ambientes lúdicos para la enseñanza del electromagnetismo en el bachillerato. *Latin-American Journal of Physics Education*, 11(2), 9.
4. Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. *Actas del encuentro internacional sobre el aprendizaje significativo*, 19, 44.
5. Sáez, F. T. (2012). Enseñanza basada en proyectos: una propuesta eficaz para el aprendizaje y el desarrollo de las competencias básicas. *Revista Eufonia-Didáctica de la Educación Musical*, 55, 7-15.
6. Tuyarot, D., & Arriasecq, I. (2015). Enseñanza de la física universitaria a través de proyectos: el motor de Stirling. *Revista de Enseñanza de la Física*, 27(2), 447-452.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Escuela Preparatoria "Gral. Lázaro Cárdenas" (E.P.L.C.) dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (U.M.S.N.H.) por las facilidades brindadas para realizar este trabajo.

RESONANCIAS DE FANO EN UNA ESTRUCTURA FOTÓNICA 1D QUE PRESENTA UNA VARIACIÓN PERIÓDICA DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN

José Eduardo Medina Magallón, Héctor Pérez Aguilar, Petr Zhevandrov Bolshakova, Alberto Mendoza Suárez

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" de la UMSNH, Morelia, Mich.

e-mail: jmedinamagallon@gmail.com.

RESUMEN

En los últimos años hemos presenciado como la nanotecnología permite reducir varios dispositivos importantes (sensores, chips, fibras, etc.), abriendo un nuevo horizonte para sus aplicaciones. Sin embargo, la eficiencia de la mayoría de estos dispositivos todavía se basa en fenómenos físicos fundamentales, como las resonancias. Es por ello que la comprensión de los fenómenos de resonancia resulta importante. Dentro de los ejemplos conocidos tenemos la transmisión conocida como resonancias Breit-Wigner, que puede describirse mediante una función Lorentziana. Sin embargo, en muchos sistemas físicos, la dispersión de las ondas implica la propagación a lo largo de diferentes caminos y, en consecuencia, produce como resultado fenómenos de interferencia, donde la interferencia constructiva corresponde a la mejora resonante y la interferencia destructiva a la supresión resonante de la transmisión. Este tipo de dispersión resonante está relacionado con las resonancias de Fano. Una de las características principales de las resonancias de Fano es el perfil asimétrico. La asimetría proviene de la estrecha coexistencia de transmisión resonante y reflexión resonante. Las resonancias de Fano son de utilidad en campos como la Plasmónica gracias a su extremada sensibilidad a cambios en la geometría o en el material del medio que lo rodea. Estas características son muy interesantes para realizar aplicaciones de sensado tanto químico como biológico, detectar deformaciones en el sustrato o si lo combinamos con un medio no lineal, aplicaciones electro-ópticas o conmutación. En este trabajo se presenta un estudio teórico y numérico de una estructura fotónica 1D que presenta una variación periódica en el índice de refracción. Dado que las ecuaciones diferenciales son una herramienta utilizada para el modelado de fenómenos físicos, hacemos uso de la Teoría de Floquet para realizar el estudio teórico de la estructura fotónica en cuestión, ya que permite hacer un análisis de sistemas físicos que presentan algún tipo de periodicidad; es decir, ésta conserva las propiedades del sistema para el caso donde los coeficientes de las ecuaciones son periódicos. Por otro lado, los cálculos numéricos se realizaron mediante la técnica conocida como el Método de la Ecuación Integral. Los resultados teóricos y numéricos de la estructura fotónica 1D, están mostrando la presencia de un modo resonante de tipo Fano para $\epsilon = 0.1$, $q = -1$ y $\Gamma = 1$, lo que fue posible determinar a partir de la respuesta óptica del sistema calculada, mediante la reflectancia del mismo. Por lo tanto, este tipo de modos resonantes permiten ser otra alternativa para desarrollar innumerables aplicaciones en diversos campos de la ciencia y la tecnología que abarcan desde la biomedicina hasta las telecomunicaciones.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos y sus soluciones empezaron a surgir desde la mitad del siglo XVIII cuando D'Alembert publicó un estudio sobre la trayectoria de un punto arbitrario de una cuerda en movimiento vibracional. Sin embargo, el primer estudio analítico de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes periódicos lo realizó E. Mathieu en su trabajo de 1868 sobre las vibraciones de las membranas elípticas. Para este tipo de ecuaciones se utiliza uno de los métodos principales de construcción de soluciones periódicas más generales, llamada teoría de Floquet [1]. Dado que las ecuaciones diferenciales son una herramienta que se utiliza para el modelado de fenómenos físicos. Por lo tanto, daremos una descripción de la Teoría de Floquet que estamos utilizando para resolver analíticamente la PCW con inclusiones de distintos materiales, ya que con esta teoría podemos estudiar sistemas periódicos que tengan soluciones que son funciones periódicas [2,3]. Finalmente, en la sección 4 se presenta la descripción de la teoría de Floquet, así como del Método de la Ecuación Integral y del de Expansión de Ondas Planas. En

la sección 5 mostramos los principales resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones más importantes del estudio realizado.

ENFOQUE TEÓRICO

Consideramos un Hamiltoniano periódico en el tiempo,

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1(t); \quad \mathbf{H}_1(t) = \mathbf{H}_1(t + T), \quad (1)$$

donde $T = 2\pi/\omega_0$, se puede encontrar soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo,

$$\left[\mathbf{H}(x, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(x, t) = 0, \quad (2)$$

de la forma, $\psi_\alpha(x, t) = e^{-i\varepsilon_\alpha t/\hbar} \Phi_\alpha(x, t)$; con la condición de periodicidad:

$$\Phi_\alpha(x, t) = \Phi_\alpha(x, t + T). \quad (3)$$

Tenemos periodicidad en la parte temporal, en este caso hablaremos de la cuasienergía ε_α . Reemplazando la Ec. (4) en la Ec. (3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_F(x, t) \Phi_\alpha(x, t) &= \varepsilon_\alpha \Phi_\alpha(x, t); \\ \mathbf{H}_F(x, t) &\equiv \mathbf{H}(x, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Es decir, nuestro problema se convirtió en encontrar soluciones a una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, puesto que ahora la variable t se comporta como una variable dinámica. Es fácil ver que los modos de Floquet

$$\Phi_{\alpha'}(x, t) = \Phi_\alpha(x, t) e^{-in\omega_0 t} \equiv \Phi_{\alpha n}(x, t), \quad (5)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ corresponden a soluciones idénticas a la Ec. (4) pero con una cuasienergía desplazada,

$$\varepsilon_\alpha \rightarrow \varepsilon_{\alpha'} = \varepsilon_\alpha + n\hbar\omega_0 \equiv \varepsilon_{\alpha n}. \quad (6)$$

Vemos que el índice α corresponde a toda una familia de soluciones indizadas por $\alpha' = (\alpha, n)$. Así, los autovalores $\{\varepsilon_\alpha\}$ pueden mapearse a la "primera zona de Brillouin", esto es, $-\hbar\omega_0/2 < \varepsilon \leq +\hbar\omega_0/2$.

Para modelar numéricamente la PCW utilizamos el método numérico conocido como El Método de la Ecuación Integral (IEM) que se basa en resolver numéricamente la ecuación de Helmholtz a partir de funciones de Green. A continuación damos una breve descripción del método.

Método de la Ecuación Integral

Este método se basa en resolver numéricamente la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = 0$, a partir de ecuaciones integrales [4]. El método parte del segundo teorema integral de Green, de donde se obtienen ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal evaluadas en las fronteras de los perfiles generados por interfaces en la celda unitaria para el caso infinito, y el propio sistema para el caso finito. La discretización de las ecuaciones permite pasar de un sistema de ecuaciones integrales a un sistema de ecuaciones algebraico. Una vez calculadas las fuentes se dispone a calcular la estructura de bandas o el campo esparcido, según sea el caso [5].

RESULTADOS

El interés de este trabajo se refiere al estudio teórico y numérico de PCW de superficies planas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas de distintos materiales (Fig. 1).

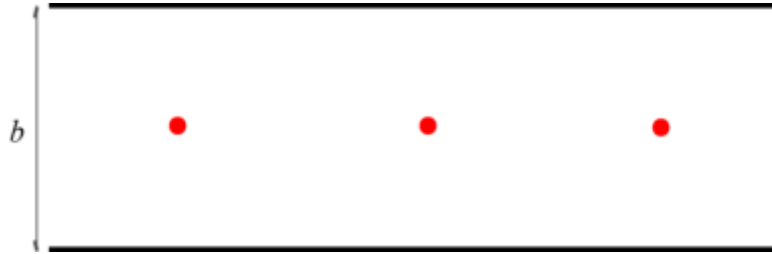


Figura 1. Guía de ondas con pequeñas inclusiones que tiene un ancho de b .

Consideramos la Ecuación de Helmholtz,

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\omega^2}{c^2(x, y)} \Psi, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

con un índice de refracción real que es periódico de periodo T , es decir,

$$c(x, y + T) = c(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{8}$$

Las soluciones de esta ecuación son cuasiperiódicas en y ,

$$\Psi(x, y + T) = e^{-i\beta T} \Psi(x, y), \quad 0 < |\beta| < \pi/T, \tag{9}$$

acotado en todo el plano y decayendo como $|x| \rightarrow \infty$. Por otro lado, vamos a considerar un índice de refracción débilmente perturbado:

$$c^{-2}(x, y) = 1 + \epsilon f(x, y), \quad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{10}$$

donde f es una función T -periódica. Además, Con las consideraciones anteriores encontramos que la respuesta óptica la podemos obtener por medio de la reflectancia, que está dada por

$$|R|^2 = \frac{\epsilon^2 \left(\delta q + \frac{\Gamma}{2} \right)^2}{\delta^2 + \frac{\epsilon^2 \Gamma^2}{4}}, \tag{11}$$

siendo

$$q = \frac{(1 - \beta)^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\beta}} f_0(2\kappa), \tag{12}$$

donde q es el número de Fano. Esta fórmula de tipo Fano captura la existencia de un cero de $|R|^2$, que se encuentra fuera del pico estrecho (de orden de ϵ).

A continuación mostramos las estructuras de bandas y la reflectancia $|R|$ para una PCW con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares perfectamente conductoras obtenidas a través de la técnica PWM, cuando el índice de refracción es constante y cuando es débilmente perturbado. A continuación mostramos las estructuras de bandas obtenidas para una PCW con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares perfectamente conductoras cuando el índice de refracción es constante y cuando es una función de la forma dada en la Ec. (10).

En la Fig. 2 mostramos la estructura de bandas de una PCW que contiene un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas perfectamente conductoras con una fracción de llenado de $f = 0.005$, (a) el índice de refracción es constante, (b) es una función periódica con periodo de 2π y $\epsilon = 0.001$. En la Fig. 2(c) mostramos la comparación de las estructuras de bandas mostradas en las Figs. 2(a) y (b).

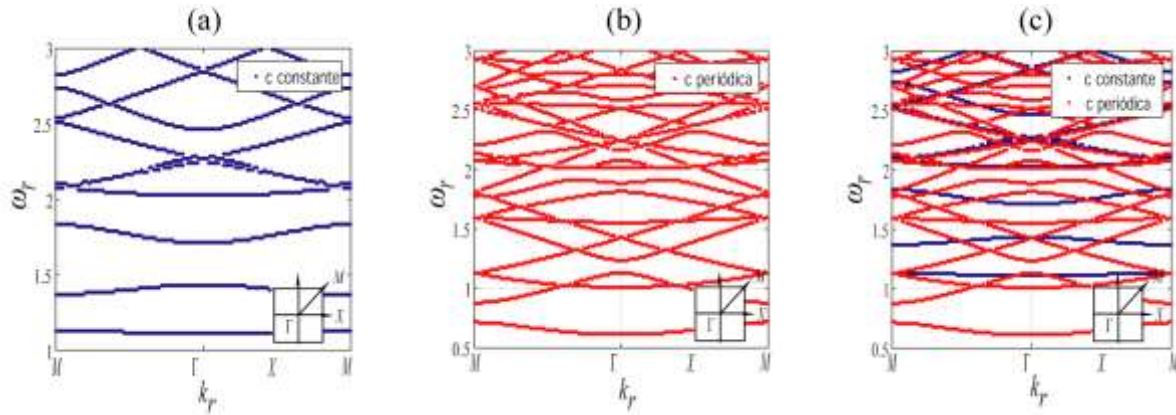


Figura 2. Estructuras de bandas de una PCW con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares perfectamente conductoras cuyos parámetros son $b = \pi$ y $f = 0.005$, con (a) el índice de refracción constante, (b) es una función periódica con periodo de 2π y $\epsilon = 0.001$. (c) Comparación de las estructuras de bandas mostradas en (a) y (b).

En la Fig. 3 mostramos la comparación de la reflectancia $|R|$ de una PCW que presenta una variación periódica en el índice de refracción calculado de manera analítica (línea sólida) así como a través del Método de la Ecuación Integral (línea punteada).

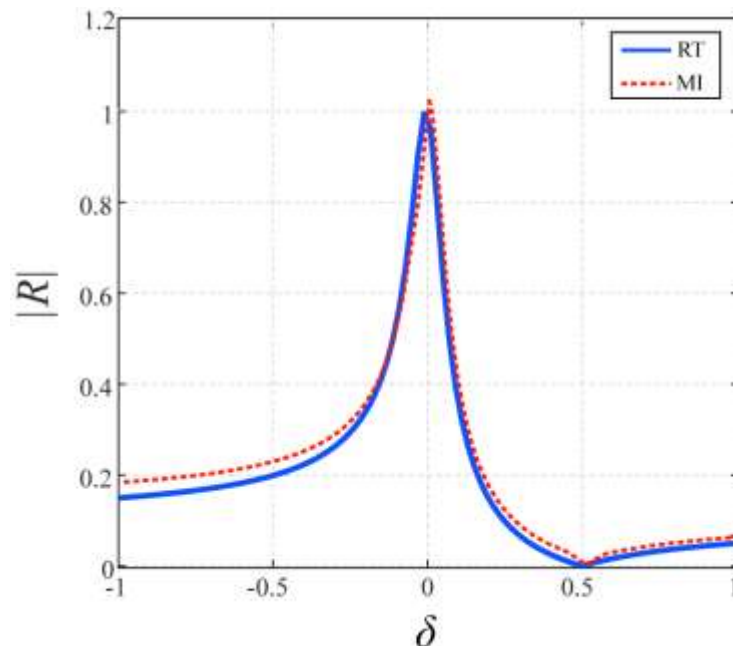


Figura 3. Reflectancia $|R|$ analítica (RT) y calculada con el Método de la Ecuación Integral (MI) para los parámetros $\epsilon = 0.1$, $q = -1$ y $\Gamma = 1$.

De la Fig. 3 notamos que el resultado numérico encontrado a través del Método Integral para la reflectancia $|R|$ tiene una gran correspondencia con el encontrado analíticamente a través de la Ec. (11), encontrando que al ser el índice de refracción una función periódica observamos la presencia de un modo de Fano en la PCW, ya que al ser c una función periódica tendremos este fenómeno cuando $\epsilon = 0.1$, $q = -1$ y $\Gamma = 1$.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados numéricos encontrados a través del Método Integral para la estructura de bandas y de la reflectancia $|R|$, obteniendo del cálculo de las estructuras de bandas para la guía de ondas de cristal fotónico, encontrando que al ser el índice de refracción una función periódica la estructura cambia de manera drástica, ya que al ser una función periódica tenemos que el gap que se obtiene aparece en una región donde antes no se tenía propagación de la energía cuando antes los teníamos en otra región. Observamos también del cálculo de la reflectancia $|R|$ la presencia de un modo de Fano en la PCW, para los parámetros $\epsilon = 0.1$, $q = -1$ y $\Gamma = 1$. Estas características son muy interesantes para realizar aplicaciones de sensado tanto químico como biológico, ya que poseen una extremada sensibilidad a cambios en la geometría o en el material del medio que lo rodea, permitiendo detectar deformaciones en un sustrato o si lo combinamos con un medio no lineal, además de permitir el desarrollo de distintas aplicaciones electro-ópticas o conmutación.

BIBLIOGRAFÍA

1. Mendiola-Fuentes, J. C.. (2013). Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos. S. L. P.: Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.
2. Eastham, M. S. P. (1973). The spectral theory of periodic differential equations. U. S. A.: Scottish Academic Press Ltd.
3. Romandía Flores, C. M. (2013). Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales y Soluciones Periódicas. Tesis de Licenciatura: División de Ciencias Exactas de la Universidad de Sonora.
4. Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F. and Gaspar-Armenta, J. A. (2008). Plasmonic modes in a dispersive left handed material optical fiber. *Rev. Mex. Fis.* 54, 82-86.
5. Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., and Gaspar-Armenta, J.A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive left-handed materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, 24(12): 3091-3098.

INTENSIDADES DE CAMPO EN UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FONÓNICO TRIDIMENSIONAL

Hugo Enrique Alva Medrano, Alberto Mendoza Suárez y Héctor Pérez Aguilar

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
hugoalva9@gmail.com

RESUMEN

Es bien sabido que, como resultado de la interferencia entre las distintas contribuciones aleatorias de los centros de esparcimiento, en la escala de la longitud de onda óptica, el patrón de campo esparcido aparece desordenado; por otro lado, se ha considerado que la geometría de las guías de onda con inclusiones constituye algunos sistemas de billar para estudiar sus propiedades de transporte cuánticas y clásicas. En este trabajo consideramos una Guía de Ondas de Cristal Fonónico tridimensional (3DPnCW) compuesta por cuatro superficies planas y acústicas que envuelven una serie periódica de inclusiones esféricas. Este sistema periódico tiene una estructura de bandas dada por una relación de dispersión que nos permite caracterizar los modos propios del sistema. Mediante un método numérico integral se calcularon las intensidades de campo correspondientes a los modos propios de nuestro sistema, considerando superficies suaves (condiciones de frontera de Dirichlet). Por un lado las intensidades del campo obtenidas están de acuerdo con las condiciones de frontera consideradas; además, se obtuvo que, para las frecuencias consideradas, el desorden de la intensidad del campo aumenta al aumentar el valor de la frecuencia. El último resultado está de acuerdo con que a longitudes de onda pequeñas se tiene un sistema cuyo comportamiento puede estudiarse mediante la óptica geométrica y es bien sabido que sistemas clásicos correspondientes como los billares de Sinai presentan el fenómeno de caos. El estudio de este tipo de sistemas puede permitir el desarrollo de nuevas tecnologías como circuitos integrados y la criptografía.

INTRODUCCIÓN

Los cristales fonónicos (PnCs) son estructuras artificiales compuestas de al menos dos materiales con distinta densidad de masa y propiedades elásticas. Los materiales con que se pueden formar los PnCs pueden ser sólidos líquidos o gaseosos. Estos están constituidos de tal modo que la densidad de masa y/o las constantes elásticas en éste son funciones periódicas en el espacio. Los PnCs son diseñados para el control de la propagación de ondas acústicas. Estos permiten cubrir gran parte del espectro sónico continuo, desde los infrasonidos (hercios) hasta las ondas térmicas (terahercios), pasando por los sonidos audibles (kilohercios), los ultrasonidos (megahercios) y los hipersonidos (gigahercios) [1]. Como ejemplo de cristal fonónico tenemos la escultura minimalista de Eusebio Sempere (1923-1985), localizada en un parque de Madrid, y la cual es mostrada en la Fig. 1.



Fig 1. Ejemplo de un cristal fonónico, la cual es una escultura hecha por Eusebio Sempere.

Las dimensiones físicas en los cristales fonónicos van desde un centenar de nanómetros hasta unos pocos metros. Es importante mencionar que las leyes de la mecánica clásica son aplicables y empleadas como regla general en los PnCs debido a que en esta escala, la materia aparece como continua.

Es bien sabido que cuanto más contraste exista entre las propiedades acústicas que participan en los PnCs, más probable será observar fenómenos relacionados con la interferencia de ondas [2]. En este sentido los bandgaps o regiones de frecuencia prohibidas, son el resultado de la interferencia destructiva de ondas acústicas o elásticas dispersas [3-5]. En los bandgaps no se pueden propagar ondas elásticas, por lo que estos sistemas pueden ayudar en el desarrollo de estructuras libres de vibraciones en rangos de frecuencia específicos. Entre los factores de los que depende el ancho de los bandgaps y su posición se tienen: el contraste entre las densidades de masa, las velocidades de las ondas en lo materiales involucrados [2-4, 6] o el tipo de inclusiones consideradas [4, 7-9].

Entre las posibles aplicaciones de los PnCs podemos mencionar, por supuesto, el aislamiento acústico [10], las guías de onda [11, 12]. También se han desarrollado dispositivos optoacústicos, que acoplan fonones y fotones. Usando un material de estructura periódica con un espaciado de 150 nm se pueden localizar fotones de 500 THz y fonones de 20 GHz [1]. Otra aplicación menos intuitiva es el uso de estas estructuras para focalizar las olas del mar hacia una planta con el fin de convertir la energía mecánica en energía eléctrica [13].

En este trabajo se examina una 3DPnCW compuesta por cuatro superficies acústicas y planas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas. De esta forma, este trabajo completa el estudio del sistema en la Ref. [14]. Este documento está organizado de la siguiente manera: la Sección 3 introduce un método numérico integral [15] para calcular las intensidades de campo correspondientes a los modos propios del sistema considerado. En la Sección 4 se muestra los resultados numéricos de las intensidades de campo del sistema. Finalmente, la sección 5 presenta nuestras conclusiones.

TEORÍA

En esta sección introduciremos un método numérico para calcular la estructura de bandas de una guía de ondas de cristal fonónico en tres dimensiones (3DPnCW) formada por cuatro superficies planas que envuelven un arreglo bidimensional periódico de inclusiones esféricas como se muestra en la Fig. 2. Se considera que todas las superficies involucradas son superficies acústicas y el medio entre los planos es aire. La celda unitaria del sistema es mostrada en la Fig. 3.

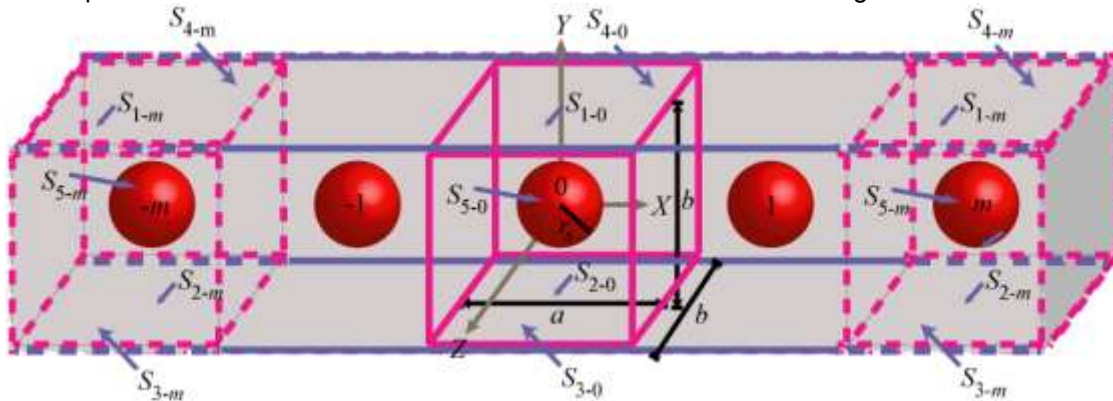


Figura 2. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por cuatro superficies acústicas planas y paralelas que el envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas.

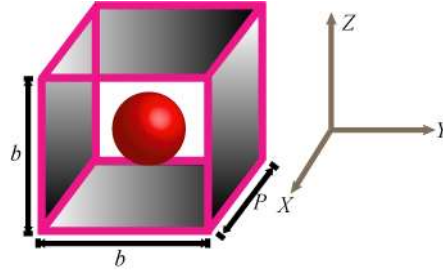


Figura 3. Celda unitaria de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas y paralelas que envuelven una inclusión esférica.

Para una onda de presión acústica lineal en una celda unitaria $P_m(\mathbf{r}, t)$, para el caso armónico con el tiempo con frecuencia $\omega(P_m(\mathbf{r}, t) = P_m(\mathbf{r})e^{-i\omega t})$, se cumple la ecuación de Helmholtz dada por:

$$\nabla^2 P_m(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P_m(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

siendo m un número entero, c es la velocidad longitudinal de la onda acústica en el medio acústico y r es el punto de observación. Nuestro problema es calcular los modos del sistema periódico considerado. Para ello proponemos utilizar un método numérico integral que puede ser formulado a partir de una función de Green periódica (PGF) para resolver la ecuación de Helmholtz, en condiciones de frontera de Dirichlet.

Debido a la periodicidad del sistema en la dirección X podemos hacer uso del teorema de Bloch, de donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$P_m(x + ma, y, z) = e^{ik_x ma} P_0(x, y, z) \quad (2)$$

y

$$\frac{\partial P_m(x+ma, y, z)}{\partial n} = e^{ik_x ma} \frac{\partial P_0(x, y, z)}{\partial n}, \quad (3)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ es el vector de Bloch unidimensional.

Para calcular la estructura de bandas es necesario obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Para ello consideremos la función de Green tridimensional dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (4)$$

donde r es un punto de integración y r' un punto de observación. La función de Green es una solución de

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5)$$

Considerando la geometría del sistema y aplicando la segunda identidad de Green tridimensional a la onda de presión P_m y a la función de Green G en la región de aire, se obtiene la expresión

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_m} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial P_m(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} P_m(\mathbf{r}') \right] dS' = \theta(\mathbf{r}) P_0(\mathbf{r}), \quad (6)$$

donde $\theta(\mathbf{r}) = 1$ si r está dentro de la zona donde se resuelve la ecuación de Helmholtz y cero en otro caso, dS' es un elemento diferencial de área y el punto de integración r' está separado infinitesimalmente de la región S_m .

Consideremos una versión numérica para la parte izquierda de la Ec. (8), tomando en cuenta un muestreo de pequeñas superficies denotadas por ΔS_m^n , sobre la superficie S_m , con $n = 1, 2, \dots, N$ tal que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_m} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial P_m(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} P_m(\mathbf{r}') \right] dS' \approx$$

$$\sum_{n=1}^N Q_n \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_m^n} e^{i(k_x m a)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) - \sum_{n=1}^N P_n \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta S_m^n} e^{i(k_x m a)} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS' \right), \quad (7)$$

siendo P_n y Q_n valores numéricos de la presión, $P_0(\mathbf{r}')$, y su derivada normal $\partial P_0(\mathbf{r}')/\partial \mathbf{n}'$, evaluados en el i -ésimo punto central, denotado por \mathbf{R}_i , de la pequeña superficie elemental ΔS_m^n , respectivamente. En la última expresión las relaciones de periodicidad dadas por las Ecs. (2) y (3) son utilizadas. Es conveniente seleccionar N puntos de observación $\mathbf{R}_i + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)$ siendo ε una cantidad infinitesimal. Con esto nos aseguramos de que $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ nunca sea cero. Finalmente la Ec. (6) puede escribirse como un sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) Q_j - \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) P_j = 0, \quad (8)$$

para $i = 1, 2, 3 \dots N$, donde los elementos de matriz $\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ y $\mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, que dependen del vector de Bloch y de la frecuencia, están dados por:

$$\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x a m)} L_{ij}^m(\omega) \quad (9)$$

y

$$\mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{m=-N_L}^{N_L} e^{i(k_x a m)} N_{ij}^m(\omega), \quad (10)$$

siendo N_L el máximo valor de l , considerado numéricamente. Este número entero positivo representa una forma simple de truncar la serie, para N_L lo suficientemente grande se deberían obtener resultados muy precisos. En las dos últimas expresiones los elementos $L_{ij}^m(\omega)$ y $N_{ij}^m(\omega)$ están definidos por los límites [14]:

$$L_{ij}^m(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_m^n} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_i+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)} dS', \quad (11)$$

$$N_{ij}^m(\omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Delta S_m^n} e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - i \frac{\omega}{c} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}_i+\varepsilon\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_i)} dS', \quad (12)$$

donde tanto la función de Green (Ec. (4)) como su derivada normal han sido utilizadas.

Para superficies acústicas suaves se tiene que la presión acústica es cero en todas las superficies (condiciones de frontera de Dirichlet). Esto lleva a que $P_j = 0$ para toda $i = 1, 2, 3 \dots N$, en la Ec. (10), obteniendo un sistema de ecuaciones reducido,

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) Q_j = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots N. \quad (13)$$

Para superficies acústicas rígidas, la derivada normal de la presión acústica es cero en las superficies (condiciones de frontera de Neumann). En este caso $Q_j = 0$ para toda $i = 1, 2, 3 \dots N$, en la Ec. (10), obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) P_j = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots N. \quad (14)$$

El sistema lineal de ecuaciones obtenido tiene una matriz asociada $M(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ o $\mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, que depende del vector de Bloch \mathbf{k} y la frecuencia ω . Ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución distinta de la trivial puede ser obtenida si el determinante de la matriz es cero. Para determinar la estructura de bandas, definimos la función

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \ln|\det(M(\mathbf{k}, \omega))| = 0, \tag{15}$$

que numéricamente representa puntos de mínimos locales que nos dan la relación de dispersión $\omega = \omega(\mathbf{k})$. De este modo la estructura de bandas de la 3DPnCW puede ser calculada.

RESULTADOS

El objetivo de este trabajo es el cálculo de modos propios del sistema en una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven un arreglo bidimensional periódico de inclusiones esféricas. Estamos especialmente interesados en averiguar si bajo ciertas condiciones es posible obtener patrones del campo desordenados para ciertos modos propios del sistema. Los cálculos se realizaron para condiciones de frontera de Dirichlet.

En todos los casos los parámetros utilizados son: $b = 2\pi$ y $P = 2\pi$; además consideramos tres radios para los cálculos, los cuales son: 0.1π , 0.2π y 0.5π . En la Fig. 4 se muestran las celdas unitarias de los sistemas para los tres radios considerados, respectivamente. En estos cálculos es común introducir cantidades adimensionales, por lo que nuestros resultados serán expresados en términos de una frecuencia reducida dada por $\omega_r = (P/2\pi c)\omega$ y un vector de Bloch reducido dado por $\mathbf{k}_r = (P/2\pi c)\mathbf{k}$. Para periodicidad unidimensional se tiene que el vector de Bloch \mathbf{k} está dentro de la primera zona de Brillouin dada por $-\pi/P \leq k \leq \pi/P$. En todos los resultados mostrados en este documento se consideró $N_L = 50$ y $\mathbf{k}_r = \mathbf{0}$.

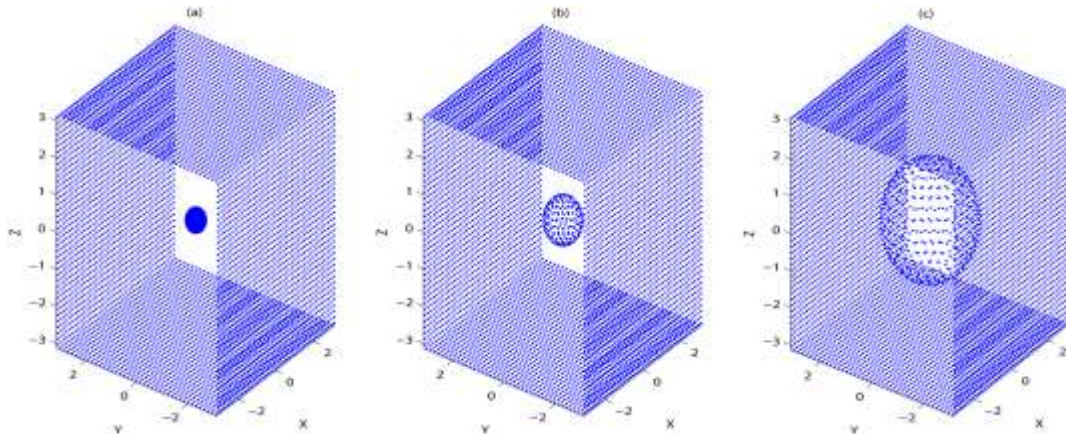


Figura 4. Descripción gráfica de una 3DPnCW formada por cuatro superficies planas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas de diferentes tamaños. Los radios considerados son: (a) $r = 0.1\pi$, (b) $r = 0.2\pi$ y (c) $r = 0.5\pi$.

En la Fig. 5 se muestran algunas de las intensidades del campo acústico calculadas al considerar $r = 0.1\pi$ (Fig. 5(a)). En las Figs. 5(a) y (d) se muestra la intensidad del campo para $\omega_r = 2.2964$, considerando un plano perpendicular (plano yz) y uno paralelo (plano xz) a la dirección de periodicidad, respectivamente. Análogamente en las Figs. 5(b) y (e) se muestra el campo para $\omega_r = 4.1680$ y en las Figs. 5(c) y (f) para $\omega_r = 4.7394$.

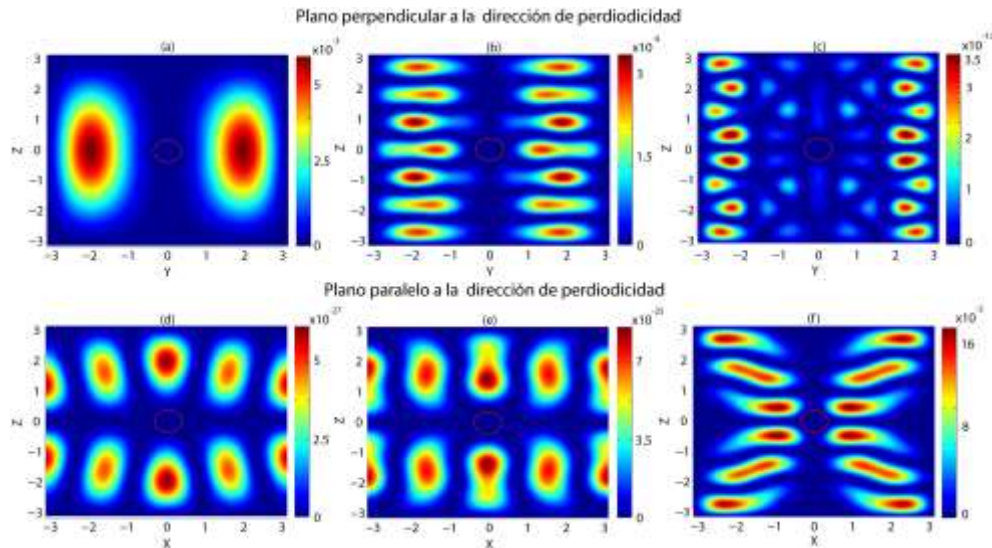


Figura 5. Distribuciones de intensidad de campo acústico dentro de la celda unitaria con una inclusión esférica en un plano (a), (b) y (c) perpendicular a la dirección de periodicidad (plano yz), y (d), (e) y (f) paralelos a la dirección de periodicidad (plano xz). Los valores de las frecuencias son (a) y (c) $\omega_r = 2.2964$, (b) y (d) $\omega_r = 4.1680$, y (e) y (f) para $\omega_r = 4.7394$. En todos los casos $r = 0.1\pi$.

En la Fig. 6 se muestran las intensidades del campo acústico obtenidas con $r = 0.2\pi$ (Fig. 4(b)). En las Figs. 6(a) y (d) se muestra la intensidad del campo para $\omega_r = 0.8126$, considerando un plano perpendicular (plano yz) y uno paralelo (plano xz) a la dirección de periodicidad, respectivamente. En las Figs. 6(b) y (e) se muestra el campo para $\omega_r = 1.1454$ y finalmente en las Figs. 6(c) y (f) para $\omega_r = 4.7394$.

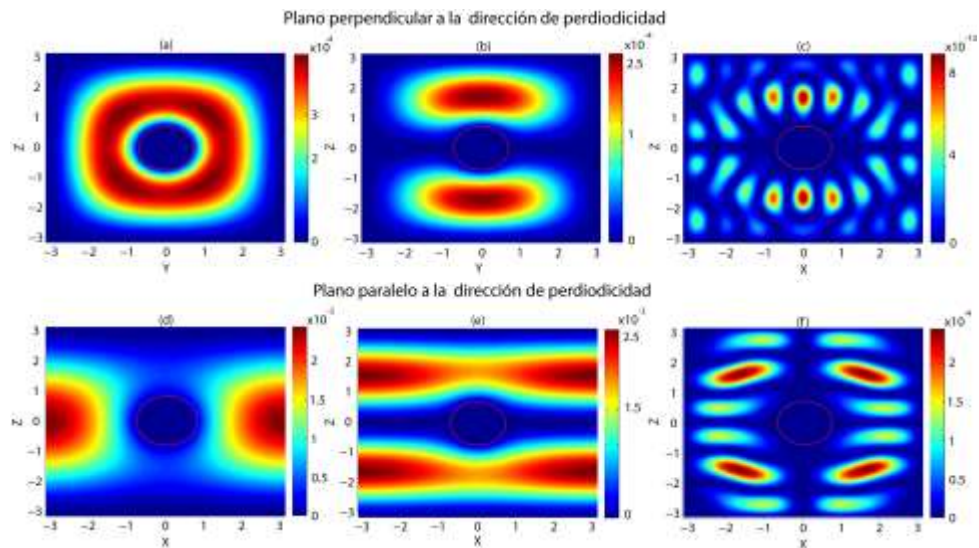


Figura 6. Distribuciones de intensidad de campo acústico dentro de la celda unitaria con una inclusión esférica en un plano (a), (b) y (c) perpendicular a la dirección de periodicidad (plano yz), y (d), (e) y (f) paralelos a la dirección de periodicidad (plano xz). Los valores de las frecuencias son (a) y (c) $\omega_r = 0.8126$, (b) y (d) $\omega_r = 1.1454$, y (e) y (f) para $\omega_r = 4.7394$. En todos los casos $r = 0.2\pi$.

Por último, en la Fig. 7 se muestran las intensidades del campo acústico obtenidas con $r = 0.5\pi$ (Fig. 4(c)). En las Figs 7(a) y (d) se pueden observar la intensidad del campo acústico para $\omega_r = 1.2663$, considerando un plano perpendicular (plano yz) y uno paralelo (plano xz) a la dirección de periodicidad, respectivamente. En las Figs. 7(b) y (e) se muestra el campo para $\omega_r = 1.7688$ y en las Figs. 7(c) y (f) se muestra la intensidad del campo acústico para $\omega_r = 4.4621$.

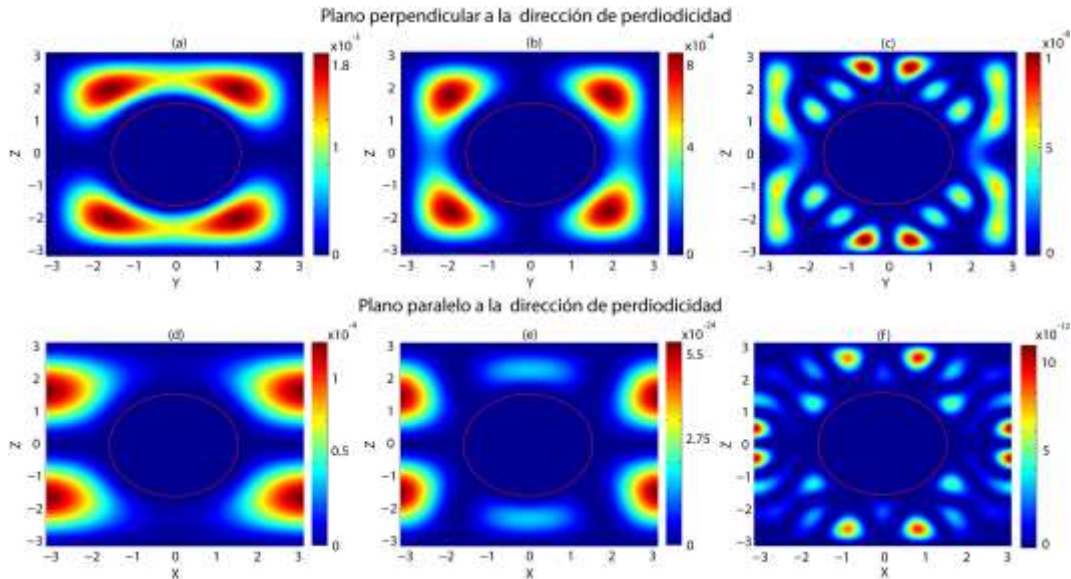


Figura 7. Distribuciones de intensidad de campo acústico dentro de la celda unitaria con una inclusión esférica en un plano (a), (b) y (c) perpendicular a la dirección de periodicidad (plano yz), y (d), (e) y (f) paralelos a la dirección de periodicidad (plano xz). Los valores de las frecuencias son (a) y (c) $\omega_r = 1.2663$, (b) y (d) $\omega_r = 1.7688$, y (c) y (f) para $\omega_r = 4.4621$. En todos los casos $r = 0.5\pi$.

En las Figs. 5, 6 y 7 se puede observar que la intensidad del campo es cero en todas las superficies del sistema, lo cual está de acuerdo con las condiciones de frontera consideradas (condiciones de Dirichlet). Los campos mostrados no presentan un comportamiento caótico, los cuales están caracterizados por patrones irregulares. Estos patrones irregulares pueden ser descritos mejor mediante métodos de teoría de probabilidad y estadísticas. Al restringir el cálculo del campo a planos paralelos y perpendiculares a la dirección de periodicidad obtenemos un campo cuyo comportamiento se espera que esté de acuerdo con toda la teoría desarrollada sobre el sistema.

CONCLUSIONES

Se aplicó un método numérico integral para calcular las intensidades de campo en una 3DPnCw compuesta por cuatro superficies acústicas y planas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones esféricas. Las condiciones de frontera consideradas son de Dirichlet. Es importante tener en cuenta que las intensidades del campo están de acuerdo con las condiciones de frontera consideradas. Los campos mostrados no presentan un comportamiento caótico. Se espera que al considerar frecuencias lo suficientemente grandes se llega al límite de los sistemas clásicos. Un ejemplo muy claro de esto son los sistemas conocidos como los billares de Sinai.

Entre las similitudes que se espera encontrar entre sistemas ópticos o acústicos y clásicos, podríamos mencionar el fenómeno de caos. De acuerdo con nuestros estudios, con frecuencias normalizadas del orden de 70 es posible observar el fenómeno de caos en los billares de Sinai. Tenemos la hipótesis de que frecuencias de orden similar en el sistema acústico tratado en esta parte de la investigación serán suficientes para observar el fenómeno de caos; sin embargo no hemos podido hacer cálculos a frecuencias de ese orden. El intervalo de las frecuencias donde se han obtenido cálculos es de (0, 7]; no obstante, también por el poder computacional requerido sólo

nos has sido posible obtener cálculos para la intensidad del campo acústico en frecuencias normalizadas no más grandes a 5. Los tiempos para la obtención de los resultados mostrados en este escrito van de 24 a 120 horas. Aún se trabaja en mejorar el tiempo de cómputo y como poder hacer cálculos a frecuencias reducidas del orden de 70. No obstante, nuestros resultados son plausibles para ser aplicados, por ejemplo en criptografía.

BIBLIOGRAFÍA

1. M. Maldovan, "Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, Vol 503, pp. 209-217.
2. T. Ibiza, "Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica", Universidad Politécnica de Valencia, Trabajo de Grado, 2013, pp. 1-68.
3. Y. Tanaka, Y. Tomoyasu, S. Tamura, Band structure of acoustic waves in phononic lattices: Two-dimensional composites with large acoustic mismatch. *Phys. Rev. B*. Vol. 62, 2000, pp. 7387-7392.
4. JO. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, MS. Kushawa, P. Halevi, "Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials: the carbon/epoxy composite and some metallic systems. *J. Phys.: Condens. Matter*, Vol. 6, 1994, pp. 8759-8770.
5. MS. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, "Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, 1993, pp. 2022-2025.
6. M. S. Kushwaha, P. Halevi, G. Martinez, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, "Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. B*, Vol. 49, 1994, pp. 2313-2322.
7. W. Kuang, Z. Hou, Y. Liu, "The effects of shapes and symmetries of scatterers on the phononic band gap in 2D phononic crystals", *Phys. Lett. A*, Vol 332, 2004, pp. 481-490.
8. T. Wu, Z. Huang, S. Lin, "Surface and bulk acoustic waves in two-dimensional phononic crystal consisting of materials with general anisotropy", *Phys. Rev. B*, Vol.69, 2004, 094301.
9. JO. Vasseur, PA. Deymier, B. Chenni, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, D. Prevost, "Experimental and Theoretical Evidence for the Existence of Absolute Acoustic Band Gaps in Two-Dimensional Solid Phononic Crystals", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 86, 2001, pp. 3012-3015.
10. M. M. Sigalas, E. N. Economou, "Elastic and acoustic wave band-structure", *J. Sound Vib*, Vol 158, 1992, pp. 377-382.
11. N-K. Kuo, G. Piazza, "Evidence of Acoustic Wave Focusing in a Microscale 630 MHz Aluminum Nitride Phononic Crystal Waveguide", *IEEE International Frequency Control Symposium*, pp. 530-533, 2010 390
12. A. Khelif, B. Djafari-Rouhani, J.O. Vasseur, P. A. Deymier. "Transmission and dispersion relations of perfect and defect-containing waveguide structures in phononic band gap materials", *Phys. Rev. B*. Vol. 68, 2003, 024302
13. T. Ibiza, "Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica", Universidad Politécnica de Valencia, Trabajo de Grado, 2013, pp.1-68.
14. C. Guillén-Gallegos, H. Alva-Medrano, H. Pérez-Aguilar, A Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, "Phononic band structure of an acoustic waveguide that behaves as a phononic crystal". *Results in Physics*, Vol 12, 2019, pp. 1111-1118.
15. JA. Guel-Tapia JA, F. Villa-Villa, A. Mendoza-Suárez, H. Pérez-Aguilar, "Acoustic Scattering of 3D Complex Systems Having Random Rough Surfaces by Scalar Integral Equations", *Arch. Acoust*, Vol 41, 2016, pp. 461-472.

MEDICIONES DE FASE EMPLEANDO UN INTERFERÓMETRO MICHELSON Y MODULACIÓN ELECTRÓNICA UTILIZANDO UNA CELDA DE CRISTAL LÍQUIDO

Yanely Machuca, Jorge L. Flores, Guillermo García-Torales, David I. Serrano-García

Departamento de Ingeniería Electrónica, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería (CUCEI), Universidad de Guadalajara, Av. Revolución #1500, CP. 44840, Guadalajara, Jal., México.

yanely.machuca@alumnos.udg.mx

RESUMEN

En este trabajo proponemos un sistema interferométrico para medir muestras transparentes. El sistema se basa en un interferómetro de Michelson con polarización donde se coloca un retardador de cristal líquido en la entrada del interferómetro para introducir un cambio de fase controlable en la medición. En primer lugar, calibramos el corrimiento de fase en función del voltaje aplicado. Aplicando un tilt en uno de los espejos y por el método de demodulación de fase de Fourier, obtuvimos el valor de fase introducido en el interferograma dependiendo del voltaje de entrada en el retardador de cristal líquido. Tomando en cuenta esta respuesta, utilizamos algoritmos de fase generalizados para poder hacer las mediciones y sin la necesidad de aplicar una portadora con dependencia espacial. Se muestran resultados experimentales mostrando la factibilidad de la propuesta.

INTRODUCCIÓN

La metrología óptica es la rama de la óptica que mide diversas propiedades como grosor, índice de refracción, rugosidad, etc. La gran mayoría son métodos de no contacto realizando pruebas no destructivas a través de sistemas ópticos como interferómetros, polarímetros, detectores de luz, entre otros. Cada uno de estos teniendo un gran impacto en la solución de problemas industriales.

Actualmente se han implementado las mediciones no invasivas con sistemas interferométricos. Las mediciones son determinadas en forma indirecta, dado que los valores observados son patrones de interferencia generados por la diferencia del camino óptico recorrido por la luz debido a la topografía del objeto; dicha distancia se manifiesta como una diferencia de fase [1]. La interferometría de corrimiento de fase (PSI) es un método capaz de medir la fase deseada mediante tres o más interferogramas desplazados en corrimientos de fase conocidos [2]. Para obtener estos interferogramas se necesita una técnica para introducir un cambio de fase controlado, el método más usado consiste en trasladar uno de los espejos o superficies ópticas en el interferómetro con un desplazamiento mecánico con un piezoeléctrico (PZT) [3]. Este elemento permite realizar desplazamientos del orden de fracciones de longitudes de onda en forma controlada, sin embargo, es necesario realizar una calibración previa que permita estimar el desplazamiento respecto al voltaje aplicado. En la práctica, la cantidad de corrimiento de fase no se conoce con precisión debido a problemas como: la calibración del PZT, histéresis, dependencia de la temperatura, además de otras condiciones fuera de los cambios de fase que forman parte de la configuración experimental como vibraciones mecánicas.

Para reducir estos errores se han propuesto varios métodos para minimizar el tiempo de adquisición del interferograma. Smythe y Moore propusieron un método en el que tres o más patrones de fase se adquieren simultáneamente utilizando sensores de imagen. Sin embargo, este método requiere un sistema óptico complejo, que ajusta las posiciones de los sensores de imagen y matrices electrónicas para sincronizar las adquisiciones de interferogramas [4]. A. Ferrari et. al. propusieron un interferómetro robusto con la ventaja que sólo requiere una placa de calcita como elemento de interferencia y con un novedoso control de cambio de fase externo sin partes móviles. El interferómetro era insensible a las vibraciones del entorno y a las fluctuaciones de temperatura, y no requiere una alineación cuidadosa para lograr interferencias, sin embargo, su campo de visión era reducido [5].

En nuestro trabajo, proponemos el uso de técnicas de modulación electrónica con una celda de cristal líquido y la polarización de la luz. Esto nos permitirá introducir corrimiento de fase controlados en interferómetros con mayor velocidad, comparados con el PZT y reduciendo la influencia de las

vibraciones y la turbulencia del aire, además, a esto, esta modulación electrónica puede ser utilizada como fundamento en otros tipos de mediciones que no implican cambios de fase, si no medición de propiedades de polarización de la luz.

Interferómetro de michelson con modulación electrónica por polarización

La configuración propuesta se muestra en la Fig. 1, consiste en un interferómetro Michelson con un retardador de cristal líquido (LCR) y un láser He-Ne como fuente de luz con una longitud de onda de 632,8 nm. En el interferómetro, el haz se filtra mediante un filtro espacial (SF). En primer lugar, pasa a través de un polarizador lineal ($LP[45]$) con su dirección de polarización a 45° con respecto a las direcciones principales de polarización del retardador de cristal líquido (LCR), E_x, E_y . A continuación, el haz polarizado se divide por un divisor de haz (BS) donde la parte reflejada es bloqueada y la parte transmitida se divide por un divisor de haz polarizado (PBS) en haz objeto y haz de referencia con polarización lineal cruzada entre ambos. El haz reflejado, con polarización horizontal, pasa a través del brazo de muestra (S), y el otro, con polarización vertical pasa a través del brazo de referencia. El primer divisor de haz (BS) captará la suma de ambos haces (Referencia, Objeto) y pasaran a través de un polarizador lineal a 45° donde la intensidad es capturada por la cámara. La cámara emplea un sistema de imágenes enfocado en el plano de muestra para adquirir la distribución espacial de la variación de fase. El LCC introduce un desplazamiento de fase controlable (δ) dependiendo de la tensión de entrada en el controlador LCR.

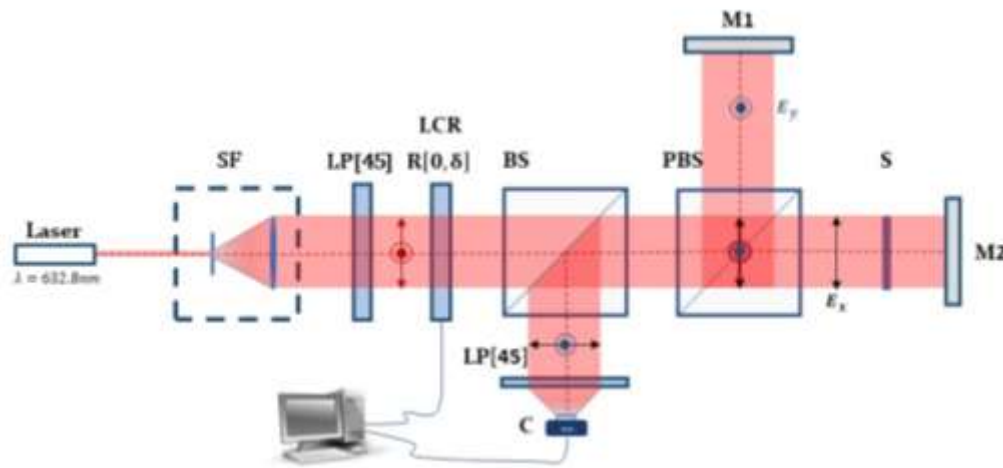


Figura 1. Interferómetro propuesto empleando un retardador de cristal líquido (LCR), donde LP es un polarizador lineal, M1 y M2 son los espejos, S es de la muestra bajo prueba, C es una cámara.

La trayectoria de los haces puede ser representado a través de las aproximaciones de Jones para la luz polarizada.

$$J_{out} = LP[45](M_{ref} + M_{obj})R[0, \delta]LP[45]J_{in}, \tag{1}$$

Donde $LP[45]$ y $R[0, \delta]$ son un polarizador lineal a 45° y un retardador lineal a una orientación del eje rápido de 0° y un valor de retardo δ , [6].

Al ser J_{in} el vector de Jones del haz de entrada orientado a 45° , $J_{in} = 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. M_{ref} y M_{obj} corresponden a la matriz de Jones para el camino del haz de referencia y el haz objeto que se pueden describir como $M_{ref} = a P[0]S[\phi_{ref}]S[\phi_{ref}]P[0]$ y $M_{obj} = b P[90]S[\phi_{obj}]S[\phi_{obj}]P[90]$.

El vector de Jones de salida se representa por las componentes complejas del campo eléctrico $J_{out} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ y la irradiancia en el plan CCD se puede obtener por su intensidad correspondiente como

$$I = (E_x^* \ E_y^*) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab\cos[\delta + 2\phi_1 - 2\phi_2]), \quad [2]$$

Donde ϕ_1 considera la trayectoria óptica de la muestra, y ϕ_2 corresponde al haz de referencia. Considerando que $\phi_1 - \phi_2$ es la diferencia de trayectoria óptica. La ecuación (2) se puede simplificar como

$$I(\delta) = A + B\cos(2\phi + \delta), \quad [3]$$

donde $A = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ y $B = \frac{1}{2}ab$.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Primeramente, determinamos el cambio de fase introducido por el retardador de cristal líquido (LCR) en función del voltaje aplicado (V) en el rango de 0-5 volts como se presenta en la Fig. 2. Para ello, introducimos una inclinación en uno de los espejos para generar un patrón de franjas de alta densidad. El corrimiento de fase se obtuvo por el método de Takeda basados en Fourier [7].

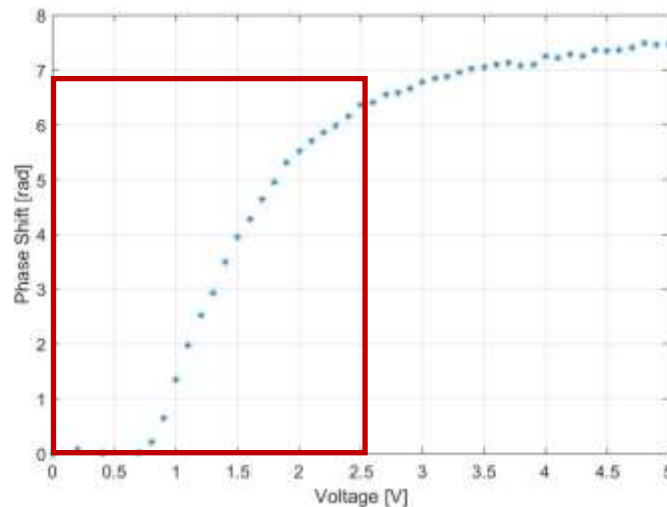


Figura. 2 curva de calibración.

Después de obtener la curva de respuesta de voltaje con fase introducida, seleccionamos 22 interferogramas como se marca en la Fig. 2, cuadro rojo, que corresponde a un cambio de 0 a 2π y utilizamos algoritmos de cambio de fase generalizados diseñados para cambios de fase arbitrarios [5] para obtener el cambio de fase obtenido por la muestra bajo estudio. La Figura 3 muestra los resultados experimentales obtenidos, a) un interferograma, b) la fase envuelta, c) la fase desenvuelta y d) un perfil de la fase marcado en c). Este resultado experimental corresponde a un patrón de resolución USAF impreso en una película de ITO sobre un vidrio actuando como un objeto de fase.

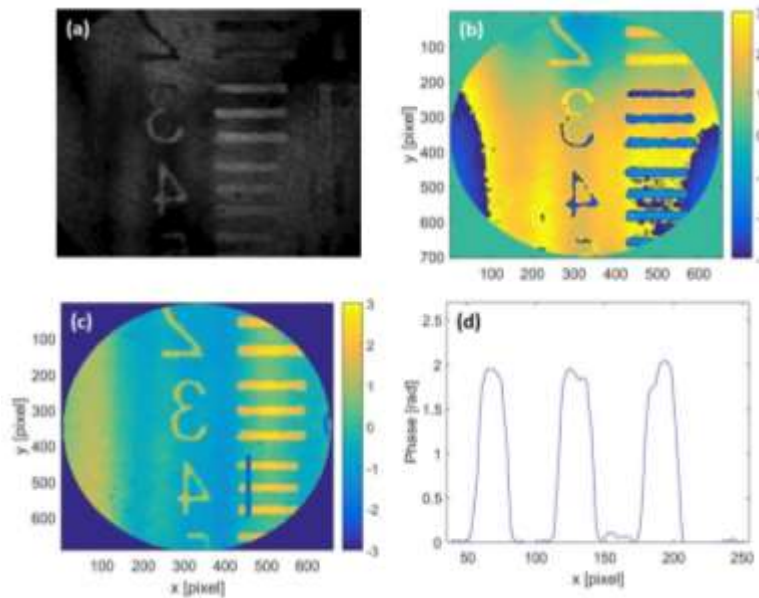


Figura 3.- (a) Interferograma, (b) Fase envuelta, (c) Fase desenvuelta, y (d) Perfil de fase.

CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un interferómetro tipo Michelson que emplea modulación optoelectrónica mediante técnicas de polarización. Utilizamos un retardador variable de cristal líquido para introducir el desplazamiento de fase controlado y poder obtener el cambio de fase ocurrido por la muestra bajo estudio utilizando algoritmo de corrimiento de fase generalizado. Mediante el empleo de técnicas de modulación electrónica, se obtiene una posible reducción de errores en la medición que nos permite recuperar y mejorar su precisión, para caracterizar los objetos de fase. Además, la velocidad en el proceso se puede reducir en comparación con el procedimiento mecánico que emplea un PZT.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ch. Ai and J. C. Wyant "Effect of piezoelectric transducer nonlinearity on phase shift interferometry", *Applied Optics*, Vol. 26, No. 6, 1987, pp. 1112-1116.
2. H. Schreiber and J. H. Bruning, "Phase shifting Interferometry" in *Optical Shop Testing*, 3rd edition, D. Malacara, ed. (Wiley, 2007) Chapter. 14, pp. 547-655.
3. J.H. Bruning, D.R. Herriott, J.E. Gallagher, D.P. Rosenfeld, A.D. White, and D.J. Brangaccio. "Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses". *Applied Optics*, Vol. 13, 1974, pp. 2693-2703.
4. R. Smythe and R. Moore, "Instantaneous phase measuring interferometry," *Optical Engineering*, 23, 1984, pp. 361-365.
5. Ferrari, J. A., Flores, J. L., Ayubi, G. A., & Frins, "Robust interferometer with external phase-shift control". *Optics express*, 25, 2017, pp. 29965-29970.
6. Goldstein, Dennis H. "The Jones Matrix Formalism", in *Polarized light*. (CRC press, 2017), Chapter 10, pp. 202-230.
7. Takeda, M., Ina, H., & Kobayashi, S, "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry", *the Optical Society of America*, Vol. 72, 1982, pp. 156-160.

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL EFECTO DE ROTACIÓN DE POLARIZACIÓN NO LINEAL EN FIBRA ÓPTICA BASADO EN EL MODELO DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL

Hugo Enrique Ibarra-Villalón¹, Olivier Pottiez², Armando Gómez-Vieyra¹, Yazmin Esmeralda Bracamontes-Rodríguez², Jesús Pablo Lauterio-Cruz³

¹ Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, ²Centro de investigaciones en Óptica A. C., ³División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato-León.
uam.hibarra@gmail.com

RESUMEN

El efecto de rotación de polarización no lineal (NPR, por sus siglas en inglés *nonlinear polarization rotation*) en una fibra óptica tiene como fundamento la respuesta óptica no lineal de esta guía de onda al inducir una birrefringencia dependiente de la potencia óptica. Debido a la importancia que tiene la NPR en el proceso de formación y generación de pulsos cortos y ultracortos en láseres de fibra de amarre de modos pasivo [1,2], en este trabajo se presenta un análisis teórico y numérico de la ecuación de Schrödinger no lineal acoplada en la base de polarización circular [3] con la finalidad de reproducir un mecanismo de absorbedor saturable basado en la NPR y un polarizador lineal. Adicionalmente se analiza el proceso de conformación de pulsos (*pulse shaping*) al introducir este mecanismo de absorbedor saturable con la característica de filtro no lineal en transmisión que absorbe las componentes de baja potencia y transmite las componentes de alta potencia. En conclusión, este trabajo presenta de manera ilustrativa el rol de la NPR en el modelo de propagación de un pulso en una fibra óptica y en la aplicación de un mecanismo de absorbedor saturable.

INTRODUCCIÓN

Una fibra óptica es una guía de onda cilíndrica conformada por un núcleo (*core*) embebido en un revestimiento (*cladding*), ambos están compuestos principalmente por sílice (SiO_2), como se ilustra en la Figura 1.a. Para garantizar que la luz incidente este confinada en mayor proporción en el núcleo, debido al mecanismo de la reflexión total interna, es necesario que el núcleo tenga un índice de refracción ligeramente mayor en comparación al revestimiento ($n_{core} > n_{cladding}$). Dicha condición de confinamiento se logra en el proceso de fabricación, discutido a detalle en [4], cuando el núcleo es dopado con dióxido de germanio y pentóxido de difósforo para incrementar el índice de refracción; por otra parte, el revestimiento es dopado con boro y flúor para disminuir el índice de refracción.

La fibra óptica es un medio transparente en un ancho espectral que va desde el visible hasta el infrarrojo cercano, la cual introduce una contribución de dispersión cromática cuando la luz confinada presenta un espectro conformado por varias componentes de emisión, como en el caso de un pulso óptico cuyo espectro presenta una distribución de sus componentes de emisión centradas en una longitud de onda específica. Dicha contribución es debido a la respuesta del medio al introducir una dependencia del índice de refracción en función de la frecuencia óptica [3]. Por consiguiente, en la propagación de un pulso se tendrá un ensanchamiento de su perfil temporal debido a la contribución de dispersión; de acuerdo con la interpretación física de la dispersión este efecto se le denomina dispersión de velocidad de grupo (GVD, por sus siglas en inglés *group velocity dispersión*) debido a que las componentes espectrales viajan a diferente velocidad de grupo, por lo que el retraso y adelanto entre las componentes espectrales describen un régimen de dispersión en particular.

La fibra óptica presenta una respuesta óptica no lineal debido a que el elemento principal del núcleo (SiO_2) es un material centrosimétrico [3]. Con base en la respuesta no lineal de la fibra, cuantificada por la polarización ($\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ momento dipolar por unidad de volumen), es posible describir efectos no lineales de tercer orden con una susceptibilidad $\chi^{(3)}$, Powers y Haus [5] presentan una introducción amplia sobre los fundamentos físicos involucrados en la susceptibilidad no lineal. Por consiguiente, la polarización es definida por su contribución lineal y no lineal ($\mathbf{P}(\vec{r}, t) = \mathbf{P}_L(\vec{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\vec{r}, t) \rightarrow \mathbf{P}_i = \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} \mathbf{E}_j(t) + \epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} \mathbf{E}_j(t) \mathbf{E}_k(t) \mathbf{E}_l(t)$). Uno de estos efectos no lineales es el efecto Kerr, el cual genera pequeñas variaciones en el índice de refracción dependientes de la potencia óptica produciendo múltiples fenomenologías en el formalismo de la óptica no lineal en fibra [3].

Adicionalmente pueden ser generados efectos de esparcimiento inelástico, como el efecto Raman y el esparcimiento de Brillouin [3], los cuales conducen una ganancia e intercambio de energía entre las componentes espectrales emitidas.

Al estudiar la respuesta óptica no lineal de la fibra a lo largo de los ejes principales (P_x, P_y), discutida a detalle en [3], es posible inducir una birrefringencia no lineal que es traducida como una pequeña variación del índice de refracción a lo largo de los ejes principales (horizontal Δn_x y vertical Δn_y , ver Fig. 1(a)) dependiente de la de la intensidad de las componentes ortogonales del campo eléctrico incidente, definidas por

$$\begin{aligned}\Delta n_x &= n_2 (|E_x|^2 + 2/3 |E_y|^2) \\ \Delta n_y &= n_2 (|E_y|^2 + 2/3 |E_x|^2)\end{aligned}\quad (6)$$

donde (E_x, E_y) son las componentes del campo eléctrico y n_2 es el coeficiente del índice de refracción no lineal. Dichas variaciones en el índice de refracción representan a la contribución del efecto Kerr al producir una automodulación de fase (SPM, por sus siglas en inglés self-phase modulation) representada por $\Delta n_x = n_2 |E_x|^2$ y $\Delta n_y = n_2 |E_y|^2$; esta contribución tiene como fundamento que la componente del campo eléctrico modula su propia fase a lo largo de la propagación. Por otra parte, se produce una modulación cruzada de fase (XPM, por sus siglas en inglés *cross-phase modulation*) debido a la interacción de las componentes del campo eléctrico y su contribución es representada por $\Delta n_x = (2/3) |E_y|^2$ y $\Delta n_y = (2/3) |E_x|^2$, es decir que una de las componentes del campo eléctrico conducirá la modulación de la fase de la otra componente. Para una mejor comprensión, los efectos no lineales SPM y XPM son analizadas a detalle por Agrawal [3].

Este análisis es válido en el caso ideal de una fibra monomodal perfectamente isotrópica. En la práctica no existe una fibra óptica perfectamente isotrópica, en general son birrefringentes (birrefringencia lineal); sin embargo, si se aplica torsión a la fibra convencional, ésta presenta propiedades similares a la fibra isotrópica al conservar la elipticidad del estado de polarización. Partiendo del caso ideal, al hacer incidir luz en la fibra, el estado de polarización se mantendrá cuando se tenga bajas potencias, como se ejemplifica en la Fig. 1.b. Por otra parte, a altas potencias se inducirá la birrefringencia no lineal discutida anteriormente, en este caso la fibra únicamente conservara el estado de polarización lineal y circular, y para un estado de polarización elíptico ocurrirá el efecto conocido como la rotación de polarización no lineal (NPR), en donde la elipse rotara conforme se va propagando (Fig. 1.b). Cabe destacar que, en el estado de polarización circular, a altas potencias, experimentara el efecto NPR; no obstante, esta rotación no afectara la polarización debido a la simetría circular.

El efecto de NPR junto con un polarizador lineal es implementado en un mecanismo conocido como absorbedor saturable, el cual tiene un rol fundamental en la generación y formación de pulsos cortos y ultracortos de un láser de fibra de amarre de modos pasivo [1]. El absorbedor saturable es definido como un dispositivo óptico que funciona como un filtro no lineal al absorber las componentes de baja potencia y transmitir las componentes de alta potencia que llegan a saturar el dispositivo. Cabe destacar que, si el mecanismo de absorbedor saturable es conducido por efectos no lineales, entonces son denominados como artificiales debido a que no es un material (semiconductor, puntos cuánticos, nanotubos de carbono, grafeno, etc.) el que introduce la característica de filtro no lineal, sino que es un elemento del láser el que presenta dicha característica, comúnmente un aislador óptico o un polarizador.

En este trabajo se analiza numéricamente la evolución del estado de polarización de un pulso *sech*² bajo la influencia del efecto de NPR, así como el mecanismo de absorbedor saturable basado en NPR y un polarizador lineal.

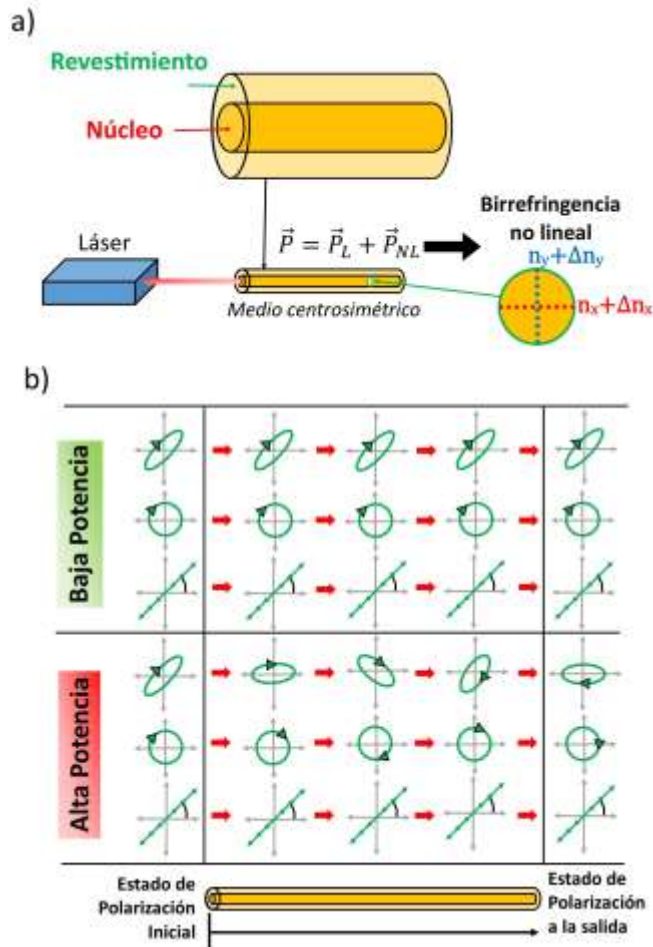


Figura 1. a) Birrefringencia no lineal inducida en la fibra óptica debido a la respuesta no lineal del SiO_2 (medio centro simétrico). b) Propagación de la luz con diferentes estados de polarización en una fibra isotrópica ideal para el caso de baja potencia (conservando el estado de polarización) y el caso de alta potencia (a partir de la respuesta no lineal de la fibra, el estado de polarización circular y elíptico sufrirán el efecto de la rotación de polarización no lineal).

MODELO TEÓRICO

El modelo teórico de la propagación de un pulso a lo largo de una fibra óptica, en el formalismo clásico del electromagnetismo, se basa en la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE, por sus siglas en inglés *nonlinear Schrödinger equation*). Dicho modelo se deduce a partir de la ecuación de onda considerando la respuesta instantánea de las contribuciones lineal y no lineal de la polarización, así como el campo eléctrico asociado al pulso definido por:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = F(x, y)A(z, t)e^{i\beta_0 z} \hat{u}_z \tag{7}$$

donde $F(x, y)$ representa a la distribución de energía en el perfil transversal de la fibra (modo de la fibra), $A(z, t)$ representa al perfil temporal del pulso a lo largo de la propagación en “z” y β_0 es la constante de propagación a la frecuencia ω_0 . La deducción completa es discutida por Agrawal [3], tomando en cuenta la contribución de dispersión, la consideración de que el perfil temporal sufre pequeñas variaciones a lo largo de la propagación, un marco de referencia que se mueve con el pulso a la velocidad de grupo ($T \rightarrow t - z/v_g$ donde v_g es la velocidad de grupo).

En este análisis solo se considera la birrefringencia no lineal en la fibra, despreciando la contribución de dispersión, con la finalidad de estudiar la NPR. Por lo tanto, la contribución de la respuesta óptica no lineal discutida anteriormente se introduce en el modelo de propagación de la ecuación de la NLSE acoplada en la base de polarización circular [3], cuya expresión matemática es representada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A_+ &= i \frac{2}{3} \gamma (|A_+|^2 + 2|A_-|^2) A_+ \\ \frac{\partial}{\partial z} A_- &= i \frac{2}{3} \gamma (|A_-|^2 + 2|A_+|^2) A_- \end{aligned} \quad (8)$$

donde γ ($W^{-1}km^{-1}$) es el coeficiente no lineal de la fibra óptica, z es la distancia de propagación y el perfil temporal del pulso es representado por sus componentes ortogonales del estado de polarización: A_+ representa a la componente de polarización circular derecha y A_- representa a la componente de polarización circular izquierda. El primer término del lado derecho de las ecuaciones representa la contribución de la automodulación de fase (SPM) y el segundo término representa a la modulación cruzada de fase (XPM).

ANÁLISIS NUMÉRICO

Mecanismo de absorbedor saturable basado en la rotación de polarización no lineal y un polarizador lineal.

En base al modelo de propagación de la NLSE (Ec .3) es posible analizar numéricamente el efecto de la rotación de polarización no lineal para cada una de las componentes en intensidad del perfil temporal, así como el mecanismo de absorbedor saturable validado por la curva de transmisión de un polarizador lineal. Para ilustrar dichos resultados, se ejemplifica la propagación de un pulso *sech*² con un estado de polarización inicial elíptico (a $\psi = 0$ rad con respecto del eje horizontal) a lo largo de 40 m de fibra óptica monomodal ($\gamma = 1.3 W^{-1}km^{-1}$), para validar el mecanismo de absorbedor saturable se colocó a la mitad de la propagación un polarizador lineal (a 90° con respecto del eje horizontal), como se observa en la Fig. 1.a.

El perfil temporal del pulso a la entrada es definido por

$$A(z = 0, T) = \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = \sqrt{P_0} \operatorname{sech} \left(\frac{T}{T_0} \right) \begin{pmatrix} u e^{i\psi} \\ v e^{-i\psi} \end{pmatrix} \quad (9)$$

donde $P_0 = 300$ W es la potencia pico inicial, $T_0 = 2$ ps está relacionado con el ancho temporal a media altura ($\Delta T_{FWHM} \sim 1.763 T_0$) y (u, v) son parámetros normalizados ($u^2 + v^2 = 1$) que describen el estado de polarización, en este análisis se introdujo $(u, v) = 1/\sqrt{5} (2, 1)$ para representar un estado de polarización elíptico, definiendo el tercer parámetro de Stokes $S_3 = (|A_+|^2 - |A_-|^2) / (|A_+|^2 + |A_-|^2) = 0.6$ (que representa el grado de polarización circular derecha).

Al integrar la Ec. 1 por el método S-SSFM (*symmetric split-step Fourier method*) fue posible introducir el efecto de NPR a lo largo de la propagación dependiente de la intensidad óptica y validar la curva de transmisión de filtro no lineal del polarizador lineal en $z = 20$ m (ver Fig. 1.a). El mecanismo de absorbedor saturable en el perfil de intensidad del pulso ($z = 20$ m) se cuantifica como una compresión del pulso al filtrar únicamente componentes de alta intensidad y absorber componentes de baja potencia, como se ilustra en la Fig. 1.b. La evolución del estado de polarización se analiza a partir de la representación de los parámetros de Stokes en la esfera de Poincaré; la evolución del tercer parámetro de Stokes muestra la preservación de la elipticidad a lo largo de la propagación: $S_3 = 0.6$ constante en los primeros 20 metros de propagación y $S_3 = 0$ a la salida del polarizador lineal (Fig. 3.c). Por otra parte, la dependencia de la NPR en función de la intensidad del perfil del pulso ($|A|^2 = |A_+|^2 + |A_-|^2$) se valida a partir de la rotación del ángulo 2χ en el plano S_1 vs S_2 de la esfera de Poincaré, mostrando que la rotación de la elipse se da en mayor proporción en la potencia pico del pulso ($T = 0$ ps) y en menor proporción en los extremos temporales del pulso, alcanzando una nula rotación cuando la componente de intensidad $|A|^2 \sim 0$, como se aprecia en los primeros 20 m de propagación en la Fig. 3.d. Posteriormente, si a la salida del polarizador se tiene un estado de polarización lineal rotado a $\chi = 90^\circ$, entonces la rotación del ángulo 2χ es contante a lo largo de la

propagación (de $z = 20$ m a $z = 40$ m), debido a que la NPR no introduce una rotación en un estado de polarización lineal. Debido a que la orientación de la elipse rotada de la parte central del pulso ($T=0$ ps, $P_0 = 300$ W) se logra alinear con la orientación del polarizador, a esta potencia ($P_0 = 300$ W) se alcanza un máximo de transmisión, mientras que las otras componentes de intensidad no logran alinear la elipse de polarización con respecto a la orientación del polarizador por lo que su transmisión es menor, dicha discusión es presentada a detalle por Ibarra y otros [1]. Es importante mencionar que, para las componentes en intensidad pequeñas ($|A|^2 \ll 1$), a pesar de a que la NPR introduce una rotación despreciable en la elipse, la transmisión no es nula debido a que la diagonal menor de la elipse de polarización se alinea con la orientación vertical del polarizador.

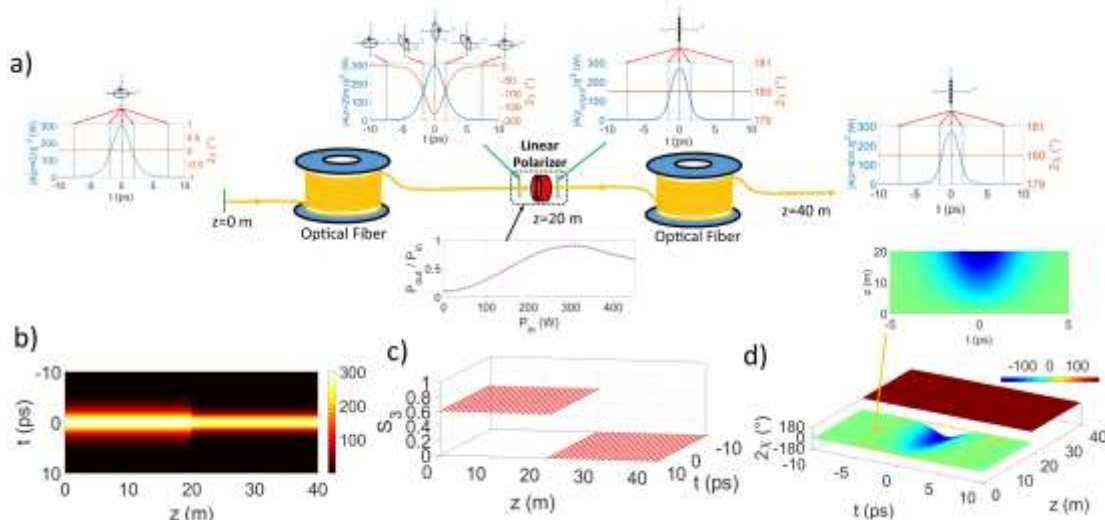


Figura 2. Mecanismo de absorbedor saturable basado en la rotación de polarización no lineal y un polarizador lineal. a) Propagación de un pulso a lo largo de 40 m de fibra óptica monomodal colocando un polarizador lineal a la mitad de la propagación (se muestra el estado de polarización de las componentes de intensidad del pulso en $z = 0$, $z = 20$ m y $z = 40$ m). b) Evolución del perfil de intensidad del pulso a lo largo de la propagación (la compresión en $z = 20$ m es el efecto de filtro no lineal). Evolución del estado de polarización a lo largo de la propagación descrito por c) el parámetro de Stokes S_3 y d) las variaciones del ángulo 2χ en el plano S_1 vs S_2 de la esfera de Poincaré.

Mecanismo de absorbedor saturable en el proceso de conformación de pulsos.

Adicionalmente, bajo el principio de operación del mecanismo de absorbedor saturable basado en la NPR y un polarizador lineal es posible ejemplificar el proceso de conformación de un pulso. En general, la conformación de un pulso es el proceso en el cual se modifica su perfil de intensidad debido a múltiples mecanismos. En particular, la característica de filtro no lineal, debido al mecanismo de absorbedor saturable, introduce un proceso de conformación de pulsos al producir una compresión del perfil de intensidad, así como la supresión de las componentes de baja potencia. En el análisis del proceso de la conformación de pulsos, se analiza una configuración de la propagación del pulso a lo largo de 20 m de fibra con un polarizador lineal vertical a la salida. En particular, se ejemplificaron tres casos de estudio, en los cuales se consideró un perfil de intensidades con un estado de polarización elíptico horizontal a la entrada, dicho estado de polarización garantiza el efecto de NPR a lo largo de la propagación y una transmisión del polarizador con la característica de filtro no lineal (Fig. 3.a). El primer caso de estudio es el filtraje de componentes de ruido Gaussiano a baja potencia de un perfil de intensidad $sech^2$, como se ilustra en la Fig. 3.b. El segundo caso es un pulso con tres perfiles de intensidad $sech^2$ superpuestos, que al ser filtrados por el mecanismo del absorbedor saturable es posible identificar la compresión de

cada perfil y la supresión del perfil $sech^2$ con la potencia pico más baja, como se describe en la Fig. 3.c. El tercer caso ejemplifica la supresión del pedestal de un pulso, como se aprecia en la Fig. 3.d.

CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó teórica y numéricamente el efecto de la rotación de polarización no lineal en la propagación de un pulso a lo largo de una fibra óptica, así como su contribución en el mecanismo de absorbedor saturable descrito por la característica de filtro no lineal en transmisión de un polarizador lineal. Este mecanismo permitió estudiar un proceso de conformación de pulsos al poder suprimir las componentes del perfil temporal del pulso a baja potencia y transmitir las componentes de alta potencia.

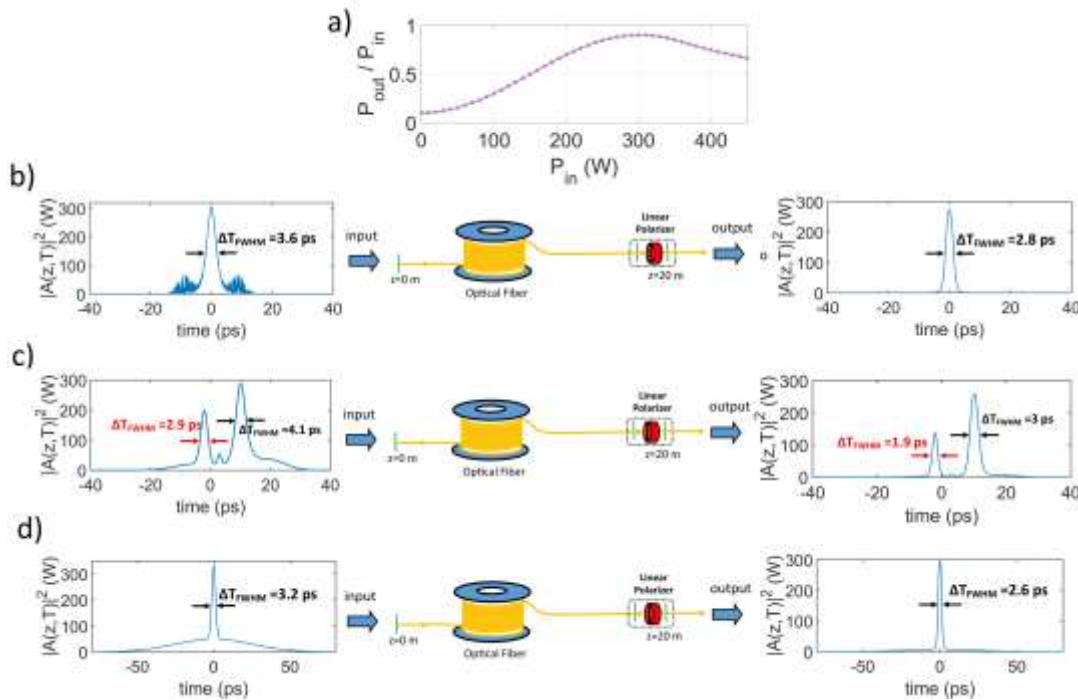


Figura 3. Conformación de pulsos debido al mecanismo de absorbedor saturable basado en la NPR y un polarizador lineal. a) Curva de transmisión del polarizador lineal considerando una componente en potencia con un estado inicial de polarización elíptico horizontal. Ejemplificación de la conformación de pulsos para b) un pulso $sech^2$ con ruido Gaussiano en sus extremos temporales, c) la superposición de tres perfiles $sech^2$ y d) para un pulso $sech^2$ con un pedestal.

BIBLIOGRAFÍA

1. H. E. Ibarra-Villalon, et. al. "Principles of operation of a passively mode-locked fiber ring laser and 3D mapping of ultra-short pulses", Rev. Mex. Fis. E, Vol. 64, 2, 2018, pp. 195-204.
2. Bracamontes-Rodríguez Y. E. et. al. "Dual noise-like pulse and soliton operation of a fiber ring cavity", J. Opt., Vol 19, 2017, 035502
3. G. Agrawal, "Nonlinear fiber optics", 6th ed (Academic Press, New York, 2019), Chapters 1, 2, 4, 6, 8.
4. G. Agrawal, "Fiber-optic communications systems", 4th ed (John Wiley & Sons, New Jersey, 2010), pp. 67-73.
5. P. E. Powers P, J. W. Haus, "Fundamentals of Nonlinear optics", 2nd ed (CRC Press, Boca Raton FL, 2017), pp. 65-110.

HIDROLOGÍA ISOTÓPICA. HERRAMIENTA PARA ENTENDER PROCESOS EN LOS ACUÍFEROS

David Calva Hernández

CIATEC, A.C., León Guanajuato.
dcalva@ciatec.mx

RESUMEN

El agua subterránea es la mayor fuente de agua dulce, y el componente más desconocido del ciclo hidrológico. En la década de los 1950's, se inició el estudio isotópico en el agua (Hidrología Isotópica). En México, la Agencia Internacional de Energía Atómica, comenzó el monitoreo de isótopos en la precipitación en 1961 (Global Network of Isotopes in Precipitation), pero fue a partir de la década de los 1980's que las investigaciones en este campo tomaron relevancia. Sin embargo, la información en México es aún insuficiente, y la hidrología isotópica es poco comprendida y utilizada en el manejo del recurso. Los isótopos son átomos de un mismo elemento con masa atómica distinta. Los isótopos de mayor interés en la hidrología isotópica son: Tritio (^3H), el Deuterio (^2H) y Oxígeno 18 (^{18}O) que sirven como trazadores de edad, proveniencia, e identificación de procesos recarga y contaminación del agua subterránea. El agua de cada reservorio tiene concentraciones isotópicas únicas, definidas por el fraccionamiento isotópico que ocurre en las reacciones termodinámicas dentro del ciclo hidrológico. La tasa de reacción asociada a la masa atómica de los isótopos, controla junto con factores ambientales y geográficos, la concentración isotópica en cada reservorio. En distintos lugares se ha recurrido a la hidrología isotópica para entender problemáticas o procesos en el agua subterránea, y con base en dicha información aplicar acciones de manejo. En San Luis Río Colorado, Sonora, se determinó que los procesos de mezcla de agua proveniente de infiltración del Río Colorado con agua evaporada, son la causa del incremento de sales en el agua subterránea. En Bangladesh, se actualizó el modelo del acuífero y se determinó que se debe evitar crear conos de abatimiento para no inducir la contaminación de arsénico de la unidad 1 a las unidades 2 y 3. La caracterización isotópica del agua subterránea, permitió determinar las zonas de recarga de los acuíferos de Santa Fe de Antioquia, lográndose identificar 2 zonas de recarga para su protección: una entre 1800 a 2400 m.s.n.m., y otra entre 1100 y 1400 m.s.n.m. Es un hecho que los estudios realizados en varias partes del mundo, confirman que la hidrología isotópica es una herramienta útil en la determinación de fuentes de contaminación del agua subterránea, identificación de zonas de recarga y de procesos que experimenta el agua a través del ciclo hidrológico. El conocimiento de estos procesos, permite a las autoridades encargadas de administrar el agua subterránea, generar estrategias de regulación con vías al aprovechamiento sustentable del recurso.

INTRODUCCIÓN

El agua subterránea es la fuente de agua dulce más utilizado en la actualidad, y a la vez es el componente más desconocido del ciclo hidrológico. De acuerdo a datos del WBCSD & UNEP (1998) y Schwartz e Ibaraki (2011), es la fuente principal para el riego de más de 2 tercios de la producción mundial de alimentos. De igual forma, el agua de los sistemas acuíferos son la fuente principal de agua potable, cuya demanda aumenta anualmente por el crecimiento poblacional, aumentando con ello las zonas con estrés hídrico. A razón de lo anterior se prevé que en las próximas décadas la demanda total de agua aumentará en un 40%, siendo que para 2025, 2 tercios de la población mundial viva en países con escasez de agua de moderada a grave (WMO 1997, Revenga 2000, Bigas 2012, Srinivasan et al. 2012, Guppy y Anderson 2017).

Derivado de la importancia del agua subterránea, se han desarrollado diversas investigaciones en torno a ella, como lo es, su localización, zonas de recarga, contaminación, sobreexplotación, usos y aprovechamientos sustentables entre otras. Los avances de la tecnología han permitido el desarrollo de estudios basados en el análisis y cuantificación de isótopos en la molécula del agua. El uso de herramientas isotópicas y técnicas nucleares en el estudio del ciclo hidrológico se denomina Hidrología Isotópica y tuvo su inicio en la década de los 1950's, en los años subsecuentes a la finalización de la Segunda Guerra Mundial (IAEA, 1983). En México, el uso de técnicas isotópicas se inició en 1962, cuando la Agencia Internacional de Energía Atómica (IAEA) instaló 2 estaciones

de monitoreo, una en el estado de Chihuahua y otra en Veracruz. Ambas estaciones, pertenecientes a la Red Global de Isotopos en la Precipitación (GNIP), obtuvieron datos mensuales de tritio, deuterio y oxígeno-18 hasta el año 1990, año en que dejaron de funcionar. A partir de la década de los 1980's instituciones educativas y de gobierno se han sumado a la investigación en el campo de la hidrología isotópicas en el país, siendo aún insuficiente y escasos los datos para muchas regiones de la república mexicana.

De acuerdo a lo anterior, es reconocida la necesidad de la administración del agua de manera sostenible con la finalidad de satisfacer la demanda actual y futura, para lo cual la comprensión del funcionamiento del sistema hidrogeológico es un elemento clave en la toma de decisiones. El presente documento tiene como objetivo mostrar a la hidrología isotópica como la técnica nuclear capaz para rastrear movimientos de agua en el ciclo hidrológico, así como presentar el estado del arte sobre la aplicación de isótopos estables en el campo hidrogeológico, un tema importante para apoyar la gestión de los recursos hídricos subterráneos, interconexiones entre acuíferos, riesgos y origen de la salinización y contaminación de recursos.

TEORÍA

Los isotopos son los átomos de un mismo elemento que tienen el mismo número de protones en su núcleo, pero el número de neutrones es distinto, por consiguiente, masa atómica distinta. En hidrología isotópica los isotopos de mayor interés son Deuterio (^2H), Tritio (^3H) y Oxígeno 18 (^{18}O), siendo el tritio el único isotopo inestable. Las combinaciones de estos isotopos generan especies moleculares de agua de diferentes masas, las cuales se encuentran en diferentes proporciones en el agua de cada reservorio. El fraccionamiento isotópico, responsable de la variación en la concentración isotópica a través del ciclo hidrológico (Urey, 1947), ocurre en cualquier reacción termodinámica debido a la diferencia en la tasa de reacción de cada una de las especies moleculares del agua. Las especies moleculares compuesta por isótopos ligeros, son más reactivas que las compuestas por isótopos pesados, por lo que se concentran de manera desproporcionada en un lado de la reacción, de esta forma se explica que cuando el agua de mar se evapora, las moléculas que contienen isótopos más ligeros suelen ser las primeras en ascender y formar nubes con firmas isotópicas específicas. Al condensarse y precipitar el agua presente en las nubes, las moléculas de agua con isótopos más pesados caen en primer lugar. Una vez que las nubes pierden estos isótopos y viajan hacia el interior del continente, los isotopos ligeros caen en mayor proporción. Diversos estudios muestran que la variación en el contenido isotópico, resultado del fraccionamiento isotópico durante el ciclo hidrológico, permite determinar la evolución isotópica de dicha agua (Dansgaard, 1964; Craig y Gordon, 1965; Merlivat y Jouzel, 1979; Gat, 1996), tal como se observa en la figura 1. Para determinar la concentración de isotopos en cualquier etapa del ciclo hidrológico, se toman muestras representativas de agua, siendo cuidadosos en no alterar su concentración isotópica. Estas muestras se analizan por medio de equipos de espectrometría de absorción y Contador de Centelleo Líquido para el Tritio. Los resultados de concentración de los isotopos estables, son expresados como la desviación delta (δ) en partes por mil (‰), con referencia al VSMOW, que es el valor promedio estándar del agua oceánica (Clark y Fritz, 1997; Kendall y Doctor, 2003). Por su parte la concentración de tritio se expresa en Unidades de Tritio (UT).

Puesto que estos recursos hídricos en continente derivan de las precipitaciones, el principal factor de fraccionamiento que controlan la variación de la concentración de ^2H y ^{18}O es el efecto destilación que experimenta el vapor de agua al viajar desde la zona de evaporación (generalmente en continente), y que se ve controlado por la elevación, latitud, temperatura y/o distancia con respecto a la fuente de humedad, conocidos factores como Efecto de Temperatura, Efecto de Altitud, Efecto de Continentalidad, Efecto de Cantidad y Efecto Estacional (Rozanski et al., 1993).

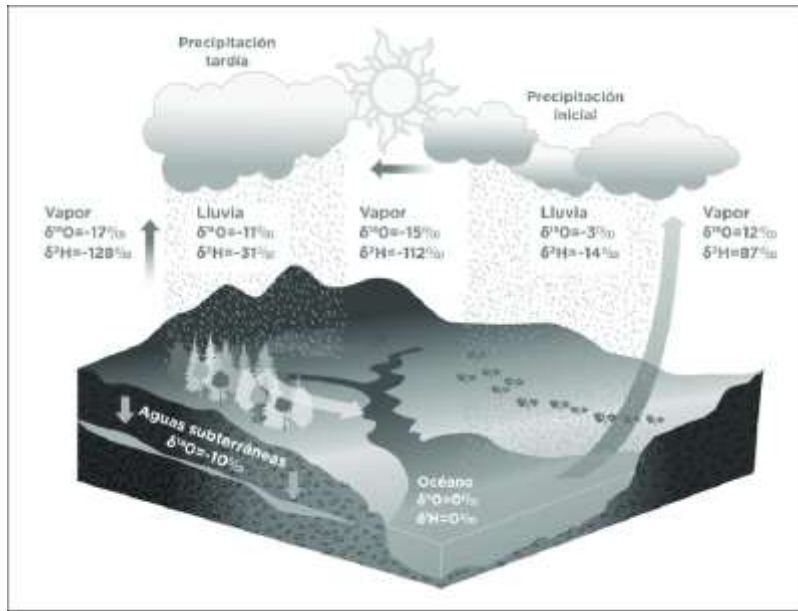


Figura 1. Concentración promedio de Deuterio (^2H) y Oxígeno 18 (^{18}O) en el Ciclo Hidrológico.
Fuente: Silva, V., Gayó, E. y Salazar-García, D., 2018, con base en Hoefs, 1997.

La relación que existe entre deuterio y oxígeno-18 presente en el agua dulce superficial se le conoce como Línea de Aguas Meteoricas Globales (LMG), la cual se define de acuerdo a la ecuación $\delta^2\text{H}=8\delta^{18}\text{O}+10$ (Craig 1961a), modificada por Rozansky et al. (1993) y más recientemente por Bowen y Revenaugh (2003). Los datos obtenidos de la GNIP, permiten actualizar dicha ecuación. La variación del contenido isotópico (^2H y ^{18}O) en el agua de un punto o zona específica, con referencia a la LMG, puede atribuirse a procesos tales como la evaporación, precipitación en condiciones de temperatura altas o bajas, mezclas de vapores, entre otras, tal y como se muestra en la figura 2.

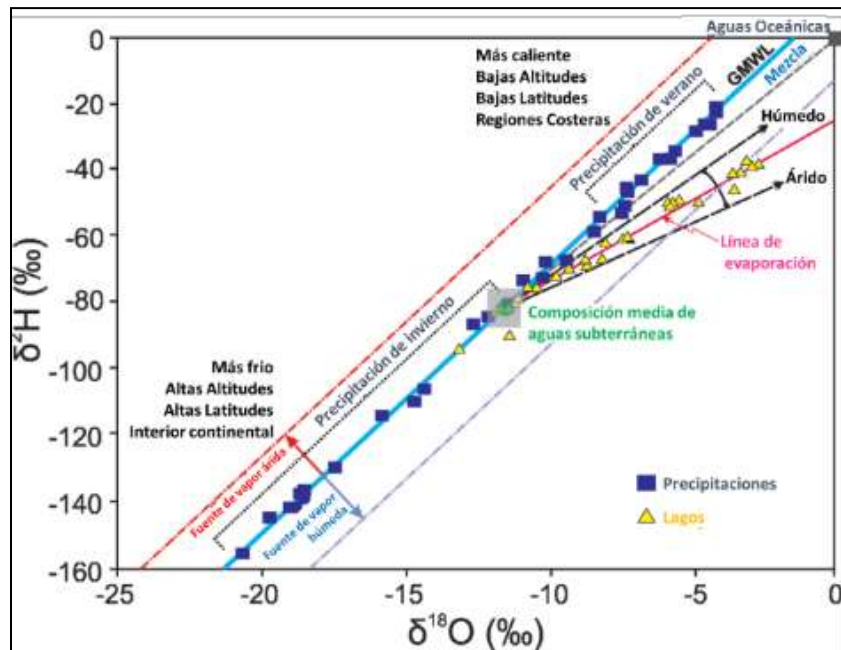


Figura 2. Línea Meteorica Global. Modificado de Kendall et al. 1995.

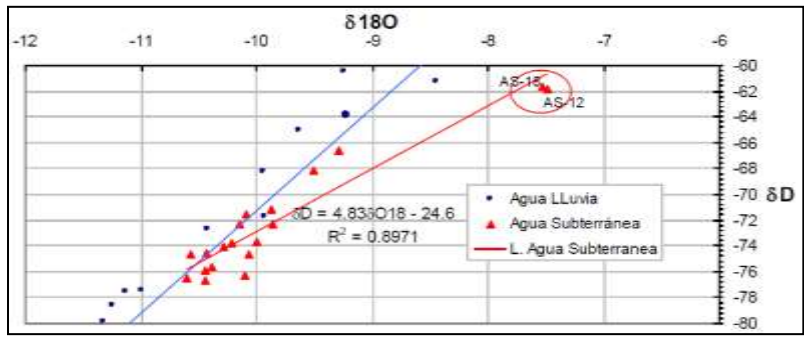


Figura 4. Línea Meteorica Local de la región de Santa Fe de Antioquia y la línea que dibuja el contenido isotópico del agua subterránea. Tomado de Vélez y Rhenals (2008).

La comparación de las concentraciones isotópicas de la precipitación y agua subterránea, con la altitud de cada una de las muestras, permitió definir dos zonas de recarga, una por encima de los 1800 m.s.n.m (1800 – 2400 m.s.n.m); y una más baja, localizada a media ladera entre los 1100 y 1400 m.s.n.m. La zona de recarga alta (1800-2400 m.s.n.m) alimenta la mayoría de los acuíferos (1D, 1F, 1H, y 1B), mientras que la zona baja (1100 – 1400 m.s.n.m) alimenta los acuíferos de la unidad 1G (Figura 5 y 6). Con base a este análisis se propone el modelo mostrado por la Figura 7, para la recarga de los acuíferos en la zona de estudio.

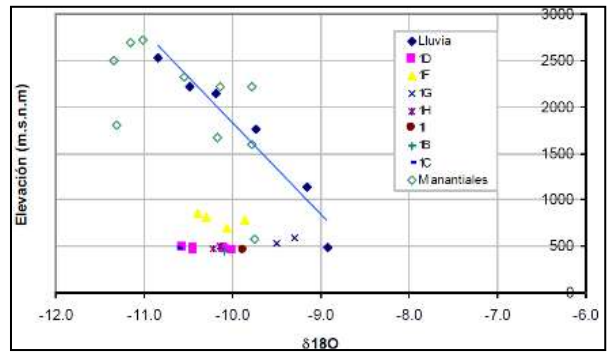


Figura 5. Elevación vs $\delta^{18}O$ (1B, 1C, 1D, 1F, 1G, 1H, 1I: Unidades Acuíferas). Tomado de Vélez y Rhenals (2008).

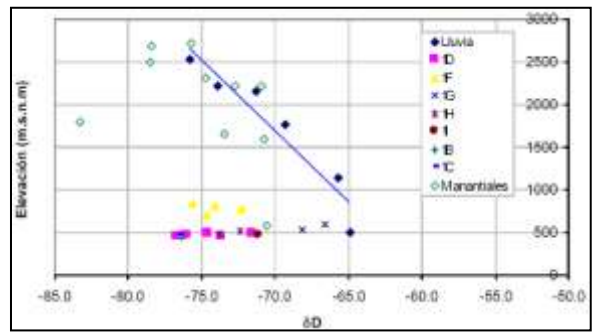


Figura 6. Elevación vs δD (1B, 1C, 1D, 1F, 1G, 1H, 1I: Unidades Acuíferas). Tomado de Vélez y Rhenals (2008).

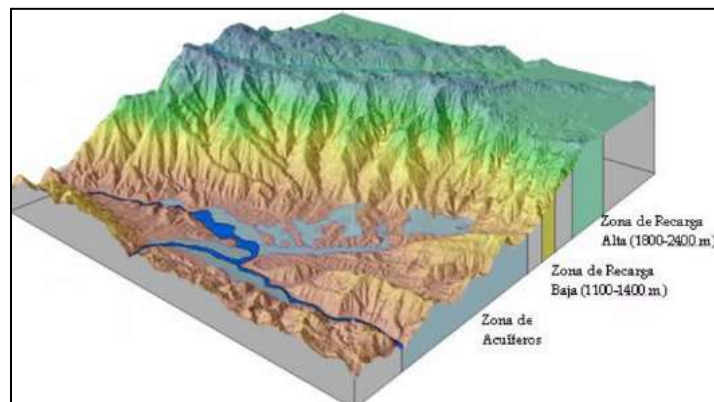


Figura 7. Modelo para la recarga en la zona del Occidente Antioqueño. Tomado de Vélez y Rhenals (2008).

Finalmente, en la gráfica de la Figura 8, se dibujaron las concentraciones de las muestras de precipitación de los meses de agosto a diciembre, así como concentraciones isotópicas de las aguas subterráneas del mes de octubre. En dicha figura se observa gran semejanza entre los contenidos isotópicos de las muestras de agua subterránea (del mes de octubre) con el contenido isotópico de las muestras de precipitación del mes de agosto. Esta diferencia de 2 meses puede representar el tiempo mínimo de residencia del agua subterránea en el acuífero.

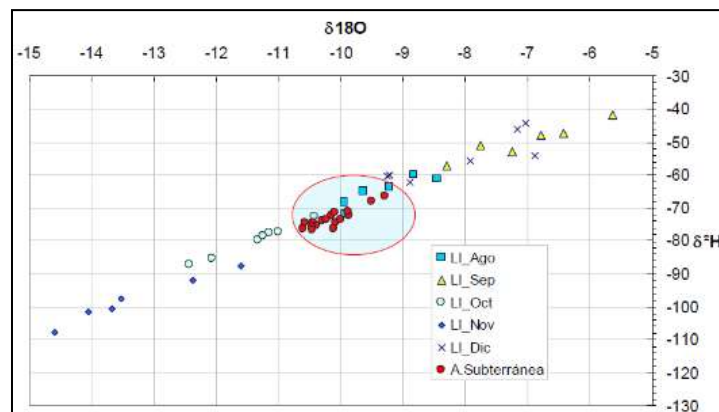


Figura 8. Correspondencia de los valores isotópicos de las aguas subterráneas con la precipitación. Tomado de Vélez y Rhenals (2008).

Salinización de aguas subterráneas.

En la región del Valle de San Luis Río Colorado, Sonora, el agua subterránea y suelo han presentado aumentos en la salinidad en las últimas 5 décadas, lo cual afecta a los agricultores del Módulo de Riego No. 1 (Figura 9). Con el objetivo de identificar las fuentes de aporte de agua al acuífero, Valenzuela et al. (2013), realizaron un estudio por métodos isotópicos, que permitió explicar el aumento de la salinidad. En el mencionado estudio se colectaron y analizaron muestras de Agua del Acuífero. Los resultados de los valores isotópicos del área de estudio se graficaron junto a la Línea Meteorica Mundial (LMM), y la línea isotópica del Río Colorado, obtenida por Tompson et al. (2008). La línea de la concentración isotópica del agua subterránea es muy similar a la del Río Colorado, y posee una pendiente menor que la LMM, lo cual indica que existió evaporación del agua de lluvia previo a llegar al acuífero, y su fuente principal de recarga es el río Colorado. La composición isotópica ($\delta^{18}\text{O}$ y $\delta^2\text{H}$) del agua en el acuífero en el Módulo de Riego No. 1, indica 2 fuentes de agua: 1) aguas originadas antes de la construcción del sistema de presas (aguas antiguas del Río

Colorado) y 2) de aguas infiltradas después de la construcción del sistema sometidas a procesos de evaporación en los vasos (aguas recientes del Río Colorado) (Figura 10).

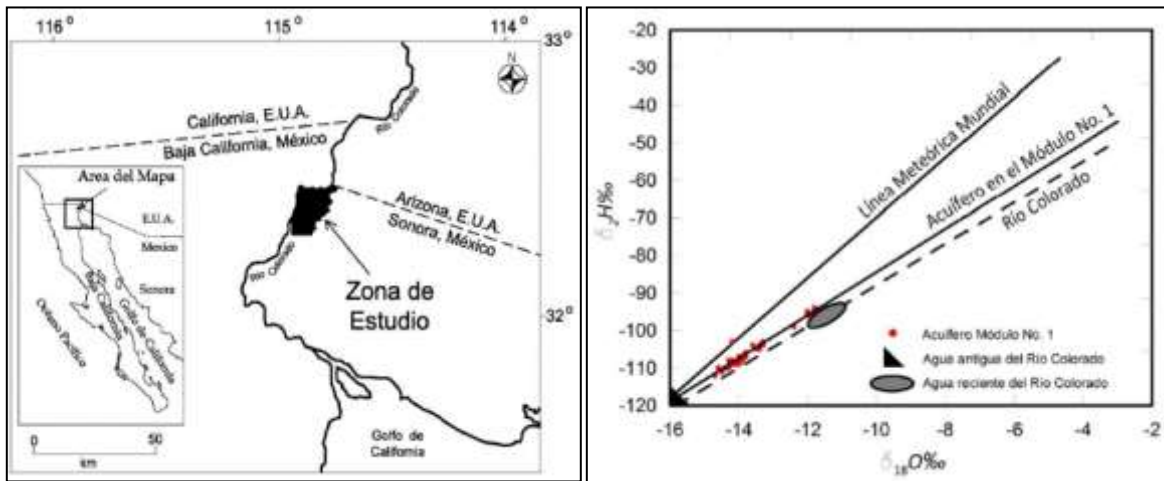


Figura 9. Ubicación del área Modulo de Riego 1, en Valle de San Luis Río Colorado, Sonora. Tomado de Valenzuela et al., 2013.

Figura 10. Composición isotópica del agua del acuífero del Módulo de Riego 1, y la Línea del Río Colorado. Tomado de Valenzuela et al., 2013.

De acuerdo a la correlación de $\delta^{18}\text{O}$ y Cloruros, se ha determinado que el incremento de dicho ion en el agua subterránea se debe a la disolución de sales presentes en el suelo y subsuelo (Figura 11). Finalmente, el estudio establece que el agua de los canales de riego Revolución y Bacastec (más mineralizada) aún no está presente en el acuífero, sin embargo, menciona que es necesario establecer políticas del uso de dichos canales, para impedir efectos negativos futuros.

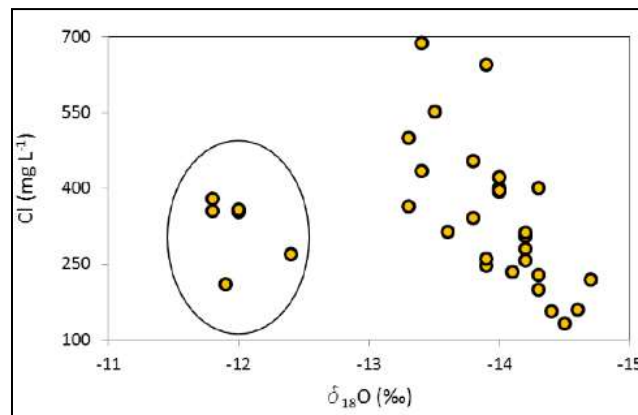


Figura 11. Relación entre la concentración de cloruros y la composición isotópica del $\delta^{18}\text{O}$. Tomado de Valenzuela et al. 2013.

Contaminación.

La hidrología isotópica ha sido utilizada en la caracterización y prevención de contaminación del agua subterránea, tal es el caso de los acuíferos de Bangladesh, los cuales presentan contaminación por arsénico. En el estudio, conducido por Aggarwal et al entre 1999 y 2000, se tomaron muestras de pozos a diferentes profundidades, en la región del Delta de río Ganges (Figura 12).

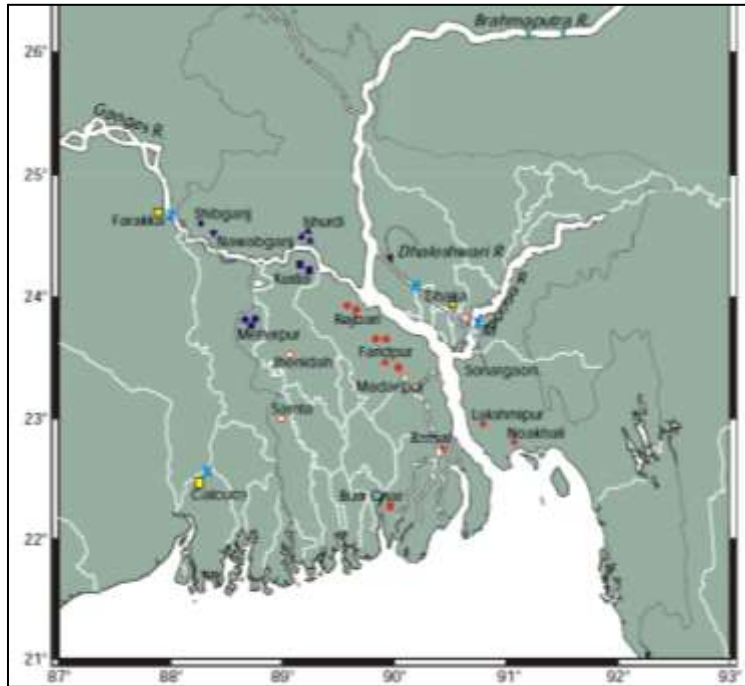


Figura 12. Área de estudio y ubicación de muestras, Bangladesh. Tomado de Aggarwal et al, 2000.

Los parámetros determinados fueron arsénico, oxígeno-18, deuterio, tritio, carbono 14, entre otros. El estudio determinó que las mayores concentraciones de arsénico en agua subterránea, con excepción de 2 muestras, se encuentran en las muestras de 0 a 70 m de profundidad (Figura 13), lo cual concuerda con el modelo geológico de la zona, que indica que el arsénico se encuentra en los depósitos sedimentarios superficiales del holoceno (entre 0 y 50 m aproximadamente).

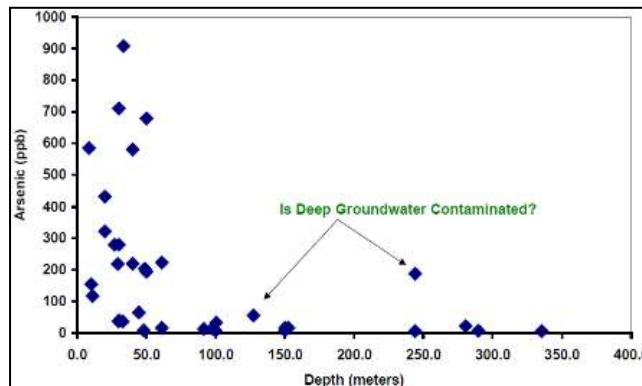


Figura 13. Concentración de arsénico en agua subterránea de Bangladesh. Tomado de Aggarwal et al, 2000.

Al ser plasmados los valores de Oxígeno-18 y Deuterio de las muestras, dentro en la gráfica de la Línea Meteorológica Global (Figura 14), se observa que el agua de los pozos someros (menores a 70 m) traza una línea isotópica con una pendiente ligeramente menor a la LMG, que junto con el rango de concentración de oxígeno-18 (entre 3.5 y 5.5 ‰) y la alta salinidad, indican que el acuífero somero es recargado con agua de precipitaciones recientes que sufrieron evaporación previo a su infiltración (agua de ríos). Por su parte las concentraciones isotópicas del agua subterránea profunda, cuya línea isotópica es similar a la LMG, sugieren que la infiltración de agua de lluvia y agua de mar (mezcla) son la principal

fuelle de recarga, y por ello se presentan valores altos de salinidad e isotopos estables (Figura 15). Las gráficas de concentraciones de Tritio (Figura 15) muestran que los pozos someros (menores a 70 m de profundidad), con las mayores concentraciones, son de recarga reciente, y su firma isotópica es muy similar a la del río. Por su parte, los pozos profundos (mayores a 100 m) tienen concentraciones muy bajas de Tritio, indicando que se han recargado en diferentes regímenes climáticos hace miles de años, con excepción de algunos pozos profundos, donde el tubo ranurado del ademe abarca varias unidades hidrogeológicas, y el bombeo puede estar induciendo la intrusión de agua somera (reciente) a los acuíferos profundos (antiguos).

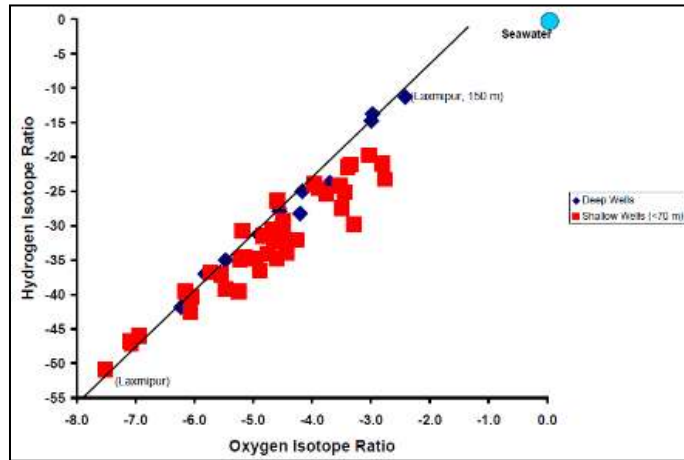


Figura 14. Composición isotópica (Oxígeno-18 y Dueterio) del agua subterránea somera y profunda del acuífero de Bangladesh. Tomado de Aggarwal et al, 2000.

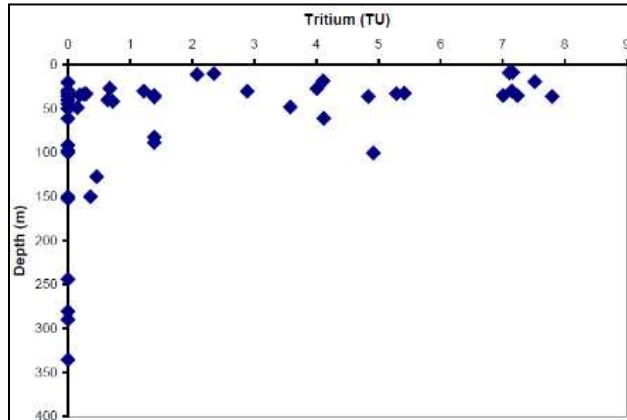


Figura 15. Contenido de Tritio en el agua subterránea de Bangladesh. Tomado de Aggarwal et al, 2000.

Basadas en sus firmas isotópicas (Figura 16), las aguas subterráneas del Bangladesh se clasificaron en 4 tipos: a) Tipo 1 y Tipo 2 son aguas someras, menores a 100 m de profundidad, con altas concentraciones de oxígeno, de recarga continua y reciente proveniente de lluvias ríos, diferencia entre ambos tipos, radica que el agua Tipo 2 tiene valores altos de salinidad ocasionados por el lixiviado de los suelos y no por mezcla con agua de mar; b) Tipo 3 caracterizada por no presentar concentraciones altas de arsénico, y un tiempo de residencia de algunos miles de años; c) Tipo 4 corresponde a agua que ha sido recargada hace unos 20,000 años aproximadamente, con valores de arsénico muy bajos. Con base en estas determinaciones químicas, isotópicas e hidrogeológicas,

se actualizo el modelo del acuífero, redefiniendo las 3 unidades con características isotópicas particulares, tal y como se muestra en la Figura 17.

Este estudio demostró que el agua subterránea somera (menor a 100 m) es de recarga natural continua y reciente, la cual presenta contaminación de arsénico por la movilización debido a la desorción de los sedimentos. Así mismo se comprueba que el aumento de la explotación tiene nulo impacto en la movilización del arsénico, sin embargo, la construcción de pozos profundos con ademes totalmente ranurados (desde la zona somera a zona profunda), están induciendo la movilización del arsénico de la Unidad 1 a la Unidad 2 (contaminación cruzada). Finalmente, sugiere que la unidad 3 es una fuente segura para explotación, siempre y cuando se tomen todas las medidas necesarias que permitan evitar la creación conos de abatimiento, y con ellos limitar la movilización del arsénico a los acuíferos profundos.

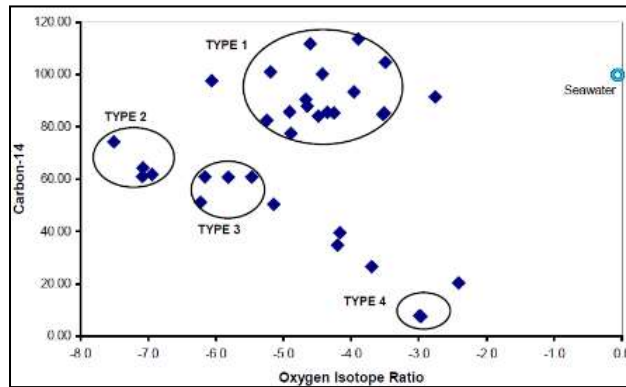


Figura 16. Clasificación isotópica del agua subterránea del Bangladesh. Tomado de Aggarwal et al, 2000.

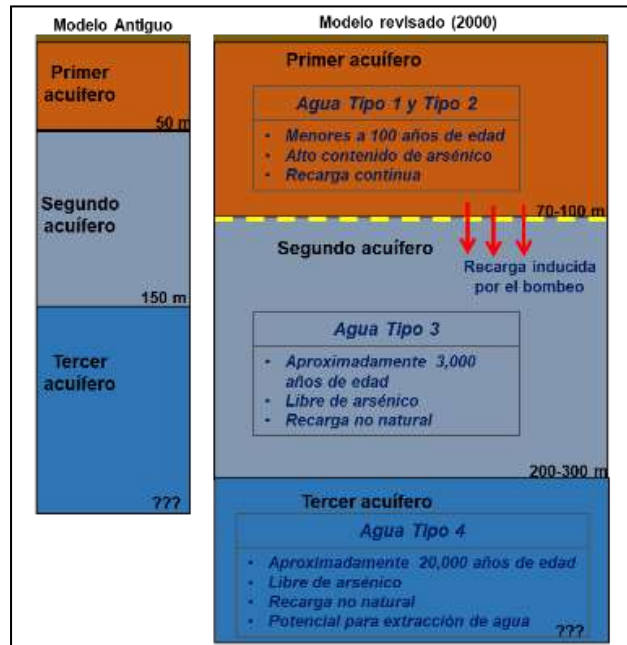


Figura 17: Modelo hidrogeológico basado en los datos isotópicos. Modificado de Aggarwal et al, 2000.

CONCLUSIONES

Las investigaciones hechas en varias partes del mundo, como las presentadas en el presente documento, confirman que la hidrología isotópica es una herramienta útil para determinación de fuentes de contaminación en agua subterránea, identificación de zonas de recarga, así como los procesos que experimenta el agua a través del ciclo hidrológico hasta llegar a los acuíferos.

La caracterización isotópica dentro del ciclo hidrológico, desde la evaporación hasta el movimiento a través de acuíferos, ha cobrado relevancia y utilidad, y junto con los datos hidrológicos e hidrogeológicos, permiten definir modelos hidrogeológicos más completos, que brindan la información necesaria para la eficiente gestión de los recursos hídricos

Con la perspectiva hídrica actual, tendiente a la sobreexplotación y contaminación de los acuíferos, se han generado escenarios de escasez en varias partes de México, los cuales llaman a la toma de decisiones enfocadas a mejorar la gestión y protección de los acuíferos. La hidrología isotópica es, en conjunto con otras ramas de las ciencias de la tierra, una herramienta probada, que permite generar información confiable, para que las autoridades encargadas de la administración del recurso hídrico generen estrategias de regulación con vías al aprovechamiento sustentable del recurso.

BIBLIOGRAFÍA

1. WBCSD, UNEP. 1998. Industry, Fresh water and sustainable development. 66p.
2. F.W. Schwartz y M. Ibaraki, 2011. Groundwater: A Resource in Decline. *Elements*, 7:175-179. DOI: 10.2113/gselements.7.3.175.
3. WMO. 1997. Comprehensive Assessment of the Freshwater Resources of the World. Stockholm, Sweden: WMO and Stockholm Environment Institute. 54p.
4. C. Revenga, 2000. Will the be enough water? In: Mock G. Ed. "Pilot Analysis of Global Ecosystems: Freshwater Systems. EarthTrends World Resources Institute. p. 1-6.
5. H. Bigas, 2012. The Global Water Crisis: Addressing an Urgent Security Issue. Papers for the InterAction Council, 2011-2012. Hamilton, Canada: UNU-INWEH.
6. V. Srinivasan, E.F. Lambin E.F, S.M. Gorelick, B.H. Thompson y S. Rozelle, 2012. The nature and causes of the global water crisis: Syndromes from a meta-analysis of coupled human-water studies, *Water Resour. Res.*, 48: W10516. doi: 10.1029/2011WR011087.
7. L. Guppy y K. Anderson, 2017. Water Crisis Report. United Nations University Institute for Water, Environment and Health, Hamilton, Canada.
8. IAEA, 1983. Guidebook on nuclear techniques in hydrology. Edition: (IAEA-Tec.Rep.Ser.No. 91), Vienna, 1983
9. H.C. Urey, 1947. The thermodynamic properties of isotopic substances. *J. Chem. Soc.*, 1947:562-581. DOI:10.1039/JR9470000562.
10. W. Dansgaard, 1964. Stable Isotopes in Precipitation. *Tellus*. 16:436-468. DOI: 10.1111/j.2153-3490.1964.tb00181.x.
11. H. Craig y L. Gordon, 1965. Deuterium and oxygen-18 variation in the ocean and the marine atmosphere. En: E. Tongiorgi, (Eds), *Stable isotopes in oceanographic studies and paleotemperatures*. Spoleto. 9-130
12. L. Merlivat y J. Jouzel, 1979. Global climatic interception of the deuterium – oxygen-18 relationship for precipitation. *Journal of Geophysical Research*. 84, 5029-5033.
13. J.R. Gat, 1996. Oxygen and hydrogen isotopes in the hydrological cycle. *Earth Planet. Science*. 24, 225-262.
14. I.D. Clark y P. Fritz, 1997. *Environmental Isotopes in Hydrogeology*. Lewis Publishers, 328.
15. C. Kendall y D.H. Doctor, 2003. Stable isotopes applications in hydrologic studies. En: *Treatise on Geochemistry*. Ed. Elsevier. Vol. 5, 319-364.
16. K. Rozanski, L. Araguás-Araguás y R. Gonfiantini, 1993. Isotopic patterns in modern global precipitations. En: *Continental Isotope Indicators of Climate*, American Geophysical Union Monograph.
17. V. Silva, E. Gayó y D. Salazar-García, 2018. *Arqueometria. Estudios analíticos de materiales arqueológicos*. Primera parte, Capítulo 5 Isotopos estables. p.111
18. J. Hoefs, 1997. *Stable Isotopes Geochemistry*, 3rd ed. Springer-Verlag. 236p

19. H. Craig, 1961a. Standard for reporting concentrations for deuterium and oxygen-18 in natural water. *Science*, V. 33, 1833:1834.
20. G.J. Bowen y J. Revenaugh, 2003. Interpolating the isotopic composition of modern meteoric precipitation. *Water Resources Research*. 39(10)
21. C. Kendall, M.G. Sklash M.G. y T.D. Bullen, 1995. Isotope tracers of water and solute sources in catchments. In: Trudgill S. Ed. *Solute Modelling in Catchment Systems*. Chichester, UK, Wiley. p. 261-303.
22. M.V. Vélez y R.L. Rhenals, 2008. Determinación de la recarga con isótopos ambientales en los acuíferos de Santa Fé de Antioquia. *Boletín de Ciencias de la Tierra*. 24, 37-54.
23. L. Valenzuela, J. Ramírez-Hernández y R. Palomares, 2013. Composición Isotópica del Agua Subterránea y su Relación con la Salinidad en el Valle de San Luis Río Colorado en Sonora, México. *SciELO - Scientific Electronic Library Online. Información Tecnológica Vol. 24 (2)*, 57-66.
24. A. Tompson, Z. Demir, J. Moran, D. Mason, J. Wagoner, S. Kollet, K. Mansoor y P. McKereghan, 2008. *Groundwater Availability Within the Salton Sea Basin. Final Report*. Lawrence Livermore National Laboratory.
25. P.K. Aggarwal, 2000. *Isotope Hydrology of Groundwater in Bangladesh: Implications for Characterization and Mitigation of Arsenic in Groundwater*. OIEA.

ESTUDIO NUMÉRICO DE LA RESONANCIA DE LOS PLASMONES DE SUPERFICIE EN UNA ESTRUCTURA DE KRECHTSMANN HACIENDO USO DEL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

Eric Didier Galván Navarro, Sergio Sánchez López, José Eduardo Medina Magallón, Cristina Salto Alegre, Héctor Pérez Aguilar, Alberto Mendoza Suárez.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez" de la UMSNH, Morelia, Mich.

e.d.g.n.19@gmail.com, sergiosanz125@gmail.com, jmedinamagallon@gmail.com, salto.alegre@gmail.com, hiperezag@yahoo.com, amendozas777@yahoo.com.mx

RESUMEN

La plasmónica es un área de investigación de gran desarrollo dentro del campo de la nanofotónica que se ocupa principalmente en el estudio de los procesos de interacción de la luz y de los electrones de conducción en interfaces metal-dieléctrico o en nanoestructuras metálicas. Esta manipulación de la luz a escala nanométrica está basada en las propiedades de los plasmones de superficie (SPs) que son oscilaciones colectivas del gas de electrones en un metal. De esta manera, al acoplarse las ondas de luz con las oscilaciones electrónicas forman una nueva cuasipartícula llamada polaritón de plasmón superficial (SPP) que se propaga a través de la superficie de la estructura de tamaño nanométrico. En este trabajo se presenta un estudio numérico de una plataforma (configuración típica de Kretschmann) que se basa en el principio de la resonancia del SP (SPR) a una longitud de onda específica variando los ángulos de incidencia. La configuración consiste en un prisma de vidrio con un índice de refracción de 1.487 y una película delgada de plata. El método numérico utilizado es el Método de la Ecuación Integral. Los resultados de la reflectancia muestran un mínimo local característico que corresponde al ángulo de acoplamiento; es decir, el ángulo de excitación del SPP. Una interesante aplicación de esta técnica SPR es en el campo de la biomedicina; por ejemplo, en el sensado de la temperatura de capas líquidas y concentraciones de glucosa.

INTRODUCCIÓN

Debido a su carácter bidimensional y capacidad de almacenar luz en espacios reducidos, los plasmones superficiales son firmes candidatos a desempeñar una función clave en futuros dispositivos ópticos. Los metales además de reflejar luz, tienen una gran propiedad óptica menos conocida: bajo ciertas condiciones la luz puede viajar por las superficies metálicas sin alejarse de ellas. Ésta es una propiedad muy peculiar, ya que en condiciones normales la luz viaja por las tres dimensiones del espacio y no se le confina con facilidad. En realidad, esta "luz superficial" es una onda más complicada que la luz normal, ya que no consiste sólo en un campo electromagnético, sino que involucra también los electrones libres presentes en los metales. Rufus Ritchie descubrió estas ondas, o "plasmones superficiales" (SPs), en los años cincuenta del siglo pasado [1].

Los SPs son soluciones de las ecuaciones de Maxwell en las que se tienen en cuenta los efectos del retardo de la velocidad de la luz. Una forma equivalente, se obtienen a partir de soluciones de la ecuación de Laplace para un potencial escalar que se propagan de una manera ondulada a lo largo de una interfaz dieléctrica-metal planar, y cuyas amplitudes disminuyen exponencialmente con el aumento de la distancia desde la interfaz a cada medio [2]. Los plasmones de superficie son básicamente cuantos de oscilaciones de plasma en una superficie metálica. Cuando un plasmón de superficie se acopla con un fotón, se forma una cuasipartícula llamada polaritón de plasmón superficial (SPP) [3].

El SPP se basa en procesos de interacción entre la radiación electromagnética y los electrones de conducción en interfaces metálicas o en pequeñas nanoestructuras metálicas, permitiendo aplicaciones de la óptica en dimensiones sub-longitud de onda.

En 1968, dos configuraciones básicas de resonancia de plasmones superficiales (SPR) son presentados por Otto [4] y por Kretschmann [5]. En 1983, por primera vez, Liedberg demostró el concepto basado en la configuración de Kretschmann para la aplicación de biosensores [6].

Una fracción de la energía de luz incidente en un ángulo definido puede interactuar con los electrones de la película metálica (plasmón), dicha interacción reduce la intensidad de luz reflejada. El ángulo de incidencia apropiado en el cual esto ocurre depende de un número de factores. Uno de los factores principales es el índice de refracción cerca de la parte posterior de la película metálica, en la cual las moléculas están inmovilizadas en una fase móvil que funciona, a todo lo largo, conduciendo a un cambio en el ángulo SPR, que se puede supervisar en tiempo real detectando cambios en la intensidad de la luz reflejada, dando lugar a un sensorgrama. Los ritmos de cambio de la señal de SPR se pueden analizar para arrojar constantes de ritmo aparente para las fases de asociación y disociación de la reacción. El tamaño del cambio en la señal de SPR es directamente proporcional a la masa que es inmovilizada. Se sabe que ocurre en un ángulo de incidencia característico. Este ángulo depende de la permitividad dieléctrica de las capas de los medios adyacentes, puesto que la permitividad depende de la frecuencia de la luz láser excitante [7].

El estudio de la propagación de la luz se basa en métodos numéricos, algunos de los cuales se aplicaron primero en física del estado sólido para el estudio de estructuras de bandas electrónicas. El más citado puede ser el método de ondas planas que permite calcular las estructuras de bandas fotónicas que implican materiales sin dispersión y absorción. Unas de las desventajas de este método es cuando los bordes afilados están presentes en la geometría de la configuración, la falta de librerías especializadas en diferentes sistemas operativos que no permiten la finura deseada por estar acotadas. Además de un alto contraste entre las propiedades de los materiales que componen, también el método produce cierta inestabilidad en las soluciones. Bajo este contexto, el Método de la Ecuación Integral que estamos considerando en este trabajo [7], presenta algunas ventajas en comparación con el método de ondas planas y otros métodos, ya que tiene la capacidad de estudiar diferentes aspectos de estos sistemas que tienen geometrías complicadas y propiedades físicas muy novedosas, como las que poseen los SPs. Como veremos, el formalismo propuesto ha sido considerado como una alternativa a los métodos existentes en el sentido de que da buenos resultados a diferencia de otros donde suelen fallar.

Este trabajo está desarrollado de la siguiente manera. En la teoría se presenta el sistema a estudiar, un modelo de vital importancia que requiere nuestro sistema de estudio y un método numérico riguroso para resolver el problema planteado. En los resultados se muestran los resultados numéricos preliminares de la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia, como función del ángulo de incidencia y de la frecuencia reducida, en una configuración típica de Kretschmann en el aire compuesta de un prisma y una película de plata. Y en la penúltima sección las conclusiones de este trabajo.

TEORÍA

Modelo de Drude

En un amplio rango de frecuencias, las propiedades ópticas de los metales permiten una explicación por un modelo de plasma, donde un gas de electrones libres de densidad numérica n se mueve contra un fondo fijo de núcleos de iones positivos y cuyo modelo teórico es el más simple para estudiar a los metales. Este modelo es conocido como el modelo de Drude. En 1900 Paul Drude propuso un modelo para la conducción eléctrica, como el resultado de aplicar la teoría cinética de electrones en un sólido. En los metales los electrones no están unidos a los núcleos. Entonces este modelo considera a los electrones de conducción de un metal como un gas homogéneo de electrones inmerso en un potencial positivo uniforme impuesto por los iones inmóviles de la red cristalina. Cabe señalar que este modelo no se tiene en cuenta los detalles del potencial de la red y las interacciones electrón-electrón. En su lugar, simplemente se supone que algunos aspectos de la estructura de la banda se incorporan en la masa óptica efectiva de cada electrón. Los electrones oscilan en respuesta al campo electromagnético aplicado y su movimiento es amortiguado por colisiones que ocurren con una frecuencia de colisión característica $\gamma = 1/\tau$. τ se conoce como tiempo de relajación del gas de electrones libre, que es típicamente del orden de 10^{-14} s. A temperatura ambiente, el valor correspondiente de $\gamma = 100$ THz.

Lo interesante es que este modelo tan simple permite predecir de manera bastante aceptable la conductividad eléctrica y térmica de los metales, y además predice la existencia de plasmones [8,9].

Iniciemos con la ecuación del movimiento de los electrones en un metal

$$-eE - m\gamma \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad (1)$$

siendo el primer término a la izquierda la fuerza impulsora y el segundo la fuerza restablecedora opuesta. Ordenando y reescribiendo la Ec. (1) en términos de la polarización, se tiene

$$-\frac{m}{Ne} \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{m\gamma}{Ne} \frac{dP}{dt} = -eE. \quad (2)$$

Si se asume una dependencia temporal armónica $\mathbf{E}(t) = \mathbf{Re}(E(\omega)e^{-i\omega t})$, una solución particular de esta ecuación que describe la oscilación del electrón es $x(t) = \mathbf{Re}(x(\omega)e^{-i\omega t})$. La amplitud compleja $x(\omega)$ incorpora cualquier cambio de fase entre el campo externo, por lo que nos lleva a

$$x(t) = \frac{e}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} E(t). \quad (3)$$

Los electrones desplazados contribuyen a la polarización macroscópica dada explícitamente por

$$\vec{P} = -\frac{Ne^2}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \vec{E}. \quad (4)$$

Sustituyendo esta expresión para \vec{P} en la ecuación de desplazamiento eléctrico, se obtiene

$$\vec{D} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \right) \vec{E} + \vec{P}, \quad (5)$$

donde $\omega_p^2 = Ne^2/m\epsilon_0$ es la frecuencia de plasma del gas de electrones libres. Por tanto, se llega al resultado deseado, la función dieléctrica del gas de electrones libres

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (6)$$

donde las componentes real e imaginaria de esta función dieléctrica compleja $\epsilon(\omega) = \epsilon_r(\omega) + i\epsilon_i(\omega)$ están dadas por

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad (7.1)$$

$$\epsilon_i(\omega) = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \tau^2 \omega^2)}. \quad (7.2)$$

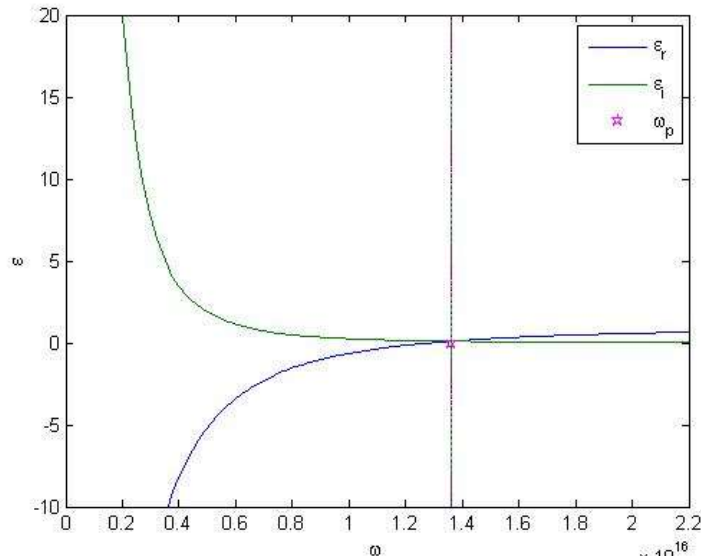


Fig. 10. Curvas obtenidas experimentalmente para la ionósfera [8].

En la Fig. 1 se muestran las curvas de la permitividad real e imaginaria del modelo de Drude, en la cual se observan tres zonas de la frecuencia ω :

- $\omega < \omega_p$. La parte real de la permitividad eléctrica ϵ es negativa, indicando que la vibración de los electrones está en antifase con la vibración del campo eléctrico. Para este caso la reflectividad es grande.
- $\omega > \omega_p$. La permitividad eléctrica ϵ es positiva, la reflectividad es pequeña y el metal es transparente como un dieléctrico.
- $\omega \approx \omega_p$. Se excitan ondas longitudinales en la superficie del metal llamadas plasmones superficiales.

Plasmones superficiales

Un plasmón superficial es una onda que se propaga a lo largo de una interfaz plana entre un metal y un medio dieléctrico [10]. La naturaleza de los plasmones superficiales radica en la oscilación colectiva de los electrones, caracterizada por la frecuencia de plasma, descrita por el Modelo de Drude. Para determinar las propiedades de los plasmones se aplican las ecuaciones de Maxwell a una interfaz plana metal-dieléctrico (ver Fig. 2).



Fig. 11. Interfaz plana metal-dieléctrico.

De las ecuaciones de Maxwell, donde se supone no hay densidad de carga externa ni densidad de corriente,

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}, \quad (8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon_p\vec{E}, \quad (9)$$

y tomando en cuenta la permitividad compleja como

$$\epsilon_p(\vec{r}) = \epsilon_0\epsilon_r(\vec{r}) = \epsilon_0[\epsilon'_r(\vec{r}) + \epsilon''_r(\vec{r})], \quad (10)$$

se obtiene la ecuación de onda:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{\epsilon_p}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Si se considera al campo eléctrico de la forma $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ en la Ec. (11) se llega a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\vec{E} + k_0\epsilon_p\vec{E} = 0, \quad (12)$$

donde $k_0 = \omega/c$ es el vector de onda en el vacío. Desarrollando la Ec. (8) en términos de las componentes de los campos eléctrico y magnético,

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i\omega\mu_0(\hat{e}_x H_x + \hat{e}_y H_y + \hat{e}_z H_z),$$

se obtiene

$$\hat{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{e}_y \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = i\omega\mu_0(\hat{e}_x H_x + \hat{e}_y H_y + \hat{e}_z H_z).$$

Ahora desarrollando la Ec. (9) se tiene

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i\omega\epsilon_p(\hat{e}_x E_x + \hat{e}_y E_y + \hat{e}_z E_z),$$

y se llega a

$$\hat{e}_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \hat{e}_y \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = -i\omega\epsilon_p(\hat{e}_x E_x + \hat{e}_y E_y + \hat{e}_z E_z).$$

Comparando cada una de las componentes de los campos obtenemos las siguientes expresiones:

$$E_x = \frac{1}{-i\omega\epsilon_p} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right),$$

$$E_y = \frac{1}{-i\omega\epsilon_p} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right),$$

$$E_z = \frac{1}{-i\omega\epsilon_p} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right),$$

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \quad (13)$$

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \quad (14)$$

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \quad (15)$$

Estas ecuaciones se deben resolver con las condiciones de frontera del problema definidas para cada caso. Para analizar la propagación del campo en una dimensión, se tiene que la permitividad eléctrica ϵ depende sólo de una coordenada espacial. Para ello, consideremos que la onda viaja en la dirección x sin variación perpendicular en el plano $y = 0$, tal que para el plano $z = 0$ el campo eléctrico se puede describir de la forma $E(x, z) = E(z)e^{i\beta x} = 0$, como se muestra en la Fig. 2. Definiendo a $\beta = k_x$ la constante de propagación de la onda viajera, que corresponde a la componente del vector de onda en la dirección de propagación. Para ondas planas se cumple que la $\partial/\partial t = -i\omega$ y además por la propagación sólo en la dirección x , $\partial/\partial x = i\beta$ y $\partial/\partial y = 0$, se puede llegar a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_x, \quad (16.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - i\beta E_z = i\omega\mu_0 H_y, \quad (16.2)$$

$$i\beta E_y = i\omega\mu_0 H_z, \quad (16.3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\epsilon_p E_x, \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - i\beta H_z = -i\omega\epsilon_p E_y, \quad (16.5)$$

$$i\beta H_y = -i\omega\epsilon_p E_z. \quad (16.6)$$

En este sistema de ecuaciones para las componentes E_x, E_z y H_y diferentes de cero; es decir, para modos transversales magnéticos (TM), se reduce a

$$E_x = -i \frac{1}{\omega\epsilon_p} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (17.1)$$

$$E_z = -\frac{\beta}{\omega\epsilon_p} H_y. \quad (17.2)$$

Para modos transversales eléctricos (TE) H_x, H_z y E_y distintos de cero, se obtiene

$$H_x = i \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (18.1)$$

$$E_z = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y. \quad (18.2)$$

Suponiendo que para la interfaz plana metal-dieléctrico en $z > 0$ está presente el dieléctrico de permitividad eléctrica real ϵ_2 , y para $z < 0$ se tiene un material metálico con permitividad eléctrica ϵ_1 (Fig. 2), se puede definir a $H_y(z) = A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}$. Así para $z > 0$, las Ecs. (17.1) y (17.2) se reescriben como

$$E_x = iA_2 \frac{1}{\omega\epsilon_0\epsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}, \quad (20)$$

$$E_z = -A_2 \frac{\beta}{\omega\epsilon_0\epsilon_2} e^{i\beta x} e^{-k_2 z}. \quad (21)$$

Para $z < 0$, $H_y(z) = A_1 e^{i\beta x} e^{-k_1 z}$, se obtiene también

$$E_x = iA_1 \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon_1} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_1 z}, \quad (22)$$

$$E_z = -A_1 \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 \epsilon_1} e^{i\beta x} e^{-k_1 z}, \quad (23)$$

donde $k_1 = k_{z1}$ y $k_2 = k_{z2}$ son las componentes del vector de onda perpendicular a la interfaz.

Para que se cumpla la condición de continuidad de H_y y $\epsilon_i E_z$ ($i = 1, 2$) en la interfaz, debe suceder que $A_1 = A_2$. Utilizando $\nabla \times \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t$ junto con la Ec. (20) se llega a las expresiones

$$k_1 H_{y1} = \epsilon_1 E_{x1}, \quad (24)$$

$$k_2 H_{y2} = -\epsilon_2 E_{x2}. \quad (25)$$

Ahora despejando E_{xi} ($i = 1, 2$) y por las condiciones de continuidad: $E_{x1} = E_{x2}$ y $H_{y1} = H_{y2}$ se obtiene la relación

$$\frac{k_{z1}}{\epsilon_1} + \frac{k_{z2}}{\epsilon_2} = 0. \quad (26)$$

La expresión de H_y tiene que además satisfacer la ecuación de onda para TM, obteniendo lo siguiente

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + (k_0^2 \epsilon + \beta^2) H_y = 0, \quad (27)$$

produciendo

$$k_{z1} = \beta^2 + k_0^2 \epsilon_1 \quad (28.1)$$

$$k_{z2} = \beta^2 + k_0^2 \epsilon_2 \quad (28.2)$$

Combinando las Ecs. (26) y (28) se llega a la relación de dispersión de los plasmones que se propagan en una interfaz entre los dos medios. La relación de dispersión conecta la longitud de onda con el vector de onda con su frecuencia y se expresa de la siguiente manera:

$$\beta = k_0 \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)^{1/2}, \quad (29)$$

o bien,

$$k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad (30)$$

Utilizando la ecuación anterior, se pueden obtener las curvas de dispersión. En la Fig. 3 se observa que para valores bajos de k_z , la relación de dispersión es lineal. Vemos que a medida que k_z aumenta, la relación de dispersión se va curvando hasta alcanzar un valor límite llamado "frecuencia de plasma superficial".

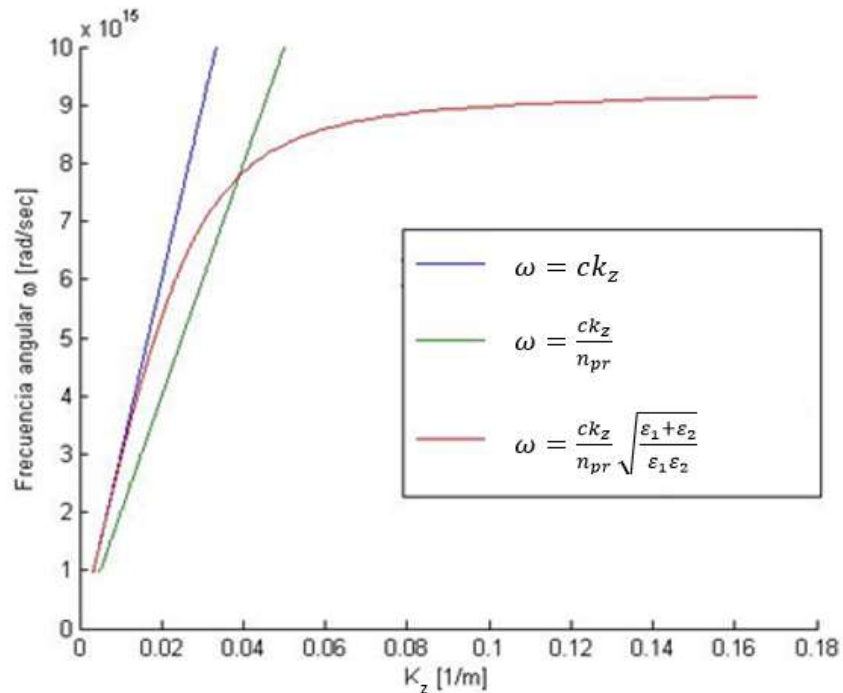


Fig. 12. Curvas de la relación de dispersión para un SP en un medio dieléctrico [8].

Se observa que la curva de dispersión del plasmón superficial cruza con la línea recta (verde) que pasa por un medio dieléctrico con un índice de refracción n_{pr} (prisma). Sin embargo, la curva de dispersión del plasmón superficial no cruza con la línea recta (azul) del aire. Por lo tanto, los SPPs no pueden ser excitados directamente por la luz que se propaga del aire a un medio metálico. Un análisis similar para modos TE se llega a que $A_1 = A_2 = 0$, por tanto sólo pueden existir los SPPs para modos TM (E_x, E_z y $H_y \neq 0$, ver Fig. 4).

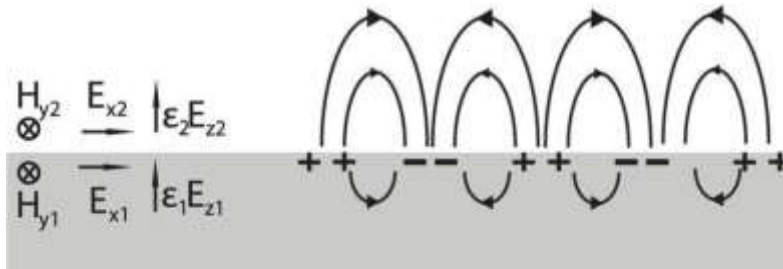


Fig. 13. Plasmón superficial formado en una interfaz metal-dieléctrico.

Método de la Ecuación Integral

Como sabemos, si asumimos una dependencia armónica del tiempo $e^{-i\omega t}$ para los campos electromagnéticos, la ecuación de onda es transformada en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi_j(\vec{r}) + k_j^2 \Psi_j(\vec{r}) = 0. \tag{31}$$

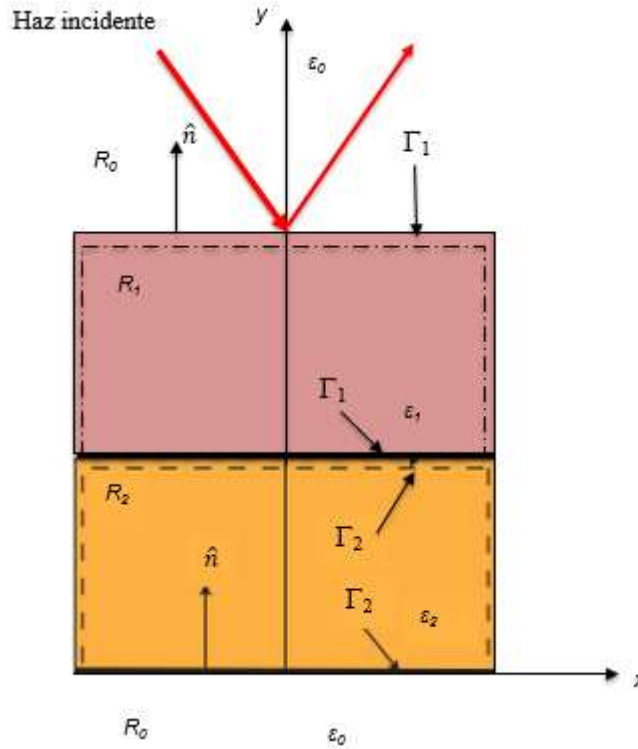


Fig. 14. Interfaces formadas por tres medios con constantes dieléctricas ϵ_0 , ϵ_1 y ϵ_2 .

En la Ec. (31), $\Psi_j(\vec{r})$ representa el campo eléctrico E_z en el caso de la polarización TE, y el campo magnético H_z en el caso de la polarización TM, ambos en el j -ésimo medio Fig. 5. Se considera que el campo electromagnético $\Psi_j(\vec{r})$ satisface las condiciones de frontera ($j=0, 1, 2$) como se muestra en la Fig. 5 para cada polarización. La magnitud del vector de onda está dado por

$$k_j = n_j(\omega) \frac{\omega}{c}, \tag{32}$$

donde el índice de refracción $n_j(\omega) = \sqrt{\mu_j(\omega)\epsilon_j(\omega)}$ que involucra las propiedades de los materiales y está dado en términos de la permeabilidad magnética $\mu_j(\omega)$ y la permitividad eléctrica $\epsilon_j(\omega)$; ambas funciones dependientes de la frecuencia ω . La velocidad de la luz en el vacío está indicada por c .

Para resolver la Ec. (31) vamos a introducir una función de Green $G_j(\vec{r}, \vec{r}')$, la cual es una solución de la ecuación:

$$\nabla^2 G_j(\vec{r}, \vec{r}') + k_j^2 G_j(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{33}$$

donde $G_j(\vec{r}, \vec{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j|\vec{r} - \vec{r}'|)$ siendo $H_0^{(1)}(\zeta)$ la función de Hankel de primera clase y de orden cero. Primeramente, aplicando la segunda identidad de Green a las funciones $\Psi_j(\vec{r})$ y $G_j(\vec{r}, \vec{r}')$ para la región incidente del vacío ($j = 0$) con una onda incidente (Fig. 5), se obtiene el campo total [7,11]:

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_{inc}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[\frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'_1} \Psi_0(\vec{r}') - G_0(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Psi_0(\vec{r}')}{\partial n'_1} \right] ds', \tag{34}$$

donde Γ_1 representa el contorno cerrado que delimita la superficie S_1 . Las funciones fuente $\Psi_0(\vec{r}')$ y $\partial\Psi_0(\vec{r}')/\partial n'_1$, que representan los valores del campo electromagnético y su derivada normal evaluadas sobre el contorno Γ_1 pueden ser obtenidas a partir de la Ec. (34). Para esto, se hace una aproximación del punto de observación sobre los contornos que delimitan la región correspondiente.

En la Ec. (34) se tienen dos integrales de contorno las cuales, al dividir en n pequeños segmentos de longitud de arco Δs , las integrales pueden ser expresadas como:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} G_0(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Psi_0(\vec{r}')}{\partial n'_1} ds' \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^0 \int_{s_n - \Delta s / 2}^{s_n + \Delta s / 2} G_0(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (35)$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \Psi_0(\vec{r}') \frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'_1} ds' \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^0 \int_{s_n - \Delta s / 2}^{s_n + \Delta s / 2} \frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'_1} ds', \quad (36)$$

donde se han definido las funciones

$$\Phi_n^0 = \left. \frac{\partial \Psi_0(\vec{r}')}{\partial n'_1} \right|_{\vec{r}' = \vec{r}'_n} \quad y \quad \Psi_n^0 = \Psi_0(\vec{r}') \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}'_n}. \quad (37)$$

En las Ecs. (35) y (36) se ha considerado que Δs es lo suficientemente pequeño para que podamos tener un muestreo fino y así poder considerar que el campo $\Psi_0(\vec{r}')$ y su derivada normal $\partial\Psi_0(\vec{r}')/\partial n'_1$ sean aproximadamente constantes.

Ahora, evaluando las integrales de las Ecs. (35) y (36) en el punto de observación $\vec{r} = \vec{r}_m$, se obtienen los elementos de matriz definidos por

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n - \Delta s / 2}^{s_n + \Delta s / 2} G_0(\vec{r}_m, \vec{r}') ds', \quad (38)$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n - \Delta s / 2}^{s_n + \Delta s / 2} \frac{\partial G_0(\vec{r}_m, \vec{r}')}{\partial n'_1} ds', \quad (39)$$

donde el subíndice m indica el punto de observación y el subíndice n el punto de integración. Estos elementos de matriz, ya calculados, están dados por las expresiones [7]:

$$L_{mn}^{(0)} = \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}(k_0 R_{mn})(1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}\left(k_0 \frac{\Delta s}{2e}\right) \right] \delta_{mn}, \quad (40)$$

$$N_{mn}^{(0)} = \frac{i\Delta s}{4} k_0 H_1^{(1)}(k_0 R_{mn}) \hat{n}_n \cdot \frac{\vec{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{n}_n \cdot \hat{t}'_n \right] \delta_{mn}, \quad (41)$$

siendo

$$\hat{n}_n \cdot \vec{R}_{mn} = -y'(s)(x_m - x_n) + x'(s)(y_m - y_n), \quad (42)$$

$$\hat{n}_n \cdot \hat{t}'_n = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s),$$

$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}. \quad (43)$$

Ahora al aplicar la Ec. (34) para cada región sobre los contornos que componen el sistema propuesto, se puede obtener un conjunto de ecuaciones integrales acopladas para $\Psi_j(\vec{r}')$ y $\partial\Psi_j(\vec{r}')/\partial n'_1$, que bajo las condiciones de frontera a lo largo de los diferentes contornos Γ_j dadas por

$$\Psi_n^{(j)} = \Psi_n^{(j+1)}, \quad \Phi_n^{(j+1)} = \frac{f_{j+1}}{f_j} \Phi_n^{(j)}, \quad (44)$$

donde la cantidad f_j está dada por

$$f_j = \begin{cases} \mu_j(\omega) & \text{para polarización TE} \\ \varepsilon_j(\omega) & \text{para polarización TM} \end{cases} \quad (45)$$

Con las expresiones anteriores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraico para el sistema propuesto:

$$\sum_{n=1}^{N_1} (N_{mn(1)}^{(0)} - \delta_{mn}) \Psi_n^{(0)} - \frac{f_0}{f_1} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(0)} \Phi_n^{(0)} = \Psi_m^{inc}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1)}^{(1)} \Psi_n^{(0)} + \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)}^{(1)} \Phi_n^{(0)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(2)}^{(1)} \Psi_n^{(1)} \\ + \frac{f_1}{f_2} \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(1)} \Phi_n^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_2} (N_{mn(2)}^{(2)} - \delta_{mn}) \Psi_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)}^{(2)} \Phi_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{N_3} (N_{mn(3)}^{(2)} - \delta_{mn}) \Psi_n^{(2)} \\ - \frac{f_2}{f_3} \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)}^{(2)} \Phi_n^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$- \sum_{n=1}^{N_3} N_{mn(3)}^{(3)} \Psi_n^{(2)} + \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)}^{(3)} \Phi_n^{(2)} = 0. \quad (49)$$

Las Ecs. (46)-(49) determinan un sistema de ecuaciones lineal e inhomogéneo que se puede resolver numéricamente para determinar los campos y su derivada normal a lo largo de los diferentes contornos. En consecuencia, el campo electromagnético en cualquier punto del espacio (dado por \vec{r}) se puede determinar al utilizar los campos y su derivada normal obtenidos por las Ecs. (46)-(49) [11].

RESULTADOS

El presente trabajo tiene como finalidad hacer un estudio numérico de la respuesta electromagnética del plasmón superficial en una configuración de Krestschmann.

El sistema correspondiente a la Fig. 6, donde se ha supuesto que el medio incidente tiene las propiedades ópticas dadas por la permeabilidad magnética μ_0 y permitividad eléctrica ε_0 , el prisma triangular tiene las propiedades dadas por μ_1, ε_1 y una capa metálica delgada tiene las propiedades dadas por μ_2, ε_2 . Para nuestros cálculos numéricos usamos el modelo de Drude para obtener el valor de la permitividad eléctrica de la película metálica de plata.

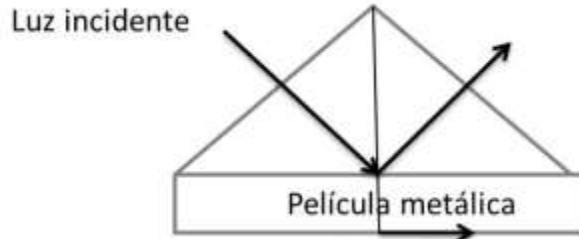


Fig. 15. Arreglo óptico de Kretschmann [5].

Los valores que se usaron en el sistema antes mencionado son: $\epsilon_0(\omega) = 1$ y $n_0(\omega) = 1$, para el medio incidente, para el prisma triangular se tomó el valor de $\epsilon_1(\omega) = 2.2117$ y $n_1(\omega) = 1.4870$, y para la película delgada se encontró el valor de ϵ_2 con el modelo de Drude dados los valores para $\omega_p = 45.6578$ y $\gamma = 0.0912$ y con este se encontró el n_2 . Es importante mencionar los valores de las ϵ_j ($j = 0, 1, 2$) debido a que parte importante de los resultados se obtienen usando las condiciones de frontera que dependen de estos valores para la polarización TM. Usamos esta polarización debido a que sólo en ésta hay una excitación del SP. La película de plata tiene un espesor de $0.2 \mu\text{m}$, la interfaz prisma-película de plata tiene un longitud de $10\pi \mu\text{m}$ y la altura del prisma triangular es de $3.0788 \mu\text{m}$.

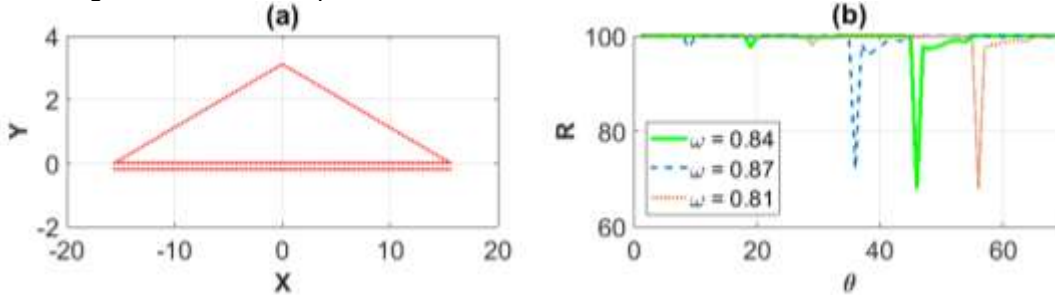


Fig. 16. (a) Configuración típica de Kretschmann. (b) Reflectancia (R) variando el ángulo de incidencia de $0 \leq \theta \leq 70$ para tres frecuencias reducidas particulares $\omega = 0.81, 0.84$ y 0.87 , bajo polarización TM.

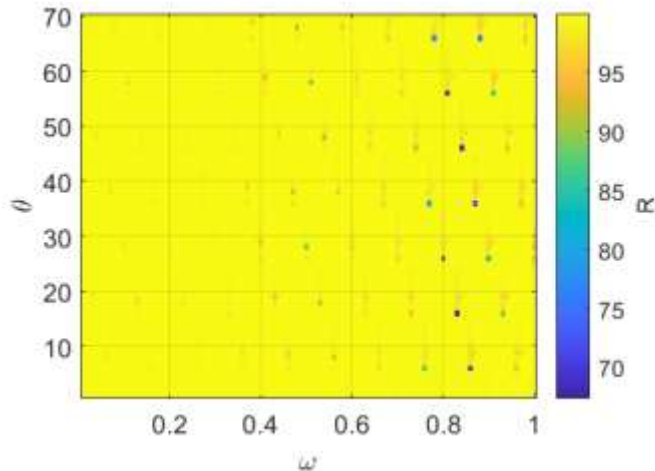


Fig. 17. Reflectancia de una configuración de Kretschmann variando el ángulo de incidencia de $0 \leq \theta \leq 70$ y la frecuencia reducida de $0.01 \leq \omega \leq 1$.

En la Fig. 7, podemos ver que se encontraron los ángulos críticos, en los cuales hay excitación del SP en las frecuencias reducidas particulares para la polarización TM. De manera más general podemos ver la Fig. 8, en la cual se calculó la reflectancia variando el ángulo de incidencia de $0 \leq \theta \leq 70$ y la frecuencia reducida $0.01 \leq \omega \leq 1$ siendo el intervalo aproximado del infrarrojo, donde se observa que para un intervalo de las frecuencias reducidas particular de $0.76 \leq \omega \leq 0.93$, se encuentran confinados los valores mínimos de la reflectancia. Es decir, donde habrá una excitación de los SPPs para el ángulo crítico particular de cada uno de los casos considerados.

CONCLUSIONES

Se aplicó un método numérico, conocido como el método de la ecuación integral, para calcular la respuesta electromagnética de un SPP sobre una configuración típica de Kretschmann. De los resultados obtenidos se logró encontrar los ángulos y frecuencias reducidas en el intervalo particular del infrarrojo, en los cuales podemos llegar a tener una excitación del SPP. Debido a la confiabilidad del método de la ecuación integral que en otros escenarios ha dado buenos resultados y que en este caso también nos generó resultados esperados en la teoría, se podría proseguir con el estudio de los SPPs de manera experimental tomando como punto de partida los elementos que en este desarrollo numérico hemos utilizado. Por ello sabemos que nos darán resultados aceptables y así poder llevarlo a la aplicación de los biosensores como es el sentido de la temperatura.

BIBLIOGRAFÍA

1. Francisco J García Vidal and Luis Martín Moreno. Plasmones superficiales. Investigación y ciencia, page 67, 2008.
2. Anatoly V Zayats, Igor I Smolyaninov, and Alexei A Maradudin. Nano-optics of surface plasmon polaritons. Physics reports, 408(3):131-314, 2005.
3. Mahua Bera and Mina Ray. Precise detection and signature of biological/chemical samples based on surface plasmon resonance (spr). Journal of Optics, 38(4):232-248, 2009.
4. Andreas Otto. Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection. Zeitschrift für Physik, 216(4):398-410, 1968.
5. Erwin Kretschmann and Heinz Raether. Notizen: radiative decay of non radiative surface plasmons excited by light. Zeitschrift für Naturforschung A, 23(12):2135-2136, 1968.
6. AF Collings and Frank Caruso. Biosensors: recent advances. Reports on Progress in Physics, 60(11):1397, 1997.
7. Nardo Ramírez Frómata. Biosensores: Un acercamiento a la resonancia del plasmon superficial. Revista CENIC. Ciencias Biológicas, 36, 2005.
8. IF Almog, MS Bradley, and V Bulovic. The lorentz oscillator and its applications. Massachusetts Institute of Technology, 2011.
9. Fernando D Stefani. Técnicas basadas en la resonancia de plasmones superficiales. Detección y estudio de reacciones de hibridización de adn en superficies. Trabajo de seminario. Universidad Nacional de General San Martín. Comisión Nacional De Energía Atómica. Instituto De Tecnología. Ingeniería en Materiales. Argentina, 2001.
10. Stefan Alexander Maier. Plasmonics: fundamentals and applications. Springer Science & Business Media, 2007.
11. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, and J. A. Gaspar-Armenta, "Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two- dimensional photonic crystals," J. Opt. Soc. Am. B, Vol.23, 2249-2256 (2006).

ESTUDIO NUMÉRICO DE LOS PLASMONES DE SUPERFICIE CON DEFECTOS EN UNA GUÍA DE ONDAS DE CRISTAL FOTÓNICO QUE CONTIENE INCLUSIONES DE METAMATERIAL

Sergio Sánchez López¹, José E. Medina Magallón², Héctor Pérez Aguilar³, Alberto Mendoza Suárez⁴

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
sergiosanz125@gmail.com¹, jmedinamagallon@gmail.com², hiperezag@gmail.com³,
amendozas777@yahoo.com.mx⁴

RESUMEN

La propagación de ondas electromagnéticas a través de estructuras fotónicas nos permite estudiar a un fenómeno físico conocido como plasmón de superficie (SP), que actualmente es de gran interés para el desarrollo de nuevas tecnologías en las telecomunicaciones, así como en el desarrollo de la tecnología nanofotónica para el diseño de sensores plasmónicos de multicapas o en procesos industriales (celdas solares) como biológicos a través de la detección de moléculas aisladas. Con base a lo anterior mencionado, surge el interés por comprender los fenómenos que acontecen bajo la aparición de un SP, así como las condiciones necesarias para la generación de éste en un sistema particular. Por lo tanto, en este trabajo presentamos un estudio teórico y numérico de la respuesta óptica de una Guía de ondas de Cristal Fotónico (PCW) para localizar la presencia de Polaritones de Plasmones de Superficie (SPP) en las regiones del sistema propuesto. La PCW está compuesta por superficies planas paralelas que contiene un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas lisas y rugosas de metamaterial (LHM). Por otro lado, se hace un estudio de la respuesta óptica de la PCW con defectos para verificar el comportamiento de este sistema en las zonas de mínima reflectancia. Cabe mencionar que los defectos consisten en quitar inclusiones en el centro de la PCW. Para abordar el problema se hace uso de una técnica numérica conocida como el Método de la Ecuación Integral mediante el modelo Drude para una PCW finita periódicamente en una dimensión. Los resultados obtenidos muestran que el comportamiento de los sistemas con inclusiones lisas y rugosas tienen buenas correspondencias entre sí, y se observa la presencia de un mínimo en la frecuencia $\omega_r = 0.7329$, que es muy marcado en la reflectancia de ambos sistemas. Por otro lado, al considerar sistemas con defectos se obtiene un mínimo muy cercano a $\omega_r = 0.7329$. Asimismo, se calculó las curvas de absorbancia de las PCWs obteniendo una absorción alrededor de 1% para frecuencias altas permitidas. Finalmente, las conclusiones de este trabajo son: los mínimos obtenidos en la reflectancia que nos indica la presencia del SPP en nuestro sistema con las frecuencias mencionadas anteriormente. El mínimo no se ve afectado al considerar una PCW con inclusiones lisas o rugosas con los parámetros considerados. También se observó que el mínimo tampoco se ve afectado con los defectos en la guía de ondas. El estudio que hemos realizado nos puede permitir la exploración de más propiedades físicas de los SPPs para el desarrollo de nuevas aplicaciones tecnológicas.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades y comportamiento de la luz al interactuar con la materia revela una serie de características y efectos, que nos permite desarrollar algunas teorías sobre su naturaleza con el fin de resolver ciertos problemas sujeto a nuevas aplicaciones. En las últimas décadas, los investigadores han estado trabajando en poder controlar las propiedades ópticas de los materiales, dado que una alta gama de desarrollos tecnológicos sería posible si se pudiera diseñar materiales que respondan a las ondas electromagnéticas sobre un rango deseado de frecuencias: reflejándolas perfectamente, permitiendo que se propaguen sólo en ciertas direcciones o confinándolas en un volumen específico. Dentro de los tipos de materiales que nos permiten la manipulación de las propiedades ópticas, tenemos a los cristales fotónicos (CFs): que son arreglos periódicos de una, dos o tres dimensiones de diferentes materiales con una celda unitaria de la dimensión del orden de la longitud de onda. Los CFs son materiales en los que existe una modulación periódica y ordenada del índice de refracción y presenta bajas pérdidas por absorción. Otros materiales estructurados que presentan propiedades interesantes en el comportamiento de la luz al interactuar con estos, son los llamados “Metamateriales” o “Materiales izquierdos” [1]. Los LHMs son estructuras artificiales

compuestas, generalmente periódicas, que presentan propiedades inusuales y no observadas en los materiales naturales. Un medio metamaterial presenta un comportamiento opuesto a las de un medio convencional, ya que el vector de campo eléctrico \mathbf{E} , el vector de campo magnético \mathbf{H} y el número de onda k forman una tríada izquierda, lo cual supone que la luz se propague en sentido contrario al flujo de energía, representado por el vector de Poynting \mathbf{S} . En un medio metamaterial el vector de Poynting y el número de onda tienen sentidos opuestos, mientras que en un medio convencional tienen el mismo sentido. Tales materiales artificiales tienen un índice de refracción negativo $n = \pm\sqrt{\epsilon\mu}$ debido a que tienen funciones de permitividad eléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ simultáneamente negativas dentro de algún rango dado del espectro electromagnético.

Resulta evidente que la luz desempeña un papel importante en nuestras vidas, es por ello que ha sido estudiada durante siglos. En consecuencia se tiene importante bagaje de conocimientos y dispositivos ópticos que son útiles en nuestra vida diaria. Sin embargo, no ha dejado de aparecer fenómenos relacionados con la luz que dan lugar a nuevos campos de investigación, como la "plasmónica", que surgió en los últimos años debido al avance de las nanotecnologías. Forma parte de un área más extensa denominada "nanofotónica", que se caracteriza por el confinamiento de campos electromagnéticos en volúmenes inferiores a la longitud de onda como resultado de la interacción de una onda electromagnética y los electrones de conducción en interfaz metal-dieléctrico, lo que da origen a un fenómeno que es conocido como plasmón de superficie o SPP.

En este trabajo se tiene el interés de localizar modos de SPP en una PCW de longitud finita que contiene inclusiones cilíndricas lisas y rugosas de LHM. Para estudiar el comportamiento de la luz en este tipo de sistemas se requiere dominar no sólo los aspectos teóricos si no también los modelos numéricos. Así, para estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en PCWs se basa en métodos numéricos que ha desarrollado el grupo de cristales fotónicos de la FCFM de la UMSNH, para el análisis de estructuras de bandas en caso de tratarse de una guía de tamaño infinito y de la respuesta óptica (reflectancia) en caso de ser una guía de tamaño finito con geometrías diferentes. Las técnicas numéricas están basadas en métodos integrales [2, 3].

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección de teoría se presenta el sistema de estudio y una breve descripción del Método de la Ecuación Integral, que se utiliza para calcular la respuesta electromagnética de nuestro sistema. En la sección de resultados presentaremos el análisis numérico de la respuesta óptica de la PCW. Finalmente, en la sección de conclusiones presentaremos nuestras principales conclusiones del sistema en estudio.

TEORÍA

A continuación, se presenta un breve desarrollo descriptivo de la base teórica que se pretende utilizar para resolver nuestro problema de estudio.

Propagación de la luz a través de la materia

En nuestro estudio de la propagación de la luz a través de la materia nos ocuparemos únicamente en los medios magnéticos y eléctricamente neutros. Por lo tanto, \mathbf{M} y ρ se toman igual a cero. Así, las ecuaciones de Maxwell, se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\left(\frac{1}{\epsilon_0} \right) \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (4)$$

Tomando el rotacional de la Ec. (1) y la derivada respecto al tiempo de la Ec. (2) para eliminar \mathbf{H} , obtenemos la ecuación de onda para el campo eléctrico

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \left(\frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right). \quad (5)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación anterior se llaman términos fuente. Se derivan de la presencia de las cargas de polarización y de conducción, respectivamente dentro del medio. La manera en la que la propagación de la luz se ve afectada por los términos fuentes está incluida. En caso de tratarse de medios no conductores, el término $-\mu_0 \partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$ es de importancia, ya que conduce a una explicación de muchos efectos ópticos como: la dispersión y la doble refracción, por mencionar algunos. En el caso de los metales, el término de conducción $-\mu_0 \partial \mathbf{J} / \partial t$ es el importante. Las soluciones resultantes de la ecuación de onda explican la gran opacidad y alta reflectancia de los metales. Es por esto que consideraremos el caso de interacción de la luz con los medios conductores metálicos utilizando el modelo de Drude.

Modelo de Drude

Las características esenciales de los metales se pueden describir teóricamente con el modelo de Drude [4]. En este modelo, existe una frecuencia crítica llamada frecuencia de plasma, por debajo de la cual la permitividad eléctrica es negativa y en consecuencia la propagación de ondas electromagnéticas está prohibida. Por encima de la frecuencia de plasma la permitividad es positiva, el medio es transparente y permite la propagación de ondas electromagnéticas.

En el caso general tenemos que el índice de refracción de un medio conductor real es

$$n^2 = 1 - \frac{c^2 \mu_0 \sigma \gamma}{\omega^2 + i \omega \gamma} \quad (6)$$

donde $\tau = 1/\gamma$ es el tiempo de relajación y m es la masa del electrón; además se define la “frecuencia de plasma” como:

$$\omega_p^2 = c^2 \mu_0 \sigma \gamma = \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \quad (7)$$

Así, el índice de refracción del medio conductor está dado por

$$n^2 = 1 - \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i \omega \gamma} \right]. \quad (8)$$

Ahora, considerando que $\epsilon(\omega) = n(\omega)^2$, tenemos que la función dieléctrica para medios conductores está dada por

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_R(\omega) + i \epsilon_I(\omega) = n(\omega)^2 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right) + i \left(\frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega^3 + \omega \gamma^2} \right). \quad (9)$$

Observamos que ya no es constante ya que depende de la frecuencia de la radiación que se utiliza para iluminar el material.

Modelo de un medio con LHM

Se presentan las características de las funciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, las cuales son usadas para modelar numéricamente las propiedades ópticas de los LHMs que están dadas por [5]

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i \gamma \omega} \quad (10)$$

y

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F \omega^2}{\omega^2 + i \gamma \omega - \omega_0^2} \quad (11)$$

con la frecuencia de plasma ω_p , la frecuencia de colisión γ , la frecuencia de resonancia ω_0 y el factor que representa la fracción de volumen de la celda F .

Método de la Ecuación Integral

El Método de la Ecuación Integral está basado en la solución numérica de la ecuación de Helmholtz usando ecuaciones integrales [6]. El método parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el

modo del campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se calcula la estructura de bandas o la respuesta óptica del sistema. A continuación daremos una breve descripción de la guía de ondas con metamaterial y una pequeña descripción del formalismo del método, para el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas.

Consideremos una PCW finita que es iluminada por un campo incidente. El sistema está formado por dos placas paralelas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas rugosas que se consideran como un sistema de M cuerpos como se muestra en la Fig. 1. La región 0 se caracteriza por un índice de refracción $n_0(\omega) = \sqrt{\epsilon_0(\omega)}$ y las regiones desde 1 hasta M están definidas por las curvas C_j y se caracterizan por los correspondientes índices de refracción $n_j(\omega) = \pm\sqrt{\mu_j(\omega)\epsilon_j(\omega)}$ que involucran las propiedades de los materiales que se dan en términos de la permeabilidad magnética $\mu_j(\omega)$ y de la permitividad eléctrica $\epsilon_j(\omega)$. El signo que aparece en la expresión del índice de refracción debe ser tomado como negativo cuando se considere un LHM y positivo para un medio dieléctrico o conductor.

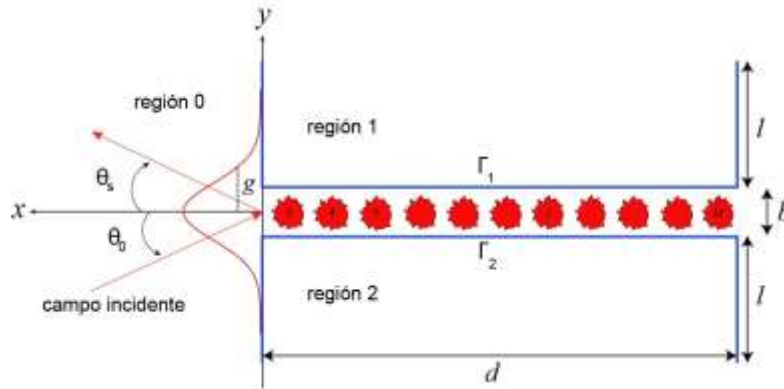


Figura 1. Esquema de una PCW conductora de anchura b formada por dos placas conductoras de ancho l y longitud d con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas (en rojo) rugosas de algún material dispersivo. La longitud del sistema en la dirección y es $L_x = 2l + b$.

Cabe mencionar que el método integral para este caso será descrito muy brevemente y a continuación explicaremos los puntos importantes. Si el lector desea conocer el desarrollo detallado del método puede consultar la Ref. [2].

Se inicia asumiendo una dependencia armónica del tiempo $e^{-i\omega t}$ para los campos electromagnéticos, la ecuación de onda es transformada en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi^j(\mathbf{r}) + k_j^2 \Psi^j(\mathbf{r}) = 0, \tag{12}$$

donde j indica el j -ésimo medio, \mathbf{r} es el vector de posición del punto de observación y $\Psi^j(\mathbf{r})$ representa el campo eléctrico o magnético.

Para resolver la Ec. (12) consideramos una función de Green $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, como la solución de la ecuación

$$\nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_j^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{14}$$

donde $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' y correspondiente a cada medio. La expresión $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac. Una función de Green que es solución de la Ec. (13) está dada por

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|),$$

siendo $H_0^{(1)}(z)$ la función de Hankel de primera clase y de orden cero. Esta función de Green para el vacío satisface una condición de radiación, mientras que para el interior del j -ésimo cuerpo satisface una condición de absorción.

Aplicando el segundo teorema integral de Green a las funciones $\Psi^j(\mathbf{r})$ y $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ correspondientes a la región 0, se obtiene el campo de la siguiente manera

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[\frac{G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \Psi^j(\mathbf{r}') - G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds. \quad (15)$$

En esta expresión, $\Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r})$ representa el campo incidente y la suma de las integrales representa el campo esparcido.

Siguiendo los mismos pasos, para la j -ésima región (inclusiones), el campo $\Psi^j(\mathbf{r})$ puede expresarse como

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r}) \theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\frac{G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \Psi^j(\mathbf{r}') - G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds, \quad (16)$$

donde $\theta_j(\mathbf{r})$ es una función cuyo valor es: uno para todos los puntos del medio j -ésimo y cero en otro caso. Las Ecs. (15) y (16) forman un sistema de ecuaciones integrales con las que se puede obtener el campo total en el medio de incidencia y de esparcimiento.

RESULTADOS

En esta parte se mostrarán los resultados obtenidos de los cálculos numéricos de la respuesta óptica de una PCW finita, mediante el cálculo de la absorción, reflectancia y de los modos superficiales del sistema por medio del Método de la Ecuación Integral.

PCW con inclusiones lisas y rugosas de LHM

Los resultados que presentaremos en este trabajo fueron usando la polarización TE para una PCW finito que es iluminado con un haz Gaussiano. Vamos a mostrar los casos de las PCWs con inclusiones lisas y con inclusiones rugosas de LHM para posteriormente hacer una comparación de los resultados. Los parámetros considerados son $d = 12\pi$ que es la longitud de la guía, $b = \pi$ el ancho entre las superficies planas y $\theta = 0$ el ángulo de incidencia normal, para todos los casos.

En la Fig. 2(a) mostramos el perfil de la PCW que contienen inclusiones lisas de LHM. En la Fig. 2(b) se muestra la correspondiente reflectancia R , considerando fracciones de llenado de $f = 0.005$, $f = 0.007$ y $f = 0.01$. En las Figs. 2(c) y (d) se muestran la absorción y el balance de energía respectivamente.

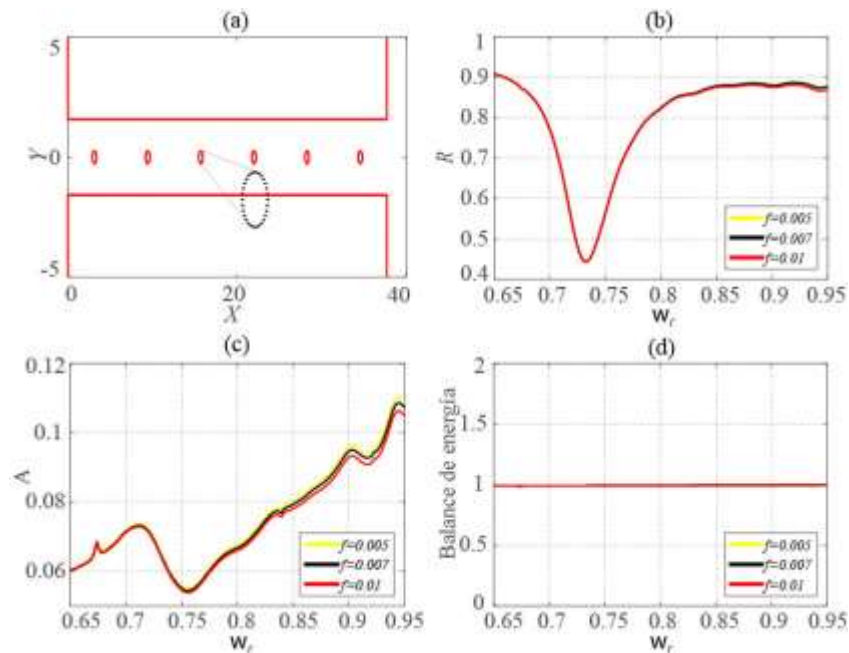


Figura 2. (a) Perfil de una PCW con 6 inclusiones cilíndricas lisas de LHM. (b) Las reflectancias obtenidas del sistema, utilizando fracciones de llenado de $f = 0.005$, $f = 0.007$ y $f = 0.01$. (c) y (d) La absorción y el balance de energía respectivamente.

En la Fig. 3(a) mostramos el perfil de la PCW que contienen inclusiones rugosas de LHM utilizando una desviación estándar de las alturas de $\sigma = 0.02$ y una longitud de correlación de $\delta = 0.04$. En la Fig. 3(b) se muestra la reflectancia, considerando fracciones de llenado de $f = 0.005$, $f = 0.007$ y $f = 0.01$. En las Figs. 3(c) y (d) se muestran la absorción y el balance de energía respectivamente.

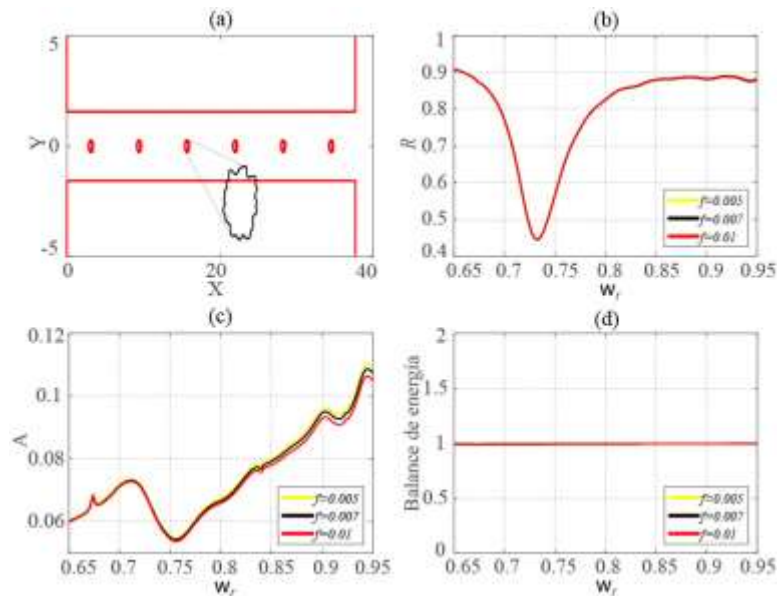


Figura 3. (a) Perfil de una PCW con 6 inclusiones cilíndricas rugosas de LHM con $\sigma = 0.02$ y $\delta = 0.04$. (b) Las reflectancias obtenidas del sistema, utilizando fracciones de llenado de $f = 0.005$, $f = 0.007$ y $f = 0.01$. (c) y (d) La absorción y el balance de energía respectivamente.

PCW con defectos que contiene inclusiones rugosas de LHM

Ahora, consideremos el caso de las PCWs con inclusiones rugosas y con defectos en el centro de la guía. En la Fig. 4(a) mostramos el perfil de la PCW con defectos (quitando 2 inclusiones). En la Fig. 4(b) se muestra la reflectancia R , utilizando fracciones de llenado de $f = 0.005$, $f = 0.007$ y $f = 0.01$. En las Figs. 4(c) y (d) se muestra la absorción y el balance de energía respectivamente.

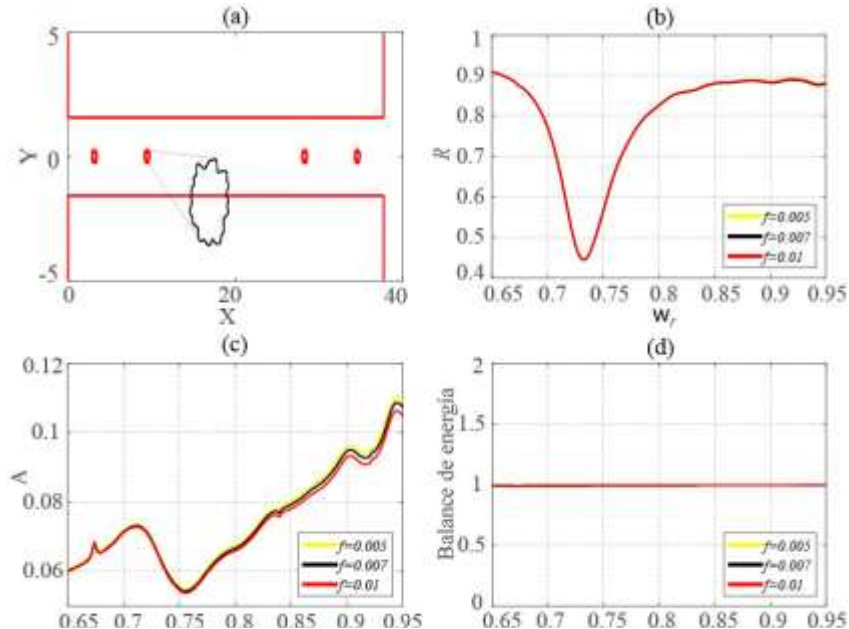


Figura 4. (a) Perfil de una PCW con defectos en el centro (quitando 2 inclusiones) con $\sigma = 0.02$ y $\delta = 0.04$. (b) Las reflectancias obtenidas del sistema, utilizando fracciones de llenado de $f = 0.005$, $f = 0.007$ y $f = 0.01$. (c) y (d) La absorción y el balance de energía, respectivamente.

De acuerdo con los resultados obtenidos, daremos algunas observaciones importantes de la respuesta óptica de nuestro sistema. Primero, para el caso de las PCWs con inclusiones lisas y rugosas, tenemos la presencia de un mínimo en la frecuencia $\omega_r = 0.7329$, que es muy marcado en la reflectancia de ambos sistemas (Fig. 2(b) y 3(b)), es decir, el mínimo no se ve afectado al considerar estas inclusiones con los parámetros considerados. También podemos observar que en los dos sistemas la posición del mínimo no cambia al considerar distintas fracciones de llenado de la inclusión, ya que la reflectancia se mantiene igual en la zona baja. Segundo, para el caso de las PCWs con defectos, los resultados obtenidos en el cálculo de la reflectancia (Fig. 4(b)), muestran la presencia de un mínimo muy cercano a la frecuencia $\omega_r = 0.7329$. Podemos observar que el mínimo tampoco se ve afectado con los defectos en la guía de ondas. Por último, se puede distinguir que las curvas de absorción (Fig. 2(c), 3(c) y 4(c)) presentan ligeros cambios al considerar diferentes fracciones de llenado y la absorción es alrededor de 1% en todos los casos. En las Figs. 2(d), 3(d) y 4(d) podemos ver que el balance de energía se cumple muy bien con los parámetros utilizados, esto nos asegura la validez del método numérico utilizado.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado un estudio numérico de la respuesta óptica de una PCW para localizar la presencia de un SPP. De acuerdo con los resultados obtenidos muestran que los mínimos en la reflectancia no se ven afectados al considerar una PCW con inclusiones lisas o rugosas. También se observó que el mínimo tampoco se ve afectado con los defectos en la guía de ondas. Los mínimos localizados en la reflectancia nos indica la presencia del SPP en nuestro sistema con los parámetros considerados. Por último, la absorción obtenida del sistema es alrededor de 1% para frecuencias altas permitidas. El estudio que hemos realizado nos puede permitir la exploración de

más propiedades físicas de los plasmones de superficie para el desarrollo de nuevas aplicaciones tecnológicas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Veselago, V. (1968). The electrodynamics of substances with simultaneously negative values. *Sov. Phys. Rev. B*, 10(4).
2. Pérez, H. I., Valencia, C. I., Méndez, E. R. y Sánchez-Gil, J. A. (2009). On the transmisión of diffuse light through thick slits. *JOSA A*, 26(4): 909-918.
3. Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, New York, 1th edition.
4. Fowles, G. R. (1968). *Introduction to modern optics*. Dover Publications, Inc., New York, 2th edition.
5. Ruppin, R. (2004) Surface polaritons and extinction properties of a left-handed material cylinder. *J. Phys. Condens. Matter*, 16: 5991-5998.
6. Mendoza-Suaréz, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one and two dimensional photonic crystals. *JOSA B*, 23:2249-2256.

EL DECAIMIENTO DEL BOSÓN DE HIGGS A DOS FERMIONES CON VIOLACIÓN DE SABOR

Guillermo González Estrada¹, Jorge Isidro Aranda Sánchez¹, Javier Montaña Domínguez^{1,2},
Fernando Iguazú Ramírez Zavaleta¹, Eduardo Salvador Tututi Hernández¹.

¹Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolas de
Hidalgo, ²Cátedras CONACYT.
guille.est@gmail.com

RESUMEN

Revisamos el decaimiento del bosón de higgs a dos diferentes quarks a nivel de un lazo en el Modelo Estándar. Implementamos de manera estricta el mecanismo de GIM realizando meticulosas expansiones de serie de Taylor en los factores de forma de la amplitud y sus funciones escalares implícitas Passarino-Veltman para deshacerse de los términos espurios. Nuestras predicciones son

$Br(H \rightarrow uc) = 1.63 \times 10^{-18}$, $Br(H \rightarrow ds) = 9.07 \times 10^{-15}$, $Br(H \rightarrow db) = 1.03 \times 10^{-8}$, $Br(H \rightarrow sb) = 2.44 \times 10^{-7}$; con $H \rightarrow uc, ds$ mayormente suprimidas que las reportadas con anterioridad en la literatura.

INTRODUCCIÓN

El descubrimiento del bosón de Higgs (denotado por H), compatible con el predicho por el Modelo Estándar (ME) [1,2], ha sido el logro más importante en la física de partículas elementales del siglo XXI. Esta partícula es responsable de proporcionar masa al resto de las partículas elementales conocidas, a excepción de los neutrinos.

Todavía hay mucho que saber sobre las propiedades del bosón de Higgs, por ejemplo, el ME no predice a nivel de árbol la existencia de corrientes neutras que cambian de sabor con quarks, $\bar{q}_i q_j H$, sin embargo, el ME permite que este tipo de acoplamientos pueda ser inducido por fluctuaciones cuánticas a nivel de un lazo. Tales acoplamientos pueden estudiarse a través del decaimiento $H \rightarrow q_i q_j$, explícitamente $H \rightarrow uc, ds, db, sb$.

Hasta ahora, estos decaimientos en el ME han sido poco estudiadas en la literatura. Aquí revisamos el decaimiento y lo hacemos de una manera muy diferente, realizamos expansiones de serie de Taylor meticulosas y apropiadas a los factores de forma en las amplitudes para aplicar el mecanismo de Glashow-Illipolus-Miani [3], en consecuencia, encontramos nuevas predicciones para dos de los cuatro modos de decaimiento.

TEORIA

El decaimiento $H \rightarrow u_i u_j$

El decaimiento del higgs en dos quarks distintos consiste en la suma de los dos canales $H \rightarrow q_i q_j = H \rightarrow q_i \bar{q}_j + H \rightarrow \bar{q}_i q_j$, debido a la invarianza de conjugación de carga, paridad e inversión del tiempo (CPT), ambos conducen al mismo resultado.

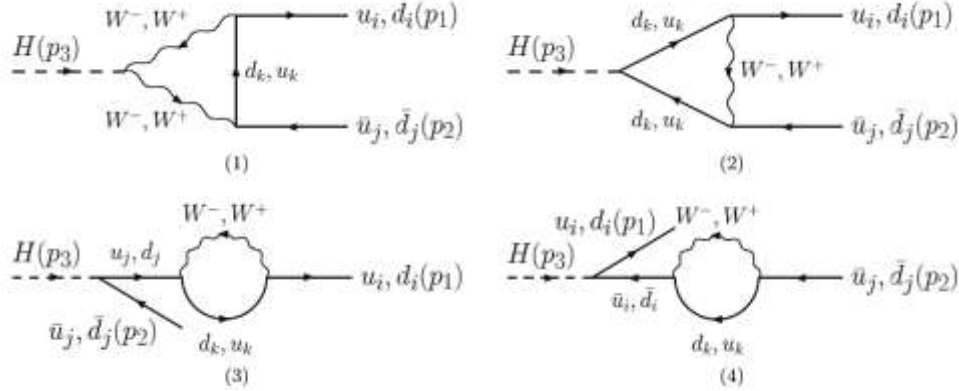


Figura 1: **Decaimiento** $H \rightarrow u_i u_j$ con $u_i u_j = uc$ y $d_k = d, s, b$. También el $H \rightarrow d_i d_j$ con $d_i d_j = ds, db, sb$ y $u_k = u, c, t$.

El decaimiento del higgs a dos quarks distintos, $H \rightarrow u_i u_j$ con $u_i u_j = uc$, está conformado por los diagramas representados en la Fig. 1, donde dentro del lazo circular hay tres quarks tipo down $d_k = d_1, d_2, d_3 = d, s, b$. La amplitud es

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4, \tag{1}$$

una muestra de una sub amplitud es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 = & \frac{(-1)^3 i^6 g^3 m_{d_k}}{4m_W} \sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p_1) \gamma^{\alpha_1} P_L (\not{k} + \not{p}_1 + m_{d_k})}{(k^2 - m_W^2) [(k + p_1)^2 - m_{d_k}^2]} \\ & \times \frac{(\not{k} - \not{p}_2 + m_{d_k}) \gamma^{\alpha_2} P_L v(p_2)}{[(k - p_2)^2 - m_{d_k}^2]} \left(-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}}{m_W^2} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

similarmente se estructuran las tres restantes. Las integrales se resolvieron con el método de descomposición tensorial de Passarino – Veltman a través del paquete especializado FeynCalc en Mathematica. El resultado de la amplitud del decaimiento $H \rightarrow u_i u_j$ es

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_1) \left(F_1 + F_2 \gamma^5 \right) v(p_2), \tag{3}$$

Donde los factores de forma, F_{12} tienen la estructura

$$\begin{aligned} F = & \sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* f \\ = & \sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* [f_{A_1} A_0(1) + f_{A_2} A_0(2) + f_{B_1} B_0(1) + f_{B_2} B_0(2) \\ & + f_{B_3} B_0(3) + f_{B_4} B_0(4) + f_{C_1} C_0(1) + f_{C_2} C_0(2)], \end{aligned} \tag{4}$$

Dependientes de las funciones escalares Passarino – Veltman (PaVe) A_0, B_0, C_0 y de igual manera los sub factores de forma $f_{A1} \dots f_{C1}$ en términos de todas las masas de las partículas involucradas. En esta etapa hay una divergencia ultravioleta (UV), ya que todavía queda el polo ϵ_{UV}^{-1} que proviene de A_0 y B_0 :

$$M_{UV} = - \sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* \frac{1}{\epsilon_{UV}} \frac{ig^3 m_H^2}{256\pi^2 m_W^3} \bar{u}(p_1) [(m_{u_i} + m_{u_j}) - (m_{u_i} - m_{u_j})\gamma^5] v(p_2), \quad (5)$$

pero esto puede eliminarse en virtud del mecanismo de GIM. Para $H \rightarrow u u_j$, el mecanismo de GIM satisface

$$\sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* = V_{u_i d} V_{u_j d}^* + V_{u_i s} V_{u_j s}^* + V_{u_i b} V_{u_j b}^* = 0, \quad (6)$$

Esto nos permite eliminar cualquier término independiente de la masa m_{dk} , por lo tanto, la divergencia UV en (5) desaparece. Además, para aplicar estrictamente dicho mecanismo, debemos ser capaces de fragmentar el sub factor de forma f de (4) en su parte dependiente de la masa m_{dk} y su parte independiente, esto es

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* [f(m_{d_k}) + f(\overline{m_{d_k}})] \\ &= \sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* f(m_{d_k}) \\ &= V_{u_i d} V_{u_j d}^* f(m_d) + V_{u_i s} V_{u_j s}^* f(m_s) + V_{u_i b} V_{u_j b}^* f(m_b), \end{aligned} \quad (7)$$

Para lograr esto, debemos separar los factores de forma junto con sus PaVes, para lo cual debemos aplicar expansiones de serie de Taylor apropiadamente.

Para $H \rightarrow u_i u_j$, con $u_i u_j = u c$, hay contribución de tres quarks ligeros tipo down circulando virtualmente dentro del lazo, $d_k = d_1, d_2, d_3 = d, s, b$, por consiguiente, consideramos la jerarquía $m_H > m_W \gg m_{u_i}, m_{u_j}, m_{dk}$, por lo tanto, podemos aplicar expansiones de serie de Taylor a f de (4) respecto a m_{u_i}, m_{u_j} y m_{dk} , lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} F_{1,2} &= \sum_{k=1}^3 V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* f_{1,2}(m_{d_k}) \\ &= V_{u_i d} V_{u_j d}^* f_{1,2}(m_d) + V_{u_i s} V_{u_j s}^* f_{1,2}(m_s) + V_{u_i b} V_{u_j b}^* f_{1,2}(m_b), \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$f_{1,2}(m_{d_k}) = \frac{\pm ig^3 m_{u_i} \pm m_{u_j}}{256\pi^2} \frac{\mathcal{F}_W}{m_W} \frac{m_{d_k}^2}{1 - r_W m_W^2}, \quad (9)$$

con \mathcal{F}_W en términos de las masas de las partículas involucradas y $r_W = \frac{m_W^2}{m_H^2}$.

El decaimiento $H \rightarrow d_i d_j$

El decaimiento del higgs a dos quarks distintos tipo down, $H \rightarrow d_i d_j$, con $d_i d_j = ds, db, sb$, consiste en diagramas similares a los mostrados en la Fig. 1, dentro del lazo circulan tres quarks distintos tipo up, con $u_k = u_1, u_2, u_3 = u, c, t$. La estructura de la amplitud de $H \rightarrow d_i d_j$ es enteramente análoga al caso $H \rightarrow u_i \bar{u}_j$ si intercambiamos: $u_i = d_i, u_j = d_j, W^- \rightarrow W^+$ y $V_{u_i d_k} V_{u_j d_k}^* \rightarrow V_{u_k d_i}^* V_{u_k d_j}$, por lo tanto, el resultado de la amplitud es análogo al decaimiento $H \rightarrow u_i u_j$ de (3).

Para $H \rightarrow d_i d_j$ el mecanismo de GIM es

$$\sum_{k=1}^3 V_{u_k d_i}^* V_{u_k d_j} = V_{ud_i}^* V_{ud_j} + V_{cd_i}^* V_{cd_j} + V_{td_i}^* V_{td_j} = 0, \quad (11)$$

que elimina la parte UV de la amplitud como en (7).

En contraste con el caso $H \rightarrow u_i u_j$, para $H \rightarrow d_i d_j$ existen dos escenarios de jerarquías de masas diferentes para los factores de forma, en consecuencia, esto requiere dos esquemas de expansiones de serie de Taylor diferentes:

Primer escenario. Para la contribución de los quarks ligeros u y c circulando virtualmente dentro del lazo tomamos $m_H > m_W \gg m_{d_i}, m_{d_j}, m_u, m_c$, la expansión es análoga a la implementada en $H \rightarrow u_i u_j$, por lo tanto, sus factores de forma fueron expandidos respecto a m_{d_i}, m_{d_j} y $m_{u_k} = m_{u_1}, m_{u_2} = m_u, m_c$, así tenemos un resultado similar a (8), entonces los factores se aprecian como

$$\begin{aligned} F_{1,2} &= \sum_{k=1}^2 V_{u_k d_i}^* V_{u_k d_j} f_{1,2}(m_{u_k}) \\ &= V_{ud_i}^* V_{ud_j} f_{1,2}(m_u) + V_{cd_i}^* V_{cd_j} f_{1,2}(m_c), \end{aligned} \quad (12)$$

$$f_{1,2}(m_{u_k}) = \frac{\pm ig^3 m_{d_i} \pm m_{d_j}}{256\pi^2} \frac{\mathcal{F}_W}{m_W} \frac{m_{u_k}^2}{1 - r_1 m_W^2}. \quad (13)$$

Segundo escenario. Para el caso del quark pesado t virtual, consideramos $m_t > m_H > m_W \gg m_{d_i}, m_{d_j}$, la expansión solo se puede realizar con respecto a m_{d_i}, m_{d_j} , pero no $m_{u_k} = m_{u_3} = m_t$, esto produce

$$\begin{aligned}
 F_{1,2} &= \sum_{k=3} V_{u_k d_i}^* V_{u_k d_j} f_{1,2}(m_{u_k}) \\
 &= V_{td_i}^* V_{td_j} f_{1,2}(m_t),
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$f_{1,2}(m_{u_k}) = \frac{\pm i g^3 m_{d_i} \pm m_{d_j}}{128 \pi^2 m_W} 2 \mathcal{F}_{W_t} \frac{m_t^2}{m_W^2},
 \tag{15}$$

donde $F(r_1, r_2)$, $r_1 \equiv m_W^2/m_H^2$, $r_2 \equiv m_{u_k}^2/m_H^2$.

Finalmente debido a que $m_H \gg m_{q_i}, m_{q_j}$ donde q_{ij} es cualquier quark, podemos expresar la razón de decaimiento como

$$\text{Br}(H \rightarrow q_i q_j) = \frac{\Gamma(H \rightarrow q_i q_j)}{\Gamma_H} \simeq \frac{N_C m_H}{4\pi \Gamma_H} (|F_1|^2 + |F_2|^2),
 \tag{16}$$

con la anchura total del higgs $\Gamma_H = 4.1 \times 10^{-3} \text{ GeV}$.

RESULTADOS

Los valores de entrada de las constantes físicas, las partículas de masa y la matriz CKM involucrada se tomaron de la versión más actualizada de PDG [4,5] Nuestras predicciones se muestran en la Tabla 1.

$H \rightarrow q_i q_j$	Br
$H \rightarrow uc$	1.63×10^{-18}
$H \rightarrow sd$	1.07×10^{-15}
$H \rightarrow db$	1.03×10^{-8}
$H \rightarrow sb$	2.44×10^{-7}

Tabla 1. Razones de decaimiento para $H \rightarrow q_i q_j$.

CONCLUSIONES

Hemos presentado fórmulas analíticas para el decaimiento $H \rightarrow q_i q_j$ en el contexto del ME. Hemos mostrado las correspondientes amplitudes de los diagramas de Feynman a nivel de un lazo y desarrollamos meticulosamente expansiones de serie de Taylor en los factores de forma F_{12} para quedarnos con los términos dependientes de la masa virtual m_{q_k} y eliminar los términos espurios mediante el mecanismo de GIM.

Nuestras predicciones concuerdan con dos de los cuatro valores numéricos de [6], estamos de acuerdo en los canales $H \rightarrow db, sb$, a diferencia ellos predicen $Br(H \rightarrow uc) \sim 10^{-15}$ y $Br(H \rightarrow ds) \sim 10^{-8}$, mientras que nuestra metodología aplicada nos permite predecir 10^{-18} y 10^{-15} respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA

1. The ATLAS Collaboration, (2012) Phys. Lett. B716, 1.
2. The CMS Collaboration, (2012) Phys. Lett. B716, 30.

3. Glashow S L, Iliopoulos J, Maiani L, (1970),” Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry” Phys. Rev. D2, 1285.
4. M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 98, 030001 (2018).
5. Particle Data Group, CKM Quark-Mixing Matrix, Revised January 2016 by A. Ceccucci (CERN), Z. Ligeti (LBNL), and Y. Sakai (KEK).
6. L.G Benítez-Guzmán, I. García Jiménez, M.A López, “Revisiting the flavor changing neutral current Higgs decays $H \rightarrow q\bar{q}$ in the standar model”.

ANÁLISIS MULTICRITERIO COMO HERRAMIENTA DE TOMA DE DECISIONES EN LAS CIENCIAS DE LA TIERRA

Norma Liliana Cruz-Ortiz, José de Jesús Torres García, Norma Claudia Calderón Rosas

CIATEC, A.C., Centro de Innovación Aplicada en Tecnologías Competitivas
E-mail: ncruz@ciatec.mx

RESUMEN

Actualmente los retos ambientales son muchos y muy variados, considerando que los factores que influyen, en las ciencias de la Tierra pueden ser decenas de consideraciones las que puedan generar una decisión positiva o negativa para cualquier desarrollo de infraestructura (social, empresarial, académico, etc.). Es por ello que generar una herramienta rápida y eficaz se vuelve imperante para la agilización de tiempos y la buena administración de recursos.

La extensa revisión de documentos, cartas temáticas, legislación de todo orden de gobierno, normativas, así como de las particularidades que puedan aplicar en cada caso, aunado a los factores naturales que pueden ser amplios, generaba que la toma de decisiones fueran tardadas y en algunos casos no efectivas; derivada de la necesidad de una revisión rápida, cuantitativa, cualitativa y eficaz de evaluación se generó el Análisis Multicriterio (AMC) con el que se puede cubrir en gran parte ese reconocimiento de temas de diversa índole para obtener una idea clara de la situación ambiental, legal, normativa, etc., mediante una matriz de valoración y ponderaciones para cada uno de ellos, teniendo la oportunidad de dar el peso a cada rubro según sea el interés.

Para el caso práctico se realizó el AMC para la selección de sitios idóneos para la instalación de un centro de trabajo de fabricación artesanal de productos de arcillas, donde los temas a considerar fueron; ambiental: regulación municipal y estatal, así como los aspectos naturales como arroyos, población, flora y fauna, bancos de materiales; legal: con la normativa de emisiones de los 3 órdenes de gobierno, planes de ordenamiento territorial; y económica: materiales, vías de comunicación y producción.

Parte de este análisis se realiza en un Sistema de Información Geográfica (SIG) que permite la visualización de las áreas o zonas con potencialidad para el objetivo, esto se clasifica de acuerdo a los resultados. La valorización se mide en Alto, Medio y Bajo potencial de uso para el objetivo requerido.

Los resultados derivan en una serie de mapas y conclusiones prácticas con diversos temas que, en su conjunto, proporcionan un enfoque ambiental, legal y económico que brindan al usuario las herramientas necesarias para la toma de decisiones y solicitud de estudios específicos en caso necesario para una decisión final.

INTRODUCCIÓN

Datos de INEGI señalan que anualmente se crean alrededor de 37,800 empleos en los gremios ladrilleros, logrando un valor de la producción de 3,117 millones de pesos. Sin esta actividad miles de familias se quedarían sin el sustento diario, lo cual representaría un enorme problema social para el gobierno de México. Muchos de los grupos productores de ladrillo artesanal se han dedicado toda su vida al oficio de ladrillero como negocio familiar, por lo tanto, se hace más difícil su transición a otro oficio o actividad productiva, por lo cual muchos de los productores, a pesar de las condiciones de subsistencia en que habitan (viviendas junto a los hornos ladrilleros) siguen trabajando en dicho oficio.

Desgraciadamente el oficio ladrillero afronta riesgos de sobrevivencia, ya que son pocos los cambios sustanciales desde épocas ancestrales, lo que ha provocado que en el proceso productivo se generen ineficiencias y efectos nocivos para habitantes de zonas habitacionales y de las personas que participan en la fabricación del ladrillo. En las zonas geográficas donde se ubican ladrilleras artesanales, siempre se han generado problemas relativos a los niveles de emisión de contaminantes, motivo por el cual los habitantes aledaños a las ladrilleras se manifiestan por la desaparición o reubicación de éstas. Esta situación pone en peligro la sobrevivencia de las ladrilleras, porque las zonas urbanas de México se van extendiendo y hay más restricciones para la adquisición de algunos combustibles como la leña y también los bancos de tierra son más escasos.

En México existen alrededor de 9,500 hornos ladrilleros distribuidos en las principales zonas urbanas de la Megalópolis (Hidalgo, Tlaxcala, Puebla, Morelos, Ciudad de México y Estado de México), así como en Jalisco y Guanajuato. La fabricación del ladrillo artesanal, al ser una actividad realizada por trabajadores pertenecientes al estrato social más vulnerable, se establecieron en lo que alguna vez fue la periferia urbana sin ninguna visión de regulación territorial. El constante crecimiento urbano e industrial, originó la reducción de la zona de amortiguamiento entre las zonas ladrilleras y urbana, creando molestia por las emisiones contaminantes y generación de olores. Por otro lado, la ubicación de dichas zonas ladrilleras se hizo sin ninguna visión relativa al análisis de riesgos naturales o antropogénicos, lo que conlleva al incremento del grado de peligro (probabilidad de ocurrencia de un agente perturbador potencialmente dañino de cierta intensidad, durante un cierto periodo y en un sitio determinado), vulnerabilidad (susceptibilidad o propensión de un agente afectable a sufrir daños o pérdidas ante la presencia de un agente perturbador, determinado por factores físicos, sociales, económicos y ambientales) y riesgo (daños o pérdidas probables sobre un agente afectable, resultado de la interacción entre su vulnerabilidad y la presencia de un agente perturbador) en dichas zonas de trabajo.

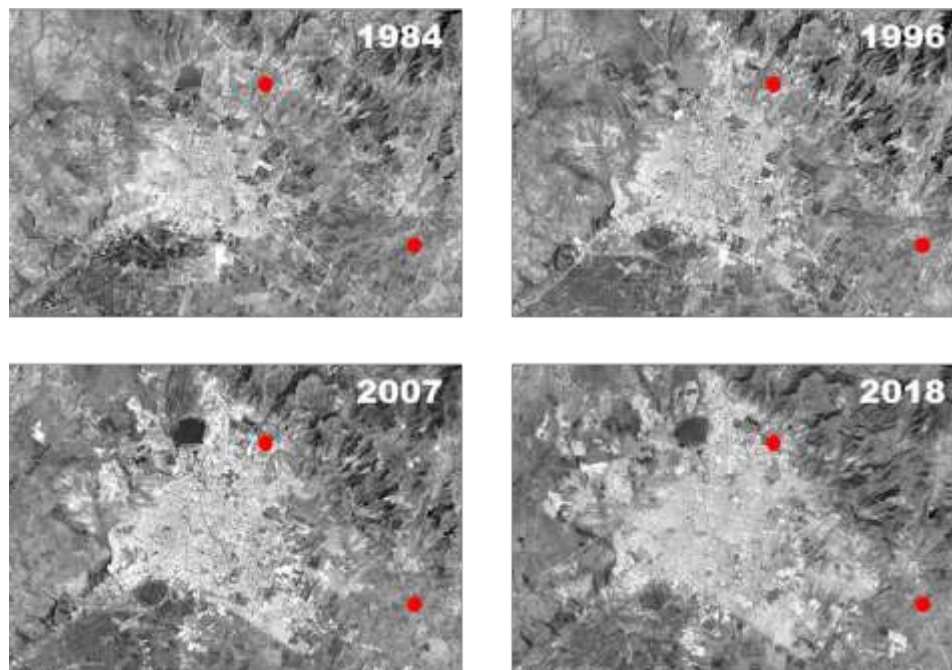


Figura 1. Ubicación de ladrilleras y crecimiento urbano en el tiempo.

Varios estudios han demostrado la eficacia de la conjunción de los Sistemas de Información Geográfica (SIG) con el Análisis Multicriterio (AMC), con el objetivo de crear alternativas a los actores implicados en la toma de decisiones relativas a temas ambientales. Existen metodologías relativas a la aplicación de SIG con AMC para determinar la ubicación más apropiada de sitios destinados al confinamiento lógico y ordenado de residuos sólidos urbanos, para la ubicación de rellenos sanitarios, para la creación de parques industriales, entre otros. La planificación, en el sentido territorial, se define como el proceso de minimizar las diferencias entre las condiciones deseadas y las condiciones actuales, pudiendo ser reiterativo, ya que las condiciones deseadas, como las actuales, varían en el tiempo por lo que se pueden revisar y ajustar permanentemente.

Los Sistemas de Información Geográfica (SIG) resultan esenciales para el análisis de problemas de localización, ya que permiten estimar distancias y separaciones entre múltiples entidades espaciales, y su combinación con técnicas de Análisis Multicriterio (AMC) permite ubicar, analizar y seleccionar polígonos óptimos y seguros para creación de parques ladrilleros tratando de guardar un equilibrio

entre el medio ambiente, el análisis de la presencia de peligros naturales, y la continuidad de una actividad económica.

JUSTIFICACIÓN

La naturaleza de la superficie terrestre por si sola ofrece un sinnúmero de espectáculos que se han conformado a través de eones de intemperismo y accidentes geológicos, cuyo resultado guarda un cierto orden “natural”, el cual tiende a guardar un equilibrio cuasi perfecto, bajo los parámetros medibles por el ser humano. Este orden impuesto por la historia geológica se ve expuesto a modificaciones conforme el ser humano extiende las fronteras establecidas para los centros urbanos, áreas de aprovechamiento de insumos naturales y transforma de forma irreversible el equilibrio inicial del medio ambiente. Desde los albores de la civilización, se han aprovechado las materias primas naturales como medio de construcción de viviendas, caminos, puentes, etc., en general; el ser humano aprendió a utilizar, moldear y transformar los materiales existentes y cercanos a su zona de movilidad para su beneficio.

El caso de estudio se aboca a la utilización de materiales térreos para la fabricación artesanal de productos derivados de la transformación de las arcillas (recocidas o no), este noble y adaptable material de construcción ha acompañado el crecimiento de las pequeñas y grandes ciudades del mundo, y en el caso de México no es la excepción. Pese a existir materiales que ofrecen otro tipo de cualidades (térmicas, estructurales, ligeras, etc.), el ladrillo artesanal se encuentra impregnado en la idiosincrasia de la población, probablemente por herencia cultural y familiar; además de la natural aspiración de ver convertido el hogar en una zona de refugio que evoque los sentimientos del pasado. Sea cual sea el caso, la región centro occidente de México se caracteriza por ser la de mayor utilización de estos materiales, por lo que la demanda de estos productos continuará vigente en las próximas décadas de desarrollo.

Sin embargo, cualquier aprovechamiento de los recursos naturales acarrea de forma directa problemas ambientales que son evidentes a la población y más aún, si se generan afectaciones indirectas aún a kilómetros de distancia de los centros de aprovechamiento o producción. Para el caso de las ladrilleras artesanales, utilizan hornos de cocción que no necesariamente son eficientes en el aprovechamiento calorífico, además de que el material utilizado como fuente de energía calorífica ha sido motivo de discusiones, observaciones ambientales y discusiones recurrentes entre especialistas del tema. Lo que es una realidad, es que las zonas donde se ubican los hornos ladrilleros han sido alcanzadas por el crecimiento de las zonas urbanas, haciendo evidentes los problemas ambientales (afectaciones a la calidad del aire, deforestación no controlada, uso de material combustible altamente contaminante, etc.), además de los problemas sociales en los que se encuentran las familias dedicadas a estas labores (pobreza, desnutrición, falta de servicios médicos, etc.).

Estas acciones han permitido que los gobiernos de los tres niveles dediquen esfuerzos para mejorar las condiciones sociales y ambientales del sector ladrillero, en donde una de las soluciones radica en la generación de parques ladrilleros que permitan la continuidad ordenada de esta actividad, previendo un control del sector y logrando un equilibrio entre el aprovechamiento de recursos naturales (insumos), centro productivo y la comercialización de los productos. Es bajo este énfasis que la aplicación de los métodos de análisis multicriterio toma un papel de importancia para la selección de un sitio de operaciones, mediante el cual se tome en cuenta las variables necesarias para asegurar el éxito del centro productivo en el corto y mediano plazo. Esto último expone la importancia de establecer y distinguir las peculiaridades de una región permite entender su dinámica al interior de ella misma (Rosas, García, López & Manzo, 2015).

En una definición simple, un Análisis Multicriterio incluye un conjunto de técnicas que permiten fundamentar los procesos de toma de decisiones (Malczewski, 2006.). La base de estos métodos parte de la integración de criterios de evaluación acordes al tema que se desea evaluar y que, de acuerdo con su ponderación, acotan los desempeños más adecuados de acción (Uribe, Geneletti, Del Castillo & Osri, 2014). Dado que estos métodos han sido ampliamente utilizados en el pasado para distintos fenómenos experimentales e incluso sociales, su adaptación a un caso de estudio como lo es la selección de un centro de fabricación artesanal de productos derivados de arcilla

resulta atractivo y ofrece resultados que permitirán tomar decisiones más acertadas para el beneficio de los productores, las instancias gubernamentales y la sociedad en sí misma.

Para la selección de los parámetros o criterios a evaluar, es necesario tomar en cuenta los requerimientos del proceso de fabricación, los insumos requeridos, las áreas mínimas, etc. Sumado a lo anterior, se deberá evaluar las condiciones del medio físico del territorio (predios) sobre los cuales se realizará la evaluación multicriterio. Dentro de la matriz de análisis, de forma imperativa se deberá analizar las afectaciones al medio ambiente y las consecuencias a corto y largo plazo que la operación de estas labores atraerá. La complejidad que implica la integración y síntesis ambiental ha incrementado el interés por las técnicas de evaluación multicriterio, que en asociación con los Sistemas de Información Geográfica (SIG) permiten analizar de manera simultánea la heterogeneidad ambiental de una condición o proceso específico (Ceballos-Silva & López-Blanco, 2003; Geneletti, 2007). En estos principios radica la base de análisis multicriterio específico para el caso de estudio, en donde no solo son analizados los factores físicos del medio, sino que se contrastan las características requeridas y operativas en conjunto con la normativa existente para estas actividades, además de las recomendaciones generales de los centros de población cercanos a los predios que se estarán evaluando.

El fundamento para la aplicación de los análisis multicriterio radica en la posibilidad de realizar un análisis mayormente asertivo, en el cual se pondere de forma eficaz cada variable de interés, permitiendo obtener un resultado en el que se defina la mejor selección del sitio de aprovechamiento y producción; reduciendo la incertidumbre a un nivel aceptable para la sociedad.

METODOLOGÍA

La metodología se realizó en cinco procesos diferentes y consecuentes, mismos que se pueden ver en la Figura 2, y que se describirán cada uno para indicar que se realizó en cada uno de los procesos. Como ya se mencionó son subsecuentes y se comenzó con la revisión de la normatividad que básicamente son los criterios de selección, posteriormente fue la recopilación de información, ya que se sabía que debíamos evaluar se colectó la información y se procesó en el Sistema de Información Geográfica para poder hacer el análisis multicriterio para la selección del sitio que cumpliera con todos los requisitos de la normatividad municipal y estatal aplicable, una vez seleccionado el predio se realizó el diseño de las áreas y su distribución en el sitio.

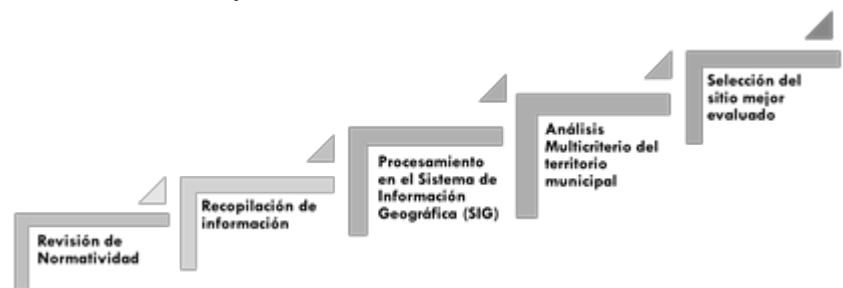


Figura 2. Proceso metodológico para el desarrollo del proyecto.

a) Revisión de Normatividad

Los parámetros y rangos que se utilicen para la selección del sitio serán documentados y referenciados de la normatividad aplicable y vigente. Los criterios son en pro de preservación del medio ambiente y protección a la población sin afectar las actividades de los productores, es por esto que se tienen los criterios físicos de selección y los criterios de exclusión de las zonas protegidas o vulnerables. Los criterios que se consideran son físicos, es decir, distancias desde los centros urbanos, ubicación de sitios de almacenamiento de gas o hidrocarburos, centros de salud, vías de comunicación, y las mejores condiciones medioambientales como son dirección de vientos, lejanía de cuerpos de agua, proveedores de materia prima, entre otros. También se enlistaron los temas que no son negociables y que deberán considerarse como zonas de exclusión, como pueden ser Áreas Naturales Protegidas, Ecosistemas protegidos, zonas arqueológicas, zonas de fallas geológicas y hundimientos, entre otras.

b) Recopilación de la información

Teniendo claro el objetivo se revisarán las páginas web de las dependencias oficiales como INEGI, SMN, CONAGUA, CONABIO, SGM, CONAFOR, CONANP, SAGARPA, SEMARNAT, SCT, entre otras para obtener información correspondiente al área de estudio.

También se solicitará la información correspondiente a las dependencias municipales como son Desarrollo Urbano, Catastro, Obras Públicas, Planeación, Coordinación General de Desarrollo Económico y Combate a la Desigualdad, Protección Civil Municipal y Estatal, SIAPA y Comisión Federal de Electricidad principalmente.

De cada una de ellas se deberá revisar que cuenten con la georreferenciación correspondiente, proyección adecuada y consistente entre todas las capas, además de los metadatos (información particular dentro de la capa), y se utilizará la información para la realización de los mapas temáticos.

c) Procesamiento en el Sistema de Información Geográfica (SIG)

Con la información proporcionada por las autoridades y la que se puede obtener en las páginas web de las dependencias oficiales como INEGI, SMN, CONAGUA, CONABIO, SGM, CONAFOR, CONANP, SAGARPA, SEMARNAT, SCT, entre otras, de las cuales se obtendrán las capas en formato shape (*.shp), autocad (*.dwg) o cualquier otro sistema en que se tengan. Con la información antes mencionada se trabajará en el Sistema de Información Geográfica (SIG) con el software denominado ArcGis versión 10.5 de ESRI, donde se trabajarán las capas de información para la elaboración de los mapas temáticos, así como la clasificación por aptitud de los criterios obtenidos, misma que se realizara con el cruce de capas de información de interés para tener las zonas con mayor aptitud dentro del territorio municipal.

d) Análisis multicriterio del territorio

El procedimiento es un análisis de la información geográfica que se indica más adelante en el software ArcGis y la sobreposición de unas con otras para generar los polígonos o radios de resguardo o restricción. Las capas de información utilizadas fueron entre otras: fisiografía, geología, edafología, hidrología superficial, hidrología subterránea, uso de Selo, vegetación existente, asoleamiento, temperatura promedio, precipitación, y vientos predominantes. Los radios o buffers que se generaron en función de los criterios de selección.

e) Selección del sitio mejor evaluado

Una vez realizado el proceso en el SIG, se obtendrán el mapa clasificado por aptitud en los diferentes temas o criterios con los que se trabaja dados por la normatividad aplicable. Cabe mencionar que con este mapa se podrán tomar decisiones, y se deberán reforzar con las revisiones de las autoridades ambientales responsables del proyecto por parte del municipio.

DESARROLLO

La metodología desarrollada parte con la identificación de las zonas ladrilleras, las cuales regularmente se localizan conglomeradas en la periferia, o dentro de la zona urbana; la identificación puede realizarse mediante la consulta de diagnósticos ladrilleros que previamente se hayan realizado en la zona de estudio, la revisión del padrón de grupos o gremios ladrilleros dados de alta ante las autoridades competentes, o bien realizando el análisis de imágenes satelitales tipo Landsat 8, como se observa en la Figura 3.

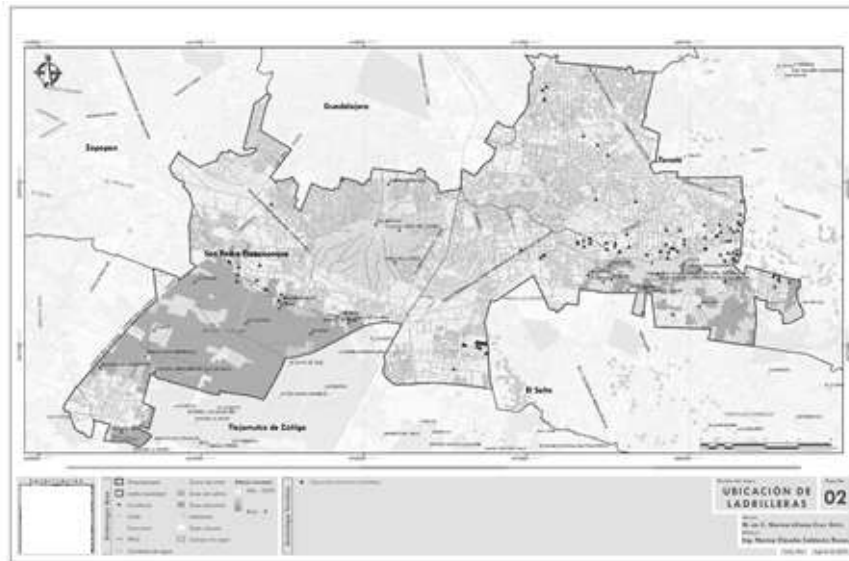


Figura 3. Mapa de ubicación de ladrilleras en zona urbana.

Se realiza la proposición de criterios cualitativos y cuantitativos mediante la aplicación de técnicas de AMC, las cuales consideran de forma simultánea distintos criterios para la toma de decisiones. Estos criterios podrán ser de dos tipos: factores y restricciones; un factor es un criterio que permite definirse en favor de una alternativa, y en contra de otra, al comparar los resultados de medir, cuantitativamente, el valor alcanzado en cada una de ellas; a manera de ejemplo, la localización de la industrial ladrillera puede ser evaluada respecto a una serie de factores: proximidad a las vías de comunicación, proximidad a la ciudad, precio del terreno, pendiente del terreno, etc. Por otra parte, los criterios restrictivos limitan la posibilidad de considera alguna alternativa, excluyendo zonas de forma definitiva, que en el caso de un parque ladrillero, los ejemplos pueden ser terrenos con pendientes mayores del 10%, terrenos destinados a la agricultura de grado alimenticio, áreas naturales protegidas decretadas bajo la categoría de protección, etc.

Posteriormente se crea una base de datos cartográfica de la zona de estudio; dentro de la información base se deben considerar capas de información base, así como de Atlas de Riesgos Estatales o Municipales existentes. Es importante la revisión de zonas de exclusión, definidas como aquellas áreas destinadas para la protección de ecosistemas o para el desarrollo humano, como son áreas de crecimiento urbano, zonas agrícolas, áreas naturales protegidas, cuerpos de agua, zonas de laderas, áreas forestales, entre otras; con ello se obtendrá un primer filtro de análisis para la delimitación de polígonos potenciales.

Se eligió el Proceso de Análisis Jerárquico (PAJ), el cual se basa en la selección de manera ponderada mediante el uso de una matriz de comparación de pares y bajo niveles de relevancia por prioridades; los parámetros de prioridad estarán dados con base en la revisión de normatividad municipal, estatal o federal aplicable, según sea el caso de la zona de estudio, como pueden ser físicos (distancia con respecto a centros urbanos, líneas de conducción de hidrocarburos, cuerpos de agua, etc.), infraestructura (cobertura de servicios básicos, densidad de población, redes de transporte, etc.), y para los cuales, la normatividad vigente marca distancias mínimas, lo que permite proponer alternativas para zonas aptas, moderadamente aptas, y no aptas, según el parámetro a analizar. Algunos de los criterios seleccionados para el presente ejercicio se describen en el Cuadro 1 clasificados por categoría de análisis:

Cuadro 1. Criterios propuestos para el análisis de selección.

Categoría	Subcategoría	Factor	W _c	W _f	W _c W _f	N
Ambiental	Emisiones	CO ₂	36%	0.150	0.054	5.400
		PM ₁₀		0.150	0.054	5.400
		PM _{2.5}		0.150	0.054	5.400
	Físico	Hidrología superficial		0.080	0.029	2.880
		Hidrología subterránea		0.080	0.029	2.880
		Edafología		0.100	0.036	3.600
		Pendiente		0.100	0.036	3.600
		Geología		0.050	0.018	1.800
Uso de suelo	0.050	0.018	1.800			
Infraestructura vial	0.090	0.032	3.240			
Riesgos naturales	Hidrometeorológico	Zonas de inundación	38%	0.200	0.076	7.600
		Sequías		0.200	0.076	7.600
		Heladas		0.200	0.076	7.600
	Geológico	Sismos		0.200	0.076	7.600
		Laderas		0.200	0.076	7.600
Social	Cadena de valor	Compra de combustibles	26%	0.250	0.065	6.500
		Compra de materia prima		0.300	0.078	7.800
		Cercanía a puntos de venta		0.100	0.026	2.600
	Salud	Cercanía a centros de salud		0.150	0.039	3.900
	Población y vivienda	Cercanía a los centros de población		0.050	0.013	1.300
Acceso a servicios básicos		0.150	0.039	3.900		

W_c: Ponderación por categoría

W_f: Ponderación por factor

N: Normalización

Definidos los parámetros de evaluación se establece la escala de análisis: regla 1: Parámetro A es igualmente preferido al Parámetro B, regla 2: Parámetro A es moderadamente preferido a Parámetro B, hasta llegar a regla n: Parámetro X es extremadamente preferido a Parámetro B, para obtener un peso por importancia considerada. Posteriormente, el método PAJ indica la obtención del vector prioridad o normalización de la matriz de comparación de pares dividiendo el valor de cada celda entre la sumatoria de la columna correspondiente. Obtenidos los valores de prioridad, se procede a la transformación de la capa correspondiente tipo “shape” a “raster”, y con el álgebra de mapas, se realice el cruce de información por criterio, para zonas aptas, moderadamente aptas o no aptas.

RESULTADOS

Se identificaron 6 predios mediante la metodología, así como la propuesta de 4 sitios que de igual manera se evaluaron con el AMC y PAJ. Los 10 predios, se catalogaron de acuerdo a su posibilidad de ser ocupados por un parque ladrillero, como se observa en el Cuadro 2 y Figura 4.



Figura 4. Polígonos irregulares resultantes obtenidos mediante la aplicación de la metodología propuesta; figura a) municipio, figura b) acercamiento a polígonos irregulares resultantes.

Cuadro 2. Clasificación de los predios ubicados dentro del municipio de San Pedro Tlaquepaque.

Origen	Polígonos	Clasificación
Ubicados en el SIG por AMC	Sitio 1	Dentro de Área Natural Protegida Estatal
	Sitio 2	Zona agrícola
	Sitio 3	Zona agrícola
	Sitio 4	Zona agrícola
	Sitio 5	Zona agrícola
	Sitio 6	Zona agrícola
Propuestos	Predio 7	A la vista de centros escolares y médicos
	Predio 8	Banco de material abandonado
	Predio 9	Cerca de vialidades y estaciones de servicios
	Predio 10	Dentro de un fraccionamiento en desarrollo

Dado que algunos de los sitios que se encuentran cerca o dentro de las zonas agrícolas no son opción ya que no debe verse comprometido el suministro alimenticio, se descartaron 5 de los 10 sitios, uno más por encontrarse en un Área Natural Protegida, otro más por el excesivo costo del terreno. Se analizaron 3 predios a detalle.

El predio numero 8 fue el que se consideró con mejores posibilidades de usarse adecuadamente para el trabajo físico característico del oficio, en la Figura 5 se pudo observar su ubicación y características generales.



Figura 5. Predio seleccionado (polígono blanco) para el desarrollo de un centro de trabajo de producción de ladrillo artesanal.

El resultado de la metodología de AMC y PAJ fueron polígonos irregulares pero ponderados de acuerdo a una normatividad; la selección del polígono óptimo quedará en manos de la autoridad correspondiente quien, con base en una consulta entre autoridades y productores, podrán elegir el polígono que cubra con los reglamentos en materia de protección ambiental y civil, así como las necesidades de los productores.

CONCLUSIONES

Las bondades de la aplicación de la presente metodología dan como resultado tanto la detección de polígonos óptimos analizados con base en los criterios seleccionados, así como el análisis de polígonos existentes con los que las autoridades ya cuentan, pero que desconocen si dichos polígonos cumplen con la normatividad en materia ambiental y de análisis de riesgos, por lo que esta metodología se puede replicar a ambos casos, facilitando la toma de decisiones para las autoridades.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ayuntamiento de Zapopan 2017, Reglamentación de las ladrilleras en el municipio de Zapopan, Jal., https://www.zapopan.gob.mx/wp-content/uploads/2011/07/Iniciativa-Exp_64_17_Reg_de_las_Ladrilleras.pdf
2. Ceballos-Silva, A., & López-Blanco, J. (2003). Delineation of suitable areas for crops using a Multi-Criteria Evaluation approach and land use/cover mapping: a case study in Central Mexico. *Agricultural Systems*, 77(2), 117-136.
3. COMIMSA; SERPRO. (2012). Análisis del mercado ladrillero artesanal en la comunidad El Refugio de León, Guanajuato. Saltillo, Coahuila: Corporación Mexicana de Materiales SA de CV.
4. Gobierno de Tlaquepaque (2016), Reglamento de ladrilleras en el municipio de San Pedro Tlaquepaque, <https://transparencia.tlaquepaque.gob.mx/wp-content/uploads/2016/01/GacetaMunicipalTomoXXIV.pdf>
5. González I., Galán E. y Fabbri Y.B. (1998). Problemática de las emisiones de fluor, cloro y azufre durante la cocción de materiales de la industria ladrillera. *Bol. Soc. Esp. Ceram. Vidr.* 37, 307-313.
6. IEE. (2010). Inventario de emisiones de contaminantes criterio Guanajuato 2008. Guanajuato: Instituto de Ecología del Estado de Guanajuato.

7. INECC. (2014). Informe Nacional de Calidad del Aire 2013, México. Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climático. Cd. México.
8. INECOL (1998). Norma Técnica Ecológica NTEIEG-001/98, Que establece las condiciones que deben reunir los sitios destinados a la instalación y reubicación de hornos ladrilleros en el estado. Periódico Oficial del Gobierno del Estado de Guanajuato. 5 de mayo de 1998.
9. Malczewski, J. (2006). GIS-based multicriteria decision analysis: A survey of literature. *International Journal of Geographical Information Science*, 20(7), 703-726. doi:10.1080/13658810600661508.
10. Malczewsky J. (1999). *GIS and Multicriteria Decision Analysis*. John Wiley & Sons, Nueva York, 392 pp.
11. Rosas Ávila, J., García Romero, A., López García, J., & Manzo Delgado, L. (2015). Análisis multicriterio para la delimitación de una región árida del centro de México. *Acta Universitaria*, 25(4), 11-25. doi: 10.15174/au.2015.772.
12. SEMADET, 2017, Norma técnica ambiental NAE-SEMADET-_/2017: Criterios y especificaciones técnicas para la ubicación y operación de fuentes fijas y de área con actividad artesanal para la producción de piezas elaboradas con arcillas en el estado de Jalisco. Borrador de la Norma técnica.
13. SEMARNAT (1993). Norma Oficial Mexicana NOM-043-SEMARNAT-1993. Que establece los niveles máximos permisibles de emisión a la atmósfera de partículas sólidas provenientes de fuentes fijas. Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales. Diario Oficial de la Federación. 22 de octubre de 1993.
14. SEMARNAT (1994). Norma Oficial Mexicana NOM-085-ECOL-1994. Contaminación atmosférica, fuentes fijas. Para fuentes fijas que utilizan combustibles fósiles sólidos, líquidos o gaseosos o cualquiera de sus combinaciones, que establece los niveles máximos permisibles de emisión a la atmósfera de humos, partículas suspendidas totales, bióxido de azufre y óxidos de nitrógeno y los requisitos y condiciones para la operación de los equipos de calentamiento indirecto por combustión, así como los niveles máximos permisibles de emisión de bióxido de azufre en los equipos de calentamiento directo por combustión. Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales. Diario Oficial de la Federación. 2 de diciembre de 1994.
15. Uribe, D., Geneletti, D., Del Castillo, R. F., & Osri, F. (2014). Integrating stakeholder preferences and GIS-based multicriteria analysis to identify forest landscape restoration priorities. *Sustainability*, 6(2), 935-951. doi:10.3390/su6020935.
16. USEPA (1990). National Ambient Air Quality Standards. United States Environmental Protection Agency. <http://epa.gov/air/criteria.html> 11/12/08.

DESENVOLVIMIENTO DE FASE TEMPORAL PARA INTERFEROMETRÍA DINÁMICA EMPLEANDO UN SISTEMA POLARIMÉTRICO PIXELADO

Geliztle A. Parra Escamilla¹, David I. Serrano García¹, Jorge L. Flores¹, Yukitoshi Otani²

¹Departamento de Electrónica, Centro de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), Universidad de Guadalajara, Campus de Ciencias Exactas e Ingenierías, Av. Revolución 1500, C.P. 44840, Guadalajara, Jalisco, México,

²Utsunomiya University, Center for Optical Research and Education (CORE), 7-1-2, Yoto, 321-8585 Utsunomiya, Tochigi, Japan
geliztle.parra@academicos.udg.mx

RESUMEN

Describimos un sistema robusto para recuperar la fase usando un algoritmo de desenvolvimiento de fase temporal y una cámara pixelada sensible a la polarización de la luz. Considerando las características del sensor de polarización y su capacidad para adquirir simultáneamente, los interferogramas desplazados en cuatro fases de manera estable, proponemos el uso de una técnica de desenvolvimiento de fase temporal para simplificar el procedimiento de recuperación de fase en eventos dinámicos.

Se analizaron dos objetos de fase dinámica mostrando variaciones temporales del índice de refracción: a) la flama de un encendedor y b) el movimiento de una muestra biológica. Se utilizó un interferómetro de Michelson acoplado a una cámara polarizada pixelada.

También demostramos que, al combinar el sensor polarizado con los algoritmos de desenvolvimiento de fase temporal, no solo se simplifica el procedimiento de desenvolvimiento de la fase, sino que también se reduce el tiempo de cálculo en un orden de magnitud en comparación con otros algoritmos. En el enfoque adoptado, cada píxel se procesa independientemente obteniendo la diferencia de fase para un tiempo específico abriendo la posibilidad de análisis en tiempo real.

INTRODUCCIÓN

En interferometría existen numerosos métodos para el análisis cuantitativo de fase [1–4]. Estos se pueden agrupar en técnicas de demodulación de fase espacial y temporal. Los algoritmos de interferometría de cambio de fase pertenecen al primer grupo, requieren al menos tres interferogramas, mientras una modulación de fase controlada es introducida. Esto limita su uso al estudio de eventos estáticos. En el segundo grupo, están las técnicas de demodulación de fase temporal, apropiadas para analizar eventos dinámicos como desplazamientos, vibraciones de objetos sólidos y caracterización de metasuperficies [5]. Sin embargo, estas técnicas requieren una adquisición simultánea de múltiples imágenes, que exigen una configuración óptica complicada o costosa para su implementación, pero con posibilidades de análisis y mediciones en tiempo real.

Las cámaras polarizadas-pixeladas consisten en un analizador espacial variante que se alinea píxel a píxel en el sensor de la cámara [1,2,6]. Con el desarrollo de estos dispositivos, se han propuesto varias aplicaciones para analizar fenómenos de birrefringencia [1,2], así como la implementación de nuevos esquemas interferométricos [1].

En los últimos años, se ha dedicado un esfuerzo considerable al desarrollo de nuevos métodos de demodulación de fase para medición de fenómenos dinámicos [7-12]. Por ejemplo, en [3] se presenta un algoritmo sin errores de desentonamiento y sin descartar píxeles del sensor CCD. En [4], se propone un algoritmo que emplea la respuesta de frecuencia espacial y en [7], se empleó un algoritmo de cambio de fase temporal para eliminar armónicos complejos producidos por respuestas no lineales de la cámara CCD. Recientemente en [13], un algoritmo de demodulación de fase espacio-temporal, fue implementado en el dominio de la frecuencia empleando la transformada de Fourier 3D. Estas propuestas consideran la arquitectura de la cámara polarizada con un reductor de ruido, sin embargo, es necesario realizar un proceso de desenvolvimiento, el cual aumenta considerablemente tiempo de cálculo, haciendo inadecuado su uso para el análisis en tiempo real. En años recientes, numerosos algoritmos de desenvolvimiento de fase han sido introducidos, entre los más relevantes están “phase fringe counting/scanning techniques” [14,15], “cellular automata methods” [16–20], “branch cut methods” [21–23] y algoritmos de desenvolvimiento temporal [24–26].

En este trabajo, mostramos un algoritmo de desenvolvimiento de fase temporal para ser usado en eventos de interferometría dinámica, combinando el proceso de demodulación de fase y desenvolvimiento en un solo paso. La propuesta considera la dependencia temporal de los datos adquiridos entre dos cuadros consecutivos.

PARTE EXPERIMENTAL

La Fig. 1(a) muestra el diagrama experimental implementado previamente en [13]. El sistema se basa en un interferómetro tipo Michelson (PMI) empleando una cámara polarizada-pixelada para obtener cuatro cambios de fase (interferogramas) en una sola captura. Se usó un láser ($\lambda = 532 \text{ nm}$) polarizado linealmente a 45° después de pasar por el primer polarizador (LP_{45°). Solo el haz de luz transmitido a través del primer divisor de haz (BS) se utiliza, mientras que el haz reflejado se descarta. El divisor de haz polarizado (PBS) divide la entrada en dos haces: el haz reflejado, con polarización paralela, pasa a través de la muestra y el otro se transmite con polarización perpendicular, funcionando como el haz de referencia. Debido a las propiedades del PBS, el objeto y el haz de referencia llevan estados de polarización lineal a 0° y 90° , respectivamente. Las imágenes del interferograma son capturadas cuando pasan a través del primer BS, el sistema imagen (L_1, L_2) llegando al CCD. La placa de cuarto de onda (QWP_{45°), cuyo ángulo es de 45° , se utilizó para obtener haces polarizados circularmente en la dirección opuesta, que luego interfieren en el plano del CCD. Para mejorar el contraste del interferograma se utilizó un filtro espacial y un sistema de reducción de speckle (Optotune, modelo LSR-3005).

La máscara polarizadora en la cámara CCD (Photonics Lattice, modelo PI-100) [2] se basa en un cristal fotónico, con una longitud de onda de trabajo de 533 nm ., ver Fig. 1(b). La cámara CCD tiene una resolución espacial de 1024×1360 píxeles con un tamaño de píxel de $6 \times 6 \mu\text{m}$ y una velocidad de 10 fps . El conjunto de polarizadores está compuesto por un superpíxel con cuatro orientaciones, que se replica a través del sensor CCD. La Fig. 1(c) muestra un cuadro extraído de la secuencia de video adquirida, y la Fig. 1(d) representa los cuatro interferogramas demultiplexados.

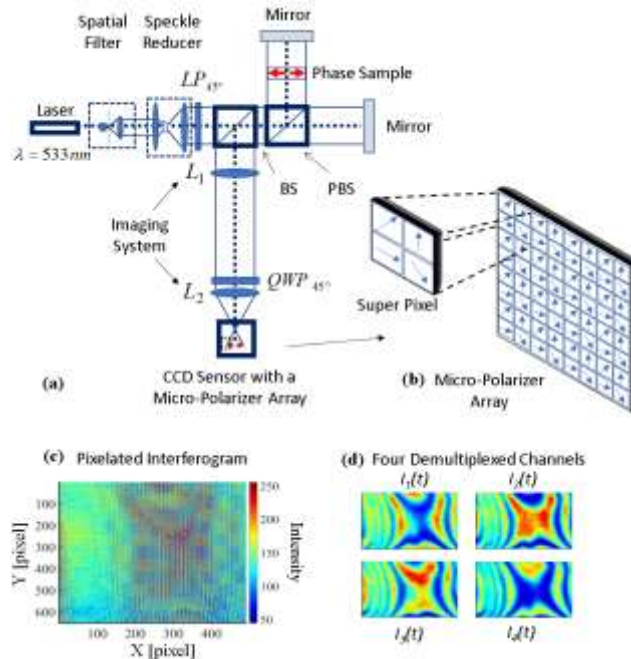


Fig. 1 Configuración experimental. (a) Interferómetro de Michelson acoplado con una cámara polarizada-pixelada. (b) Conjunto de micropolarizadores compuesto por un analizador variante espacial replicado en el sensor CCD. (c) Interferograma polarizado-pixelado y (d) interferograma demultiplexado en cuatro cambios de fase de $\pi/2$.

En los algoritmos más comunes de procesamiento de fase, la imagen detectada por la cámara polarizada, ver Fig. 1(c), se descompone en cuatro interferogramas donde existe un corrimiento de fase de $\pi/2$ entre cada uno, ver Fig. 1(d). Para este caso, se puede emplear el algoritmo de recuperación de fase estándar de cuatro pasos:

$$\phi(i, j, t) = \tan^{-1} \left[\frac{I_2(i, j, t) - I_4(i, j, t)}{I_1(i, j, t) - I_3(i, j, t)} \right] \quad (1)$$

donde, (i, j, t) representa las coordenadas espaciales (i, j) y temporal (t) . $I_1(i, j, t), I_2(i, j, t), I_3(i, j, t)$ y $I_4(i, j, t)$ son los interferogramas de la fase multiplexada en cada frame de intensidad capturado por la cámara polarizada-pixelada. La Ec.(1) devuelve una fase envuelta en un rango de 2π donde posteriormente es necesario aplicar técnicas de desenvolvimiento pudiendo resultar en un alto costo computacional al momento de analizar escenas dinámicas.

El algoritmo de desenvolvimiento de la fase temporal calcula la diferencia de fase, $\Delta\phi$, entre dos mapas de fase obtenidos de dos frames consecutivos temporalmente. Es decir, estos fueron tomados en un momento (t) y $(t - 1)$, respectivamente. En nuestro caso, cada frame de intensidad, $I(i, j, t)$, capturado por la cámara polarizada se divide en 4 interferogramas con desplazamiento de fase [$I_1(i, j, t) = I(2i - 1, 2j - 1, t), I_2(i, j, t) = I(2i, 2j - 1, t), I_3(i, j, t) = I(2i - 1, 2j, t)$ y $I_4(i, j, t) = I(2i, 2j, t)$] donde (i, j) son la posición del píxel en la imagen adquirida y (t) representa el número del cuadro en la secuencia.

En búsqueda de la simplicidad, a continuación, omitiremos la dependencia de las funciones I y ϕ en las coordenadas espaciales (i, j) . La diferencia de fase, de manera temporal, se puede obtener como [24]:

$$\Delta\phi(t) = \tan^{-1} \left[\frac{\Delta I_{42}(t)\Delta I_{13}(t-1) - \Delta I_{13}(t)\Delta I_{42}(t-1)}{\Delta I_{13}(t)\Delta I_{13}(t-1) - \Delta I_{42}(t)\Delta I_{42}(t-1)} \right] \quad (2)$$

donde $\Delta I_{ab}(t) = I_a(t) - I_b(t)$ y $\Delta I_{ab}(t-1) = I_a(t-1) - I_b(t-1)$. La fase desenvuelta en cualquier momento se puede recuperar calculando la suma de fases de $t = 1$ a $t = s$, a lo largo de la dirección t como:

$$\phi(s) = \phi_{ref}(t) + \sum_{t=1}^{t=s} \Delta\phi(t) \quad (3)$$

donde $\phi_{ref}(t)$ representa la fase de referencia de un frame dado, que se recupera utilizando el algoritmo común de recuperación de fase de 4 pasos proporcionado por la Ec.(1) y un procedimiento de desenvolvimiento de fase espacial 2D [13]. La información recuperada en la Ec.(3) representa la fase desenvuelta para cualquier tiempo, es decir, podemos evaluar la fase desde un tiempo $t = 1$ hasta el último evento o hasta un tiempo dado, s . Cabe hacer mención, que solo se necesita recuperar una fase de referencia utilizando el algoritmo de demodulación de fase estándar en conjunto con el desenvolvimiento de fase.

RESULTADOS

Para verificar la efectividad de la propuesta, dos conjuntos de datos fueron adquiridos anteriormente en ref [13]. Estos datos se utilizaron como datos de entrada para ser usados con el algoritmo de desenvolvimiento de fase temporal. En el primero, las variaciones del índice de refracción fueron generadas por la flama de una antorcha de alta temperatura (modelo PT-XT, SOTO) [27], ubicada en un brazo del interferómetro. En el segundo caso, la variación del índice de refracción se genera por el movimiento de una muestra biológica.

A manera de comparación, también se implementó el procedimiento empleado en [13] donde los autores utilizaron un algoritmo de demodulación de fase a través de una transformada de Fourier 3D (FFT 3D) para obtener la fase envuelta, y el proceso de desenvolvimiento se realiza cuadro a cuadro

empleando el algoritmo de Goldstein de desenvolvimiento de fase 2D [28-29]. La Fig. 2 muestra los resultados obtenidos con ambos algoritmos procesando el mismo frame: en la Fig. 2(a) se emplea el método de desenvolvimiento de la fase temporal y en Fig. 2(c) método frame a frame. Mientras que la Fig. 2(b) y (d) representan el perfil de la variación temporal observada una línea blanca que se muestra en la Fig. 2(a) y (c). Finalmente, en Fig. 2(e) mostramos una comparación de la fase en función del tiempo, usando tres píxeles, vea las líneas azul, rosa y negra en la Fig. 2(b) y (d), en estas imágenes, podemos observar que ambas fases presentan perfiles similares.

Del video de la flama, consideramos 336 cuadros (33.25 s) con una región de interés delimitada de 650×490 píxeles. Usando el método cuadro a cuadro, el tiempo de procesamiento fue de 749.89s (21.3s para la demodulación de fase FFT **3D** y 728.59s para el proceso de desenvolvimiento de fase). Usando el algoritmo de desenvolvimiento de fase temporal el tiempo total de procesamiento fue de 45.3 s. En términos de procesamiento de cuadros por segundo, la metodología cuadro por cuadro tiene una velocidad de 0.44 fps., también se implementó el algoritmo phase shifting de 4 pasos con el que se obtuvo 0.77fps., mientras que nuestra propuesta utilizando el algoritmo de desenvolvimiento temporal es de 7.41 fps.

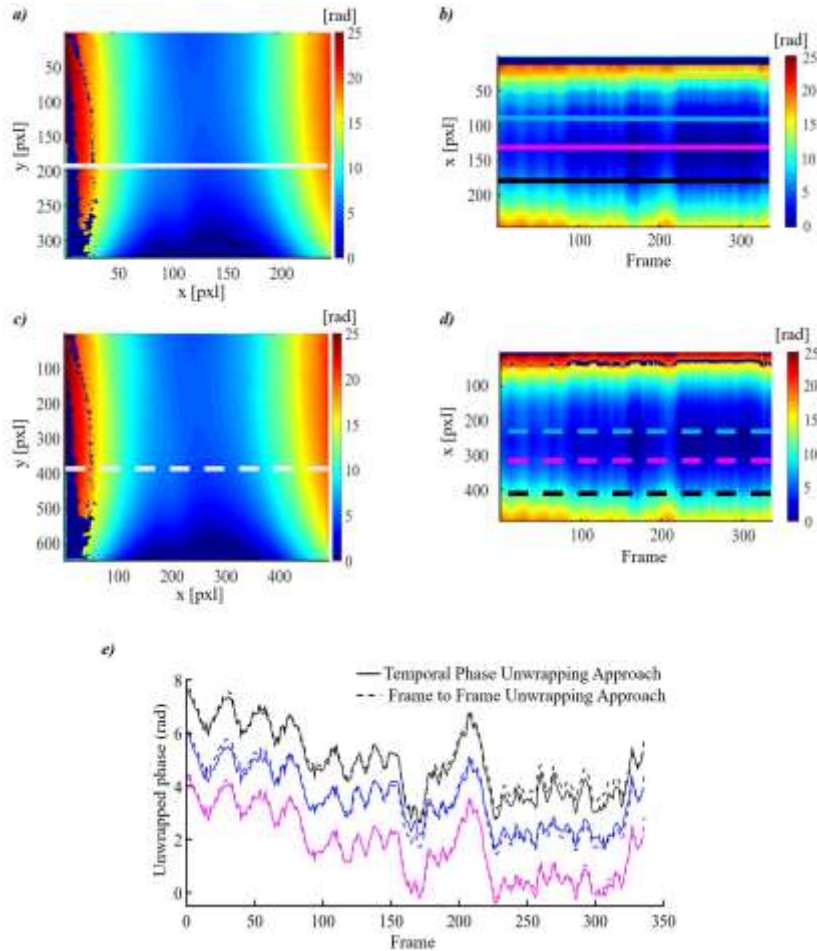


Fig. 2 Fase desenvuelta: (a) empleando el método de desenvolvimiento de fase temporal y (c) usando el método de cuadro a cuadro descrito en [13]. (b) y (d) muestran el perfil de la variación temporal de una línea y (e) muestra el perfil de la evolución temporal de la fase en tres píxeles para ambas técnicas.

El segundo experimento consistió en analizar el cambio en índice de refracción generado por el movimiento de un camarón (*Palaemonetes paludosus* [30]) y detectado por el interferómetro. La pecera se colocó en uno de los brazos del interferómetro y se adquirieron 47 frames, la región de interés fue de 480×1020 píxeles.

La figura 3(a) muestra un frame (interferograma), el área dentro del cuadro blanco es la región procesada, la región oscura corresponde al camarón. La evolución temporal de la fase se calculó mediante: el desenvolvimiento de la fase temporal, el algoritmo phase shifting de 4 pasos y la demodulación de fase FFT 3D [13]. El tiempo de procesamiento con nuestro algoritmo fue de 11.9 s (3.94 fps.) mientras que para el algoritmo de phase shifting de 4 pasos fue de 100.99 s (0.46 fps.) y 255 s (0.18 fps.) para la demodulación de fase FFT3D. La Fig. 3(b) muestra frames en diferentes tiempos.

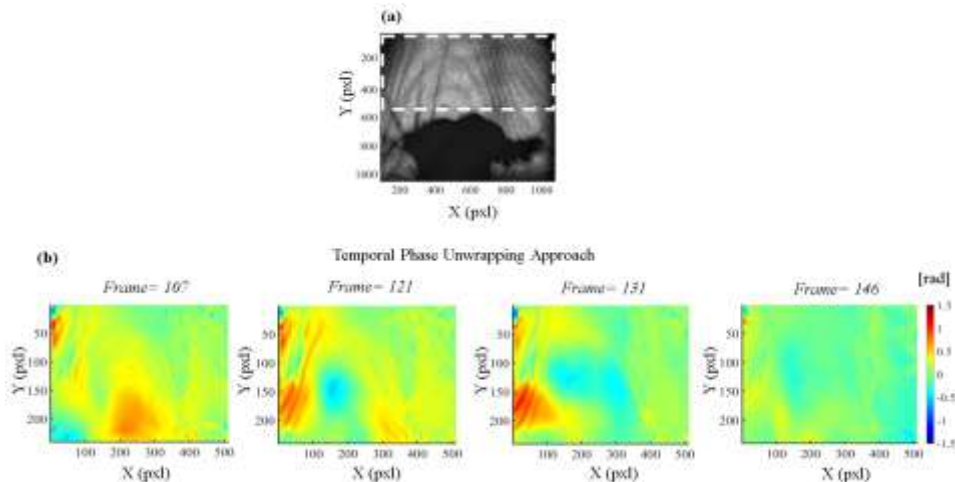


Fig. 3 Variación del índice de refracción de una muestra viva. (a) Frame extraído de la secuencia de video adquirida, la región limitada por la línea de puntos es el área analizada. El análisis se hizo después de que el camarón (región oscura) se moviera fuera del campo de visión. (b) Muestra cuatro fases recuperadas por algoritmo de desenvolvimiento de fase temporal.

CONCLUSIONES

Demostramos que usando un interferómetro de Michelson polarizado y algoritmos de desenvolvimiento de fase temporal, es posible analizar eventos dinámicos en tiempo real.

Al interferómetro se acoplo un sensor CCD polarizado-pixelado con la capacidad de adquirir hasta 10 fps. para ser usado en conjunto con técnicas de interferometría dinámica, en combinación con algoritmos de desenvolvimiento de fase temporal, dándonos la ventaja de ser insensible a las fluctuaciones de la intensidad del láser. Nuestro enfoque muestra resultados similares a los presentados por otras técnicas anteriormente, pero con una reducción considerable en el tiempo de procesamiento, al menos un orden de magnitud. Entre otras ventajas presenta la simplicidad para la implementación y posibilita la realización de mediciones de eventos dinámicos en tiempo real. Cada píxel se trata de forma independiente espacialmente, y el proceso de enmascaramiento evita la propagación del ruido de manera espacial.

BIBLIOGRAFÍA

1. 4D Technology, <https://www.4dtechnology.com/products/polarimeters/>.
2. Photonic Lattice, Inc., https://www.photonic-lattice.com/en/products/polarization_camera/.
3. M. Servin, J.C. Estrada, "Error-free demodulation of pixelated carrier frequency interferograms", *Opt. Express*, Vol. 18, 2010, pp 18492–18497.

4. B. Kimbrough, J. Millerd, "The spatial frequency response and resolution limitations of pixelated mask spatial carrier-based phase shifting interferometry", *Proc. SPIE* 85706, 2010, 77900K.
5. H.T. Chen, A.J. Taylor, N. Yu, "A review of metasurfaces: physics and Applications", *Rep. Progr. Phys.*, Vol. 79,7, 2016, pp. 076401.
6. J.L. Flores, J.A. Ferrari, C.D. Perciante, "Faraday current sensor using space-variant analyzers", *Opt. Eng.*, Vol. 47, 12, 2018, pp. 123603.
7. J.M. Padilla, M. Servin, J.C. Estrada, "Harmonics rejection in pixelated interferograms using spatio-temporal demodulation", *Opt. Express*, Vol.19, 2011, pp. 19508.
8. K. Creath, G. Goldstein, "Dynamic quantitative phase imaging for biological objects using a pixelated phase mask", *Biomed. Opt. Express*, Vol. 3,2012, pp. 2866–2880.
9. M. Novak, J. Millerd, N. Brock, M. North-Morris, J. Hayes, J. Wyant, "Analysis of a micropolarizer array-based simultaneous phase-shifting interferometer", *Appl. Opt.* Vol. 44, 2005, pp. 6861.
10. K. Creath, G. Goldstein, "Processing and improvements in dynamic quantitative phase microscope", in: C.J. Cogswell, T.G. Brown, J.-A. Conchello, T. Wilson (Eds.), *SPIE BiOS*, in: *International Society for Optics and Photonics*, Vol. 8589, 2013, 85891A–85891A.
11. K. Creath, G. Goldstein, "Performance enhancement and background removal to improve dynamic phase imaging of biological organisms", in: *Proc. Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2012, pp. 3163–3169.
12. G. Goldstein, K. Creath, "Dynamic four-dimensional microscope system with automated background leveling", in: *SPIE Optical Engineering + Applications* 8493, 2012, p. 84930N.
13. D.I. Serrano-Garcia, Y. Otani, "Dynamic phase measurements based on a polarization Michelson interferometer employing a pixelated polarization camera", *Adv. Opt. Technol.*, Vol. 6, 1, 2016, pp. 47–51.
14. K. Rani, Vikas, A. Shankar, "A review on Phase unwrapping techniques in interferometry", *IJARECE* Vol. 6, 7, 2017, pp. 798–802.
15. T.R. Judge, P.J. Bryanston-Cross, "A review of phase unwrapping techniques in fringe analysis", *Opt. Lasers Eng.*, Vol. 21,4, 1994, pp. 199–239.
16. D.C. Ghiglia, G. Mastin, L.A. Romero, "Cellular-automata method for phase Unwrapping", *J. Opt. Soc. Amer.*, Vol. 4, 1,1987, pp. 267–280.
17. A. Spike, D.W. Robinson, "Investigation of the cellular automata method for phase unwrapping and its implementation on an array processor", *Opt. Lasers Eng.*, Vol. 14,1, 1991, pp. 25–37.
18. R.M. Goldstein, H.A. Zebker, C. L.Werner, "Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping", *Radio Sci.*, Vol. 23,4,1988, pp. 713–720.
19. N.H. Ching, D. Rosenfeld, M. Braun, "Two-dimensional phase unwrapping using a minimum spanning tree algorithm", *IEEE Trans. Image Process*, Vol. 1,3,1992, pp. 355–365.
20. L. An, Q. Xiang, S. Chavez, "A fast implementation of the minimum spanning tree method for phase unwrapping", *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol. 19, 8, 2000, pp. 805–808.
21. M. Zhao, L. Huang, Q. Zhang, X. Su, A. Asundi, Q. Kemao, "Quality-guided phase unwrapping technique: comparison of quality maps and guiding strategies", *Appl. Opt.*, Vol. 50, 33, 2011, pp. 6214–6224.
22. M.A. Herráez, D.R. Burton, M.J. Lalor, M.A. Gdeisat, "Fast two-dimensional phase unwrapping algorithm based on sorting by reliability following a noncontinuous path", *Appl. Opt.*, Vol. 41, 2002, pp. 7437–7444.
23. S. Tomioka, S. Nishiyama, "Phase unwrapping for noisy phase map using localized compensator", *Appl. Opt.*, Vol. 51, 21, 2012, pp. 4984–4994.
24. J.M. Huntley, H. Saldner, "Temporal phase-unwrapping algorithm for automated interferogram analysis", *Appl. Opt.*, Vol. 32, 17, 1993, pp. 3047–3052.
25. C. Zuo, L. Huang, M. Zhang, A. Asundi, "Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: A comparative review", *Opt. Lasers Eng.*, Vol. 85, 2016, pp. 84–103.
26. X. Su, Q. Zhang, "Dynamic 3-D shape measurement method: A review", *Opt. Lasers Eng.*, Vol. 48, 2010.

27. SOTO, PT-XT Pocket Torch Extended, <http://sotooutdoors.com/legacy/products/item/PT-XT.html>.
28. M.D. Pritt, D.C. Ghiglia, "Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software", Wiley-Interscience, (New York, 1998).
29. D. Malacara, "Optical Shop Testing", third ed., Wiley, (New York, 2007).
30. Chelsea Baranowski, Palaemonetes paludosus – Riverine grass shrimp, http://animaldiversity.org/accounts/Palaemonetes_paludosus/.

SOLUCIONES ESTADÍSTICAS PARA EL CRECIMIENTO DE LA PLANTA SACAZIL

Rubí Alcalá González¹, Hilda Cristina Martínez Tovar¹, Perla Mayara Alcalá González¹, Claudia Sánchez Ibarra¹, Guadalupe Esmeralda Alcalá González¹, Jorge Luis Morales Duque², Yazmin Montelongo Rodríguez²

¹Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la Región Carbonífera, ²Alumno del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la Región Carbonífera
rubialcala@hotmail.com

RESUMEN

El estudio consiste en un proceso sistemático, organizado y experimental con la utilización de herramientas estadísticas (Método Taguchi, diseño de experimentos) que nos permiten analizar el comportamiento de las variables de estudio e identificar los factores que optimizan el cultivo y crecimiento de la planta sacazil.

La planta Sacazil (*Echinocereus poseelgeri*) es un cactus originario de México, crece en los estados de Coahuila, Durango, Nuevo León, San Luis Potosí, Tamaulipas además en Estados Unidos Americanos la podemos encontrar en el estado de Texas. Crece sobre todo con varios brotes y forma un bulbo. Es una especie sujeta a protección especial, por la SEMARNAT, NOM-059-SEMARNAT-2010, Protección ambiental-Especies nativas de México de flora y fauna silvestres-Categorías de riesgo y especificaciones para su inclusión, exclusión o cambio-Lista de especies en riesgo).

El tipo de investigación utilizado con respecto al periodo de recopilación es prospectivo, de acuerdo con el fenómeno estudiado es longitudinal, ya que las variables se medirán en varias ocasiones para obtener resultados acerca del crecimiento de la planta; experimental, porque son aplicados diseños de experimentos de 3 factores 2 niveles, para identificar las variables que afectan al cultivo de la planta y encontrar la opción óptima para su cultivo. La muestra utilizada en el experimento es de 4 plantas en la etapa 1 y 8 plantas en la etapa 2. Las plantas fueron recolectadas en un rancho ubicado en el Municipio de Muzquiz, Coahuila. El instrumento utilizado para realizar la recopilación de datos es una hoja de verificación para el diseño de experimento, donde se anotaron las dimensiones de la altura en centímetros y grosor, su color inicial, posteriormente cada semana se registraban los progresos de la planta hasta completar un periodo de dos meses y agregar la medición del crecimiento de la raíz. Los resultados obtenidos: en la primera etapa de experimentación, las condiciones ideales para el crecimiento en centímetros de la planta y de la raíz fueron: el tipo de tierra debe ser mixta, se debe localizar en sol y la frecuencia de riego es cada 3 días. Se continuó con el experimento en una segunda etapa, ya que en la investigación documental se observó que esta planta crece acompañada, y se realizó otro experimento midiendo otras variables de entrada por dos meses y se encontró que las condiciones ideales para el crecimiento en centímetros de la planta y del bulbo fueron las mismas: debe estar localizada en el suelo, debe estar acompañada de otra planta y se debe utilizar tierra de monte; para el crecimiento de la raíz. En esta etapa se llevó a cabo un análisis de varianza de tres factores y dos niveles para determinar si hay variación en el efecto de salida que es altura de la planta y longitud de la raíz en el cual se obtuvo que con un nivel de confianza del 95% el factor que estadísticamente afecta es que es recomendable sembrar en el suelo. De acuerdo con lo anterior se obtuvo una solución estadística para el cultivo de la planta sacazil.

INTRODUCCIÓN

En este estudio se desarrolla una investigación científica en la que a través de actividades basadas en un proceso sistemático, organizado y experimental utilizando el diseño de experimentos del Método Taguchi y el Análisis de varianza de tres factores y 2 niveles para cumplir con el objetivo para las condiciones ideales para cultivar la planta sacazil en la Región Carbonífera. Es así como en este estudio se muestran soluciones estadísticas para el cultivo de la planta sacazil, aunque cabe mencionar que la podemos localizar aquí en la región carbonífera en ranchos o praderas ya que en nuestra región tenemos suelo desértico y semiárido; siendo así más factible para cultivarla.

La presente investigación tiene como objetivo definir un método para cultivar la planta sacazil en la Región Carbonífera. Para cumplir con lo anterior debemos conocer métodos del cultivo de algunas

de las especies de la familia cactáceas, definir métodos y variables que puedan influir en el crecimiento de la planta, analizar las variables que intervienen en el crecimiento de la planta, identificar las condiciones óptimas para el crecimiento de la planta. Con lo anterior se espera mejorar las condiciones de vida del sector rural y conservar la planta sacazil ya que de acuerdo con la SEMARNAT es considerada como una especie sujeta a protección especial.

En la investigación se realizaron dos etapas de diseño de experimentos para poder encontrar las condiciones más factibles para su crecimiento y cultivo, en la primera etapa se analizaron el tipo de tierra, la localización en el sol y en la sombra y la frecuencia de riego están se consideraron como variables de entrada teniendo 2 niveles para cada factor, en la segunda etapa se determinó como variables de entrada la localización (maceta o suelo) la forma (individual o acompañada de otras plantas) y el tipo de tierra en los dos etapas las variables de salida fueron la altura de la planta y crecimiento de la raíz.

TEORÍA

La planta denominada sacazil, *Echinocereus poselgeri* (nombre científico) está distribuida en Nuevo León y Tamaulipas [7]. *Echinocereus* es el género más diverso en la tribu *Echinocereae* con 64 especies. Se distribuye en el norte de América, desde el centro de México al centro de los Estados Unidos, abarcando 18 regiones biogeográfica de acuerdo con el resumen nomenclatura de *Echinocereus* y su clasificación infra genérica pertenece a la sección *Wilcoxia*, incluye *Echinocereus leucanthus*, *poselgeri* y *waldeisii* [5], crece sobre todo con varios brotes y forma un bulbo, patrón similar de dalias. Los delgados y cilíndricos brotes azules-verdes oscuros se estrechan hacia la punta. Miden de 60 a 120 cm de largo y tienen diámetros desde 1 hasta 2 centímetros. Tiene ocho a diez costillas bajas y discretas que no son tubérculos. Con una única espina central ligeramente aplanada, oscura de hasta 9 milímetros de largo. Los 8 a 16 espinas radiales blanquecinas o grisáceas tienen una punta más oscura y son 2 y 4,5 milímetros de largo. Las flores en forma de embudo son de color rosa magenta. Aparecen a veces en terminales, por lo general, se encuentran, en las proximidades de las puntas de los brotes, son de hasta 6 cm de largo y alcanza un diámetro de hasta 7 centímetros. Los frutos son de color verde oscuro a marrón y son ovoides y cubiertos con lana perenne y espinas.

Es una especie sujeta a protección especial, por la SEMARNAT Norma Oficial Mexicana 059 [6]. (NORMA Oficial Mexicana NOM-059-SEMARNAT-2010, Protección ambiental-Especies nativas de México de flora y fauna silvestres-Categorías de riesgo y especificaciones para su inclusión, exclusión o cambio-Lista de especies en riesgo). Tiene una Longevidad estimada de 25 años [3]. Pertenece a la familia denominada cactácea donde también se encuentran los cactus, se dice que el desterrarlas ocasiona una pérdida a zonas desérticas ya que son plantas de muy lento crecimiento. [1]. Las especies que integran a la familia de las cactáceas son, tal vez los representantes botánicos que más caracterizan el paisaje mexicano, particularmente en las zonas áridas y semiáridas. Los rescates y replantación de cactáceas se han realizado siguiendo las metodologías que se describen a continuación: Extracción con cepellón y replantación inmediata. Extracción con cepellón, mantenimiento en vivero y replantación. Extracción sin cepellón, cicatrización y replantación [4]. Existe una asociación denominada "Cultivos Desérticos La Unión" que busca promover el cultivo y conocimiento de estas plantas mediante ejemplares propagados a partir de semillas de los más diversos géneros y especies no sólo mexicanas, sino de toda América. Debemos tomar en cuenta que cuando cultivamos en macetas o tiestos, se vuelve indispensable reponerle sus nutrientes a la tierra periódicamente, mediante el uso de fertilizantes solubles a través del riego.

En primera instancia, abordaremos el tema del riego, que aparentemente es el que más nos preocupa. La opinión más generalizada, es que debemos regar con cuentagotas, que el riego extremadamente cuidadoso, para no pasarse, debe de calcularse en cantidades mínimas, incluso a veces se aconseja el uso de un atomizador; todo esto es falso, por el contrario, no debemos calcular la cantidad de agua, debemos regar hasta saturar completamente el sustrato (tierra) de nuestra plantas, por supuesto, debemos asegurarnos de que nuestras macetas tienen una o varias drenas por donde perderán el exceso de humedad por escurrimiento, en caso contrario, cuando no existe ningún orificio o дрена en el recipiente en que se encuentra plantado nuestro cactus, debemos usar para el riego de un 15 a un 20% de agua del volumen total de tierra o sustrato en que se encuentra

establecida nuestra planta. Esto significa, que es más importante cuidar la periodicidad que la cantidad del riego, es decir que si regamos cada quince o veinte días a llenar, es más acertado que regar con muy poca agua, aunque el riego sea más seguido. De hecho, en la mayoría de los casos es aconsejable permitir períodos de sequía total de algunos días, entre un riego y otro, lo que nos dará la seguridad de que nuestra planta ya tiene sed en el momento en que la regamos.

Por otra parte, es bien sabido por los viejos coleccionistas, que el empleo de esta técnica, redundará en un ritmo de crecimiento más acelerado.

Es importante recordar que la presencia constante de humedad en el sustrato, favorece la proliferación de bacterias y la formación de hongos, los que pueden atacar directamente a la raíz, infestándola, originando su podredumbre, y eventualmente, la de la planta, que muchas veces es invadida en todo su interior sin que haya síntoma aparente, ya que la enfermedad suele respetar la epidermis, de este modo cuando ha terminado su labor destructiva, la planta parece secarse o “chuparse”. También es importante saber que no debemos regar nuestros cactus inmediatamente después de haberlos trasplantado, pues durante la operación, por más cuidadosos que seamos, lo más seguro es que siempre dañamos las raíces, sobre todo en sus partes más delgadas, donde quedan heridas expuestas, verdaderas puertas de entrada para hongos y bacterias, y si regamos de inmediato les damos la posibilidad de atacar con mucha facilidad. Por todo esto, es aconsejable trasplantar en seco y esperar unos 4 o 5 días antes del primer riego; también es indispensable, cuando las heridas de la raíz han sido importantes al sacar a la planta de su antigua maceta, dejarla a raíz desnuda en un lugar seco y fresco unos 8 o 15 días, o hasta que las heridas sanen bien antes de volverla a plantar.

Es muy importante también, la composición del sustrato. Para el cultivo óptimo, aconsejamos entre un 75 y un 80% de arena porosa, ligera como el tezontle o arena de lava, tepojal, Etc., y un 25 o 20% de tierra de la que normalmente usamos para nuestras plantas del jardín, ambos compuestos perfectamente mezclados nos dan un sustrato nutritivo y de buen drenaje. Debemos tomar en cuenta que cuando cultivamos en macetas o tiestos, se vuelve indispensable reponerle sus nutrientes a la tierra periódicamente, mediante el uso de fertilizantes solubles a través del riego.

Con esta información obtenida de cultivos la unión [2], nos permite conocer las características generales de las cactáceas y de esta forma pudimos considerar algunos de los factores que afectan al crecimiento de nuestra planta de interés, Sacazil.

El estado de Coahuila cuenta con una superficie de 14.8% destinados para la agricultura, zonas urbanas, áreas sin vegetación y presas o lagunas, el resto está cubierta por vegetación natural. [8].

Método Taguchi

Un experimento es un procedimiento mediante el cual se trata de comprobar (confirmar o verificar) una o varias hipótesis relacionadas con un determinado fenómeno, mediante la manipulación y el estudio de las variables que presumiblemente son su causa. Se utiliza para describir cualquier proceso que genere un conjunto de datos

El (DOE) se puede definir como un conjunto de técnicas estadísticas usadas para planear experimentos y analizar sus resultados de manera ordenada y eficiente.

Existen tres principios básicos a ser considerados en todo diseño y análisis de un experimento:

1.- El orden de los experimentos debe ser aleatorio. Aleatorizar el orden de las pruebas neutraliza fuentes de variación que pueden estar presentes durante el experimento. En general dichas fuentes de variación son desconocidos, y pueden ser muchos, por ejemplo, cansancio del trabajador durante la realización de las pruebas o durante la medición de estas, cambios de voltaje, cambios de humedad, etc.

2.- Es importante replicar cada experimento. La razón es obtener un estimado del error, tanto para ver qué tan bien el diseño representa al proceso, como para poder comparar los factores y determinar si son activos o no. Se define como replica genuina la obtenida en una sola prueba o medición para cada combinación de los factores, y repetir dichas condiciones para cada replica adicional, en lugar de tomar varias muestras o mediciones de una vez en cada combinación. Lo opuesto a las replicas genuinas son las repeticiones. Por supuesto las replicas genuinas implican un mayor tiempo al realizar pruebas y un costo mayor, pero es la mejor manera de obtener un estimado más preciso.

3.- Ocasionalmente pueden existir variables presentes en un experimento, cuyo efecto no se desea probar y que incluso pueden afectar o encubrir la influencia de las variables con las que se desea experimentar.

Pasos para la experimentación:

- Definir el problema
- Seleccionar la variable de respuesta
- Verificar el estado de las maquinas en donde se va a experimentar
- Verificar la capacidad y estabilidad de los instrumentos de medición
- Seleccionar las variables a experimentar y sus niveles
- Determinar el tipo de diseño a usar y el número de replicas
- Realizar las pruebas aleatoriamente
- Analizar los resultados
- Conclusión

Factores o variables

Son dimensiones medibles en una escala continua. Por ejemplo, presión, voltaje, temperatura, diámetro, peso, etc.

Los niveles de una variable son los valores en los cuales se experimentará con esta.

Sin embargo, también variables cualitativas proveedor, operador, etc.

Elementos del método Taguchi

Los arreglos ortogonales (AO) son matrices de diseño que indican el número de pruebas y las combinaciones de las variables y sus niveles en dichas pruebas. Los AO representan una fracción del total de experimentos por realizar, de acuerdo con el número de variables y sus niveles. Por ello, la utilización de los AO reduce el costo y el tiempo de la experimentación. Los AO son diseños fraccionados.

La mayoría de los AO están asociados a una o varias gráficas lineales que indican la ubicación de las variables y sus interacciones dentro del AO seleccionado. [9]

Para hacer una selección de arreglos ortogonales se requiere:

1. Escoger el AO considerando que cada columna de un arreglo con dos niveles puede alojar a una variable con dos niveles, o a una interacción formado por variables de dos niveles. En el caso de arreglos de tres niveles, se necesitarán dos columnas para contener a una interacción formada por variables con tres niveles.
2. Dibujar la gráfica requerida
3. Buscar una gráfica lineal que se adapte a la gráfica requerida
4. Asignar las variables del arreglo [9]

Un arreglo ortogonal se puede comparar con una replicación factorial fraccionada, de manera que conserva el concepto de ortogonalidad y contrastes. Un experimento factorial fraccionado es también un arreglo ortogonal. Taguchi desarrolló una serie de arreglos particulares que denominó: $L_n(a^k)$ La (b)C donde: n= representa el número de pruebas (renglones), k= esto es el número de columnas o condiciones experimentales (factores). a= Representa los diferentes niveles a los que se tomará cada factor [10].

PARTE EXPERIMENTAL

El tipo de investigación con respecto al periodo de recopilación será prospectivo, Con el fenómeno estudiado lo clasificamos como longitudinal, ya que las variables se medirán en varias ocasiones para obtener resultados acerca del crecimiento de la planta. Experimental, aplicamos diseños de experimento de 3 factores 2 niveles, para saber que variables afectan al cultivo de la planta y encontrar la opción óptima para su cultivo.

La población es la planta *Echinocereus poselgeri* (sacazil) de la familia cactácea en la Región Carbonífera. La muestra fue de 12 plantas que se utilizaron para el diseño de experimento (4 plantas en la etapa 1 y 8 plantas en la etapa 2).

Las plantas fueron recolectadas en un rancho ubicado en el Municipio de Múzquiz, Coahuila.

El instrumento que utilizamos para realizar la recopilación de datos es una hoja de verificación para el diseño de experimento, donde se anotaron las dimensiones de la de altura en centímetros y grosor, su color inicial, posteriormente cada semana se registraban los progresos de la planta hasta completar un periodo de dos meses y agregar la medición del crecimiento de la raíz.

Para llevar a cabo el experimento se realizaron dos etapas, en la primera etapa se utilizó una muestra de 4 plantas para el diseño del experimento las variables manipuladas y sus resultados se muestran en la Tabla 1 el monitoreo de las observaciones.

Corrida	Tipo de tierra	Localización	Frecuencia de riego	Resultados	
				Altura	Raíz
1	Planta	Sombra	3 días	4.3	3
2	Planta	Sol	7 días	0.7	4
3	Mixta	Sombra	7 días	4.5	1
4	Mixta	Sol	3 días	10.5	6

Tabla 1. Diseño de experimentos etapa 1

En la segunda etapa se utilizó una muestra de 8 plantas para el diseño de experimento tres factores 2 niveles y 2 réplicas para cada corrida como se muestra en la Tabla 2 incluyendo sus resultados. Las variables de salida en ambas etapas se midió la altura de la planta y la raíz en centímetros, se tuvo un periodo de observación de dos meses para cada experimento en forma consecutiva. En la segunda etapa se observó la existencia de la raíz secundaria (tuberosa o bulbo), realizando una medición de esta.

Corrida	Localización	Forma	Tipo de tierra	Resultados			
				Altura	Raíz	Altura	Raíz
1	Maceta	Acompañada	P/planta	1.5	1.2	0.7	0.6
2	Maceta	Individual	Monte	1.4	0.9	0.9	0.5
3	Suelo	Acompañada	Monte	1.2	1.6	2.0	1.6
4	Suelo	Individual	P/planta	1.2	1.1	1.3	1.0

Tabla 2. Diseño de experimentos etapa 1

RESULTADOS

En la Etapa 1 en base al crecimiento de la planta el factor más fuerte es tipo de tierra se recomienda una tierra mixta, seguida de una frecuencia de riego cada 3 días, la localización de la planta es más recomendable en el sol, aunque la variación no es mucha como se muestra en la Tabla 3 y se visualiza en la Figura 1.

Etapa 1 resultado de las medias de crecimiento de la panta en centímetros			
Nivel	Tipo de Tierra	Localización	Frecuencia de riego en días
1	2.5	4.4	7.4
2	7.5	5.6	2.6
Delta	5.0	1.2	4.8
Clasificador	1	3	2

Tabla 3. Respuestas de la etapa 1 crecimiento de la planta

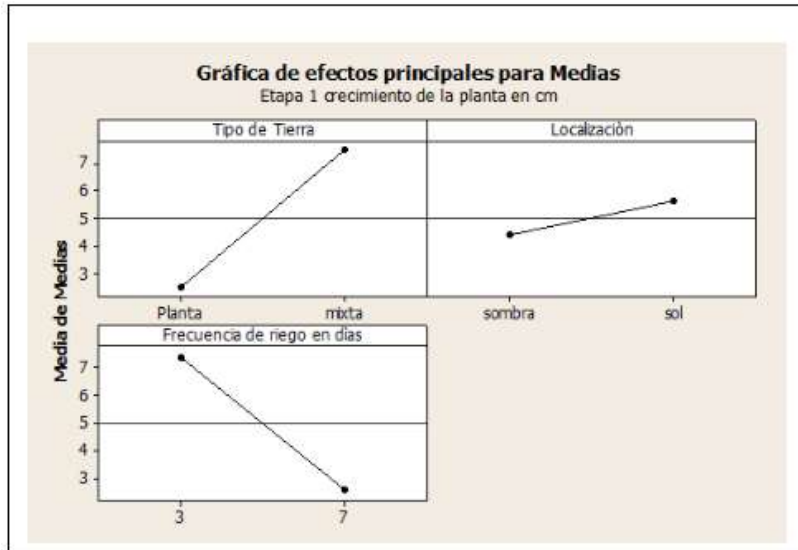


Figura 1. Efectos principales de medias etapa 1 crecimiento de la planta.

En el crecimiento de la raíz el factor más fuerte la localización, seguida de una frecuencia de riego cada 3 días, la localización de la planta es más recomendable en el sol, y ninguna variación en el tipo de tierra, como se muestra en la Tabla 4 y se visualiza en la Figura 2.

Nivel	Tipo de Tierra	Localización	Frecuencia de riego en días
1	3.5	2.0	4.5
2	3.5	5.0	2.5
Delta	0	3.0	2.0
Clasificador	3	1	2

Tabla 4. Respuestas de la etapa 1 crecimiento de la raíz

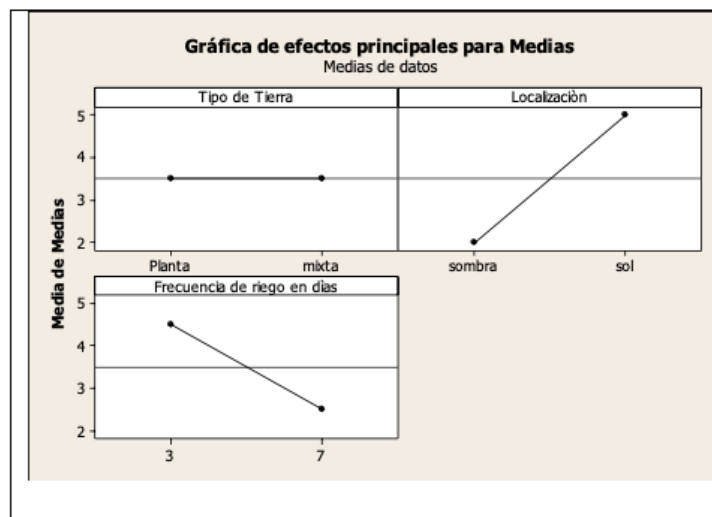


Figura 2. Efectos principales de medias etapa 1 crecimiento de la raíz

En la etapa 2 en base al crecimiento de la planta el factor más fuerte “forma” se recomienda que la planta este acompañada, se recomienda la siembra en suelo y con tierra de monte como se muestra en la Tabla 5 y se visualiza en la Figura 3.

Etapa 2 resultado de las medias de crecimiento de la panta en centímetros			
Nivel	Localización	Forma	Tipo de Tierra
1	1.25	1.375	1.250
2	1.275	1.150	1.275
Delta	0.025	0.225	.025
Clasificador	2.5	1	2.5

Tabla 5. Respuestas de la etapa 2 crecimiento de la planta

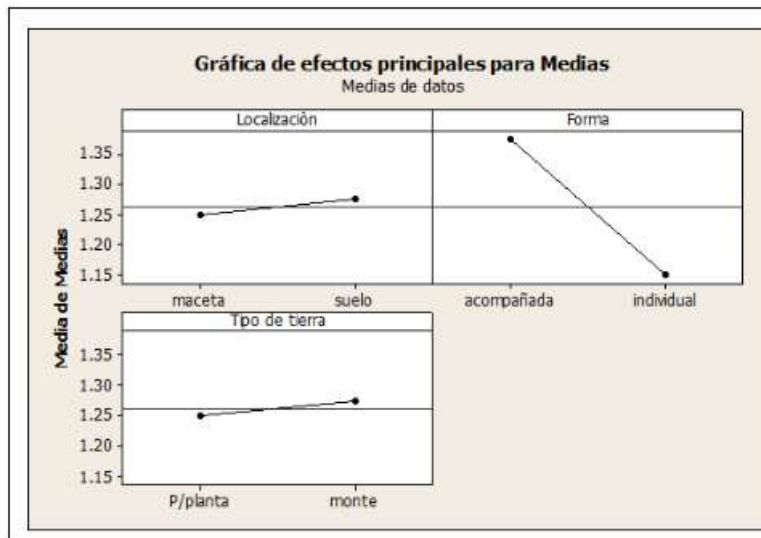


Figura 3. Efectos principales de medias etapa 2 crecimiento de la planta

En la etapa 2 en base al crecimiento de la raíz el factor más fuerte la localización se sugiere sembrar en suelo, el tipo de tierra de monte y sembrarse acompañada como se muestra en la Tabla 6 y se visualiza en la Figura 4

Etapa 2 resultado de las medias de crecimiento de la raíz en centímetros			
Nivel	Localización	Forma	Tipo de Tierra
1	0.6750	1.2250	0.900
2	1.4750	0.925	1.25
Delta	.800	0.30	0.35
Clasificador	1	3	2

Tabla 6. Respuestas de la etapa 2 crecimiento de la raíz

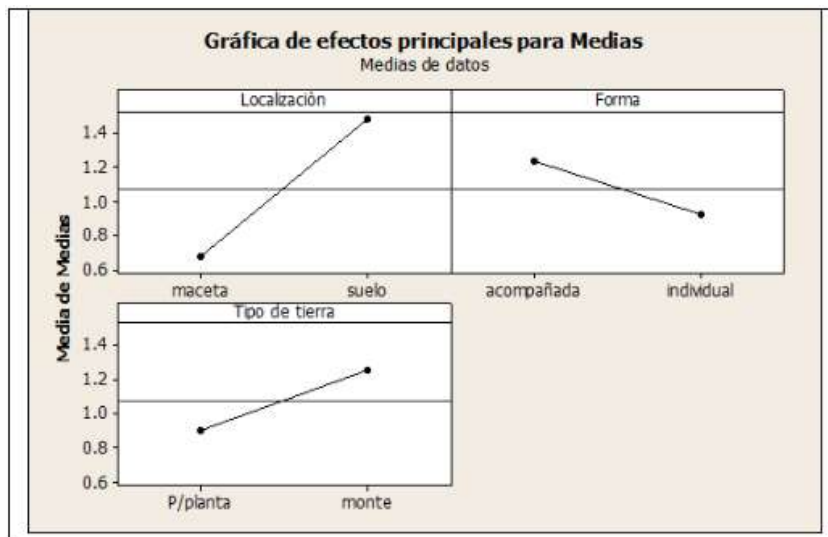


Figura 4. Efectos principales de medias etapa 2 crecimiento de la raíz

En el análisis de varianza de la etapa 2 en relación con el crecimiento de la raíz como lo indica en la tabla 7 el factor localización estadísticamente es diferente

Fuente	GL	SC Sec	SC ajust	CM ajust	F	P
Localización	1	1.28000	1.28000	1.28000	24.38	0.008
Forma	1	0.18000	0.18000	0.18000	3.43	0.138
Tipo de tierra	1	0.24500	0.24500	0.24500	4.67	0.097
Error	4	0.21000	0.21000	0.05250		
Total	7	1.91500				
S = 0.229129 R-cuad. = 89.03% R-cuad.(ajustado) = 80.81						

Tabla 7. Etapa 2 Análisis de varianza de crecimiento de la raíz

CONCLUSIONES

Podemos concluir que, en la primera etapa de experimentación, las condiciones ideales para el crecimiento en centímetros de la Planta Sacazil y de la raíz fueron: El tipo de tierra debe ser mixta, se debe localizar en sol y la frecuencia de riego es cada 3 días. Se continuó con el experimento en una segunda etapa, ya que en la investigación documental se observó que esta planta crece acompañada, y se llevó a cabo otro experimento midiendo otras variables de entrada para por dos meses y se encontró que las condiciones ideales para el crecimiento en cm de la planta y del bulbo fueron las mismas: debe estar localizada en el suelo, debe estar acompañada de otra planta y se debe utilizar tierra de monte; para el crecimiento de la raíz. En esta etapa se llevó a cabo un Análisis de varianza de tres factores y dos niveles para determinar si hay variación en el efecto de salida que es altura de la planta y longitud de la raíz en el cual se obtuvo que con un nivel de confianza del 95% que el factor que estadísticamente afecta es que es recomendable sembrar en el suelo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ambiental, R. T. (01 de septiembre de 2001). Cultivo de cactáceas, opción sustentable para luchar contra saqueo. Obtenido de TEOREMA AMBIENTAL: <http://www.teorema.com.mx/cienciaytecnologia/cultivo-de-cactaceas-opcion-sustentable-para-luchar-contra-saqueo/>

2. Unión, C. d. (2018). Consejos para el Cultivo. Obtenido de <http://www.cactuslaunion.com/consejos-para-el-cultivo>
3. Poselgeri, S. E. (2013). NaturaLista. Obtenido de Natura Lista: <http://www.naturalista.mx/taxa/162185-Echinocereus-poselgeri>
4. Reyes, M. N. (23 de agosto de 2001). Rescate de cactáceas en Líneas de Transmisión eléctricas en el noreste. San Nicolás de los Garza: Facultad de Ciencias Biológicas.
5. Sánchez, C. D. (agosto de 2015). Tesis. Sistemática Filogenética de Echinocereu. México D.F., México: UNAM POSGRADO en ciencias biológica.
6. SEMARNAT, P. F. (12 de septiembre de 2016). NORMA OFICIAL MEXICANA NOM-059-SEMARNAT-2010.
7. Ulises Guzmán, S. A. (2007). Catálogo de cactáceas Mexicanas . México: UNAM Y CONABIO.
8. Gunter W.Erfurth / Rodolfo Hernández Vélez; Las Cactáceas de Coahuila. 2016
9. Escalante Edgardo J., Seis sigma-Metodología y Tecnicas. Limusa 2005. Capitulo 9
10. <https://www.coursehero.com/file/54729725/g-taguchidocx/>

GENERACIÓN DE SUPERCONTINUO EN FIBRAS DE CRISTAL FOTÓNICO USANDO NOISE-LIKE PULSES Y PULSOS ULTRACORTOS

J.P. Lauterio-Cruz^{1,*}, H.E. Ibarra-Villalon², Y.E. Bracamontes-Rodriguez³
J.C. Hernandez-Garcia^{4,5}, H. Rostro-González⁴, A. Gomez-Vieyra², O. Pottiez³

¹División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato, León, Gto. 37150, México

²Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Azcapotzalco, CDMX. 02200 México, ³Centro de Investigaciones en Óptica (CIO), León, Gto. 37150, México,

⁴Departamento de Electrónica DICIS, Universidad de Guanajuato, Salamanca, Gto. 36885, México,

⁵Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Av. Insurgentes Sur 1582, CDMX 03940, México,

*jplauterio@hotmail.com

RESUMEN

En este trabajo, simulamos generación de supercontinuo (supercontinuum generation, SCG), centrada a 800 nm, en dos diferentes fibras de cristal fotónico (photonic crystal fibers, PCFs) de 10 cm de largo, comparando el rendimiento de pulsos de ruido (noise-like pulses, NLPs) y pulsos ultracortos (ultrashort pulses, USPs) como bombeo. Espectros lisos y uniformes se lograron utilizando NLPs; por el contrario, se obtuvieron espectros que exhibían poca planicidad y fuertes fluctuaciones de alrededor de 20 dB usando USPs como bombeo.

INTRODUCCIÓN

La generación de supercontinuo (supercontinuum generation, SCG) [1] es el proceso donde las señales ópticas sufren un ensanchamiento espectral extremo debido a la combinación e interacción de varios fenómenos ópticos no lineales. Para producir luz SC se pueden propagar diferentes tipos de pulsos en diversos medios no lineales. Y aunque los pulsos ultracortos (ultrashort pulses, USPs) son los más utilizados (Fig. 1(a)), los pulsos ópticos extravagantes llamados pulsos de ruido (noise-like pulses, NLPs) [2] han atraído mucha atención debido a sus múltiples aplicaciones potenciales (sensado, micromaquinado, tomografía de coherencia óptica (OCT), microscopía), incluyendo SCG. Experimentalmente, los NLPs son paquetes de onda del orden de los nanosegundos (ns), formados por miles de subpulsos internos (fs-ps), producidos en láseres de fibra de amarre de modos pasivo; en este trabajo el paquete principal se limitó a 100 ps (Fig. 1(b)). Por otra parte, debido a que las PCFs han demostrado ser excelentes medios no lineales para la ampliación espectral, comparamos el rendimiento de NLPs y USPs como bombeo en dos piezas de PCF de 10 cm de largo: PCF1 y PCF2 [3].

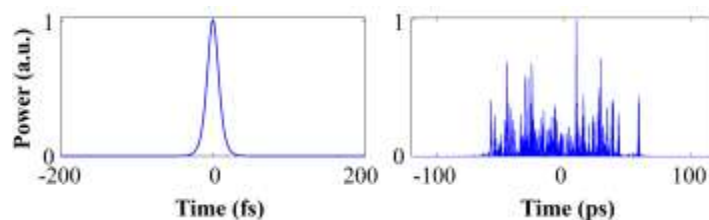


Fig. 1. Perfil temporal de los pulsos: (a) USP, (b) single-shot NLP.

MODELO DEL LÁSER NUMÉRICO

La Fig. 2 muestra un modelo de láser de fibra en figura ocho (figure-eight láser, F8L) desarrollado para producir NLPs a 800 nm, usando fibra dopada con tulio (thulium doped fiber, TDF). La cavidad láser de 32 m está formada por un anillo a la izquierda y un NOLM (nonlinear optical loop mirror) a derecha. Para simular la propagación de la luz en la cavidad, se emplearon las ecuaciones de Schrödinger no lineales extendidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^+}{\partial z} = & -\frac{\Delta\beta_1}{2} \frac{\partial C^+}{\partial t} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 C^+}{\partial t^2} + \frac{g}{2} C^+ + \frac{2}{3} i \gamma (|C^+|^2 + 2|C^-|^2) C^+ \\ & - i \gamma \tau_R \left[\frac{1+\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial t} (|C^+|^2 + |C^-|^2) C^+ + (1-\alpha) \frac{\partial}{\partial t} [\text{Re}(C^+ C^{-*})] C^- \right], \\ \frac{\partial C^-}{\partial z} = & \frac{\Delta\beta_1}{2} \frac{\partial C^-}{\partial t} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 C^-}{\partial t^2} + \frac{g}{2} C^- + \frac{2}{3} i \gamma (|C^-|^2 + 2|C^+|^2) C^- \\ & - i \gamma \tau_R \left[\frac{1+\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial t} (|C^+|^2 + |C^-|^2) C^- + (1-\alpha) \frac{\partial}{\partial t} [\text{Re}(C^+ C^{-*})] C^+ \right]. \end{aligned} \tag{1}$$

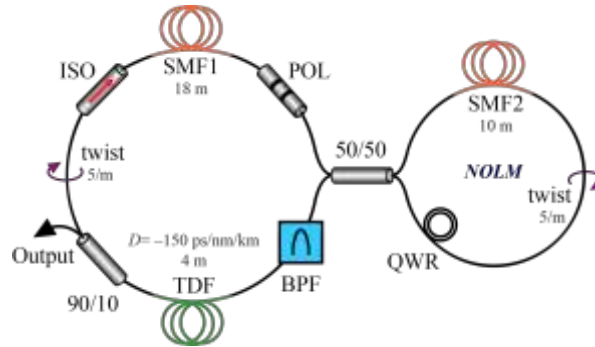


Fig. 2. Modelo numérico del láser de figura ocho (F8L).

RESULTADOS

Promediando los espectros de 500 NLPs se obtuvieron curvas suaves similares a las que se obtienen experimentalmente [3]. Usando la PCF1 (PCF con coeficiente no lineal “moderado”: $\gamma = 113.3 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$, al amplificar los NLPs a sólo 50 W, logrando un amplio espectro de más de 385 nm (70 nm a 3 dB); la gráfica de densidad espectral respecto a la longitud de la fibra se muestra en la Fig. 3(a). A modo de comparación, se lanzaron USPs de perfil secante hiperbólica cuadrada (sech^2) sin chirp (20 fs FWHM; ancho de banda de 8 nm a 3 dB) en la misma PCF1. Para generar un espectro de extensión similar (325 nm; 43 nm a 3 dB) fue necesaria una potencia de pico de entrada de hasta 1000 W; no obstante, se obtuvo una estructura muy fluctuante con caídas de más de 19 dB a 829 nm, como se muestra en la Fig. 3(b).

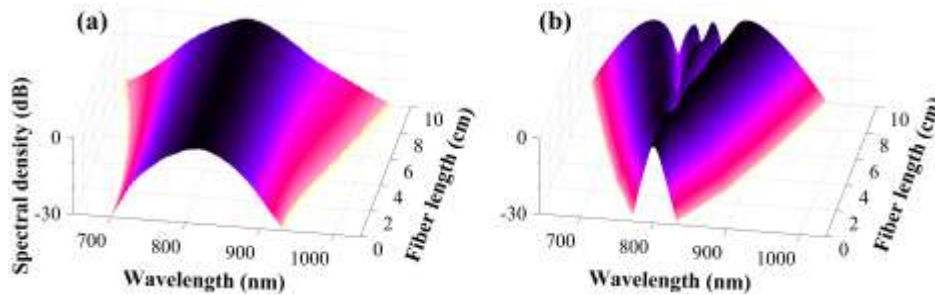


Fig. 3. Densidad espectral de PCF1 (0–10 cm) propagando (a) NLPs a 50 W y (b) USPs a 1 kW.

Con la PCF2 (PCF con coeficiente no lineal muy alto: $\gamma = 1920 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$), sólo 4 W de potencia máxima se requirieron usando los NLPs para producir un espectro amplio y bastante suave (280 nm; 57 nm a 3 dB), como se muestra en la Fig. 4(a). Usando USPs, se requirió una potencia máxima de 50 W para producir un espectro de 292 nm (40 nm a 3 dB), pero nuevamente con fluctuaciones de

más de 16 dB (a 821 nm), como se muestra en Fig. 4(b). Estas fuertes variaciones en el espectro no son deseables al momento de desarrollar algunas aplicaciones.

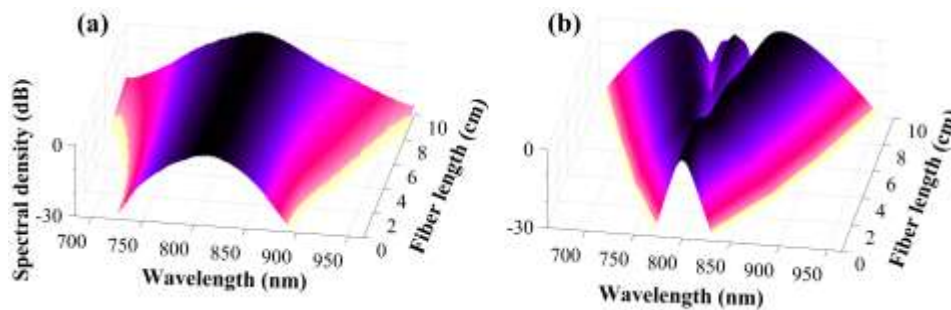


Fig. 4. Densidad espectral de PCF2 (0–10 cm) propagando (a) NLPs a 4 W y (b) USPs a 50 W.

CONCLUSIONES

En este trabajo simulamos SCG, centrada a 800 nm, usando dos PCFs de 10 cm de largo, y utilizando NLPs y USPs como bombeo, a manera de comparación. Para producir los NLPs, se desarrolló un modelo de F8L con fibra dopada con tulio. Estos pulsos produjeron espectros anchos y suaves utilizando de entrada potencias pico moderadas (hasta 50 W), mientras que los USPs requirieron hasta 1000 W para producir espectros comparables en extensión. Para ambas PCFs, los espectros generados por NLPs mostraron un nivel bastante alto de suavidad. En cambio, ambos espectros usando USPs mostraron una estructura significativamente irregular con fluctuaciones de casi 20 dB. Espectros tan irregulares no son deseables para aplicaciones.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es apoyado por el proyecto CONACYT CB 253925 y el grant CONACYT 687612.

BIBLIOGRAFÍA

1. R.R. Alfano and S.L. Shapiro, "Emission in the Region 4000 to 7000 Å Via Four-Photon Coupling in Glass," *Phys. Rev. Lett.* 24, 584–587 (1970).
2. O. Pottiez *et al.*, in "Fiber Lasers: Recent Advances and Applications", Ch. 2. Nova Science, 2017, pp. 27–62.
3. J.P. Lauterio-Cruz, J.D. Filoteo-Razo, O.Pottiez, J.C. Hernandez-Garcia, Y.E. Bracamontes-Rodriguez, and H. Rostro-Gonzalez, "Numerical Comparative Study of Supercontinuum Generation in Photonic Crystal Fibers Using Noise-Like Pulses and Ultrashort Pulses," *IEEE Photonics J.* 11, 1–12 (2019).

ÍNDICE DE AUTORES

- Alcalá González Rubí 194
Alcalá González Guadalupe Esmeralda 194
Alcalá González Perla Mayara 194
Alva Medrano Hugo Enrique 68, 120
Aparicio Fernández María del Rayo Angeles 98
Aparicio Méndez María del Rocío 80
Aranda Sánchez Jorge Isidro 32, 171
Barradas Guevara José Enrique 80
Bramontes Rodríguez Yazmin Esmeralda 3, 132, 203
Briones Reyes Manuel de Jesús 91
Bruce Neil C. 105
Bucio Gutiérrez Alejandro 68
Calderón Rosas Norma Claudia 177
Calixto-Carrera Sergio 105
Calva Hernández David 138
Cochran Tapia Gabriela 59
Compeán Jasso Víctor Hugo 38
Concha Sánchez Yajaira 48
Corona Patricio Gabino 18
Cruz Albaro Eligio 32
Cruz Ortiz Norma Liliana 177
Dávalos Saucedo Cristian Aarón 91
De Anda Salazar Francisco Javier 38
Díaz Bautista Erik 48
Estevez Delgado Gabino 18, 59, 75
Estevez Delgado Joaquín 18, 59, 75
Félix Beltrán Olga Guadalupe 80
Flores Jorge L. 128, 187
Franco Rios Lorena 59
Galván Navarro Eric Didier 150
García Cordero Jose L. 105
García Torales Guillermo 128
Garnica Guillermo 105
Gómez Vieyra Armando 3, 132, 203
González Canales Félix Francisco 80
González Estrada Guillermo 171
González Mota Ma. Rosario 8
Gonzalez Suarez Alan 105
Gorbachev Andrei 38
Helguera Martínez María 91
Hernández García Juan Carlos 203
Hernández Romano Iván 14
Herrera Piad Luis Alejandro 14
Ibarra Villalón Hugo Enrique 3, 132, 203
Lauterio Cruz Jesús Pablo 3, 132, 203
Machuca Bautista Berenice Yanely 128
Mares Arcila Javier Humberto 111
Marrujo García Sigifredo 14
Martínez Sánchez Karla Ivonne 8
Martínez Tovar Hilda Cristina 194
May Arrijoa Daniel Alberto 14
Medina Magallon Jose Eduardo 115, 150, 163
Mejia Navarro Jesus Ivan 75
Mendoza Rojas Julio Cesar 18, 111
Mendoza Suárez Alberto 68, 115, 120, 150, 163
Minkovich Vladimir P. 14
Mishourny Vyatcheslav 38
Montaño Domínguez Javier 24, 32, 171
Montelongo Rodríguez Yazmin 194
Morales Duque Jorge Luis 194
Oliva Leyva Maurice 48
Otani Yukitoshi 187
Parra Escamilla Geliztle Alejandra 187
Pérez Aguilar Hector Igor 68, 115, 120, 150, 163
Piazza Valeria 105
Pottiez Olivier 3, 132, 203
Quezadas Vivian Brenda 24
Ramírez Zavaleta Fernando Iguazú 24, 32, 171
Raya Montaño Alfredo 48
Rivera González Saira Mariela 91
Rodríguez Cobos Amparo 38
Rosales Candelas Iliana 8
Rosete Aguilar Martha 105
Rossi Márquez Giovanna 91
Rostro González Horacio 203
Salto Alegre Cristina 150
Sánchez Ibarra Claudia 194
Sánchez López Sergio 150, 163
Sánchez Rico Tsanda 111
Sánchez Tomay Alinne Michelle 80
Serrano García David I. 128, 187
Silva Juárez Claudia Verónica 38
Solano Sosa Cristina Elizabeth 98
Soto Bernal Juan José 8
Tea Ruiz Pablo Abraham 111
Torres Cisneros Miguel 14
Torres García José De Jesús 177
Tututi Hernández Eduardo Salvador 171
Zavala Cerda Alberto 111
Zavala Morán Ulises 38
Zhevandrov Bolshakova Petr 115